



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA
DA COMPUTAÇÃO



**Otimização do cross-selling em marketplaces digitais:
Uma abordagem de programação matemática e
mateheurística para aumentar a satisfação dos
clientes e lucratividade dos fornecedores**

MESTRANDO

JOSICLEYTON AZEVEDO DOS SANTOS

ORIENTADOR

PROF. DR. FÁBIO FRANCISCO DA COSTA FONTES

COORIENTADOR

PROF. DR. DARIO JOSÉ ALOISE

MOSSORÓ-RN

2025

JOSICLEYTON AZEVEDO DOS SANTOS

**Otimização do cross-selling em marketplaces digitais:
Uma abordagem de programação matemática e
mateheurística para aumentar a satisfação dos
clientes e lucratividade dos fornecedores**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação - Associação ampla entre a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte e a Universidade Federal Rural do Semi-Árido, para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Francisco da Costa Fontes.
Coorientador: Prof. Dr. Dario José Aloise.

MOSSORÓ-RN

2025

Agradecimentos

Antes de tudo, rendo graças ao Bom Deus, que guiou, em Seu Infinito Amor, cada passo da minha trajetória até aqui. A Ele dedico este trabalho e toda a minha vida profissional, ciente de sua promessa que diz “do trabalho de tuas mãos hás de viver, serás feliz, tudo irá bem!” (Sl 127, 2). Agradeço, igualmente, à Sua Santíssima Mãe, a Virgem Maria, sob cuja proteção e amparo confio plenamente minha vida.

Aos meus pais, Josivaldo e Socorro, minha gratidão por acreditarem em mim, me apoiarem em todos os momentos e, sobretudo, por me darem o dom da vida. À minha irmã Josivânia, pela constante presença, carinho e apoio incondicional em todas as circunstâncias.

Aos demais familiares — tios, tias, primos, primas e ao meu sobrinho —, e de modo especial aos meus avôs e avós paternos e maternos, que já partiram para a eternidade junto de Deus, minha homenagem e agradecimento.

À minha noiva, Eugênia, por seu apoio constante, paciência, carinho e amor, tanto nos momentos de dificuldade quanto nas conquistas ao longo desta jornada.

A todos os docentes e profissionais da UFERSA e da UERN — sobretudo, aos que compõem o Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação (PPGCC) —, expresso meu sincero reconhecimento. Em especial, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Fábio Francisco da Costa Fontes, por sua atenção, dedicação, tempo e apoio ao longo deste trabalho, bem como ao meu coorientador, Prof. Dr. Dario José Aloise, por sua contribuição neste estudo.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio concedido para a realização deste trabalho — Código de Financiamento 001.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para mais esta etapa da minha vida — amigos, colegas, conhecidos, dentro ou fora do ambiente acadêmico. A cada um de vocês, dedico este trabalho com gratidão e apreço.

Resumo

Em *marketplaces* digitais, a satisfação do cliente e a lucratividade dos fornecedores são cruciais para o sucesso destas plataformas. Uma estratégia possível para impulsionar estes aspectos é a adoção do *cross-selling* na recomendação de produtos ou serviços complementares, que permite melhorar a experiência do cliente e aumentar o valor total da compra. Desta forma, este trabalho tem como objetivo desenvolver e implementar uma estratégia para otimização do *cross-selling* em plataformas digitais de *marketplace*. Uma revisão sistemática identificou lacunas na adaptação de modelos existentes às demandas destas plataformas, além da ausência de recomendações personalizadas. Para suprir esta necessidade, um modelo matemático de programação linear inteira binária é proposto, considerando o *lift* e a disponibilidade entre produtos ou serviços, histórico de compras e a segmentação por perfis de clientes com base em uma previsão de compras. Testes computacionais com CPLEX Concert Technology revelaram alta complexidade, indicando a necessidade de metaheurísticas ou simplificações para melhorar a eficiência. Para tanto, o trabalho também propõe uma decomposição do problema e um algoritmo mateheurístico. Os resultados indicam viabilidade, mas também evidenciam a necessidade de aprimoramentos para lidar com a complexidade do problema e melhorar a qualidade das soluções geradas.

Palavras-chave: *Cross-selling*, *Marketplaces*, Programação Linear Inteira Binária, Mateheurística.

Abstract

In digital marketplaces, customer satisfaction and supplier profitability are crucial for the success of these platforms. One possible strategy to boost these aspects is the adoption of cross-selling in the recommendation of complementary products or services, which enhances the customer experience and increases the total purchase value. Accordingly, this work aims to develop and implement a strategy for optimizing cross-selling in digital marketplace platforms. A systematic review identified gaps in the adaptation of existing models to the demands of these platforms, as well as the lack of personalized recommendations. To address this need, a binary integer linear programming model is proposed, considering lift and availability among products or services, purchase history, and customer segmentation based on purchase forecasting. Computational tests using CPLEX Concert Technology revealed high complexity, indicating the need for metaheuristics or simplifications to improve efficiency. Therefore, the work also proposes a problem decomposition and a matheuristic algorithm. The results indicate feasibility but also highlight the need for further improvements to address the problem's complexity and enhance the quality of the generated solutions.

Keywords: Cross-selling, Marketplaces, Binary Integer Linear Programming, Matheuristic.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Etapas de pesquisa	16
Figura 2 – Visão geral do procedimento de seleção dos trabalhos	27
Figura 3 – Análise de palavras-chave extraídas dos 147 trabalhos selecionados	28
Figura 4 – Quantidade de trabalhos por ano de publicações	30
Figura 5 – Quantidade de trabalhos por critérios de qualidade	32
Figura 6 – Quantidade de trabalhos por critérios de qualidade atendidos simultaneamente	33
Figura 7 – Quantidade de trabalhos por país do primeiro autor	34
Figura 8 – Quantidade de trabalhos por áreas ou setores de aplicação . . .	35
Figura 9 – Quantidade de trabalhos por técnicas ou ferramentas	36
Figura 10 – Disposição de itens comprados ou selecionados pelos clientes . .	56
Figura 11 – Exemplo de aplicação prática do modelo matemático	57
Figura 12 – Esquema do modelo proposto para a estratégia de otimização do <i>cross-selling</i> em <i>marketplaces</i> digitais	59
Figura 13 – Fluxograma do algoritmo mateheurístico para a otimização do <i>cross-selling</i> em <i>marketplaces</i> digitais pela decomposição do problema	60
Figura 14 – Exemplo de alocação de produtos ou serviços quando $n < m$. .	65
Figura 15 – Exemplo de alocação de produtos ou serviços quando $n \geq m$. .	66
Figura 16 – Exemplo de troca de itens entre dois clientes aleatórios	70
Figura 17 – Exemplo de duplicação de itens de um cliente para outro	71
Figura 18 – Exemplo de inserção de um item não escolhido em um cliente aleatório	71
Figura 19 – Exemplo de remoção de um item aleatório de um cliente	72

Lista de tabelas

Tabela 1 – Palavras-chave e seus sinônimos	23
Tabela 2 – Principais periódicos e conferências por quantidade de trabalhos	31
Tabela 3 – Visão geral dos trabalhos que utilizam modelos matemáticos com heurísticas e/ou metaheurísticas	39
Tabela 4 – Notação e variáveis do modelo	52
Tabela 5 – Exemplo de valores da matriz l_{ij} entre seis itens	54
Tabela 6 – Exemplo de valores da matriz y_{kt} entre seis clientes	55
Tabela 7 – Exemplo de valores da matriz w_{ik} entre seis itens e clientes . . .	55
Tabela 8 – Descrição das variáveis e constantes utilizadas no algoritmo MSRKSA	75
Tabela 9 – Melhores configurações de parâmetros obtidas com otimização bayesiana	84
Tabela 10 – Resultados computacionais	85

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
	1.1 Contextualização	10
	1.2 Motivação	13
	1.3 Objetivos	14
	1.4 Metodologia da pesquisa	15
	1.4.1 Questões de pesquisa	15
	1.4.2 Métodos de pesquisa	16
	1.5 Organização do Documento	17
2	REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA	18
	2.1 Revisões relacionadas	18
	2.1.1 <i>Marketplaces</i> digitais e comércio eletrônico	18
	2.1.2 Sistemas de recomendação	19
	2.1.3 Justificativa desta revisão	20
	2.2 Protocolo da Revisão Sistemática de Literatura	21
	2.2.1 Objetivos e metodologia	21
	2.2.2 Questões de pesquisa	22
	2.2.3 Estratégias de pesquisa	23
	2.2.4 Processo de seleção	24
	2.2.5 Extração de dados relevantes	25
	2.3 Resultados e discussões gerais	26
	2.3.1 Visão geral	26
	2.3.2 Quais são os anos, locais, impacto das publicações e a nacionalidade dos primeiros autores	29
	2.3.3 Quais são as áreas ou setores de aplicação	34
	2.3.4 Quais são as ferramentas e técnicas utilizadas	36
	2.4 Quais são as lacunas e oportunidades de pesquisa e desenvolvimento da otimização matemática de <i>cross- selling</i> no contexto dos <i>marketplaces</i> digitais	38

	2.4.1 Modelos matemáticos de programação linear ou não linear	38
	2.4.2 Métodos de resoluções aproximadas	42
	2.4.3 Trabalhos adaptados ao contexto dos <i>marketplaces</i> digitais	43
	2.5 Perspectivas e direções de pesquisa	43
3	MODELAGEM MATEMÁTICA	46
	3.1 Introdução	46
	3.1.1 Problema Quadrático de Atribuição	46
	3.1.2 Modelo Matemático de Ryu <i>et al.</i> (2021)	47
	3.2 Descrição do modelo proposto	48
	3.3 Solução ilustrativa	54
4	MATEHEURÍSTICA	58
	4.1 Introdução	58
	4.2 <i>Simulated Annealing</i>	60
	4.3 Solução inicial	62
	4.3.1 Random-Key Optimizer	62
	4.3.2 Gerando solução inicial para compra ou seleção de itens	64
	4.3.3 Função <i>generateSolution</i>	67
	4.4 Estruturas de vizinhança	69
	4.4.1 Trocar itens de dois clientes escolhidos aleatoriamente .	70
	4.4.2 Duplicar um item de um cliente em outro	70
	4.4.3 Inserir um item não escolhido em um cliente aleatório . .	71
	4.4.4 Remover um item aleatório de um cliente	72
	4.4.5 Função <i>generateNeighborSolution</i>	72
	4.5 Algoritmo MSRKSA para otimização do <i>cross-selling</i> em <i>marketplaces</i> digitais	75
5	TESTES COMPUTACIONAIS	80
	5.1 Introdução	80
	5.2 Calibração dos Parâmetros	81
	5.3 Resultados e discussões	84
6	CONCLUSÕES	90

REFERÊNCIAS	93
APÊNDICE A – INSTÂNCIAS	120
APÊNDICE B – RESULTADOS DO MÉTODO EXATO . .	121

1 Introdução

Nesta introdução, apresenta-se a contextualização, motivação, objetivos, metodologia e organização do documento que sustentaram este trabalho de pesquisa. Estas seções ajudam a situar o leitor em relação ao assunto abordado neste trabalho e às questões que serão exploradas.

1.1 Contextualização

A rápida evolução da digitalização e das tecnologias emergentes se tornou uma peça fundamental na moldagem das economias globais, especialmente durante a crise epidemiológica da Covid-19 (GALHOTRA; DEWAN, 2020). Estas tecnologias possibilitaram a continuidade das atividades sociais e profissionais por meio do acesso à *internet* (CHEBA *et al.*, 2021). A economia global, assim, testemunhou uma transformação significativa em direção à digitalização (CHEN *et al.*, 2022; UMAR *et al.*, 2022). Enquanto estudiosos já demonstravam interesse em mercados habilitados para a *internet* desde a década de 1990 (BAKOS, 1998; ORDANINI; POL, 2001; BRUNN *et al.*, 2002), a literatura existente, inicialmente, voltava-se predominantemente para mercados *business-to-business*, destacando sua utilidade para compras e abastecimentos eficientes dentro de configurações estabelecidas do setor (CHOUDHURY *et al.*, 1998; DAI; KAUFFMAN, 2001; GIAGLIS *et al.*, 2002). Contudo, os recentes avanços tecnológicos, como novos algoritmos de busca e correspondência, além da ampla difusão de dispositivos móveis, proporcionaram o surgimento de novos modelos de negócios, sobretudo, baseados em plataformas digitais (TÄUSCHER; LAUDIEN, 2018).

Entre estes modelos, os *marketplaces* digitais se destacam como uma categoria de plataformas em rápido crescimento, visando facilitar transações entre participantes independentes da oferta e demanda, reunindo clientes e fornecedores em um mesmo ambiente (GAWER, 2014; MCINTYRE; SRINIVASAN, 2017). O comércio eletrônico, impulsionado por mercados inovadores e em rápida expansão, possibilita o aumento da eficiência operacional e a produtividade das empresas

(KENNEY; ZYSMAN, 2016; PARKER *et al.*, 2016; GAJEWSKA *et al.*, 2020). Esse crescimento se traduz em taxas exponenciais, frequentemente superiores a dois dígitos na maioria dos países desenvolvidos (VIU-ROIG; ALVAREZ-PALAU, 2020). Esse cenário está diretamente associado aos efeitos de rede entre oferta e demanda, fazendo com que os *marketplaces* se destaquem pelo rápido crescimento e pelo potencial de dominar mercados devido à dinâmica competitiva desses ambientes (HAGIU; WRIGHT, 2015).

No setor de varejo (WAGNER *et al.*, 2020; NISAR; PRABHAKAR, 2017), os consumidores acessam uma variedade de produtos, desde moda (ESCOBAR-RODRÍGUEZ; BONSON-FERNÁNDEZ, 2017) a eletrônicos (DUCH-BROWN *et al.*, 2017). Plataformas de *business-to-business* e *business-to-consumer* (HAMAD *et al.*, 2018; WANG *et al.*, 2020) conectam compradores e vendedores globalmente. Serviços *online* (GAJEWSKA *et al.*, 2020; SHARMA; LIJUAN, 2015), como educação e consultoria, ampliam a oferta além de bens tangíveis, moldando o cenário digital de entretenimento e aprendizado. Serviços de viagens e turismo (CAO; YANG, 2016; PATHMANATHAN *et al.*, 2021) simplificam diversos procedimentos burocráticos. Até setores mais específicos, como agricultura (ZHU *et al.*, 2021), *livestreaming* (HU; CHAUDHRY, 2020) e sustentabilidade (OLÁH *et al.*, 2018), destacam a versatilidade destas plataformas digitais e seu papel na modernização e inovação, alinhando-se aos desafios e tendências contemporâneas.

Apesar disto, a implementação efetiva de *marketplaces* em ambientes digitais enfrenta desafios complexos relacionados à qualidade dos produtos ou serviços, usabilidade de *sites*, *design*, capacidade de resposta ou questões de segurança. Superar obstáculos, como competição entre vendedores e gestão da reputação *online*, é essencial para garantir a satisfação e fidelidade dos consumidores, bem como preservar o valor dos produtos ou serviços (TZAVLOPOULOS *et al.*, 2019; ASLAM *et al.*, 2020; WANG; NG, 2020).

Neste sentido, uma possível saída na superação de obstáculos, como a fidelização do cliente, é a adoção do *cross-selling* (em português, venda cruzada) como estratégia de *marketing* dentro destes ambientes (CHEN *et al.*, 2008; KUBIAK; WEICHBROTH, 2010; KOCAS *et al.*, 2018). Trata-se de oferecer produtos ou serviços complementares relacionados ao que o cliente já adquiriu ou pretende

adquirir (ANAND *et al.*, 1998; KNOTT *et al.*, 2002; AKÇURA; SRINIVASAN, 2005; JAROSZEWICZ, 2008; RAPP *et al.*, 2015). Portanto, esta abordagem visa maximizar o valor da transação, proporcionando benefícios tanto para empresas ou fornecedores quanto para consumidores (LI *et al.*, 2011; SCHMITZ *et al.*, 2014). A importância desta estratégia reside na ampliação das oportunidades de vendas e no aumento da receita, já que os clientes, ao serem apresentados a produtos ou serviços similares, podem ser incentivados a comprar mais, aumentando assim a sua fidelidade e melhorando o seu relacionamento com a empresa ou plataforma (KAMAKURA *et al.*, 2003; KAMAKURA, 2008).

Além disso, o *cross-selling* pode desempenhar um papel fundamental em sistemas de recomendação, permitindo que as empresas segmentem clientes e ofereçam produtos ou serviços que melhor atendam às suas necessidades (PATHAK *et al.*, 2010; HELL *et al.*, 2020; GHOSHAL *et al.*, 2021). Por um lado, é possível identificar padrões entre consumidores com perfis semelhantes por meio da coleta e análise de diversos fatores. Entre eles, destacam-se fatores demográficos, como idade, gênero, renda e ocupação; fatores geográficos, como país, estado, cidade e bairro; e critérios comportamentais, como histórico de compras, padrões de navegação *online* e engajamento em campanhas de *marketing* (LAU *et al.*, 2004; COOIL *et al.*, 2008; GURVICH *et al.*, 2009; SARI *et al.*, 2016). Por outro lado, ao reconhecer grupos de clientes com características similares, torna-se viável recomendar a um consumidor produtos ou serviços frequentemente adquiridos por outros clientes com o mesmo perfil, incentivando novas compras e ampliando a relevância das ofertas.

A aplicabilidade do *cross-selling* é vasta e abrange diversos setores, desde varejo (KUMAR *et al.*, 2008; WONG *et al.*, 2012; XU *et al.*, 2023), gestão de negócios (LEE *et al.*, 2013; WANG; ARCHER, 2007) e até serviços financeiros (KAISHEV *et al.*, 2013; GUELMAN *et al.*, 2014). No varejo, é comum oferecer acessórios ou produtos adicionais que complementem a compra original. Já nos serviços financeiros, clientes que adquirem um cartão de crédito, por exemplo, podem ser apresentados a opções de seguros ou investimentos. A personalização e o entendimento das necessidades do cliente são essenciais para uma experiência mais satisfatória, fortalecendo a fidelidade à marca (CHEN *et al.*, 2006).

1.2 Motivação

Embora a adoção do *cross-selling* apresente inegáveis vantagens, sua implementação enfrenta desafios significativos (GÜNEŞ *et al.*, 2010). A percepção plena do seu potencial não é uma tarefa fácil e, muitas vezes, os resultados obtidos não atendem às expectativas, principalmente devido à avaliação da força de vendas (SCHMITZ, 2013; SCHMITZ *et al.*, 2014). Além disso, o uso excessivo de abordagens mal sucedidas na recomendação aos clientes também contribui para este cenário desafiador (ZHANG *et al.*, 2018). Tais circunstâncias revelam a necessidade de estratégias que tornem esta implementação bem-sucedida, a fim de maximizar seu impacto positivo nas vendas e satisfação dos clientes.

Para tanto, a otimização matemática abrange diversas técnicas para melhorar processos e solucionar problemas de forma eficiente (PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998; KORTE *et al.*, 2011). Seu objetivo fundamental é maximizar ou minimizar uma função sujeita a restrições específicas (RARDIN; RARDIN, 1998; TAHA, 2007), modelando problemas através de técnicas, como as programações linear (VANDERBEI, 2014), inteira ou mista (VIELMA, 2015; WOLSEY, 2020), não linear (LUENBERGER; YE, 1984), multicritério e multiobjetivo (ULUNGU; TEGHEM, 1994), proporcionando uma estrutura sólida para encontrar soluções eficientes. Aplicações eficazes destas técnicas em áreas como logística, finanças, manufatura e telecomunicações tem proporcionado impactos sociais, econômicos e organizacionais significativos, como eficiência operacional, redução de custos e melhorias na tomada de decisões (HILLIER, 2001; WINSTON, 2004).

Métodos de resolução, como *simplex* (BORGWARDT, 2012), *branch and bound* (LAWLER; WOOD, 1966), programação dinâmica (BELLMAN, 1966) e relaxação lagrangeana (FISHER, 1981), desempenham um papel fundamental, oferecendo soluções para desafios complexos, como planejamento de rotas (BEKTAS, 2006; FONTES; GONCALVES, 2015; BAST *et al.*, 2016), roteamento de veículos (TOTH; VIGO, 2002; GOEL; GRUHN, 2008), alocação de recursos (KATOH; IBARAKI, 1998; PATRIKSSON, 2008), escalonamento da produção (POCHET; WOLSEY, 2006; ASKARI-NASAB *et al.*, 2011) e problemas de empacotamento (CORREIA *et al.*, 2008; PAQUAY *et al.*, 2016).

Além disso, a otimização matemática emprega algoritmos aproximativos para problemas em que a solução ótima é computacionalmente inviável em tempo razoável (JOHNSON, 1973; WILLIAMSON; SHMOYS, 2011; HROMKOVIČ, 2013). Suas principais subclasses são: algoritmos de aproximação, que garantem qualidade da solução e limites de tempo de execução; e algoritmos heurísticos, que buscam soluções satisfatórias para problemas de grande escala, sem garantias formais de precisão (GONZALEZ, 2007; TALBI, 2009).

Paralelamente, as metaheurísticas ganham relevância em cenários mais flexíveis, em que não há necessidade de informações detalhadas sobre o problema, baseando-se no desenvolvimento de heurísticas específicas (BLUM; ROLI, 2003; LUKE, 2009). *Genetic algorithms* (HOLLAND, 1975), *particle swarm optimization* (KENNEDY; EBERHART, 1995), *tabu search* (GLOVER, 1989; GLOVER, 1990), *ant colony optimization* (COLORNI *et al.*, 1991; DORIGO, 1992), *greedy randomized adaptive search procedure* (FEO; RESENDE, 1989), e *simulated annealing* (KIRKPATRICK *et al.*, 1983) são apenas alguns exemplos de métodos que visam encontrar soluções ótimas ou aproximadas em tempo hábil.

Neste contexto, esta pesquisa busca desenvolver e implementar uma estratégia eficaz de otimização do *cross-selling* em *marketplaces* digitais, explorando suas principais características, desafios e oportunidades, para aprimorar a satisfação do cliente e a rentabilidade das plataformas. Para isso, investiga-se a recomendação de produtos ou serviços complementares ou similares aos itens adquiridos, visando atender às necessidades e preferências dos consumidores, respeitando as características operacionais dos *marketplaces*. Além disso, ao elaborar e aplicar modelos e técnicas no campo da otimização matemática, espera-se gerar avanços tanto conceituais quanto práticos, ampliando o impacto positivo dessa estratégia e fortalecendo a fidelização dos clientes e a eficiência das plataformas digitais.

1.3 Objetivos

A presente pesquisa tem como objetivo geral: *desenvolver e implementar uma estratégia de otimização do cross-selling em plataformas digitais de marketplace*.

Já os objetivos específicos desta pesquisa incluem:

- Analisar de forma crítica os desafios e oportunidades na literatura sobre o *cross-selling* em *marketplaces* digitais;
- Formular um modelo de programação matemática, adaptado às especificidades dos *marketplaces* digitais e dos clientes;
- Desenvolver e implementar um algoritmo baseado em heurísticas e/ou metaheurísticas para aprimorar a eficiência computacional e viabilidade da estratégia proposta;
- Validar o modelo matemático e o algoritmo por meio de experimentos computacionais, com dados adaptados às características do problema;
- Avaliar a eficácia e praticidade da estratégia proposta, considerando seu impacto na experiência do cliente e na lucratividade dos fornecedores.

1.4 Metodologia da pesquisa

A metodologia deste estudo adota uma abordagem de pesquisa aplicada, com o objetivo de desenvolver e implementar uma estratégia de otimização do *cross-selling* em plataformas digitais de *marketplace*. Além disso, segue um caráter exploratório e explicativo, permitindo a compreensão e adaptação de ferramentas existentes ao contexto estudado. A pesquisa é predominantemente quantitativa, baseada na aplicação de métodos matemáticos e na análise de dados numéricos (RODRIGUES, 2007).

1.4.1 Questões de pesquisa

A fim de atender aos objetivos delineados na seção 1.3, foram formuladas questões de pesquisa que abrangem diferentes aspectos do estudo, desde a fundamentação teórica até a aplicação prática dos resultados.

Dessa forma, a questão geral de pesquisa é definida da seguinte maneira: *como desenvolver e implementar uma estratégia eficaz para aprimorar as recomendações de cross-selling em marketplaces digitais, visando potencializar a receita e a satisfação dos clientes?*

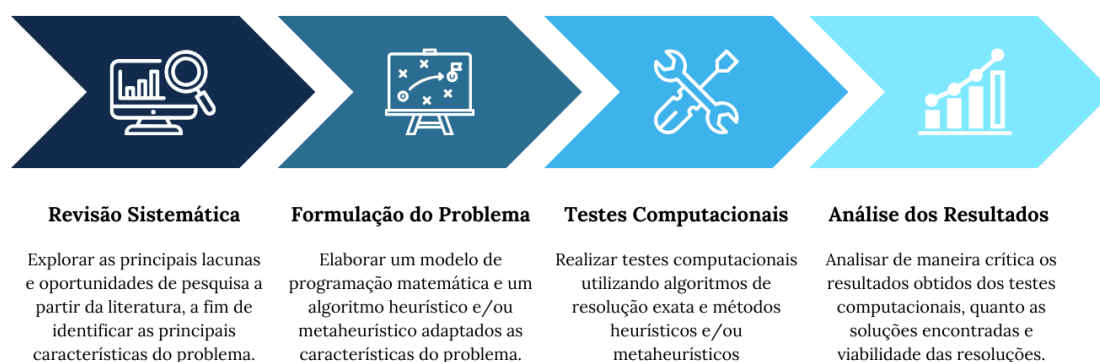
Para responder a essa questão geral, o problema foi decomposto nas seguintes questões específicas:

1. Quais são os principais desafios e lacunas na literatura sobre *cross-selling* em *marketplaces* digitais, considerando modelos de programação matemática e abordagens heurísticas e/ou metaheurísticas?
2. Quais fatores devem ser considerados no desenvolvimento e implementação de um modelo de programação matemática que otimize o *cross-selling*, levando em conta as características dos clientes e das plataformas digitais?
3. De que forma algoritmos heurísticos e/ou metaheurísticos podem contribuir para aprimorar a estratégia de otimização do *cross-selling* em *marketplaces* digitais, melhorando a eficiência computacional, sem comprometer a qualidade das recomendações?
4. Qual é a viabilidade prática da estratégia proposta em termos de desempenho computacional e aplicabilidade em cenários reais de *marketplaces* digitais?

1.4.2 Métodos de pesquisa

Para alcançar os objetivos pretendidos e responder as questões de pesquisa, a metodologia de pesquisa utilizada segue um conjunto de fases. A Figura 1 resume as etapas e os métodos de pesquisa que serão utilizados.

Figura 1 – Etapas de pesquisa



Fonte: Autoria própria (2025).

Primeiramente, será realizada uma Revisão Sistemática da Literatura para identificar as principais abordagens, oportunidades e lacunas de pesquisa existentes nas ferramentas de otimização matemática aplicadas ao *cross-selling* em *marketplaces* digitais. Com base nessa análise, serão incorporadas ao problema características relevantes que aprimorem a formulação da estratégia proposta.

Em seguida, será desenvolvida a Formulação do Problema de otimização do *cross-selling* em *marketplaces digitais*, incluindo a definição das entidades envolvidas, das constantes e das variáveis de decisão, além da formulação de restrições condizentes com as especificidades do contexto estudado. Para a resolução do problema, serão propostos tanto um modelo de programação matemática quanto um algoritmo baseado em heurísticas e/ou metaheurísticas, visando melhorar a eficiência computacional e a qualidade das recomendações.

Para validar o modelo matemático e o algoritmo desenvolvido, serão conduzidos Testes Computacionais utilizando instâncias condizentes às características do problema. Por fim, a Análise dos Resultados provenientes dos testes será feita com o objetivo de avaliar a eficácia da estratégia proposta, considerando métricas como tempo de execução e qualidade das soluções em diferentes cenários de teste. Além disso, serão identificadas possíveis limitações e oportunidades de aprimoramento para futuras pesquisas.

1.5 Organização do Documento

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta a elaboração e análise da Revisão Sistemática da Literatura, fornecendo o embasamento teórico para o problema de pesquisa. No Capítulo 3 é introduzida a proposta de um Modelo Matemático que formaliza o problema em estudo. O Capítulo 4 descreve o desenvolvimento de um algoritmo mateheurístico como abordagem de solução. Já o Capítulo 5 apresenta os resultados dos testes computacionais, comparando os resultados do algoritmo mateheurístico proposto com os resultados obtidos com o CPLEX, em que a finalidade é aferir a qualidade da mateheurística. Por fim, o Capítulo 6 encerra este trabalho com as considerações finais e sugestões para pesquisas futuras.

2 Revisão Sistemática de Literatura

Este capítulo realiza uma Revisão Sistemática de Literatura (RSL) com o objetivo de aprofundar a compreensão das técnicas de otimização matemática aplicadas ao *cross-selling* em plataformas digitais de *marketplace*. A revisão foca nas aplicações recentes, ferramentas e abordagens que integram matemática e programação, analisando contribuições, relevância e lacunas nos estudos. Busca-se, assim, consolidar o conhecimento na área e oferecer subsídios para pesquisadores e profissionais interessados em aprimorar o uso dessas técnicas no contexto digital.

2.1 Revisões relacionadas

Nesta seção, realiza-se uma breve análise de algumas revisões de literatura que abordam estratégias relacionadas aos *marketplaces* digitais, comércio eletrônico, plataformas digitais e sistemas de recomendação. Tais trabalhos pretendem consolidar o conhecimento existente sobre estes temas na literatura, identificando lacunas e orientando futuros estudos (ROWLEY; SLACK, 2004; PAUL *et al.*, 2015).

2.1.1 *Marketplaces* digitais e comércio eletrônico

Diversas pesquisas e revisões de literatura têm contribuído para uma compreensão mais profunda e ampla sobre *marketplaces* digitais e *e-commerce*. Embora os trabalhos de Ngai e Wat (2002) e Grieger (2003) tenham mais de 20 anos, eles continuam sendo referências relevantes para o entendimento histórico e conceitual destas áreas, oferecendo uma base abrangente para pesquisas em *e-commerce* e para a importância dos *marketplaces*, respectivamente.

De forma semelhante, Wang e Archer (2007) abordam a importância das definições e classificações para o avanço das pesquisas sobre *marketplaces*, destacando a necessidade de distingui-los como estruturas de governança e modelos de negócios, com ênfase em diferentes níveis de centralização. Do mesmo modo, a revisão conduzida por Wang *et al.* (2008) apresenta uma análise abrangente sobre

marketplaces, destacando os principais temas de pesquisa, metodologias utilizadas e categorias teóricas abordadas nos artigos que investigam estas plataformas.

O estudo de Wang e Chen (2010) classifica a literatura sobre *e-commerce* em categorias e examina a distribuição geográfica dos autores. Por sua vez, Standing *et al.* (2010) analisam pesquisas sobre *marketplaces* em periódicos de sistemas de informação, agrupando os estudos em categorias conceituais e apontando a necessidade de mais investigações sobre suas implicações organizacionais.

A revisão de Kumar *et al.* (2013) examina a literatura sobre estratégia de *marketing* sustentável, traçando a origem do conceito e fornecendo uma visão detalhada das tendências históricas. De forma semelhante, Haryanti e Subriadi (2020) analisam a adoção do *e-commerce*, destacando os fatores de impulso e a importância da confiança e da experiência do usuário.

Rosário e Raimundo (2021) analisam o avanço da literatura sobre *e-commerce* e sua relação com estratégias de *marketing* ao consumidor, com foco em *marketing online*, mídias sociais e eficiência de custos. De modo semelhante, Bawack *et al.* (2022) revisam estudos sobre inteligência artificial no *e-commerce*, destacando sistemas de recomendação, análise de sentimentos e personalização.

2.1.2 Sistemas de recomendação

Além disso, no contexto de estratégias de *cross-selling*, apenas a revisão de Aref *et al.* (2024) aborda diretamente o tema. O estudo focou na aplicação de técnicas de aprendizado de máquina e profundo no setor de seguros, evidenciando a transição de métodos tradicionais para abordagens mais avançadas. Apesar de sua relevância, este atual trabalho se diferencia da pesquisa de Aref *et al.* (2024) por tratar do *cross-selling* em plataformas digitais e explorar outras técnicas, especialmente ligadas à programação e otimização matemática.

Também merecem destaque revisões recentes sobre sistemas de recomendação que, direta ou indiretamente, se conectam ao *cross-selling* (PATHAK *et al.*, 2010; HELL *et al.*, 2020; GHOSHAL *et al.*, 2021). Li e Karahanna (2015) realizaram uma revisão abrangente sobre o tema, abordando compreensão do consumidor, entrega de recomendações, avaliação de impacto e personalização. Já Paris *et al.*

(2016) focaram na implementação do *e-commerce business-to-consumer*, apontando lacunas nas fases de implantação e a necessidade de estudos mais holísticos.

Alyari e Navimipour (2018) categorizaram técnicas e aplicações dos sistemas de recomendação, enquanto Murad *et al.* (2018) enfatizaram sua adaptação ao aprendizado *online*, especialmente na educação. Bhareti *et al.* (2020) revisaram algoritmos utilizados, discutindo suas vantagens e limitações, e Gupta (2020) destacaram a popularidade da filtragem de dados em múltiplas plataformas. Por fim, Palomares *et al.* (2021) abordaram recomendações recíprocas e Al-Saadi e Alzubaidi (2022), aquelas baseadas em redes sociais, ressaltando o papel dos dados sociais na qualidade das recomendações.

2.1.3 Justificativa desta revisão

Neste contexto, as revisões de literatura apresentadas nas subseções 2.1.1 e 2.1.2 reforçam a importância de estratégias relacionadas a *marketplaces* digitais, *e-commerce* e sistemas de recomendação, fornecendo informações para a personalização das interações entre empresas e clientes, o entendimento dos consumidores, a entrega de recomendações e a implementação do *e-commerce*, oferecendo orientações para futuras pesquisas e melhorias em práticas estratégicas nos *marketplaces* digitais. No entanto, a análise revela uma lacuna notável na identificação de revisões específicas sobre otimização do *cross-selling*, especialmente no contexto digital de *marketplaces*. A ausência de trabalhos dedicados a este tema destaca a necessidade de um estudo que oriente futuras investigações.

Para este fim, esta RSL se destaca por sua abordagem integrativa ao combinar conhecimentos de matemática e programação na análise de técnicas de otimização voltadas para a implementação do *cross-selling* em *marketplaces* digitais. Embora o foco principal esteja nas dinâmicas específicas dos *marketplaces*, a revisão transcende estes limites ao explorar outras áreas que também empregam estratégias que utilizam o *cross-selling*. Enquanto a ênfase recai sobre a otimização matemática por meio de modelos de programação linear ou não linear, bem como o uso de heurísticas e/ou metaheurísticas, a pesquisa não se restringe apenas a estas abordagens, buscando incorporar outras técnicas relevantes, como aprendizado de máquina e mineração de dados, que contribuem para a eficácia e melhoria da

implementação do *cross-selling*, proporcionando uma perspectiva mais ampla e explorando lacunas e oportunidades de pesquisa sobre o tema.

2.2 Protocolo da Revisão Sistemática de Literatura

Nesta seção será exposta a condução da RSL, uma abordagem metodológica empregada na identificação e seleção de trabalhos e estudos pertinentes à temática da investigação em questão (OKOLI; SCHABRAM, 2015).

2.2.1 Objetivos e metodologia

Esta RSL tem como objetivo geral: *identificar e analisar a literatura que adota técnicas de otimização para a implementação do cross-selling em plataformas digitais de marketplace*.

Para alcançar este objetivo geral, os objetivos específicos desta RSL são:

- Analisar os dados provenientes de trabalhos relevantes;
- Avaliar a importância das publicações, suas aplicações, validações e eficácia;
- Identificar tendências em áreas ou setores, bem como ferramentas e técnicas utilizadas;
- Sintetizar modelos matemáticos, heurísticas e/ou metaheurísticas para a otimização do *cross-selling*;
- Discutir lacunas e oportunidades relacionadas à otimização do *cross-selling* em *marketplaces* digitais.

Embora existam diversos tipos de revisões de literatura (TEMPLIER; PARÉ, 2015), a RSL se destaca por sua abordagem rigorosa e lógica na análise de documentos extensos, priorizando a reprodutibilidade. Este tipo de pesquisa independente fornece evidências para a tomada de decisões, detalhando protocolos específicos, bases de dados, estratégias de busca e limitações. Difere das revisões convencionais por possuir objetivos, metodologia e conclusões próprias (XIAO; WATSON, 2019).

O protocolo adotado para a realização desta RSL foi baseado no modelo metodológico proposto por Biolchini *et al.* (2005), com algumas diretrizes incorporadas do estudo de Kitchenham e Charters (2007), que estabelece procedimentos para a coleta e triagem de trabalhos definidos por critérios pré-estabelecidos.

Não foram impostas restrições temporais, mas houve ênfase em artigos de periódicos e trabalhos apresentados em conferências. Esta escolha é justificada pelo maior impacto dessas publicações na comunidade acadêmica e na sociedade. Além disso, o conselho editorial e o rigor no processo de revisão garantem maior qualidade e detalhamento nos artigos de periódicos. A metodologia adotada para definir o protocolo desta RSL consistiu em quatro etapas:

- Definição das questões de pesquisa;
- Definição das estratégias de busca e termos de pesquisa;
- Estabelecimento do processo de seleção dos trabalhos;
- Extração dos dados relevantes para responder às perguntas de pesquisa.

As subseções a seguir apresentarão os detalhes de cada uma destas etapas.

2.2.2 Questões de pesquisa

Para alcançar o objetivo desta RSL, foi definida uma questão de pesquisa geral: *quais são as soluções utilizadas para otimizar o cross-selling em marketplaces digitais?*

Para responder a esta questão geral, a RSL foi dividida em quatro subquestões de pesquisa (QP) para investigar aspectos específicos desses trabalhos:

- QP1. *Quais são os anos, locais, impacto das publicações e nacionalidade dos primeiros autores?*
- QP2. *Quais são as áreas ou setores de aplicação?*
- QP3. *Quais são as ferramentas e técnicas utilizadas?*

- QP4. *Quais são as lacunas e oportunidades de pesquisa e desenvolvimento na otimização matemática do cross-selling no contexto de marketplaces digitais?*

2.2.3 Estratégias de pesquisa

Esta subseção apresenta as estratégias de pesquisa adotadas nesta RSL, com ênfase no planejamento da busca inicial nas bases de dados.

As palavras-chave, por representarem os termos ou expressões centrais da pesquisa, desempenham um papel fundamental na identificação e seleção de estudos relevantes. A Tabela 1 apresenta as palavras-chave utilizadas, bem como seus respectivos sinônimos, em inglês.

Tabela 1 – Palavras-chave e seus sinônimos

Termos	Sinônimos
Cross-selling	Cross-sell, cross selling, cross sell.
Marketplaces	E-commerce, eletronic commerce, web commerce, e-business.
Math model	Math modeling, mathematical model, mathematical modeling.
Optimization	Optimize, optimized, optimizing.
Linear problem	Linear model, linear modeling, linear template, linearization, linearizing.
Heuristic	Heuristics, metaheuristic, metaheuristics.

Fonte: Autoria própria (2025).

De acordo com as palavras-chave e sinônimos previamente definidos, a *string* de busca foi elaborada para cada uma das bases de dados selecionadas. Optou-se por não incluir alguns termos como, por exemplo, “heuristics”, “metaheuristic” ou “metaheuristics”, pois o termo “heuristic” já contemplaria os mesmos. Isto vale para outros termos, como “mathematical”, “modeling”, “linearizing” etc. Tal mecanismo se justifica devido a algumas bases de dados possuírem limitação quanto ao número de termos ou operadores lógicos. Além disso, decidiu-se por não incluir termos como “marketplaces” e seus sinônimos, para que a pesquisa ficasse mais abrangente, abordando outras áreas e setores de aplicação.

Embora cada base tenha as suas especificidades e mecanismos de busca próprios, a sintaxe genérica da *string* de busca escolhida segue como:

(*“cross selling” OR “cross sell”*) AND (*“math” OR “model” OR “linear” OR “heuristic” OR “optimization” OR “optimizing” OR “optimize”*)

Foram examinadas oito bases de dados no decorrer desta pesquisa, a saber: ACM Digital Library¹, IEEE Xplore², Inderscience Online³, INFORMS PubsOnline⁴, MDPI⁵, Science Direct⁶, Scopus⁷, e Springer Link⁸.

Apesar da possibilidade de trabalhos duplicados, optou-se por incluir diversas bases visando ampliar a diversidade de estudos, considerando que algumas indexam apenas periódicos renomados e podem excluir contribuições relevantes. A busca foi realizada em julho de 2024, sem restrições quanto ao período de publicação, com o objetivo de cobrir um espectro amplo de informações.

2.2.4 Processo de seleção

Alinhada ao objetivo desta RSL, foi realizada uma seleção preliminar dos estudos obtidos a partir da *string* de busca nas bases selecionadas. Nessa etapa, analisaram-se os metadados principais — título, resumo e palavras-chave —, permitindo a depuração dos resultados iniciais e a exclusão de duplicatas ou estudos desalinhados aos objetivos da revisão. A fim de orientar o processo de seleção, foram estabelecidos critérios genéricos de exclusão, a saber:

- Duplicidade de trabalhos;
- Ausência de foco em estratégias de otimização do *cross-selling*;

¹ Disponível em: <<https://dl.acm.org/>>

² Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp>>

³ Disponível em: <<https://www.inderscienceonline.com/>>

⁴ Disponível em: <<https://pubsonline.informs.org/>>

⁵ Disponível em: <<https://www.mdpi.com/>>

⁶ Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/>>

⁷ Disponível em: <<https://www.scopus.com/home.uri>>

⁸ Disponível em: <<https://link.springer.com/>>

- Não publicado em revista ou conferência acadêmica (por exemplo, livro, capítulo de livro, revista ou tese);
- Publicado como revisão (por exemplo, revisão, mapeamento ou levantamento);
- Indisponibilidade em inglês;
- Indisponibilidade do texto na íntegra.

A seleção dos estudos ocorreu em duas etapas. Primeiro, com base na abordagem de leitura adaptativa de Ali *et al.* (2014), os artigos foram avaliados por dois revisores. Em seguida, realizou-se uma leitura completa com extração e verificação dos dados relevantes dos trabalhos resultantes. Trabalhos que não atendiam aos critérios estabelecidos foram excluídos, assegurando a qualidade e pertinência dos estudos incluídos na análise aprofundada.

2.2.5 Extração de dados relevantes

Por fim, na etapa final da RSL, foram extraídas informações cruciais a partir da leitura completa dos estudos selecionados. Nesse estágio, os dois codificadores realizaram uma leitura colaborativa, identificando os dados relevantes relacionados às questões de pesquisa. Para isso, foram definidos cuidadosamente os campos de extração, incluindo elementos como: título, autores, ano de publicação, país do primeiro autor, nome da revista ou conferência, palavras-chave, área de aplicação, objetivos e ferramentas ou técnicas utilizadas.

Além disso, foram selecionados critérios relevantes com o intuito de medir o grau de importância ou impacto dos trabalhos selecionados. Estes critérios foram avaliados por meio de oito questões de qualidade, a saber:

1. Aplicabilidade ao contexto dos *marketplaces* digitais ou comércio eletrônico;
2. Presença de métricas que quantifiquem o “efeito” *cross-selling* entre itens;
3. Oferta de recomendações personalizadas;
4. Demonstração de relevância por meio de resultados superiores em relação a outros trabalhos ou ferramentas, além da eficiência dos algoritmos empregados;

5. Presença de validação computacional, garantindo a confiabilidade do modelo, algoritmo ou ferramenta por meio de resultados computacionais robustos;
6. Perspectivas para futuras pesquisas;
7. Utilização de formulações matemáticas pertinentes;
8. Incorporação de heurísticas e/ou metaheurísticas.

A escolha destes critérios específicos se dá porque estes atendem as características diretamente relacionadas aos objetivos estabelecidos na seção 2.2.1.

2.3 Resultados e discussões gerais

Nesta seção, são apresentados os resultados da RSL, acompanhados de suas análises e discussões, com o objetivo de responder às questões de pesquisa definidas na seção 2.2.2, a fim de analisar e examinar os desdobramentos e desafios da otimização do *cross-selling* em plataformas digitais de *marketplace*.

2.3.1 Visão geral

A busca inicial resultou na recuperação de 6.626 artigos das bases de dados ACM Digital Library (238), IEEE Xplore (128), Inderscience Online (194), INFORMS PubsOnline (366), MDPI (82), Science Direct (1.696), Scopus (2.150) e Springer Link (1.772). Durante a etapa de seleção preliminar, 5.750 estudos foram excluídos após a análise dos títulos, resumos e palavras-chave, de acordo com os critérios de exclusão estabelecidos.

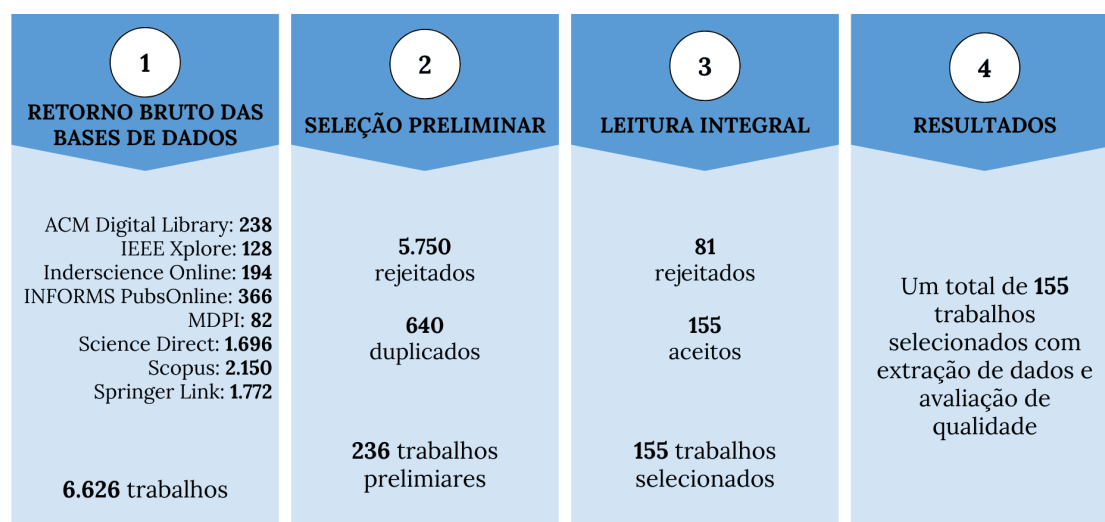
Dentre estes 5.750 artigos rejeitados, a maioria (5.639 estudos) foi excluída porque seus títulos, resumos e palavras-chave não estavam alinhados ao objetivo desta RSL. Além disso, 70 artigos foram excluídos por não estarem disponíveis em inglês, 14 por não estarem disponíveis em texto completo, 12 por terem sido publicados como comentários, 20 por não serem artigos de periódicos ou conferências e 3 por conterem duas páginas ou menos.

No conjunto restante, 640 artigos foram identificados como duplicados ao comparar os resultados das oito bases de dados, resultando na inclusão de 236 artigos para a segunda fase de filtragem.

Na segunda etapa de filtragem, foi realizada uma análise minuciosa de 236 artigos, aplicando critérios de inclusão e exclusão para concentrar a extração de dados em estudos capazes de responder às questões de pesquisa. Nesta etapa, 81 estudos foram excluídos, culminando na seleção de 155 artigos para a extração de dados e avaliação de qualidade. A ferramenta Parsifal⁹ foi empregada para orientar e gerenciar todas as fases da RSL, abrangendo a definição do protocolo de revisão, seleção, extração de dados e avaliação de qualidade.

A Figura 2 delinea uma visão abrangente destes procedimentos descritos de seleção e extração de dados, e avaliação de qualidade.

Figura 2 – Visão geral do procedimento de seleção dos trabalhos



Fonte: Autoria própria (2025).

Além disso, a fim de aprofundar a análise dos 155 trabalhos selecionados, foi feita uma avaliação inicial da qualidade dos estudos conduzida por meio de um gráfico de nuvem de palavras ou etiquetas (em inglês, *tag cloud*), uma representação visual em que as palavras são exibidas em tamanhos diferentes, com base na

⁹ Disponível em: <<https://parsif.al/>>

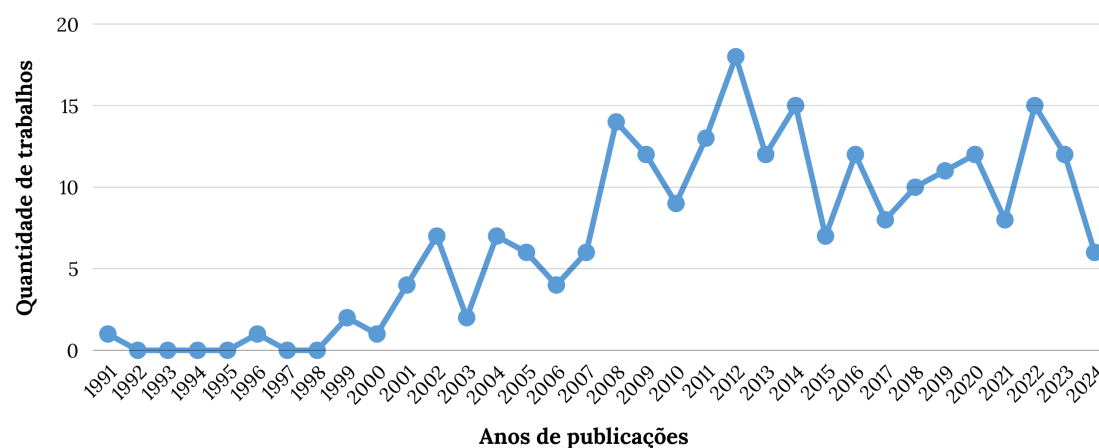
disso, observa-se a presença recorrente de termos como “data mining” e “customer relationship management”, sugerindo uma forte inclinação para abordagens baseadas em dados e uma ênfase no aprimoramento da compreensão do comportamento do cliente. Isto indica uma tendência significativa em direção à utilização de técnicas analíticas para identificar padrões de compra e relações entre itens, como exemplificado pelos termos “association rules” e “association rule mining”. Além disso, a presença de termos como “pricing” evidencia a importância da precificação na eficácia do *cross-selling*, enquanto “collaborative filtering” sugere uma tendência em explorar métodos de recomendação personalizada para aumentar a relevância das ofertas aos clientes.

Em suma, a diversidade de termos presentes na Figura 3 reflete a complexidade e interdisciplinaridade inerentes à pesquisa neste campo, destacando áreas-chave de investigação, como a análise de dados, gestão de relacionamento com o cliente, estratégias de precificação e recomendação personalizada, além de apontar para possíveis direções futuras de pesquisa e inovação. Além disso, a programação matemática e metaheurística, temáticas de destaque nesta pesquisa, surgem numa escala menor na Figura 3, mas sinalizam uma nova tendência de estudo de pesquisadores.

2.3.2 Quais são os anos, locais, impacto das publicações e a nacionalidade dos primeiros autores

A fim de responder à primeira questão de pesquisa desta RSL, conforme definido na subseção 2.2.2, a Figura 4 ilustra a quantidade de trabalhos publicados anualmente ao longo do período considerado.

A Figura 4 evidencia uma tendência crescente de publicações ao longo do tempo, refletindo o interesse contínuo na área. Desde o fim dos anos 1990, observa-se um aumento significativo, com picos em 2008, 2012, 2014 e 2022. Esse crescimento destaca a relevância do *cross-selling* e o empenho dos pesquisadores em aprimorar abordagens, impulsionado pelo avanço tecnológico e pelo uso crescente de algoritmos de recomendação (LI *et al.*, 2014; BALAKRISHNAN *et al.*, 2018).

Figura 4 – Quantidade de trabalhos por ano de publicações

Fonte: Autoria própria (2025).

Já a Tabela 2 apresenta uma visão panorâmica dos principais periódicos e conferências resultantes desta RSL, com base na quantidade de trabalhos publicados.

Notavelmente, a “Expert Systems with Applications” se evidencia com seis publicações, demonstrando interesse no contexto estudado. Por exemplo, o estudo de Ahn *et al.* (2011) delinea modelos preditivos fundamentados em dados agregados de clientes, destinados a antecipar suas futuras atividades de compra. Paralelamente, Thuring *et al.* (2012) propõem métodos para modelar comportamentos históricos em produtos financeiros, visando aprimorar estratégias de *marketing* e impulsionar os lucros organizacionais. Outros periódicos, como o “European Journal of Operational Research” e o “Operations Research”, ambos com cinco publicações, também possuem contribuições notáveis. Por exemplo, Chen *et al.* (2016) delineiam um método colaborativo para otimizar recomendações de *cross-selling* em gestão de relacionamento com o cliente, enquanto Ali *et al.* (2017) desenvolvem uma abordagem de *cross-selling* com mútuas vantagens para clientes e instituições financeiras. Ademais, o periódico “International Journal of Production Economics” apresenta quatro estudos relevantes, incluindo a pesquisa de Miragliotta *et al.* (2009), que discute a aplicação do *cross-selling* para gerenciamento de vendas em corporações multinacionais. Estas análises ressaltam a diversidade de perspectivas e abordagens encontradas na literatura revisada, sublinhando a relevância e interdisciplinaridade do tema e sinalizando a necessidade contínua de investigação neste campo em cons-

tante evolução. Vale também destacar o número significativo de artigos provenientes da “International Conference on Services Systems and Services Management”.

Tabela 2 – Principais periódicos e conferências por quantidade de trabalhos

Local de publicação	Nº
Applied Sciences	2
Computers & Operations Research	2
European Journal of Operational Research	5
Expert Systems with Applications	6
Hawaii International Conference on System Sciences	2
International Conference on Data Mining	2
International Conference on Knowledge Discovery in Data	2
International Conference on Services Systems and Services Management	4
International Journal of Production Economics	4
International Journal of Research in Marketing	2
International Journal of Services Sciences	3
Journal of Financial Services Marketing	3
Journal of Interactive Marketing	2
Journal of Marketing	2
Journal of Marketing Research	2
Journal of Relationship Marketing	2
Journal of Retailing	2
Journal of Theoretical and Applied Electronic Commerce Research	2
Management Science	2
Manufacturing & Service Operations Management	2
Neural Computing and Applications	2
Operations Research	5

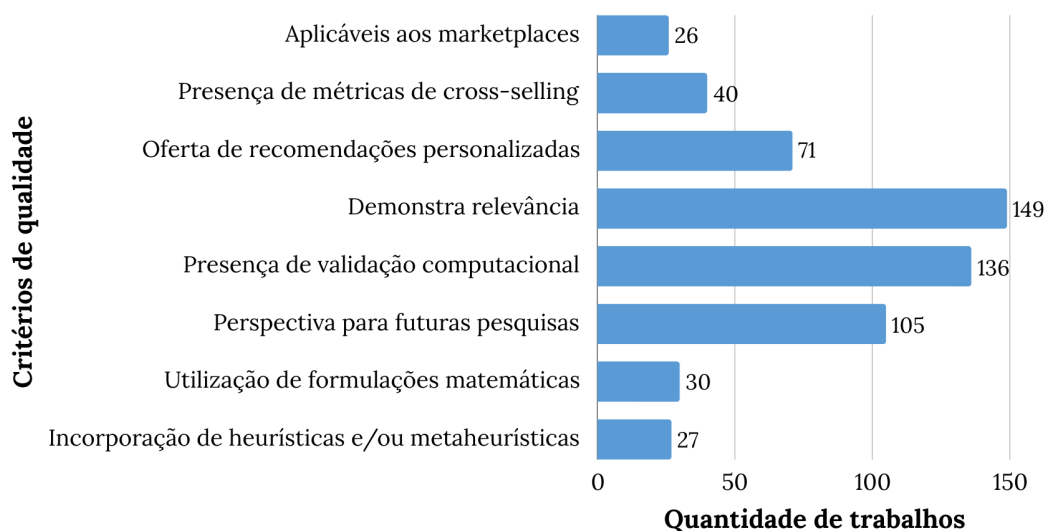
Fonte: Autoria própria (2025).

As Figuras 5 e 6 demonstram o impacto ou importância dos trabalhos selecionados, conforme os critérios de qualidade definidos na subseção 2.2.5.

A Figura 5 apresenta a distribuição dos trabalhos selecionados conforme os critérios de qualidade adotados. A maioria demonstra relevância (149 trabalhos), seguida por validação computacional (136) e indicação de direções futuras (105), evidenciando o foco da comunidade acadêmica na eficácia, robustez e aplicabilidade das abordagens de *cross-selling*. Embora menos frequentes, aspectos como aplicabilidade a *marketplaces* digitais (26), uso de heurísticas/metaheurísticas

(27) e formulações matemáticas (30) já ganham destaque, apontando caminhos promissores para pesquisas futuras.

Figura 5 – Quantidade de trabalhos por critérios de qualidade

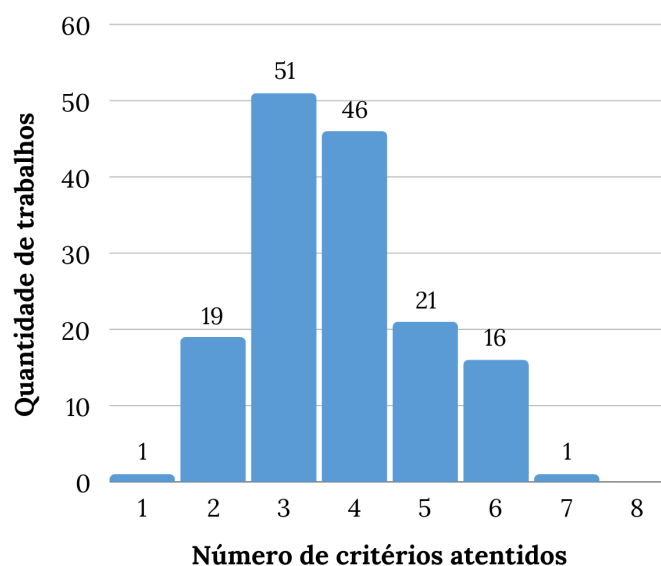


Fonte: Autoria própria (2025).

A Figura 6 proporciona uma análise mais minuciosa ao examinar quantos trabalhos atendem simultaneamente a múltiplos critérios de qualidade.

Nenhum dos trabalhos analisados atendeu simultaneamente a todos os critérios de qualidade, sendo o estudo de Ryu *et al.* (2021) o único a se destacar, cumprindo sete dos oito critérios definidos. Esse resultado evidencia a escassez de pesquisas que abordem de forma abrangente os aspectos considerados nesta RSL. A maioria dos trabalhos atende a três (51) ou quatro (46) critérios, o que indica uma tendência de foco em aspectos específicos da otimização do *cross-selling*. Isso reforça a necessidade de estudos mais completos, que integrem múltiplas dimensões metodológicas, especialmente em contextos digitais de *marketplace*.

Figura 6 – Quantidade de trabalhos por critérios de qualidade atendidos simultaneamente

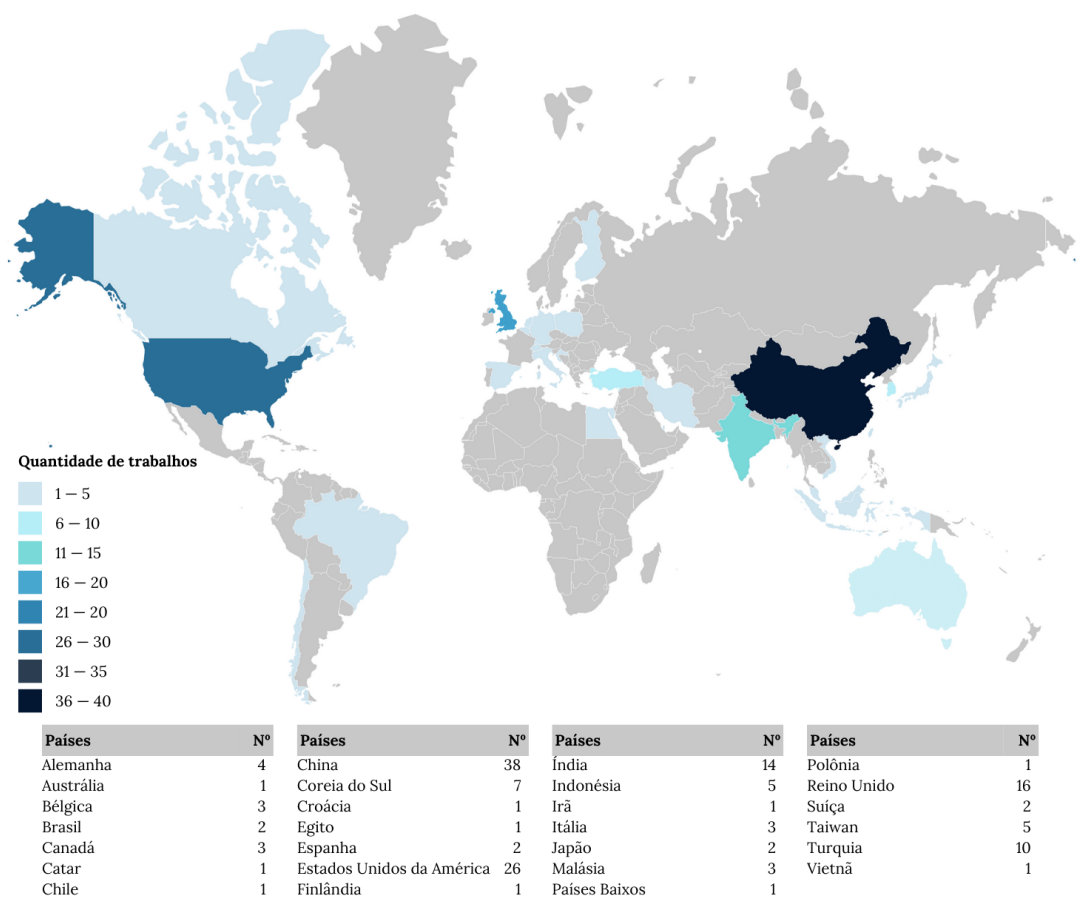


Fonte: Autoria própria (2025).

Por fim, a Figura 7 apresenta um mapa coroplético (em inglês, *choropleth map*), que representa normalmente uma superfície estatística por meio de áreas simbolizadas com cores ou padrões de acordo com uma escala que representa a proporcionalidade da variável estudada (STEWART; KENNELLY, 2010), neste caso, a quantidade de trabalhos por país do primeiro autor dos trabalhos revisados.

Observa-se que uma concentração significativa de contribuições de pesquisas sobre o *cross-selling* são provenientes de países como China, Estados Unidos, Reino Unido e Índia. Estes países lideram em termos de quantidade de trabalhos, refletindo possivelmente a atividade acadêmica intensa nestes locais, além de indicar uma presença de pesquisadores e profissionais engajados em explorar e aprimorar técnicas de otimização para o *cross-selling* em diferentes contextos.

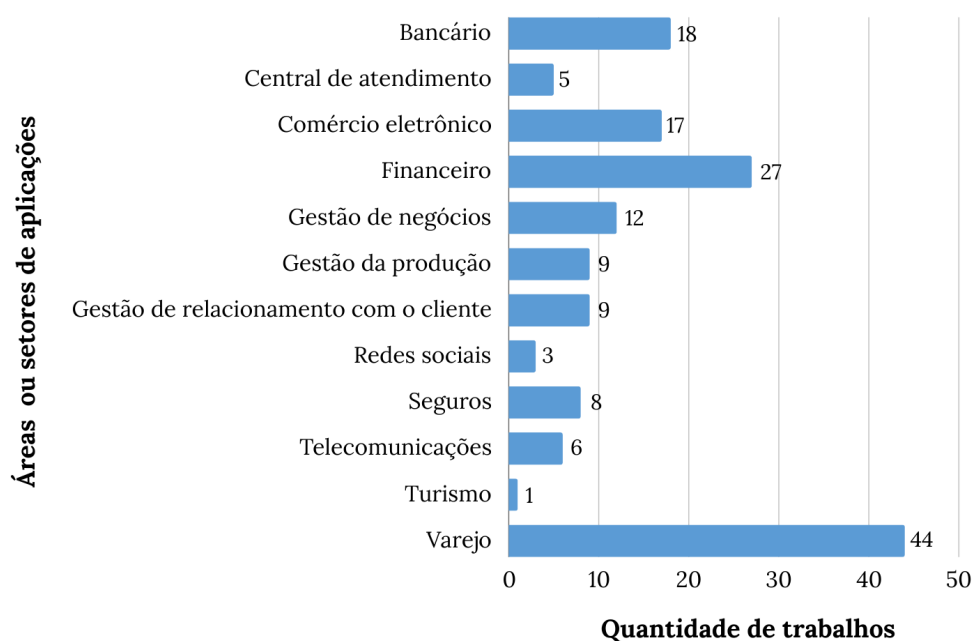
Figura 7 – Quantidade de trabalhos por país do primeiro autor



Fonte: Autoria própria (2025).

2.3.3 Quais são as áreas ou setores de aplicação

A Figura 8 revela a quantidade de trabalhos analisados em relação as áreas ou setores de aplicação. Embora alguns trabalhos envolvessem mais de uma área ou setor de aplicação, optou-se por destacar a principal.

Figura 8 – Quantidade de trabalhos por áreas ou setores de aplicação

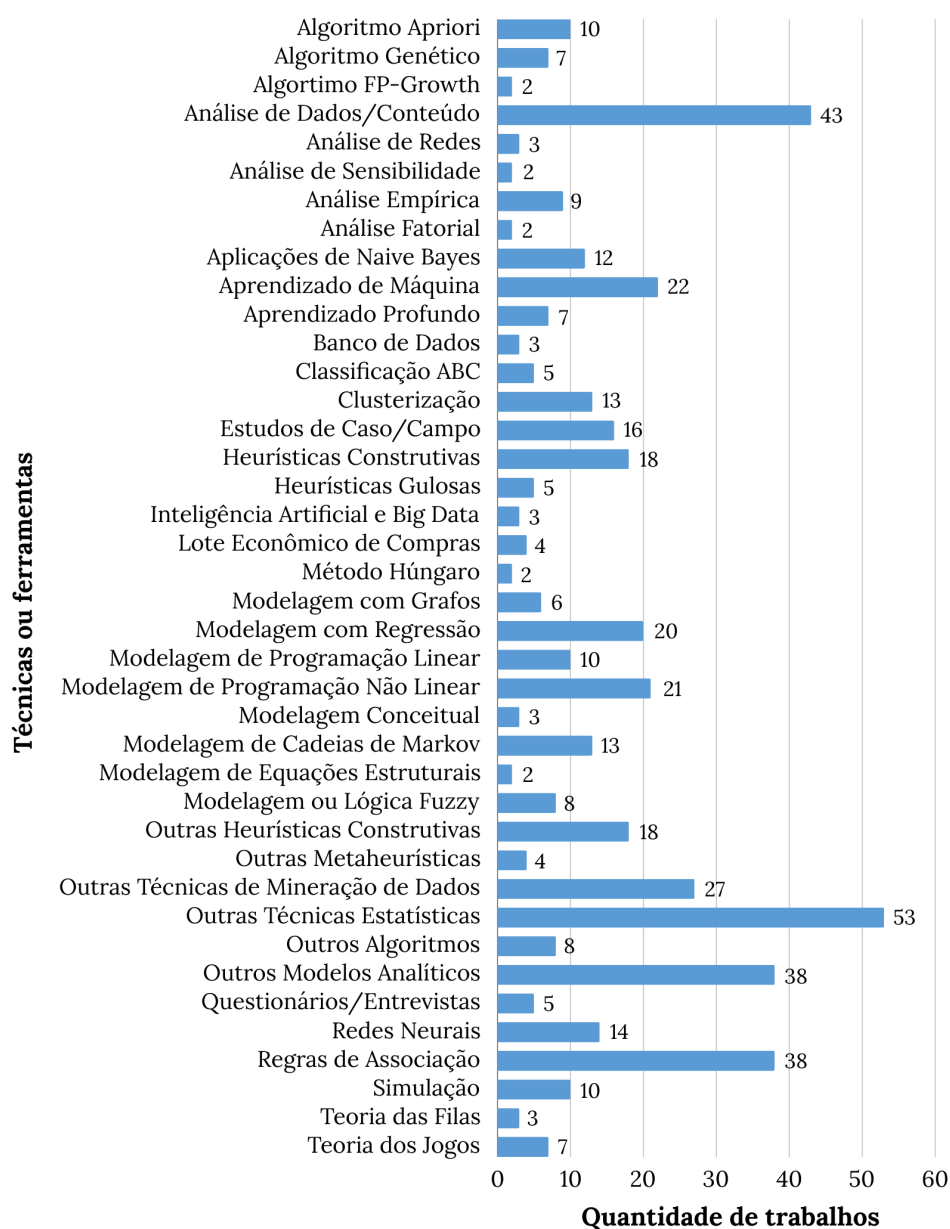
Fonte: Autoria própria (2025).

O setor de varejo concentra o maior número de estudos (44), destacando-se como a área mais explorada e evidenciando uma demanda crescente pela aplicação do *cross-selling* em problemas como *layout* de lojas (OZCAN; ESNAF, 2013), alocação de prateleiras (HUANG *et al.*, 2014; ANGUN; OZKAN, 2015) e seleção de itens (LI *et al.*, 2010; YAO *et al.*, 2014). Também se observa presença significativa nos setores financeiro (27) e bancário (18), com foco na segmentação de clientes (ANSELL *et al.*, 2007; LIU; CAI, 2008; THURING *et al.*, 2013) e na escolha de produtos ou serviços (VRANCIC, 2001; QIU *et al.*, 2009). Por outro lado, áreas como turismo (LEE *et al.*, 2022) e redes sociais (NARAYANAM; NANAVATI, 2012; GARIMELLA; WEBER, 2014; NARAYANAM; NANAVATI, 2014) ainda são pouco exploradas, indicando oportunidades para futuras pesquisas. Vale destacar o comércio eletrônico, diretamente relacionado aos *marketplaces* digitais, com 17 estudos, o que reforça sua crescente relevância e o interesse em estratégias de *cross-selling* nesse contexto.

2.3.4 Quais são as ferramentas e técnicas utilizadas

A Figura 9 evidencia a diversidade de ferramentas e técnicas empregadas na análise e implementação do *cross-selling*, independentemente do setor de aplicação.

Figura 9 – Quantidade de trabalhos por técnicas ou ferramentas



Fonte: Autoria própria (2025).

Antes de tudo, é importante destacar que a soma do número de trabalhos por técnica não corresponde ao total geral, pois muitos estudos utilizam abordagens combinadas. Além disso, nem todas as ferramentas foram detalhadas exaustivamente; priorizou-se o destaque às mais relevantes, agrupadas, sempre que possível, em categorias amplas como estatística e modelos analíticos.

Notam-se, com maior frequência, técnicas estatísticas (53 trabalhos), incluindo modelos de probabilidade (KITTS *et al.*, 2000; KUBIAK; WEICHBROTH, 2010; ZHAO *et al.*, 2013) e medidas descritivas (ZBOJA; HARTLINE, 2010; KAISHEV *et al.*, 2013). A análise de dados e conteúdos também é amplamente empregada (43 trabalhos), tanto na identificação de padrões de consumo (HUANG *et al.*, 2008; TIAN *et al.*, 2012) quanto na análise de redes sociais (GARIMELLA; WEBER, 2014; NARAYANAM; NANAVATI, 2014). As regras de associação aparecem em 38 trabalhos, aplicadas à seleção de itens (LIU *et al.*, 2004; WONG; FU, 2004; WONG *et al.*, 2005; XIUJUAN *et al.*, 2005) e na mensuração do “efeito” do *cross-selling* (ZHANG; RUAN, 2009; KAKU *et al.*, 2011). Outras abordagens incluem modelagens conceituais (3), com grafos (6), regressão (20), e diversos modelos analíticos (38).

Também se destacam os modelos matemáticos, como programação linear (10) e não linear (21), além de heurísticas e metaheurísticas: método húngaro (2), algoritmos genéticos (7), heurísticas gulosas (5) e construtivas (18). Como essas técnicas se relacionam diretamente com os objetivos específicos desta RSL (ver seção 2.2.1), sua aplicação, limitações e potencial de aprimoramento serão discutidos em maior profundidade na Seção 2.4.

Por fim, a variedade de métodos utilizados em diferentes contextos reforça a importância da escolha adequada de técnicas para potencializar os resultados e o sucesso das estratégias de *cross-selling*.

2.4 Quais são as lacunas e oportunidades de pesquisa e desenvolvimento da otimização matemática de *cross-selling* no contexto dos *marketplaces* digitais

Com o objetivo de aprofundar as oportunidades de pesquisa destacadas nos resultados das análises apresentadas nas subseções 2.3.2, 2.3.3 e 2.3.4, e em outras relacionadas aos objetivos delineados na subseção 2.2.1, esta seção explora as lacunas e oportunidades de pesquisa e desenvolvimento da estratégia de *cross-selling* em plataformas digitais de *marketplace*. Para assegurar uma organização coesa das análises, os resultados serão abordados da seguinte maneira:

1. Será investigado como e quais modelos matemáticos estão sendo empregados para a otimização do *cross-selling* em *marketplaces* digitais;
2. Serão analisados os métodos utilizados de resoluções aproximadas nos trabalhos com modelos matemáticos de programação no contexto estudado;
3. Por fim, será examinado se os métodos de resoluções da otimização matemática do *cross-selling* estão devidamente adaptados às especificidades das plataformas digitais de *marketplace*.

2.4.1 Modelos matemáticos de programação linear ou não linear

Para apresentar e discutir os trabalhos que utilizam modelos de programação matemática, seja linear ou não linear, a Tabela 3 oferece uma visão geral dos autores e das principais características de cada um dos estudos que utilizam formulações matemáticas para otimizar o *cross-selling*.

Tabela 3 – Visão geral dos trabalhos que utilizam modelos matemáticos com heurísticas e/ou metaheurísticas

Autor(es)	Programação		Designação de		Atributos de		Métricas de cross-selling	Heurísticas e/ou metaheurísticas
	Linear	Não linear	Clientes	Itens	Clientes	Itens		
Nash e Sterna-Karwat (1996)	✓					✓		
Brijs <i>et al.</i> (1999)	✓			✓		✓		✓
Doyle (2002)	✓			✓		✓		
Wong <i>et al.</i> (2003)		✓		✓		✓	✓	✓
Wong <i>et al.</i> (2005)		✓		✓		✓	✓	✓
Netessine <i>et al.</i> (2006)		✓		✓	✓	✓	✓	✓
Bhaskar <i>et al.</i> (2009)		✓	✓		✓	✓		
Li (2009)	✓					✓		
Güneş <i>et al.</i> (2010)		✓			✓	✓		
Li e Abe (2011)	✓				✓	✓		
Li <i>et al.</i> (2011)		✓			✓	✓		
Sundararajan <i>et al.</i> (2011)		✓		✓	✓	✓		✓
Ahn (2012)		✓		✓		✓	✓	✓
Narayanam e Nana-vati (2012)	✓				✓	✓		
Zhang <i>et al.</i> (2012)		✓				✓		✓
Ozcan e Esnaf (2013)		✓		✓		✓	✓	✓
Katsifou <i>et al.</i> (2014)		✓		✓		✓		✓
Narayanam e Nana-vati (2014)	✓				✓	✓		✓
Angun e Ozkan (2015)		✓		✓		✓	✓	
Chen <i>et al.</i> (2015)		✓	✓	✓	✓	✓		
Chen <i>et al.</i> (2016)		✓		✓	✓	✓		
Ghoniem <i>et al.</i> (2016)	✓	✓		✓	✓	✓	✓	
Liu <i>et al.</i> (2016)	✓					✓		
Ali <i>et al.</i> (2017)		✓			✓	✓		
Rabbani <i>et al.</i> (2017)	✓	✓		✓	✓	✓	✓	
Huang <i>et al.</i> (2019)	✓			✓		✓		✓
Sah <i>et al.</i> (2019)		✓		✓		✓	✓	✓
Timonina-Farkas <i>et al.</i> (2020)		✓		✓	✓	✓		✓
Ryu <i>et al.</i> (2021)		✓		✓		✓	✓	✓
Li <i>et al.</i> (2022)		✓		✓		✓		

Fonte: Autoria própria (2025).

Antes da análise dos resultados da Tabela 3, é importante compreender as informações nela contidas:

- Programação linear ou não linear: modelos matemáticos que visam maximizar ou minimizar funções, sujeitas a restrições específicas.
- Designação de clientes: refere-se à atribuição de produtos ou serviços a clientes (ou vice-versa), ou ainda à seleção ou classificação de clientes.

- Designação de itens: refere-se à alocação de produtos ou serviços a locais (como prateleiras), ou à seleção ou classificação de itens.
- Atributos de clientes: incluem características como perfil, histórico de compras, preferências, orçamento, reações ou canais de comunicação.
- Atributos dos itens: abrangem aspectos como custo, preço, lucro, categoria ou estoque dos produtos ou serviços.
- Métrica de cross-selling: representa uma medida quantitativa da possibilidade ou eficácia do *cross-selling* entre produtos ou serviços.
- Heurísticas e/ou metaheurísticas: a última coluna da tabela indica se os trabalhos utilizam essas abordagens para resolver os problemas propostos.

É interessante observar que dos 30 trabalhos apresentados na Tabela 3, todos incluem abordagens que consideram atributos de produtos ou serviços. No entanto, a análise das outras características revela algumas lacunas consideráveis.

Inicialmente, é necessário definir o que seria um modelo de otimização do *cross-selling*. Este modelo visaria aprimorar a capacidade de recomendação de produtos ou serviços, considerando que um ou mais clientes já adquiriram ou demonstraram interesse em outros produtos ou serviços. Esta abordagem é destacada, por exemplo, no estudo de Ryu *et al.* (2021).

Desta forma, a inclusão de uma métrica específica de *cross-selling* é crucial em um modelo matemático destinado à otimização desta estratégia. Porém, apenas alguns estudos utilizam esta abordagem. Wong *et al.* (2003) e Wong *et al.* (2005) utilizam regras de associação para selecionar itens que maximizem o lucro considerando o efeito de *cross-selling*. Netessine *et al.* (2006) modelam o problema com programação dinâmica estocástica e otimização combinatorial para definir complementos de embalagens e preços. Ozcan e Esnaf (2013) e Angun e Ozkan (2015) propõem modelos para otimizar a localização de produtos e o planejamento de sortimento em prateleiras. Já Ghoniem *et al.* (2016) e Rabbani *et al.* (2017) integram sortimento e precificação em categorias de varejo complementares. Por fim, Ahn (2012), Sah *et al.* (2019) e Ryu *et al.* (2021) aplicam regras de associação com

o *Quadratic Assignment Problem* para alocação de produtos no varejo. No entanto, esses estudos descritos focam na seleção de itens, sem considerar a designação de produtos a clientes, o que, segundo Liu (2022), pode comprometer a eficácia do *cross-selling* por não oferecer recomendações personalizadas.

Uma outra lacuna significativa é a escassez de modelos matemáticos baseados em programação linear, dos quais apenas 10 trabalhos listados na Tabela 3 fazem uso. Apesar da tendência de se modelar problemas como não lineares, a programação linear é preferível, quando possível, devido à sua eficiência e precisão na resolução de uma ampla gama de problemas de otimização (HILLIER, 2001; TAHA, 2007).

Dos trabalhos já citados que utilizam métricas de *cross-selling*, apenas Ghoniem *et al.* (2016) e Rabbani *et al.* (2017) optaram por utilizar programação linear. Ambos os estudos aplicaram técnicas de linearização em modelos não lineares para obter soluções eficazes. Doyle (2002) utiliza otimização para alocar recursos de *cross-selling* em um cenário bancário fictício. Li (2009) propõe um algoritmo de regras de associação quantitativa em agrupamentos difusos para identificar oportunidades em telecomunicações. Narayanam e Nanavati (2012) e Narayanam e Nanavati (2014) introduzem modelos de propagação de influência com *cross-selling*, considerando custos e restrições orçamentárias. Liu *et al.* (2016) analisam o *cross-selling* no varejo *omnichannel*, com foco na gestão de estoque. Huang *et al.* (2019) propõem a alocação de produtos em prateleiras físicas com base em associações de compra e restrições de categorias. No entanto, mais uma vez, tais estudos não abordam a atribuição de produtos a clientes, o que limita o potencial de personalização do *cross-selling*.

Os únicos trabalhos que utilizam da estratégia de designação de clientes são os trabalhos de Bhaskar *et al.* (2009) e Chen *et al.* (2015), ambos de programação não linear. Enquanto o primeiro foca na seleção eficiente de clientes para campanhas de *cross-selling* em um banco varejista, usando uma abordagem de programação matemática difusa para lidar com incertezas nas estimativas e a complexidade computacional envolvida; o segundo propõe um método baseado em conjuntos de máquinas de vetores de suporte para identificar oportunidades de *cross-selling* em dados de alta dimensão, visando recomendar produtos e serviços personalizados aos clientes. Todavia, ambos os estudos não incluem métricas de *cross-selling* e não

se enquadram no modelo de otimização de recomendação de produtos ou serviços, considerando que um ou mais clientes já adquiriram ou demonstraram interesse em outros produtos ou serviços.

2.4.2 Métodos de resoluções aproximadas

Uma lacuna adicional destacada nos estudos apresentados na Tabela 3 é a proposta de abordagens heurísticas e/ou metaheurísticas encontradas em apenas 14 dos 30 trabalhos, para seus modelos de programação linear ou não linear. Estas estratégias são essenciais em contextos complexos, permitindo a identificação de soluções viáveis dentro de prazos razoáveis, sem depender exclusivamente de soluções exatas (LUKE, 2009; TALBI, 2009).

Brijs *et al.* (1999) propuseram uma heurística de lucratividade para seleção de produtos. Wong *et al.* (2003) e Wong *et al.* (2005) utilizaram uma heurística baseada em vizinhança e lucro por item para estimação de itens; o último também aplicou um *genetic algorithm*. Netessine *et al.* (2006) empregaram heurísticas de precificação e embalagens com otimização combinatória. Sundararajan *et al.* (2011) usaram *genetic algorithms* para produtos em bancos. Ahn (2012) desenvolveram uma heurística com regras de associação, vizinhos mais próximos e atualizações. Zhang *et al.* (2012) criaram uma heurística para otimizar ciclos de pedido. Ozcan e Esnaf (2013) utilizaram *genetic algorithm* para o *layout* de livrarias. Katsifou *et al.* (2014) propuseram uma heurística baseada na relação de lucro para produtos em varejo. Narayanam e Nanavati (2014) aplicaram uma heurística eficiente para maximização de influência em redes sociais. Huang *et al.* (2019) utilizaram o algoritmo húngaro para alocação de produtos em prateleiras. Sah *et al.* (2019) propuseram um *genetic algorithm* para otimizar o *cross-selling* e alocação de produtos. Timonina-Farkas *et al.* (2020) apresentaram heurísticas iterativas para planejamento de sortimento. Por fim, Ryu *et al.* (2021) desenvolveram um *genetic algorithm* híbrido com *tabu search* e um novo operador de cruzamento para a atribuição de itens.

É importante ressaltar ainda que alguns trabalhos desta RSL empregaram heurísticas e/ou metaheurísticas sem recorrer a modelos de programação matemática. Por exemplo, o estudo conduzido por Coelho *et al.* (2017) se destaca ao empregar a *particle swarm optimization* para aprimorar a segmentação e persona-

lização de ofertas de produtos e serviços. Da mesma forma, a pesquisa realizada por Sfenrianto *et al.* (2016) utiliza técnicas heurísticas, incluindo uma estrutura de vizinhança denominada *greedy randomized neighborhood structure*, e uma metaheurística de busca local multiobjetivo chamada *two-phase pareto local search with variable neighborhood search*, com o propósito de identificar conjuntos de clientes que maximizem tanto o lucro da campanha de promoção quanto o retorno ajustado.

2.4.3 Trabalhos adaptados ao contexto dos *marketplaces* digitais

Além das lacunas apresentadas nas subseções 2.4.1 e 2.4.2, dos trabalhos que utilizam modelos de programação matemática da Tabela 3 apenas os trabalhos de Narayanam e Nanavati (2012), Narayanam e Nanavati (2014), Chen *et al.* (2016), Liu *et al.* (2016), Ryu *et al.* (2021) e Li *et al.* (2022) tem alguma aplicação direta ou indireta as plataformas digitais de *marketplace*. Este cenário também é evidenciado ao analisarmos a carência dos estudos desta RSL no que se refere a adaptabilidade aos *marketplaces*, conforme demonstram as Figuras 5 e 8, já analisadas anteriormente.

Desta forma, observa-se que no contexto da otimização matemática, fundamental para compor o estado da arte desta RSL, embora haja trabalhos relevantes que empregam modelos de programação linear ou não linear no *cross-selling*, ainda persiste uma necessidade considerável de desenvolvimento de modelos adaptados especificamente às peculiaridades das plataformas digitais de *marketplace*. As características próprias desses ambientes, como a presença de múltiplos vendedores, a diversidade de produtos e a natureza dinâmica do comportamento dos consumidores, aliadas ao crescimento e à crescente importância destas plataformas (KENNEY; ZYSMAN, 2016; PARKER *et al.*, 2016; GAJEWSKA *et al.*, 2020), demandam abordagens mais especializadas.

2.5 Perspectivas e direções de pesquisa

A análise conduzida nesta revisão revela uma ampla gama de aspectos relacionados às técnicas para a estratégia de otimização do *cross-selling*, abrangendo diversos contextos, como os setores varejista, financeiro e bancário, além das

plataformas digitais de *marketplace*, que constituem o principal foco desta pesquisa. Ao examinar as ferramentas, técnicas, lacunas e oportunidades apresentadas na literatura, diversas direções futuras de pesquisa surgem.

No entanto, faz-se necessário ressaltar as limitações desta revisão, incluindo o número de fontes pesquisadas, viés de seleção e generalização limitada. A qualidade e quantidade de fontes disponíveis podem afetar a abrangência da revisão, enquanto as interpretações dos revisores podem introduzir viés no processo de seleção dos estudos e extração de dados. Além disso, a generalização dos resultados pode ser limitada pelo conjunto de estudos analisados, especialmente considerando o descarte de outros tipos de produções científicas além de periódicos e conferências, bem como a generalidade da *string* de busca, ou a indisponibilidade de acesso integral a alguns estudos. Mesmo com o acesso às contas das instituições acadêmicas, houve casos em que não foi possível ler determinados trabalhos, o que pode ter impactado na abrangência da revisão.

Mesmo assim, a contribuição dada a literatura sobre este tema se destaca devido a relevância das publicações e conferências revisadas, além da quantidade robusta de trabalhos analisados. Entre as principais direções de pesquisa identificadas, destaca-se a necessidade de desenvolver metodologias de otimização matemática relacionadas à estratégia de *cross-selling*, seja por modelos matemáticos de programação ou por abordagens heurísticas e/ou metaheurísticas adaptadas ao contexto dos *marketplaces* digitais. Sobretudo, resalta-se a importância de uma estratégia de otimização que visa aprimorar a capacidade de recomendação de produtos ou serviços, considerando que um ou mais clientes já adquiriram ou demonstraram interesse em outros produtos ou serviços, além de recomendações personalizadas e adaptadas aos clientes. Além disso, destaca-se a necessidade de métodos de soluções exatas e aproximadas trabalharem em conjunto para uma melhor avaliação das soluções encontradas.

A pesquisa ainda destaca o potencial de abordagens alternativas, como aprendizado por reforço e aprendizado profundo, para a estratégia de otimizar o *cross-selling*. Ao integrar avanços em inteligência artificial e aprendizado de máquina, é possível desenvolver estratégias mais sofisticadas, adaptativas e personalizadas para atender às demandas individuais dos consumidores. Estas descobertas contri-

buem não apenas para o avanço teórico, mas também para a prática, oferecendo informações significativas para empresas e profissionais interessados em aprimorar suas estratégias de *cross-selling* e maximizar o potencial uso dos *marketplaces* digitais, pela lucratividade das empresas ou fornecedores e a satisfação dos clientes. Em última análise, este estudo destaca a importância contínua da pesquisa sobre a estratégia de otimização do *cross-selling* para impulsionar a competitividade e o sucesso nos negócios digitais.

3 Modelagem Matemática

Neste capítulo, será apresentada uma proposta de modelo matemático para a estratégia de otimização do *cross-selling* em plataformas digitais de *marketplace*.

3.1 Introdução

Com base nos resultados da revisão apresentados nas seções 2.3 e 2.5 do capítulo 2, evidencia-se a necessidade de um modelo matemático que otimize o potencial do *cross-selling* entre produtos ou serviços em ambientes digitais de *marketplace*, levando em consideração as preferências e comportamentos dos clientes. Tal demanda é fundamental para promover tanto a eficiência nas vendas quanto a satisfação dos clientes.

3.1.1 Problema Quadrático de Atribuição

Dentre os estudos destacados na revisão sistemática do Capítulo 2, merecem destaque as contribuições de Ahn (2012), Sah *et al.* (2019) e Ryu *et al.* (2021), que abordaram a otimização do *cross-selling* como um caso específico do *Quadratic Assignment Problem* (QAP) ou Problema Quadrático de Atribuição, aplicado à disposição estratégica de produtos em contextos varejistas.

O QAP, inicialmente proposto por Koopmans e Beckmann (1957), é um problema clássico de otimização combinatória amplamente estudado devido à sua complexidade teórica e relevância prática. Desde sua formulação, tem atraído o interesse de pesquisadores por apresentar desafios na resolução eficiente de instâncias de grande porte (LOIOLA *et al.*, 2007). Adicionalmente, Sahni e Gonzalez (1976) demonstraram que o QAP é NP-difícil, impossibilitando algoritmos de aproximação polinomial, a menos que $P = NP$. Os trabalhos revisados apresentam diferentes abordagens e métricas relacionadas ao problema:

- Ahn (2012) propõem a métrica $CSP(i_i, i_j)$, que mede a possibilidade de

cross-selling entre os itens i_i e i_j . Eles utilizaram variáveis binárias y_{kl} , em que $y_{kl} = 1$, se o local k for adjacente ao local l ; e $y_{kl} = 0$, caso contrário. Além disso, empregaram a variável de decisão binária x_{ik} , que indica se o produto i é alocado ao local k .

- Sah *et al.* (2019) introduziram a métrica CSR_{ij} , que representa a preferência do cliente em adquirir o produto j após comprar o produto i . O modelo considerou a matriz D_{kl} , que indica a distância entre os locais k e l , e a variável de decisão x_{ik} , semelhante à utilizada por Ahn (2012).
- Ryu *et al.* (2021) utilizaram a métrica $lift(I_i \rightarrow I_j)$, que mede o aumento na probabilidade de compra do item I_j após a aquisição do item I_i , em comparação com a compra isolada de I_j . Assim como Ahn (2012), fizeram uso de variáveis y_{kl} para indicar adjacência entre os locais k e l e de x_{ik} para a alocação dos produtos.

Apesar das diferenças nas formulações e nomenclaturas, todas estas abordagens convergem para medir o *cross-selling* entre os produtos e utilizam variáveis binárias para descrever a adjacência entre locais e a alocação dos itens.

3.1.2 Modelo Matemático de Ryu *et al.* (2021)

Dentre os três trabalhos analisados na subseção 3.1, o modelo proposto por Ryu *et al.* (2021) destaca-se como o mais recente e com uma abordagem mais próxima deste trabalho. Além de abordar o problema de alocação de itens para maximizar as oportunidades de *cross-selling*, o artigo propõe uma metaheurística híbrida baseada em *genetic algorithm*, integrando uma busca tabu robusta e um operador de cruzamento parcialmente combinado em formato retangular.

O modelo proposto considera um conjunto de n itens $I = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ a serem alocados em n locais $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$. A decisão envolve determinar a alocação dos itens aos locais para maximizar a possibilidade de *cross-selling*, considerando associações entre itens, lucros relativos e frequências de compra. O modelo é definido como um caso do QAP e pode ser formulado da seguinte forma:

$$\max \sum_{i \neq j, k \neq l} \text{lift}(I_i \rightarrow I_j) \cdot x_{ik} \cdot x_{jl} \cdot y_{kl} \quad (3.1)$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} = 1, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, k. \quad (3.4)$$

No modelo de Ryu *et al.* (2021):

- x_{ik} é uma variável binária que assume valor 1, se o item I_i for alocado ao local S_k ; e 0, caso contrário;
- y_{kl} é uma variável binária que assume valor 1, se os locais S_k e S_l forem adjacentes; e 0, caso contrário;
- $\text{lift}(I_i \rightarrow I_j)$ representa a possibilidade de *cross-selling* entre os itens I_i e I_j .

Ryu *et al.* (2021) ainda propõem constantes para representar o lucro relativo e frequência relativa de compra associados aos itens.

3.2 Descrição do modelo proposto

Embora os conceitos discutidos sejam relevantes para a otimização da alocação de produtos em ambientes de varejo tradicionais, considerou-se necessário adaptá-los para as plataformas digitais de *marketplace*. Como mencionado na subseção 2.4.1, a fim de incorporar as características dos clientes ao modelo, propõe-se uma abordagem em que, em vez de atribuir produtos ou serviços a locais físicos ou posições específicas, os mesmos são designados diretamente aos clientes, acrescentando atributos dos clientes ao problema. Paralelamente, ao invés de se concentrar na otimização de alocações estratégicas de produtos ou serviços em

posições, considerando o efeito *cross-selling*, optou-se por maximizar o próprio *cross-selling* entre produtos ou serviços, introduzindo uma nova variável de decisão.

Com o intuito de estruturar o problema em estudo, definiu-se o conjunto $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ como o conjunto de todos os produtos ou serviços i , com $i = 1, \dots, n$. De forma complementar, o conjunto $K = \{k_1, \dots, k_m\}$ representa o conjunto de todos os clientes k , com $k = 1, \dots, m$.

Com o objetivo de enriquecer as características ou atributos dos clientes, destaca-se que o *cross-selling* está frequentemente associado a estratégias de segmentação de clientes (PATHAK *et al.*, 2010; HELL *et al.*, 2020; GHOSHAL *et al.*, 2021). Optou-se, portanto, por explorar a concepção de perfis de clientes no modelo proposto.

Dentre as diversas formas de segmentação disponíveis, como fatores demográficos, geográficos, comportamentais, psicográficos ou firmográficos (COOIL *et al.*, 2008; SARI *et al.*, 2016; MEHTA, 2023), priorizou-se abordagens mais simplificadas e abrangentes, adequadas ao contexto de *marketplaces* digitais. Estratégias demográficas, como idade, gênero, renda, educação ou ocupação, podem ser consideradas invasivas em relação à privacidade dos clientes. Segmentações geográficas apresentam maior utilidade em contextos regionais; enquanto que abordagens psicográficas, ao focarem em características subjetivas, como personalidade e estilo de vida, envolvem maior complexidade. Adicionalmente, estratégias firmográficas são apropriadas para mercados *business-to-business*, o que não se aplica ao cenário em análise. Por conseguinte, fatores comportamentais, que incluem histórico de compras, comportamento de navegação *online* e participação em campanhas de *marketing* ou promoções, destacaram-se como mais apropriados para plataformas digitais de *marketplace* (MEHTA, 2023).

Considerando que o *cross-selling* refere-se à estratégia de indicar outros produtos ou serviços a um cliente que já realizou uma compra ou indicou intenção de aquisição (JAROSZEWICZ, 2008), definiu-se a matriz l_{ij} como o *lift* entre os produtos ou serviços i e j , ou seja, a possibilidade de recomendar o produto ou serviço j , dado que o produto ou serviço i já foi adquirido ou selecionado, indicando assim a afinidade entre estes produtos ou serviços. Conforme assumido na formulação, l_{ij} é igual a l_{ji} , o que implica em uma matriz simétrica em relação

à diagonal principal. Nesta matriz, os elementos da diagonal principal são nulos, pois indica a afinidade de comprar um mesmo produto ou serviço.

De acordo com Ryu *et al.* (2021), a matriz l_{ij} pode ser construída por meio de técnicas de mineração de regras de associação, utilizando, por exemplo, a medida de *lift* entre dois itens em um conjunto de transações (ZHANG; ZHANG, 2002; LEE *et al.*, 2013). Todavia, o presente trabalho não foca em como determinar este dado. A partir desta definição, estabeleceu-se o conjunto $I' \subset I$, composto pelos pares de produtos ou serviços (i, j) que possuem $l_{ij} \geq 1$, ou seja, $I' = \{(i, j) \mid l_{ij} \geq 1, i \neq j\}$, visto que valores de *lift* inferiores a 1 indicam associações consideradas fracas (BAGUI *et al.*, 2009). Portanto, trata-se de um conjunto de produtos ou serviços que apresentam um histórico de serem frequentemente adquiridos juntos.

Adicionalmente, definiu-se uma matriz y_{kt} como dado de entrada do modelo, em que cada elemento assume o valor 1, se os clientes k e t pertencerem ao mesmo perfil; e 0, caso contrário. Trata-se, portanto, de uma matriz binária. Esta matriz pode ser derivada de técnicas de segmentação de clientes (COOIL *et al.*, 2008; SARI *et al.*, 2016), embora a obtenção desta matriz não seja o foco deste estudo. É relevante destacar que a matriz y_{kt} apresenta características como a possibilidade de sobreposição entre perfis de clientes e simetria em relação à diagonal principal, cujos elementos também são nulos.

Além disso, incorporou-se como outro dado de entrada a matriz w_{ik} , em que cada elemento assume o valor 1, se o cliente k já tiver adquirido previamente o produto ou serviço i ; e 0, caso contrário. Assim, trata-se de uma matriz binária que enriquece o modelo ao incluir o histórico de compras dos clientes, aspecto não considerado por trabalhos anteriores, como Ahn (2012), Sah *et al.* (2019) e Ryu *et al.* (2021).

Por fim, uma outra constante definida foi o vetor d_i , representando a disponibilidade ou estoque do produto ou serviço i . Esta característica, similarmente, não foi contemplada nos estudos de Ahn (2012), Sah *et al.* (2019) e Ryu *et al.* (2021), o que reforça o enriquecimento metodológico proposto.

A variável x_{ik} , ao invés de designar produtos a posições, neste modelo proposto corresponde a uma variável de decisão binária, em que:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se o produto ou serviço } i \text{ for comprado ou selecionado} \\ & \text{pelo cliente } k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A fim de maximizar o *cross-selling* entre os produtos ou serviços comprados ou selecionados i com os produtos ou serviços indicados j , definiu-se uma segunda variável de decisão binária z_{ij} , em que:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se ocorrer o } \textit{cross-selling} \text{ a partir da combinação do} \\ & \text{produto ou serviço comprado ou selecionado } i \text{ com o} \\ & \text{produto ou serviço indicado } j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Na prática, z_{ij} indica se o *cross-selling* entre dois produtos ou serviços irá ocorrer ou não. Com efeito, os trabalhos de Ahn (2012), Sah *et al.* (2019) e Ryu *et al.* (2021) exploraram a eficácia da atribuição de itens a determinadas posições, sugerindo que itens posicionados próximos uns aos outros têm maior probabilidade de serem adquiridos juntos, o que implica em um aumento no *cross-selling*. No entanto, ao identificar quais itens estão envolvidos em *cross-selling* entre si, seria necessário examinar suas posições e verificar se estas são adjacentes ou não. Em contrapartida, neste modelo proposto, ao introduzir uma variável de decisão específica para o *cross-selling*, esta estratégia se torna mais clara e a saída do modelo passa a fornecer informações diretas sobre o *cross-selling* entre os produtos ou serviços.

Desta forma, a Tabela 4 resume as informações descritas dos conjuntos de entidades envolvidas, constantes ou dados de entrada e as variáveis de decisão.

Tabela 4 – Notação e variáveis do modelo

Conjunto de entidades	
Nomenclatura	Descrição
I	Conjunto de todos os produtos ou serviços i ou j .
I'	Conjunto dos pares de produtos ou serviços (i, j) que possuem o valor de l_{ij} maior ou igual a 1.
K	Conjunto de todos os clientes k ou t .
Constantes (dados de entrada)	
Nomenclatura	Descrição
l_{ij}	Matriz que indica o <i>lift</i> entre os produtos ou serviços i e j .
y_{kt}	Matriz que indica se os clientes k e t estão no mesmo perfil.
w_{ik}	Matriz que indica se o cliente k já adquiriu o produto ou serviço i .
d_i	Vetor que indica a disponibilidade ou estoque do produto ou serviço i .
Variáveis de decisão	
Nomenclatura	Descrição
x_{ik}	Denota se o produto ou serviço i será comprado ou selecionado pelo cliente k .
z_{ij}	Denota se irá ocorrer a recomendação de <i>cross-selling</i> entre os produtos ou serviços i e j .

Fonte: Autoria própria (2025).

Assim, o modelo matemático proposto corresponde a um problema de programação linear inteira binária, cuja formulação é apresentada como:

$$\max \sum_{(i,j) \in I'} l_{ij} z_{ij} \quad (3.5)$$

s.a:

$$\sum_{i \in I} x_{ik} \geq 1, \quad \forall k \in K. \quad (3.6)$$

$$\sum_{k \in K} x_{ik} + \sum_{j | (j,i) \in I'} z_{ji} \leq d_i, \quad \forall i \in I. \quad (3.7)$$

$$z_{ij} + x_{ik} + x_{jt} \leq 2 + y_{kt}, \quad \forall (i, j) \in I', \forall k, t \in K. \quad (3.8)$$

$$z_{ij} \leq \sum_{k \in K} x_{ik}, \quad \forall (i, j) \in I'. \quad (3.9)$$

$$z_{ij} \leq \sum_{t \in K} x_{jt}, \quad \forall (i, j) \in I'. \quad (3.10)$$

$$x_{ik} \leq \sum_{j | (i,j) \in I'} z_{ij}, \quad \forall i \in I, \forall k \in K. \quad (3.11)$$

$$z_{ij} + x_{ik} \leq 2 - w_{jk}, \quad \forall (i, j) \in I', \forall k \in K. \quad (3.12)$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \forall k \in K. \quad (3.13)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in I'. \quad (3.14)$$

A função objetivo 3.5 maximiza a possibilidade de *cross-selling* entre os produtos ou serviços comprados ou selecionados i e os produtos ou serviços indicados j , através do produto entre l_{ij} e z_{ij} .

A restrição 3.6 garante que cada cliente k selecionará pelo menos um produto ou serviço i . Na prática, um mesmo produto ou serviço pode ser designado para múltiplos clientes, ou ainda, pode ocorrer de um ou mais produtos ou serviços não serem selecionados ou comprados.

A restrição 3.7 assegura que, para cada produto ou serviço i , a quantidade vendida aos clientes k 's mais a quantidade indicada como *cross-selling* não ultrapasse sua disponibilidade ou estoque d_i .

Já a restrição 3.8 estabelece que, para todo par de produtos ou serviços (i, j) com *lift* maior ou igual a 1, o *cross-selling* ocorrerá quando i for comprado ou selecionado por um cliente k e j por um cliente t , pertencentes ao mesmo perfil y_{kt} .

As restrições 3.9 e 3.10 garantem que, para existir o *cross-selling* z_{ij} entre um par de produtos ou serviços (i, j) , ambos devem ser comprados ou selecionados. A garantia que os clientes k e t são distintos é dada pela restrição 3.8.

Por sua vez, a restrição 3.11 assegura que todo cliente k que comprar ou selecionar um produto ou serviço i receberá a indicação de pelo menos um outro produto ou serviço j .

A restrição 3.12 impede que, caso um cliente k tenha selecionado um produto ou serviço i e já tenha comprado um produto ou serviço j anteriormente, este último não seja indicado no *cross-selling* z_{ij} .

Por fim, as restrições 3.13 e 3.14 garantem a binaridade das variáveis de

decisão x_{ik} e z_{ij} .

3.3 Solução ilustrativa

A fim de esclarecer a ideia por trás do modelo proposto, esta seção apresenta um exemplo elucidativo para um problema fictício. Conforme detalhado na seção 3.2, este modelo utiliza como dados de entrada as matrizes l_{ij} , y_{kt} , w_{ik} e o vetor d_i . Em linha com o trabalho de Ryu *et al.* (2021), que demonstrou um exemplo de aplicação semelhante para o problema de alocação de itens em prateleiras, foram selecionadas instâncias análogas para as matrizes l_{ij} e y_{kt} , com algumas adaptações.

Considerou-se uma plataforma digital de *marketplace* de produtos eletrônicos ou tecnológicos. Como exemplo, foram incluídos os seguintes itens fictícios: *headphone*, *keyboard*, *mouse*, *notebook*, *smartphone* e *speaker*; assim como os seguintes clientes: Amanda, Bernardo, Carol, Daniel, Eduarda e Fernando.

A Tabela 5 apresenta os valores de l_{ij} para o exemplo com seis itens.

Tabela 5 – Exemplo de valores da matriz l_{ij} entre seis itens

Itens	Itens					
	Headphone	Keyboard	Mouse	Notebook	Smartphone	Speaker
Headphone	-	1.6	0	1.3	0	1.2
Keyboard	1.6	-	1.1	1.4	0	1.3
Mouse	0	1.1	-	1.3	1.5	0
Notebook	1.3	1.4	1.3	-	0	1.3
Smartphone	0	0	1.5	0	-	1.3
Speaker	1.2	1.3	0	1.3	1.3	-

Fonte: Adaptado de Ryu *et al.* (2021)

No modelo de Ryu *et al.* (2021), é proposto uma matriz binária y_{kl} para indicar se as posições k e l são vizinhas ou não. Já neste modelo proposto, optou-se por definir uma matriz binária y_{kt} para indicar se os clientes k e t pertencem ao mesmo perfil ou não. Desta forma, a Tabela 6 apresenta os valores de y_{kt} para um exemplo com seis clientes.

Tabela 6 – Exemplo de valores da matriz y_{kt} entre seis clientes

Clientes	Clientes					
	Amanda	Bernardo	Clara	Daniel	Eduarda	Fernando
Amanda	-	1	0	1	0	0
Bernardo	1	-	1	0	1	0
Clara	0	1	-	0	0	1
Daniel	1	0	0	-	1	0
Eduarda	0	1	0	1	-	1
Fernando	0	0	1	0	1	-

Fonte: Adaptado de Ryu *et al.* (2021)

Já em relação a matriz w_{ik} , a Tabela 7 mostra o histórico de compras para o exemplo ilustrativo envolvendo seis itens e seis clientes.

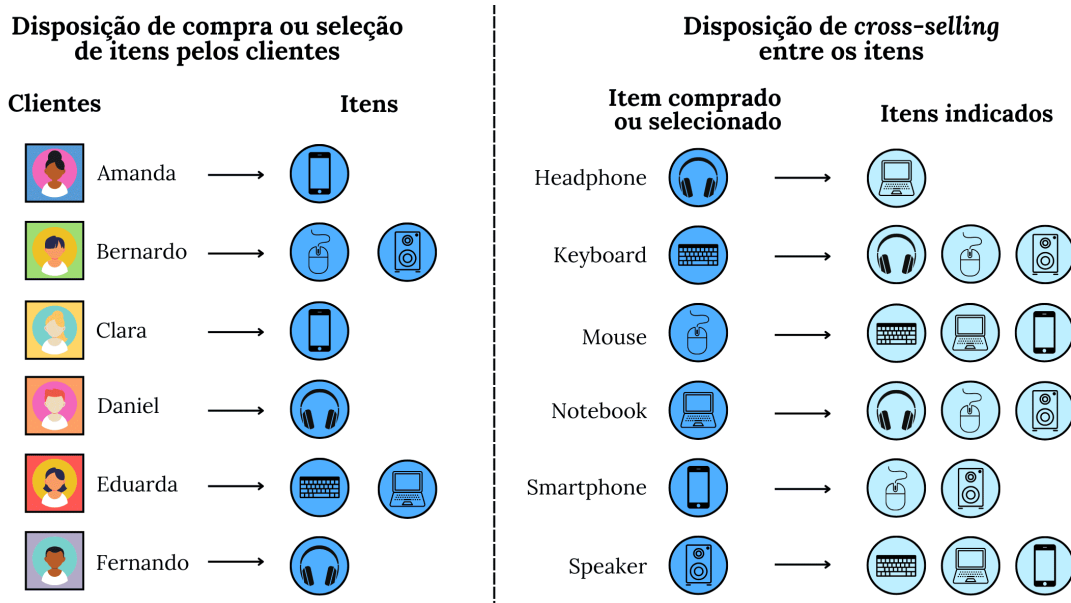
Tabela 7 – Exemplo de valores da matriz w_{ik} entre seis itens e clientes

Itens	Clientes					
	Amanda	Bernardo	Clara	Daniel	Eduarda	Fernando
Headphone	1	0	0	0	0	0
Keyboard	0	0	0	1	0	0
Mouse	0	0	0	0	0	1
Notebook	0	0	0	0	1	0
Smartphone	0	0	1	0	0	0
Speaker	0	1	0	0	0	0

Fonte: Autoria própria (2025).

Por fim, quanto ao vetor de disponibilidade d_i , optou-se por definir 5 unidades para cada item.

A solução ótima para esta instância consiste em encontrar as variáveis de decisão x_{ik} e z_{ij} não nulas que maximizem o modelo. A solução ótima para este exemplo para as variáveis x_{ik} e z_{ij} se encontra na Figura 10. Como é possível observar na Figura 10 a solução encontrada demonstra que cada cliente compra ou seleciona pelo menos um item, em conformidade com as restrições 3.6.

Figura 10 – Disposição de itens comprados ou selecionados pelos clientes

Fonte: Autoria própria (2025).

Por outro lado, ao observar a disposição dos itens comprados ou selecionados e os indicados, é possível notar que os itens *headphone* e *keyboard* aparecem três vezes, enquanto os itens *mouse*, *notebook*, *smartphone* e *speaker* aparecem quatro vezes. Esta distribuição respeita a disponibilidade de cinco unidades para cada item, conforme definido no vetor d_i , conforme as restrições 3.7.

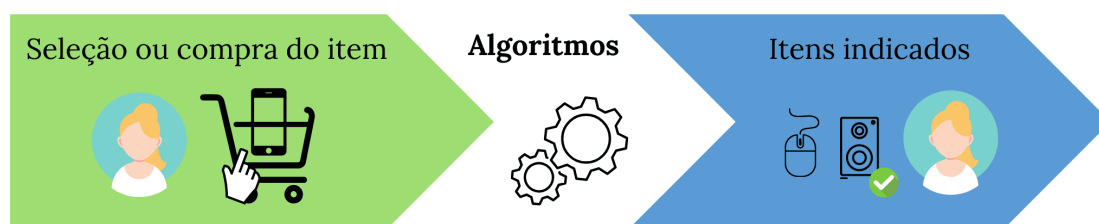
Além disso, é importante destacar que na solução apresentada, apenas foram indicados itens que foram previamente comprados ou selecionados pelos clientes, e vice-versa. Isto está em conformidade com as restrições 3.9 e 3.10, que garantem que a recomendação de *cross-selling* ocorra apenas entre produtos ou serviços que tenham sido comprados ou selecionados por pelo menos um cliente. Além disso, as restrições 3.11 também são respeitadas, já que todo cliente que comprou ou selecionou algum produto ou serviço recebeu ao menos uma indicação.

Paralelamente, as restrições 3.8, que consideram o perfil dos clientes, determinado pela matriz y_{kt} , também foram respeitadas na solução. Por exemplo, ao observar o par de itens *headphone* e *notebook* que formam *cross-selling* na Figura 10, nota-se que o *headphone* foi comprado ou selecionado por Daniel e Fernando e o

notebook por Eduarda. Já na Tabela 6, percebe-se que Eduarda pertence ao mesmo perfil que Daniel e Fernando, embora, estes últimos não pertençam ao mesmo grupo de clientes. Este padrão se repete para os demais pares de itens do *cross-selling*, assegurando que as recomendações considerem as similaridades entre os perfis dos clientes. Já em relação as restrições 3.12, pela Tabela 7 e pela Figura 10 é possível notar que nenhum cliente recebeu a indicação de um item que já comprou anteriormente. Desta forma, a solução encontrada satisfaz todas as restrições do modelo matemático proposto, demonstrando a viabilidade e eficácia do mesmo para a otimização do *cross-selling* em plataformas digitais de *marketplace*.

Para ilustrar o procedimento em uma plataforma digital de *marketplace*, a Figura 11 toma como exemplo a seleção feita por um dos clientes da Figura 10.

Figura 11 – Exemplo de aplicação prática do modelo matemático



Fonte: Autoria própria (2025).

Sempre que um cliente adiciona um ou mais itens ao seu “carrinho” de compras, como sugerido pelas restrições 3.6, o algoritmo, baseado nos dados de entrada e no modelo matemático, irá recomendar produtos ou serviços adicionais. Estas recomendações são feitas levando em consideração o histórico de compras do cliente, o *lift* entre os itens, o estoque disponível e os perfis de clientes. Quanto maior a probabilidade de o cliente se interessar pelos itens sugeridos, maior será sua satisfação com a plataforma, o que, por sua vez, pode gerar um aumento na lucratividade dos fornecedores.

Nos apêndices A e B deste trabalho é possível visualizar as instâncias e os resultados de saída, respectivamente, para esta solução ilustrativa.

4 Mateheurística

Neste capítulo, será apresentado um algoritmo mateheurístico para a resolução do problema formulado no Capítulo 3 deste trabalho, sobre a otimização do *cross-selling* em plataformas digitais de *marketplace*.

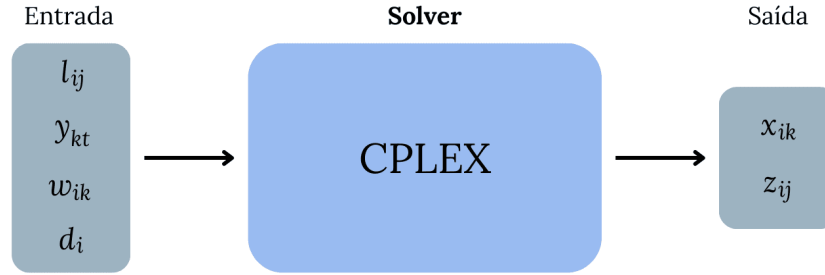
4.1 Introdução

O Capítulo 3 abordou a necessidade de um modelo matemático para a otimização do *cross-selling* em plataformas digitais de *marketplace*, em comparação com os existentes na literatura, conforme analisado no Capítulo 2. Destaca-se a limitação dos modelos presentes nos trabalhos relacionados ao tema, em que se observa que estes, além de estarem mais adaptados a realidades específicas do varejo, não consideram características dos clientes, a fim de realizar uma recomendação de produtos ou serviços mais personalizada e precisa. A revisão desses estudos evidencia a importância de avançar além dos modelos já existentes, buscando abordagens mais apropriadas ao contexto dos *marketplaces* digitais.

Portanto, o modelo matemático proposto no Capítulo 3 pode se destacar como uma ferramenta promissora para aprimorar o uso estratégico do *cross-selling*, proporcionando uma visão mais holística e fundamentada das dinâmicas de compra dos consumidores, ao considerar o histórico de compras e as características individuais dos clientes, bem como as interações entre os produtos ou serviços.

A Figura 12 resume visualmente a abordagem proposta com a utilização de um *solver*, como o CPLEX, para resolução exata do problema.

Figura 12 – Esquema do modelo proposto para a estratégia de otimização do *cross-selling* em *marketplaces* digitais



Fonte: Autoria própria (2025).

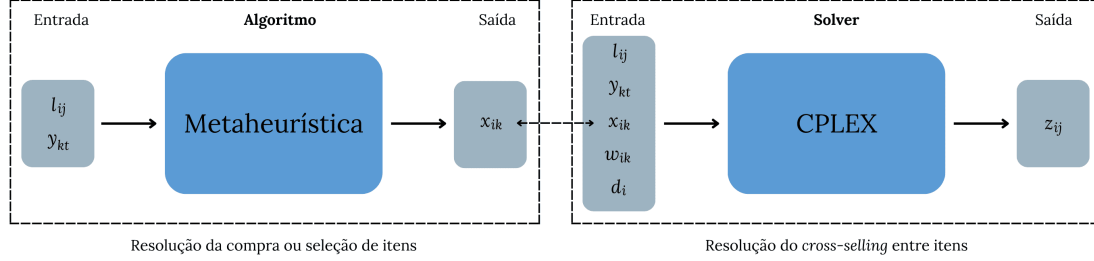
A Figura 12 mostra o problema proposto partindo dos dados de entrada (o *lift*, perfis de clientes, o histórico de compras, e a disponibilidade dos produtos ou serviços), em que por meio do método de resolução exato, resultará como saída uma previsão de compras de produtos ou serviços (x_{ik}) e a recomendação do *cross-selling* (z_{ij}) com base nesta previsão.

No entanto, a aplicação prática desta abordagem poderá enfrentar desafios computacionais devido à alta complexidade do modelo matemático e ao crescimento exponencial do espaço de busca com o aumento de variáveis.

Para lidar com esses desafios, este capítulo propõe uma estratégia híbrida que combina métodos exatos e metaheurísticos, configurando assim uma mateheurística (BOSCHETTI *et al.*, 2009; FISCHETTI; FISCHETTI, 2018; MANIEZZO *et al.*, 2021b). A decomposição do problema, ilustrada na Figura 13, será a base desta abordagem proposta neste trabalho. Neste processo, a resolução das variáveis de decisão é separada em duas etapas:

1. As variáveis x_{ik} (seleção ou compra de itens para cada cliente) serão determinadas por uma metaheurística. Esta etapa inicial buscará explorar o espaço de busca de forma eficiente para encontrar soluções viáveis de x_{ik} .
2. Os valores encontrados heurísticamente de x_{ik} serão utilizados como dado de entrada em um *solver* de resolução exata (como o CPLEX), que encontrará os valores das variáveis z_{ij} , considerando a função objetivo e as restrições do modelo matemático proposto no Capítulo 3.

Figura 13 – Fluxograma do algoritmo mateheurístico para a otimização do *cross-selling* em *marketplaces* digitais pela decomposição do problema



Fonte: Autoria própria (2025).

A metaheurística adotada neste trabalho será o *Simulated Annealing*, utilizando chaves aleatórias (*Random-Key*) como estratégia para a geração da solução inicial. Trabalhos como o de Mangussi *et al.* (2023) também empregaram chaves aleatórias no *Simulated Annealing*. Além disso, múltiplas soluções iniciais serão geradas, caracterizando uma abordagem *multi-start* (VINCENT; LIN, 2014; ALLAHYARI; AZAB, 2018). Por essa razão, este algoritmo será denominado como *Multi-Start Random-Key Simulated Annealing* (MSRKSA).

Desta forma, é fundamental apresentar uma breve explicação sobre estas estratégias, destacando seu papel na construção eficiente da solução inicial e sua integração com as demais partes do algoritmo mateheurístico.

4.2 *Simulated Annealing*

O algoritmo *Simulated Annealing* (SA) é uma metaheurística baseada nos princípios da mecânica estatística, inspirado no processo físico de recozimento de metais (TALBI, 2009). Desde sua introdução por Kirkpatrick *et al.* (1983) e Černý (1985), o SA demonstrou grande versatilidade, sendo aplicado a uma ampla variedade de problemas, como particionamento de grafos (JOHNSON *et al.*, 1989; JOHNSON *et al.*, 1991), problemas de clusterização (BROWN; HUNTLEY, 1992) e roteamento de veículos (CHIANG; RUSSELL, 1996), consolidando-se como uma técnica poderosa na pesquisa heurística.

O processo de recozimento de metais consiste em aquecer uma substância e resfriá-la lentamente para alcançar uma estrutura cristalina estável e forte. No contexto da otimização, o SA busca simular as mudanças de energia de um sistema enquanto este se resfria, de forma que as soluções otimizadas sejam alcançadas por meio de um equilíbrio progressivo (TALBI, 2009).

Uma das principais características do SA é a capacidade de aceitar soluções que não melhoram o valor da função objetivo, desde que obedçam a uma probabilidade dependente da temperatura atual e do grau de degradação da solução. Este mecanismo probabilístico permite que o algoritmo escape de ótimos locais, promovendo uma exploração mais ampla do espaço de busca. A probabilidade de aceitar uma solução pior é regida pela distribuição de Boltzmann (DELAHAYE *et al.*, 2019), descrita pela equação:

$$P(\Delta E, T) = e^{-\Delta E/T}$$

Em que ΔE denota a variação na função objetivo entre a solução vizinha e a atual, enquanto T é a temperatura no momento da iteração.

O algoritmo inicia com a geração de uma solução inicial s_0 e uma temperatura máxima $T_{\max}$. Em cada iteração, uma solução vizinha s' é gerada aleatoriamente, e o valor $\Delta E = f(s') - f(s)$ — para os casos de problemas de minimização — é calculado. Se $\Delta E \leq 0$, a nova solução é automaticamente aceita. Caso contrário, s' será aceita com probabilidade $P(\Delta E, T)$. Após atingir uma condição de equilíbrio para uma temperatura fixa, a temperatura é atualizada por meio de uma função de resfriamento $T = g(T)$, como a redução geométrica ($T = \alpha T$, $0 < \alpha < 1$). Esse processo é repetido até que o critério de parada seja satisfeito, como alcançar uma temperatura mínima $T_{\min}$ (TALBI, 2009).

A eficiência do SA depende dos parâmetros: temperatura inicial, a função de resfriamento, o número de iterações em cada temperatura e os critérios de parada. A escolha cuidadosa destes parâmetros pode balancear a qualidade das soluções encontradas e o tempo computacional necessário para o processo (TALBI, 2009).

Um pseudocódigo genérico do algoritmo é apresentado por Talbi (2009):

Algorithm 1 Template do algoritmo do Simulated Annealing (TALBI, 2009)

Input: Configuração de resfriamento.
 $s = s_0$; /* Geração da solução inicial */
 $T = T_{\max}$; /* Temperatura inicial */

repeat
 repeat /* A uma temperatura fixa */
 Gerar um vizinho aleatório s' ;
 $\Delta E = f(s') - f(s)$;
 if $\Delta E \leq 0$ **then**
 $s = s'$ /* Aceita a solução vizinha */
 else
 Aceita s' com probabilidade $e^{-\Delta E/T}$;
 until Condição de equilíbrio
 /* ex.: um número fixo de iterações executado em cada temperatura T */
 $T = g(T)$; /* Atualização da temperatura */
until Critério de parada satisfeito /* ex.: $T < T_{\min}$ */

Output: Melhor solução encontrada.

4.3 Solução inicial

Como descrito na seção anterior (4.2), o algoritmo SA opera com uma única solução inicial, que deve ser não apenas viável, mas também suficientemente boa. No contexto deste trabalho, o algoritmo MSRKSA utilizará chaves aleatórias para gerar múltiplas soluções iniciais, todas seguindo a mesma lógica de construção. A seguir, apresenta-se uma breve explicação sobre esse procedimento.

4.3.1 Random-Key Optimizer

O paradigma de chaves aleatórias, introduzido por Bean (1994) no contexto dos *Random-Key Genetic Algorithms* (RKGA), representa soluções por vetores de números reais no intervalo contínuo $[0, 1)$. Um decodificador específico converte esses vetores em soluções factíveis no espaço discreto do problema, permitindo a avaliação por meio de uma função objetivo.

O RKGA tem sido amplamente utilizado pela simplicidade com que aborda problemas complexos. Pinheiro *et al.* (2016) aplicaram-no ao problema de *nesting*, integrando regras de posicionamento *bottom-left* e um algoritmo de compactação para minimizar o comprimento de um espaço retangular. Por sua vez, Lei (2010) utilizou o RKGA para problemas de escalonamento *job shop* com tempos de processamento e prazos *fuzzy*, otimizando o índice de concordância e o tempo de conclusão. Avanços como o *Biased Random-Key Genetic Algorithm* (BRKGA), proposto por Gonçalves e Resende (2011), incorporaram seleção enviesada de soluções. Martinez *et al.* (2011) aplicaram o BRKGA ao *Capacitated Arc Routing Problem* (CARP), enquanto Chaves *et al.* (2015) o combinaram com *clustering search* para minimizar trocas de ferramentas. De qualquer forma, tanto o RKGA quanto o BRKGA são algoritmos independentes do problema, pois há uma separação clara entre o solucionador e o problema. A conexão entre ambos é feita por meio de decodificador, que é implementado de forma específica para cada problema (CHAVES *et al.*, 2024).

Desta forma, o conceito de *Random-Key Optimizer* (RKO) foi introduzido por Schuetz *et al.* (2022), que aplicaram o princípio das chaves aleatórias à metaheurística *Dual Annealing*. A ideia central das chaves aleatórias está na representação das soluções em um espaço contínuo. Para isso, é gerado um vetor $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$, em que n representa o número de variáveis. Este vetor é processado por um decodificador $D(\mathbf{x})$, que o transforma em uma solução viável no espaço discreto do problema. A avaliação da solução é realizada por meio da função objetivo $f(D(\mathbf{x}))$. Este processo possibilita uma distinção clara entre o método de solução (a heurística) e o problema específico (definido pelo decodificador). Autores como Mangussi *et al.* (2023) e Chaves *et al.* (2024) propõem a extensão do conceito de chaves aleatórias para outras heurísticas e/ou metaheurísticas, evidenciando sua versatilidade e potencial de aplicação em diferentes contextos:

- *Traveling Salesman Problem* (TSP): cidades representadas por chaves aleatórias; a ordem crescente define a rota. Heurísticas como inserção mais barata geram soluções eficientes (CHAVES; LORENA, 2021).
- *Network Capacitated Graph Partitioning Problem* (NCGPP): chaves alocam

nós em *clusters*, respeitando capacidades e minimizando custos de comunicação (FERREIRA *et al.*, 1998; DENG; BARD, 2011).

- *Hub Location on Trees Problem* (THLP): vetor de chaves representa nós, associações e arestas. A decodificação usa o algoritmo de Kruskal (PESSOA *et al.*, 2017).
- *Two-Level Hub Location and Routing Problem with Directed Tours* (THLRP-DT): chaves ordenadas definem *hubs* e *spokes*; seleção ajustada por reparação e avaliada por via função *fitness* (FREITAS *et al.*, 2023).

Portanto, esta estratégia pode ser aplicada de forma independente do problema em questão. A seguir, será explicado como este trabalho utilizará chaves aleatórias para gerar múltiplas soluções iniciais referente à compra ou seleção de produtos ou serviços pelos clientes (x_{ik}).

4.3.2 Gerando solução inicial para compra ou seleção de itens

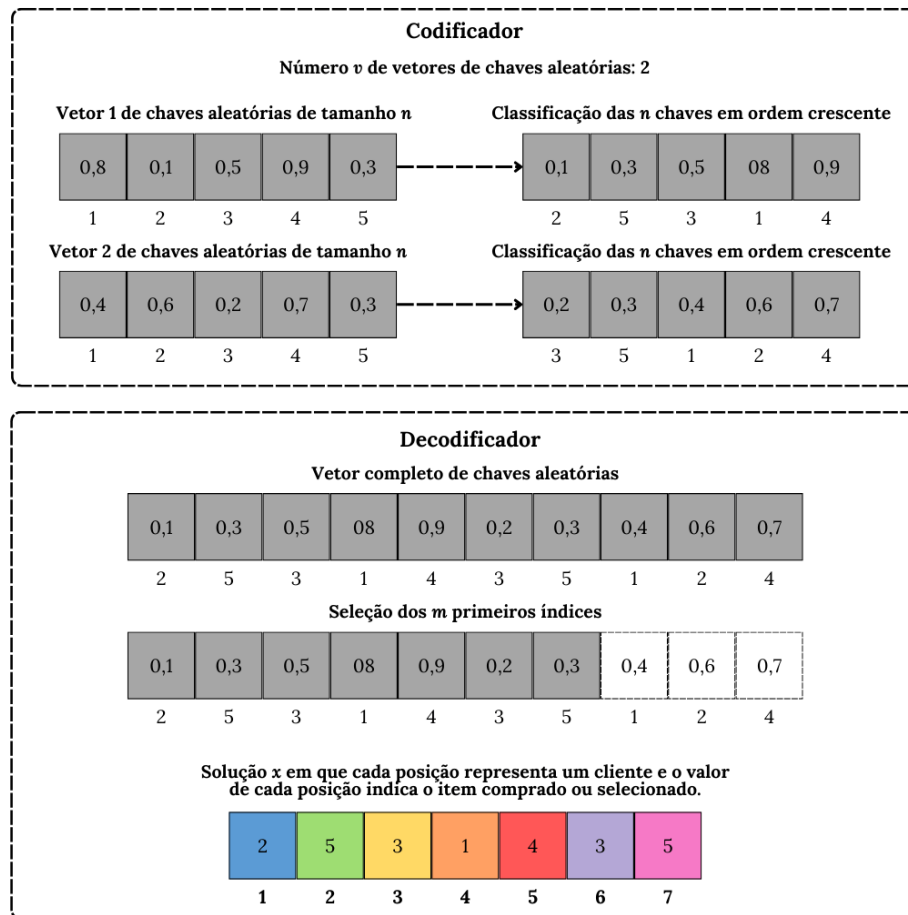
Com base na ideia apresentada na subseção 4.3.1 sobre chaves aleatórias, esta subseção descreve como o codificador e o decodificador são implementados para gerar as soluções iniciais x_{ik} do problema proposto.

A ideia central do algoritmo proposto para cada solução inicial é gerar um vetor solução para x_{ik} , em que cada posição deste vetor representará um cliente k e o valor em cada posição corresponderá ao item i escolhido ou comprado por cada cliente. A proposta apresentada neste trabalho considera o número de produtos ou serviços (n) em relação ao número de clientes (m).

Quando o número de produtos ou serviços (n) for menor que o número de clientes (m), múltiplos vetores de chaves aleatórias serão gerados para distribuir os itens entre os clientes. O número total de vetores (v) a ser gerado é determinado pela parte inteira do quociente entre o número de clientes (m) e o número de itens (n). Caso a divisão não seja exata, ou seja, quando m não for múltiplo de n , acrescenta-se uma unidade ao valor inteiro da divisão, resultando em $v = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1$. Este procedimento garante que todos os clientes sejam atendidos, mesmo quando o número de produtos ou serviços disponíveis for inferior ao número de clientes.

No exemplo da Figura 14, temos $n = 5$ produtos ou serviços e $m = 7$ clientes. Portanto, o número de vetores gerados será $v = 2$, já que $\lfloor \frac{7}{5} \rfloor + 1 = 2$. Cada vetor gerado de chaves aleatórias terá tamanho $n = 5$, correspondendo aos n produtos ou serviços disponíveis. Após ordená-los pelas chaves aleatórias, seus índices serão concatenados, formando, ao final, um vetor único para a solução x_{ik} .

Figura 14 – Exemplo de alocação de produtos ou serviços quando $n < m$



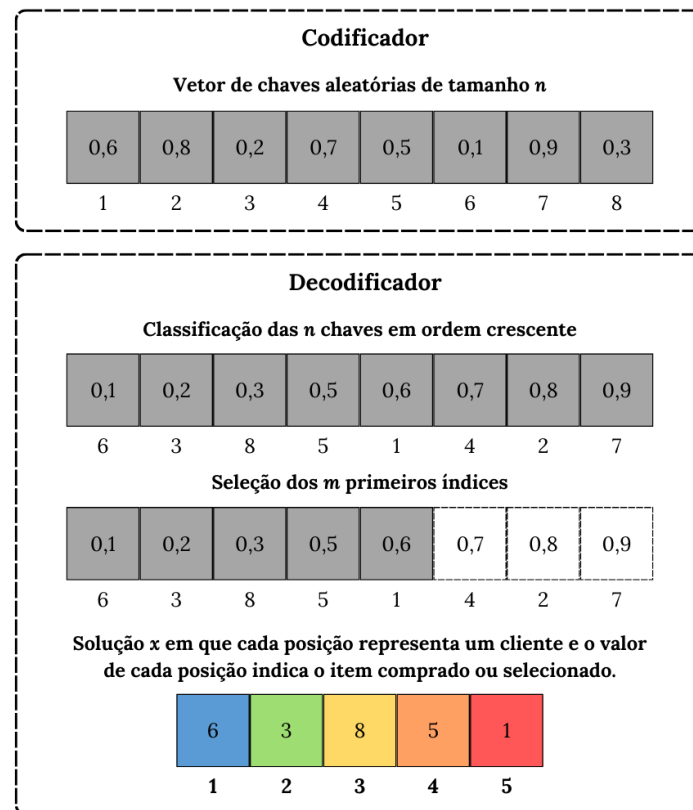
Fonte: Autoria própria (2025).

A seguir, para gerar a solução final, os primeiros $m = 7$ índices deste vetor concatenado serão selecionados. Na solução apresentada na Figura 14, cada cor representa uma posição do vetor ou um cliente e cada valor na posição ou no cliente, o produto ou serviço selecionado ou comprado pelo mesmo.

Já quando o número de produtos ou serviços (n) é maior ou igual ao número de clientes (m), a distribuição dos itens se torna mais simples. Neste caso, um único vetor de chaves aleatórias será gerado contendo n posições, correspondente aos n produtos ou serviços disponíveis. Este vetor de chaves aleatórias será então ordenado e os primeiros m itens serão atribuídos aos clientes.

No exemplo mostrado na Figura 15, temos $n = 8$ produtos ou serviços e $m = 5$ clientes. Neste caso, um único vetor de chaves aleatórias é gerado com 8 posições. Após gerar o vetor, ele é ordenado e os primeiros 5 índices são utilizados para atribuir os produtos ou serviços aos clientes.

Figura 15 – Exemplo de alocação de produtos ou serviços quando $n \geq m$



Fonte: Autoria própria (2025).

4.3.3 Função *generateSolution*

A função *generateSolution* é responsável por gerar cada solução inicial para a seleção ou compra de itens pelos clientes, utilizando as chaves aleatórias conforme explicado nas subseções anteriores. A função recebe como entrada o número de produtos ou serviços (n), o número de clientes (m) e a disponibilidade dos produtos (d). Ela retorna a solução gerada (x), a lista de itens não escolhidos (*unItems*) e a disponibilidade dos itens atualizada (d').

O funcionamento da função *generateSolution* garante que cada cliente receba exatamente um produto ou serviço. As restrições 3.6 do modelo matemático apresentado no Capítulo 3 estabelece que cada cliente deve selecionar ou comprar ao menos um item. Para tanto, a seleção de produtos ou serviços adicionais, além do mínimo exigido, será determinada nas estruturas de vizinhança utilizadas, que serão detalhadas na próxima seção.

Além disso, quando $n \geq m$, os produtos ou serviços que não foram selecionados na construção da solução inicial serão armazenados na lista *unItems*. Estes itens poderão ser utilizados posteriormente em uma das estratégias de geração de solução vizinha, permitindo uma redistribuição, conforme necessário.

O algoritmo da função *generateSolution* pode ser descrito de maneira mais detalhada, conforme segue abaixo:

Algorithm 2 generateSolution (n, m, d')

```

1:  $unItems \leftarrow []$ ; // Inicializa uma lista vazia para armazenar os itens não escolhidos
2:  $x \leftarrow []$ ; // Inicializa a solução como um vetor vazio de tamanho  $m$ 
3:
4: if  $n < m$  then
5:    $v = \lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ ;
6:   if  $m/n \neq 0$  then
7:      $v \leftarrow v + 1$ ;
8:   end if
9:    $vetor\_itens \leftarrow []$ ; // Inicializa uma lista vazia para guardar os itens
10:  for  $h \leftarrow 1$  to  $v$  do
11:     $RK\_h \leftarrow []$ ; // Inicializa um vetor vazio de chaves aleatórias de tamanho  $n$ 
12:     $vetor\_h \leftarrow [1, \dots, n]$ ;
13:    for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
14:      Gere um número aleatório  $p \in [0, 1)$ ;
15:       $RK\_h[i] \leftarrow p$ ;
16:    end for
17:    Ordene  $vetor\_h$  com base nos valores de  $RK\_h$ ;
18:    Adicione  $vetor\_h$  ao final de  $vetor\_itens$ ;
19:  end for
20:  for  $k \leftarrow 1$  to  $m$  do
21:     $x[k] \leftarrow [vetor\_itens[k]]$ ;
22:     $d'[vetor\_itens[k]] \leftarrow d'[vetor\_itens[k]] - 1$ ;
23:  end for
24:
25: else
26:    $RK \leftarrow []$ ; // Inicializa um vetor vazio de chaves aleatórias de tamanho  $n$ 
27:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
28:     Gere um número aleatório  $p \in [0, 1)$ ;
29:      $RK[i] \leftarrow p$ ;
30:   end for
31:    $vetor\_itens \leftarrow [1, \dots, n]$ ;
32:   Ordene  $vetor\_itens$  com base nos valores em  $RK$ ;
33:   for  $k \leftarrow 1$  to  $m$  do
34:      $x[k] \leftarrow [vetor\_itens[k]]$ ;
35:      $d'[vetor\_itens[k]] \leftarrow d'[vetor\_itens[k]] - 1$ ;
36:   end for
37:   for  $k \leftarrow m + 1$  to  $n$  do
38:     Acrescente  $vetor\_itens[k]$  a  $unItems$ ;
39:   end for
40: end if
41:
42: return  $x, unItems, d'$ ;

```

É importante ressaltar que variáveis binárias — como o caso da variável x_{ik} — podem ser representadas como vetores ou matrizes (TALBI, 2009; MANIEZZO *et al.*, 2021a). Por exemplo, a solução x da Figura 15 pode ser representada como vetor ou matriz binária, respectivamente, da seguinte forma:

$$x = (6, 3, 8, 5, 1) \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada linha i corresponde a um produto ou serviço e cada coluna k da matriz corresponde a um cliente, que recebe o valor 1 na linha i correspondente ao elemento i de sua posição k no vetor.

Neste trabalho, optou-se por utilizar a forma de vetores, pois esta representação facilitou a manipulação e análise das variáveis binárias, tornando o processo de modelagem mais eficiente e compreensível.

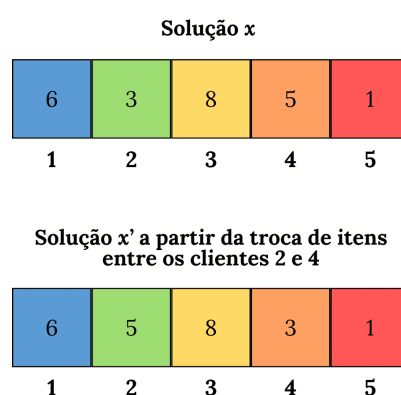
4.4 Estruturas de vizinhança

Após a geração de cada solução inicial — conforme apresentado na subseção 4.3.3 —, faz-se necessário explorar o espaço de busca por meio da geração de soluções vizinhas, etapa fundamental no SA. As estruturas de vizinhança realizam variações incrementais na solução corrente que permitem escapar de ótimos locais, promovendo uma busca mais abrangente por soluções de melhor qualidade (TALBI, 2009). Para este trabalho, quatro estratégias foram definidas para a geração de soluções vizinhas no MSRKSA: troca, duplicação, adição e remoção de itens. Cada estratégia busca explorar diferentes possibilidades de reconfiguração da solução, buscando intensificar o espaço de busca.

4.4.1 Trocar itens de dois clientes escolhidos aleatoriamente

A primeira estratégia consiste na troca de itens entre dois clientes escolhidos aleatoriamente. Esta abordagem visa redistribuir os produtos ou serviços já selecionados ou comprados, que podem ou não melhorar a qualidade da solução em termos de *cross-selling*, sem modificar a quantidade ou os itens envolvidos. No exemplo ilustrado na Figura 16, os itens alocados aos clientes 2 e 4 são trocados, gerando a solução vizinha x' .

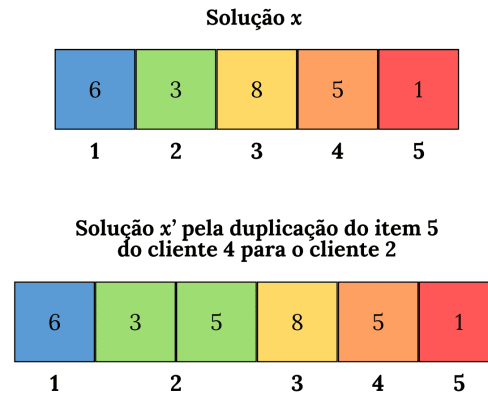
Figura 16 – Exemplo de troca de itens entre dois clientes aleatórios



Fonte: Autoria própria (2025).

4.4.2 Duplicar um item de um cliente em outro

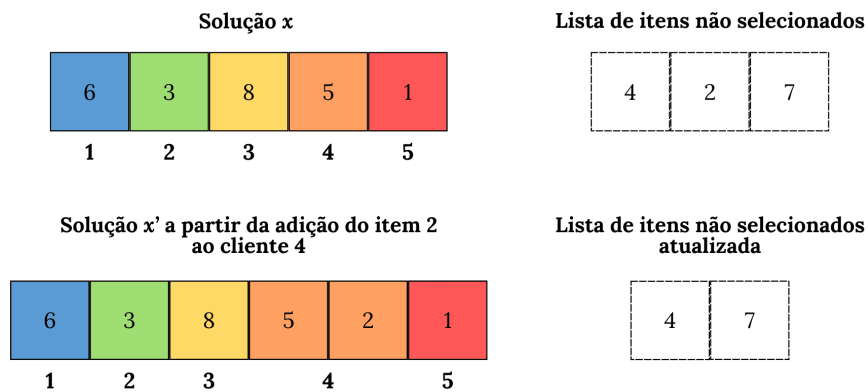
A segunda estratégia realiza a duplicação de um item pertencente a um cliente em outro cliente aleatório. Este mecanismo introduz um elemento de redundância controlada na solução, o que pode aumentar as oportunidades de *cross-selling* ao repetir produtos ou serviços populares ou estratégicos. Afinal, no modelo matemático apresentado no Capítulo 3 não há nada que impeça de um mesmo produto ou serviço ser comprado ou selecionado mais de uma vez, desde que se respeite sua disponibilidade. A Figura 17 ilustra a duplicação do item 5 do cliente 4 para o cliente 2, gerando uma nova solução x' .

Figura 17 – Exemplo de duplicação de itens de um cliente para outro

Fonte: Autoria própria (2025).

4.4.3 Inserir um item não escolhido em um cliente aleatório

Nesta estratégia, um item não pertencente a solução atual x é inserido em um cliente aleatório, aumentando a diversidade das combinações de *cross-selling*. No exemplo apresentado na Figura 18, o item 2, que ainda não havia sido selecionado ou comprado, é atribuído ao cliente 4, criando a solução vizinha x' . Esta inserção é condicionada à disponibilidade do item, respeitando a restrição de estoque.

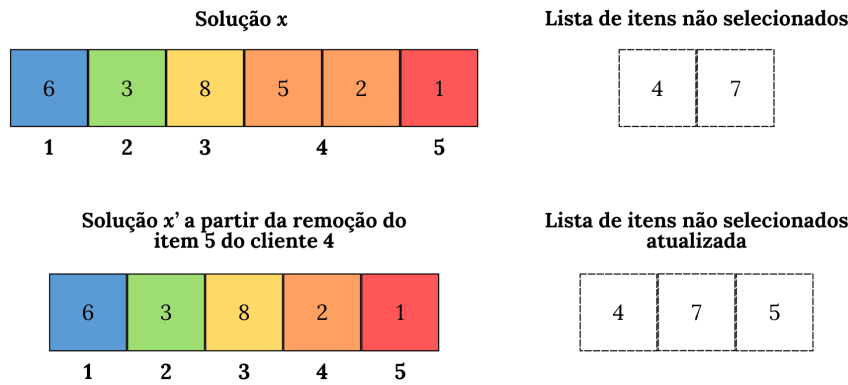
Figura 18 – Exemplo de inserção de um item não escolhido em um cliente aleatório

Fonte: Autoria própria (2025).

4.4.4 Remover um item aleatório de um cliente

Por fim, a quarta estratégia consiste em remover aleatoriamente um item de um cliente, desde que a restrição 3.6 seja respeitada, ou seja, o cliente selecionado deve permanecer com pelo menos um produto ou serviço. O item removido é então adicionado à lista de itens não selecionados. A Figura 19 exemplifica esta estratégia, removendo o item 5 do cliente 4, resultando em uma solução vizinha x' .

Figura 19 – Exemplo de remoção de um item aleatório de um cliente



Fonte: Autoria própria (2025).

4.4.5 Função *generateNeighborSolution*

A função *generateNeighborSolution* será a responsável no algoritmo MSRKSA por criar uma solução vizinha x' a partir da solução atual x , permitindo a exploração do espaço de busca de maneira controlada. Para alcançar este objetivo, o algoritmo executa uma das quatro estratégias descritas anteriormente nas subseções 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3 e 4.4.4.

Antes de tudo, a função *generateNeighborSolution* recebe como parâmetros a solução atual x , a lista *unItems* de itens não escolhidos e disponibilidade atualizada d' dos produtos ou serviços.

Inicialmente, a função cria uma cópia da solução atual x , chamada x' , para que as alterações realizadas não modifiquem diretamente a solução original. Em seguida, uma das quatro estratégias é selecionada aleatoriamente, por meio de um

valor inteiro *strategy*, escolhido no intervalo $\{1, 2, 3, 4\}$.

Na primeira estratégia, são escolhidos aleatoriamente dois clientes *client1* e *client2*, e os produtos ou serviços selecionados ou comprados de cada são trocados.

A segunda estratégia consiste em selecionar um cliente (*clientIndex*) aleatoriamente e duplicar um de seus itens (*itemToDuplicate*), atribuindo-o a outro cliente (*targetClient*), também escolhido de forma aleatória. Esta duplicação é permitida somente se forem atendidas as seguintes condições: os clientes selecionados devem ser distintos, o item não pode ter sido comprado nem estar em processo de compra pelo cliente, e a quantidade disponível em estoque d' deve ser maior que zero. Ao final do processo, a disponibilidade d' do item duplicado é devidamente atualizada.

Caso existam itens não selecionados ou comprados na solução x , a terceira estratégia escolhe aleatoriamente um destes produtos ou serviços (*itemToInsert*) presente na lista *unItems* e o atribui a um cliente (*targetClient*) aleatório, desde que o item esteja disponível, isto é, que sua quantidade em estoque d' seja maior que zero. Ao final, a lista *unItems* bem como a disponibilidade d' do produto ou serviço também deverá ser atualizada.

Por fim, a quarta estratégia remove aleatoriamente um item (*itemToRemove*) de um cliente (*clientIndex*), desde que este cliente possua mais de um produto ou serviço. O item removido é adicionado à lista *unItems*, liberando-o para ser utilizado em futuras iterações. Além disso, sua disponibilidade d' é atualizada.

Como a segunda, terceira e quarta estratégias possuem condições específicas para serem aplicadas, o algoritmo verifica, durante a execução, se alguma delas foi utilizada com sucesso. Quando isso ocorre, a variável *strategyApplied* é marcada como *true*. Caso contrário, ou seja, se nenhuma das estratégias condicionais for aplicada, a variável permanece como *false*, e o algoritmo executa a primeira estratégia — que não impõe restrições —, garantindo, assim, que uma nova solução seja sempre gerada a cada iteração.

Após a execução da estratégia escolhida, a função *generateNeighborSolution* retornará à solução vizinha x' , a lista atualizada *unItems* de itens não escolhidos e a disponibilidade d' atualizada. O funcionamento do algoritmo da função *generateNeighborSolution* pode ser descrito da seguinte maneira:

Algorithm 3 generateNeighborSolution(x , $unItems$, d')

```

1: Inicialize um novo vetor dinâmico de vetores  $x'$  a partir de  $x$ ;
2: Selecione aleatoriamente  $strategy$  como um número inteiro  $\in \{1, \dots, 4\}$ ;
3:  $strategyApplied \leftarrow false$ ;
4:
5: switch  $strategy$  do
6:
7:   // Estratégia 1: Trocar itens de dois clientes escolhidos aleatoriamente
8:   case 1
9:     Escolha um índice inteiro  $client1 \in \{1, \dots, m\}$  aleatoriamente;
10:    Escolha um índice inteiro  $client2 \in \{1, \dots, m\}$  aleatoriamente, com  $client2 \neq client1$ ;
11:    Troque  $x'[client1]$  e  $x'[client2]$ ;
12:     $strategyApplied \leftarrow true$ ;
13:
14:   // Estratégia 2: Duplicar um item de um cliente em outro
15:   case 2
16:     Escolha um índice inteiro  $clientIndex \in \{1, \dots, m\}$  aleatoriamente;
17:     Defina  $itemToDuplicate$  como um item aleatório de  $x'[clientIndex]$ ;
18:     Escolha um índice inteiro  $targetClient \in \{1, \dots, m\}$  aleatoriamente;
19:     if  $targetClient \neq clientIndex$  and  $itemToDuplicate \notin x'[targetClient]$  and
        $d'(itemToDuplicate) > 0$  then
20:       Adicione  $itemToDuplicate$  a  $x'[targetClient]$ ;
21:        $d'(itemToDuplicate) \leftarrow d'(itemToDuplicate) - 1$ ;
22:        $strategyApplied \leftarrow true$ ;
23:     end if
24:
25:   // Estratégia 3: Inserir um item não escolhido em um cliente aleatório
26:   case 3
27:     if  $unItems \neq \emptyset$  then
28:       Selecione um  $itemToInsert \in unItems$  aleatoriamente;
29:       Escolha um índice inteiro  $targetClient \in \{1, \dots, m\}$  aleatoriamente;
30:       if  $d'(itemToInsert) > 0$  then
31:         Adicione  $itemToInsert$  a  $x'[targetClient]$ ;
32:         Remova  $itemToInsert$  de  $unItems$ ;
33:          $d'(itemToInsert) \leftarrow d'(itemToInsert) - 1$ ;
34:          $strategyApplied \leftarrow true$ ;
35:       end if
36:     end if
37:
38:   // Estratégia 4: Remover um item aleatório de um cliente
39:   case 4
40:     Escolha um índice inteiro  $clientIndex \in \{1, \dots, m\}$  aleatoriamente;
41:     if  $|x'[clientIndex]| > 1$  then
42:       Selecione um  $itemToRemove \in x'[clientIndex]$  aleatoriamente;
43:       Remova  $itemToRemove$  de  $x'[clientIndex]$ ;
44:       Adicione  $itemToRemove$  a  $unItems$ ;
45:        $d'(itemToRemove) \leftarrow d'(itemToRemove) + 1$ ;
46:        $strategyApplied \leftarrow true$ ;
47:     end if
48:
49:   // Se nenhuma solução for gerada, força a estratégia 1
50:   if  $strategyApplied \neq true$  then
51:     Escolha um índice inteiro  $client1 \in \{1, \dots, m\}$  aleatoriamente;
52:     Escolha um índice inteiro  $client2 \in \{1, \dots, m\}$  aleatoriamente, com  $client2 \neq client1$ ;
53:     Troque  $x'[client1]$  e  $x'[client2]$ ;
54:   end if
55:
56: return  $x'$ ,  $unItems$ ,  $d'$ ;

```

4.5 Algoritmo MSRKSA para otimização do *cross-selling* em *marketplaces* digitais

Após a descrição detalhada das funções responsáveis pela geração da solução inicial (*generateSolution*) e pela geração da solução vizinha (*generateNeighborSolution*), passa-se agora à explicação do algoritmo MSRKSA proposto neste trabalho. Esse algoritmo utiliza as variáveis e constantes descritas na Tabela 8.

Tabela 8 – Descrição das variáveis e constantes utilizadas no algoritmo MSRKSA

Variável	Descrição
l	Matriz do <i>lift</i> entre os produtos ou serviços.
y	Matriz binária de perfis entre os clientes.
w	Matriz binária de histórico de compras.
d	Vetor de disponibilidades dos produtos ou serviços.
d'	Vetor de disponibilidades dos produtos ou serviços atualizada.
n	Número de produtos ou serviços.
m	Número de clientes.
$unItems$	Lista de produtos ou serviços não selecionados ou comprados.
x	Solução atual de x .
z	Solução atual de z .
$f(z)$	Custo atual de z .
x'	Solução vizinha de x .
z'	Solução vizinha de z .
$f(z')$	Custo atual de z' .
x^*	Melhor solução de x para o problema.
z^*	Melhor solução de z para o problema.
$f(z^*)$	Melhor custo de z para o problema.
T	Temperatura de controle.
$T_{\max}$	Temperatura máxima.
$T_{\min}$	Temperatura mínima.
k	Variável que controlará o número de iterações.
$k_{\max}$	Número máximo de iterações por temperatura.
ΔE	Diferença de energia ou valores entre as soluções atual e vizinha.
$rand$	Número aleatório entre 0 e 1, utilizado na probabilidade de aceitação da solução em caso de piora.
α	Parâmetro usado na função de decaimento da temperatura.

Desta forma, a mateheurística MSRKSA recebe como dados de entrada:

- A matriz l : o *lift* entre os produtos ou serviços;
- A matriz binária y : indica os perfis de clientes;
- A matriz binária w : indica o histórico de compras;
- O vetor d : a disponibilidade total dos produtos ou serviços;
- n e m : correspondem, respectivamente, ao número total de produtos ou serviços e ao número total de clientes considerados no problema.

O controle do processo de resfriamento é realizado pelos parâmetros próprios da metaheurística SA:

- $T_{\max}$: a temperatura máxima inicial;
- $T_{\min}$: a temperatura mínima para encerramento das iterações;
- α : utilizado para reduzir gradualmente a temperatura em cada ciclo;
- $k_{\max}$: o número máximo de iterações para cada valor de temperatura.

Inicialmente, o algoritmo gera vetores vazios para armazenar as melhores soluções x^* e z^* do problema. Além disso, o melhor custo $f(z^*)$ é inicialmente atribuído o valor zero, e a temperatura T recebe o seu valor máximo $T_{\max}$.

De forma geral, o algoritmo MSRKSA segue uma estrutura de um processo de resfriamento simulado, com dois laços aninhados: um externo e um interno. O laço externo inicia gerando uma solução inicial, enquanto o laço interno busca aprimorá-la ao longo de $k_{\max}$ iterações. Ao término de cada ciclo interno, a temperatura é reduzida pelo fator α . Esse processo se repete até que a temperatura T atinja seu limite mínimo $T_{\min}$. Consequentemente, diferentes soluções iniciais são geradas ao longo da execução do algoritmo.

De forma detalhada, quando o algoritmo entra no laço externo uma solução de x é gerada por meio da função *generateSolution* (Algoritmo 2). Além disso,

também são geradas a lista *unItems* de itens não selecionados, e a disponibilidade d' atualizada. Em seguida, calcula-se a solução de z e o seu valor $f(z)$ chamando a função do algoritmo exato *solveModel* a partir da solução x gerada.

A função *solveModel* recebe os dados de entrada do problema (l, y, w, d, n, m e a solução x) para calcular a solução exata com base no modelo matemático descrito no Capítulo 3. Optou-se por não incluir a restrição 3.11 na resolução exata, pois, como x é fornecido como dado de entrada, a restrição torna-se redundante e poderia gerar inconsistências ou erros na execução. Se o custo $f(z)$ da nova solução for superior ao custo $f(z^*)$ da melhor solução encontrada até o momento, as soluções x^* e z^* , bem como o custo $f(z^*)$, são atualizados.

Para cada temperatura T , um número máximo de iterações $k_{\max}$ é executado. A cada iteração, o algoritmo gera uma nova solução vizinha x' a partir da solução atual x , utilizando a função *generateNeighborSolution* (Algoritmo 3). O vetor *unItems* e o vetor de disponibilidades d' são também atualizados com a nova solução gerada. A solução z' e custo $f(z')$ são obtidos através da função *solveModel*. A diferença de energia entre a solução atual z e a nova solução z' — já que se trata de um problema de maximização — é dada por ΔE .

A aceitação da nova solução depende da condição de resfriamento. Se $\Delta E \leq 0$, ou seja, se a nova solução é melhor ou igual à solução atual, ela é aceita imediatamente. Caso contrário, a solução z' somente será aceita com uma probabilidade que depende da temperatura T . Esta probabilidade é dada por $\Delta E/T > \text{rand} \in [0, 1]$, em que rand é um número aleatório entre 0 e 1. Se a nova solução for aceita, a solução atual x é atualizada, z' passa a ser a nova solução de z e o valor de $f(z)$ é devidamente ajustado. Se o custo da nova solução z for superior ao da melhor solução encontrada z^* , ou seja, $f(z) > f(z^*)$, a solução x se torna a melhor solução x^* e a solução z^* e o custo $f(z^*)$ são atualizados.

Ao final de cada ciclo do laço interno, a temperatura T é atualizada multiplicando-a pelo fator α , o que reduz gradualmente a temperatura e aumenta a probabilidade de aceitar soluções melhores à medida que o processo avança. O laço de repetição continua até que a temperatura atinja o valor mínimo $T_{\min}$, momento em que o algoritmo retorna as melhores soluções x^* e z^* , além do custo $f(z^*)$.

Abaixo está o pseudocódigo detalhado do algoritmo MSRKSA:

Algorithm 4 MSRKSA($l, y, w, d, n, m, T_{\max}, T_{\min}, \alpha, k_{\max}$)

```

1:  $x^*, z^* \leftarrow []$ ; // Inicializa vetores vazios para armazenar  $x^*$  e  $z^*$ 
2:  $f(z^*) \leftarrow 0$ ;
3:  $T \leftarrow T_{\max}$ ; // Temperatura recebe o valor da temperatura máxima
4:
5: while  $T > T_{\min}$  do
6:   // Solução inicial
7:    $d' \leftarrow d$ ;
8:    $x, unItems, d' \leftarrow \text{generateSolution}(n, m, d)$ ;
9:    $z, f(z) \leftarrow \text{solveModel}(l, y, w, d, n, m, x)$ ;
10:
11:   if  $f(z) > f(z^*)$  then
12:      $x^* \leftarrow x$ ;
13:      $z^* \leftarrow z$ ;
14:      $f(z^*) \leftarrow f(z)$ ;
15:   end if
16:
17:   for  $k \leftarrow 1$  to  $k_{\max}$  do
18:     // Solução vizinha
19:      $x', unItems, d' \leftarrow \text{generateNeighborSolution}(x, unItems, d')$ ;
20:      $z', f(z') \leftarrow \text{solveModel}(l, y, w, d, n, m, x')$ ;
21:      $\Delta E \leftarrow f(z) - f(z')$ ;
22:
23:     if  $\Delta E \leq 0$  or  $\frac{\Delta E}{T} > \text{rand} \in [0, 1]$  then
24:        $x \leftarrow x'$ ;
25:        $z \leftarrow z'$ ;
26:        $f(z) \leftarrow f(z')$ ;
27:
28:       // Caso tenha encontrado uma melhor solução
29:       if  $f(z) > f(z^*)$  then
30:          $x^* \leftarrow x$ ;
31:          $z^* \leftarrow z$ ;
32:          $f(z^*) \leftarrow f(z)$ ;
33:       end if
34:
35:     end if
36:
37:   end for
38:
39:    $T \leftarrow T \cdot \alpha$ ; // Temperatura atualizada
40:
41: end while
42: return  $x^*, z^*, f(z^*)$ ;

```

Portanto, a metaheurística MSRKSA foi desenvolvida para combinar a flexibilidade do *Simulated Annealing* com a eficiência de um modelo exato, permitindo uma busca mais eficaz por soluções de alta qualidade, aliada ao uso de chaves aleatórias e a abordagem *multi-start*. A estrutura de controle da temperatura e a atualização das variáveis em cada iteração permitem uma exploração gradual do espaço de soluções, ajustando-se às características do problema. Ressalta-se a importância da calibração dos parâmetros utilizados neste algoritmo. A validação de sua eficácia será realizada por meio de testes computacionais, que permitirão avaliar seu desempenho em comparação a outras abordagens, como a resolução puramente exata.

5 Testes Computacionais

Este capítulo apresenta os resultados de testes computacionais para o método exato e para a metaheurística do problema de otimização do *cross-selling* em plataformas digitais de *marketplace*. O CPLEX foi utilizado para obter a solução exata do modelo proposto, e o algoritmo metaheurístico MSRKSA foi implementado para fornecer uma solução aproximada para as instâncias geradas. Ambos os métodos foram implementados utilizando a linguagem C++.

5.1 Introdução

Para a avaliação do problema proposto, 45 instâncias pequenas foram geradas, respeitando suas características específicas da seguinte maneira:

- As matrizes l_{ij} foram geradas aleatoriamente por números reais de 0 a 5, conforme o esquema de instâncias do trabalho de Sah *et al.* (2019), respeitando à condição de diagonal principal nula, simetria em relação a esta diagonal, de acordo com o número n de produtos ou serviços.
- As matrizes y_{kt} foram geradas aleatoriamente por 0 e 1, seguindo a condição de diagonal principal nula, simetria em relação a esta diagonal, de acordo com o número m de clientes.
- As matrizes w_{ik} foram geradas aleatoriamente por 0 e 1;
- Os vetores d_i foram gerados com base em três níveis de disponibilidade dos produtos ou serviços: baixa, média e alta. As quantidades correspondentes foram fixadas em 5, 10 e 15 unidades, respectivamente.

Finalmente, devido estar sendo realizada uma nova abordagem de *cross-selling* em um contexto de *marketplaces* digitais, não se identificou, até o presente

momento, instâncias na literatura para testes, nem foi possível acessar uma plataforma de mercado para construção de instâncias com dados reais. Por isso, estas instâncias geradas são fictícias.

Ademais, para verificar e validar o problema, foram considerados três cenários possíveis, distribuindo as 45 instâncias em três grupos:

- Um grupo de 18 instâncias em que o número n de produtos ou serviços é maior que o número m de clientes;
- Um grupo de 9 (nove) instâncias em que o número n de produtos ou serviços é igual ao número m de clientes;
- Um grupo de 18 instâncias em que o número n de produtos ou serviços é menor que o número m de clientes.

O método de resolução exato foi implementado utilizando o CPLEX Concert Technology, utilizando a versão 22.1.1 do CPLEX. Os testes implementados no algoritmo MSRKSA também foram em C++.

Os testes foram executados em uma máquina com 60 GB de memória RAM e um processador Intel Core i9-10900 CPU com 20 núcleos, operando em uma frequência média de 2,80 GHz. A GPU utilizada foi uma Geforce RTX 3070 com 8 GB de VRAM.

Foi estabelecido um tempo limite de execução de 172.800 segundos (48 horas) para os testes computacionais envolvendo o CPLEX. Além disso, a metaheurística MSRKSA foi executada 30 vezes para cada instância.

Por fim, cada instância foi codificada com o número de produtos ou serviços (n), o número de clientes (m) e a disponibilidade de produtos ou serviços (d).

5.2 Calibração dos Parâmetros

Metaheurísticas geralmente requerem a definição de parâmetros que desempenham um papel fundamental no seu desempenho. A escolha adequada desses

parâmetros pode influenciar significativamente a eficiência do algoritmo. Tradicionalmente, essa calibração era realizada de forma heurística ou empírica, o que exigia testes exaustivos e uma considerável experiência prévia. Entretanto, nos últimos anos, surgiram ferramentas automatizadas que utilizam técnicas de aprendizado de máquina para otimizar esse processo, reduzindo o tempo e subjetividade envolvidos na seleção dos valores ótimos. Dentre os métodos utilizados para a calibração automática de parâmetros, destacam-se:

- Métodos de geração-avaliação: ajustam parâmetros com base na avaliação iterativa do desempenho do algoritmo (HUANG *et al.*, 2020).
- Técnicas de mineração de dados: utilizam modelos de regressão para aprender configurações ideais, como no caso da *particle swarm optimization* (LESS-MANN *et al.*, 2011).
- Análise de sensibilidade: mede o impacto de cada variável na função objetivo, empregando técnicas como o coeficiente de correlação linear e o método de Morris (LOUBIÈRE *et al.*, 2017).
- Estratégias híbridas: combinam diferentes algoritmos para um ajuste mais refinado, como a integração de *genetic algorithms* com *tabu search* (YU; FAN, 2017), ou o uso do sistema CALIBRA em conjunto com o algoritmo de Nelder-Mead (COROMINAS *et al.*, 2013).

Outro método amplamente utilizado para calibração é o IRACE (LOPES *et al.*, 2016), que utiliza técnicas de aprendizado de máquina para automatizar a escolha dos melhores valores para esses parâmetros, substituindo métodos mais subjetivos e demorados.

Para a calibração dos parâmetros do algoritmo MSRKSA proposto neste trabalho, optou-se pelo uso da otimização bayesiana, uma técnica estatística eficaz na otimização de funções objetivas custosas de avaliar. Este método se destaca por explorar eficientemente o espaço de busca, balanceando *exploration* e *exploitation* para encontrar boas configurações com um número reduzido de avaliações.

Os principais conceitos envolvidos na otimização bayesiana são:

- Modelo substituto: normalmente um processo Gaussiano, que aproxima a função objetivo com base em avaliações anteriores, permitindo prever seu comportamento e quantificar a incerteza das predições (WANG *et al.*, 2022; IMANI *et al.*, 2022; FRAZIER, 2018; GARNETT, 2023).
- Função de aquisição: responsável por selecionar os próximos pontos a serem amostrados, equilibrando exploração (avaliação de regiões com alta incerteza) e aproveitamento (avaliação de regiões com alta expectativa de ótimos locais). Esse equilíbrio é essencial para garantir que o modelo não apenas refine sua compreensão da função desconhecida, mas também identifique rapidamente os pontos mais promissores. Funções comuns incluem *expected improvement*, *entropy search*, *knowledge gradient* e *upper confidence bound* (FRAZIER, 2018; FRAZIER; WANG, 2015).

A otimização bayesiana tem sido amplamente empregada no ajuste de hiperparâmetros em aprendizado de máquina, na otimização de projetos de engenharia e na orientação de experimentos científicos em diversas áreas (SHAHRIARI *et al.*, 2016; SPRINGENBERG *et al.*, 2016; WANG; DOWLING, 2022).

Cada configuração de hiperparâmetros pode levar a resultados distintos dependendo da instância do problema. Como a avaliação da qualidade de uma solução pode ser computacionalmente custosa, a otimização bayesiana permite encontrar boas configurações reduzindo significativamente o número de execuções necessárias (SANO *et al.*, 2019). Na prática, a calibração dos parâmetros do MSRKA seguiu os seguintes passos:

1. Definição do espaço de busca. Neste caso, trata-se da calibração dos seguintes parâmetros:
 - Número máximo de iterações ($k_{\max}$): variando entre 60 e 80.
 - Temperatura mínima ($T_{\min}$): fixada em 0,01.
 - Temperatura máxima ($T_{\max}$): variando entre 80 e 100.
 - Taxa de resfriamento (α): variando entre 0.85 e 0.99.

2. Execução do algoritmo MSRKSA em 5 instâncias aleatórias escolhidas entre as 45, com um conjunto inicial de parâmetros escolhidos aleatoriamente.
3. Utilização da função de aquisição *upper confidence bound*, que equilibra a exploração de regiões desconhecidas e a exploração de áreas promissoras ao maximizar a soma da média prevista e uma medida de incerteza, para selecionar novos parâmetros a cada iteração (BERK *et al.*, 2020).
4. Repetição do processo por 72 horas, sendo armazenados os melhores conjuntos de parâmetros com base na média dos valores da função objetivo obtidos ao longo de todas as instâncias testadas.

Os valores finais obtidos para os parâmetros otimizados são apresentados na Tabela 9, sendo posteriormente utilizados nos testes computacionais descritos na Seção 5.3.

Tabela 9 – Melhores configurações de parâmetros obtidas com otimização bayesiana

Parâmetros	Valores
Número máximo de iterações	72
Temperatura mínima	0,01
Temperatura máxima	80,00
<i>Alpha</i>	0,9409

Fonte: Autoria própria (2025).

5.3 Resultados e discussões

A Tabela 10 apresenta os resultados dos testes computacionais, comparando o desempenho do CPLEX e do algoritmo mateheurístico MSRKSA para as 45 instâncias geradas.

Tabela 10 – Resultados computacionais

Instância n m d	CPLEX			MSRKSA						
	F.O.	T.E. (s)	GAP (%)	F.O.	F.O. _{best}	f _{F.O.best}	D.P. _{F.O.} (%)	P.D. (%)	T.E. (s)	D.P. _{T.E.} (%)
8_6_5	86,7	2,2	–	74,46	82,2	1	4,29	14,12	5.506,71	57,4
8_6_10	86,7	8,78	–	74,27	79,9	1	4,08	14,34	5.529,12	54,49
8_6_15	86,7	8,31	–	75,37	82	1	4,12	13,07	4.476,24	67,58
8_8_5	81,8	42,47	–	67,27	74,1	2	5,65	17,76	9.721,37	54,53
8_8_10	81,8	43,59	–	69,37	77	1	4,16	15,2	9.100,68	50,8
8_8_15	81,8	40,63	–	68,91	76,6	1	4,79	15,76	9.477,22	51,29
8_10_5	72,6	3.004,52	–	49,42	54,4	1	5,15	31,93	15.325,21	48,38
8_10_10	72,6	6.822,23	–	49,98	58,4	1	6,63	31,16	11.513,19	61,74
8_10_15	72,6	4.725,00	–	49,15	57,8	1	6,54	32,3	15.627,66	46,87
8_12_5	57,0	6.942,53	–	36,69	46,9	1	8,72	35,63	19.267,70	65,52
8_12_10	57,0	11.260,77	–	36,37	41,7	1	7,48	36,19	20.173,89	66,88
8_12_15	57,0	25.376,61	–	36,78	43,8	1	9,25	35,47	21.349,96	56,61
8_14_5	66,8	55.434,78	–	28,36	35,4	1	10,52	57,54	24.967,17	66,57
8_14_10	66,8	2.429,41	–	30,02	46,5	1	15,27	55,06	26.146,68	71,24
8_14_15	66,8	161.434,88	–	28,84	34,6	1	9,4	56,83	32.985,30	55,86
10_6_5	120,5	83,74	–	97,58	111	1	5,23	19,02	8.551,64	45,33
10_6_10	134,2	2.149,59	–	101,85	112,2	1	4,62	24,11	7.069,96	66,58
10_6_15	134,2	2.429,84	–	101,43	120,8	1	6,34	24,42	9.747,90	43,37
10_8_5	113,6	8.426,89	–	91,36	101	1	4,9	19,58	15.211,57	59,73
10_8_10	125,4	26.783,17	–	94,51	104,7	1	5,08	24,63	13.919,61	63,2
10_8_15	125,4	37.422,19	–	96,29	109,6	1	5,81	23,21	15.153,28	61,4
10_10_5	106,8	172.800,00	7,95	80,51	90,6	1	4,91	–	20.781,56	58,36
10_10_10	110,8	172.800,00	32,84	80,24	86,9	1	3,98	–	17.867,21	56,44
10_10_15	109,6	172.800,00	31,93	80,56	95	1	5,88	–	23.800,80	54,37
10_12_5	86,6	172.800,00	19,5	62,39	70,8	1	5,76	–	27.770,42	54,79
10_12_10	87,4	172.800,00	67,89	62,16	68,3	1	5,25	–	29.408,55	68,77
10_12_15	85,6	172.800,00	74,16	61,68	68,7	1	5,25	–	34.384,50	55,89
10_14_5	*	*	*	54,94	66,7	1	6,67	–	40.584,85	58,91
10_14_10	104,2	172.800,00	55,18	53,76	59,8	1	5,49	–	46.169,14	51,08
10_14_15	101,3	172.800,00	59,09	54,38	67,3	1	6,96	–	56.099,13	53,95
12_6_5	183,5	399,8	–	139,89	156,1	1	4,75	23,76	14.131,23	63,46
12_6_10	206,9	84.195,81	–	150,65	175,2	1	6,67	27,19	16.523,98	55,01
12_6_15	206,9	120.870,84	–	156,73	171	1	5,12	24,25	15.935,48	63,62
12_8_5	182,3	12.890,97	–	135,98	147	1	4,53	25,41	29.255,49	59,63
12_8_10	218,4	76.401,33	–	149,19	170,1	1	6,03	31,69	37.034,10	45,8
12_8_15	218,4	172.800,00	5,56	147,72	162,7	1	4,37	–	34.971,24	50,34
12_10_5	173,2	172.800,00	6,49	124,43	134,1	1	4,28	–	25.531,42	60,93
12_10_10	*	*	*	126,3	138,4	1	5,01	–	31.570,45	50,21
12_10_15	*	*	*	126,01	136,4	1	3,91	–	28.548,69	66,36
12_12_5	*	*	*	114,56	129,5	1	4,26	–	49.089,97	51,05
12_12_10	*	*	*	115,79	129,8	1	4,46	–	46.426,61	59,27
12_12_15	*	*	*	115	128,5	1	3,9	–	50.590,14	61,68
12_14_5	*	*	*	114,61	124,4	1	3,64	–	54.032,60	75,84
12_14_10	*	*	*	118,17	129,5	1	4,26	–	72.483,81	53,74
12_14_15	*	*	*	115,75	128,1	1	3,83	–	48.247,85	60,04

Nota: O símbolo * indica que a árvore de soluções do *branch and cut* excedeu a memória disponível para resolver o problema.

Fonte: Autoria própria (2025).

A primeira coluna identifica a instância de cada teste. As colunas “F.O.” e “T.E. (s)” apresentam, respectivamente, o valor da função objetivo e o tempo de execução, tanto para o CPLEX quanto para o MSRKSA, permitindo a comparação do desempenho entre os métodos. A coluna “GAP (%)” indica a diferença

percentual entre a solução do CPLEX e a solução ótima¹, funcionando como uma medida de eficiência. Já a coluna “F.O._{best}” representa o melhor valor da função objetivo encontrado pelo MSRKSA ao longo das execuções, enquanto “f_{F.O._{best}}” indica a frequência (em número de repetições) com que esse valor foi obtido. A coluna “D.P.F.O.(%)” corresponde ao desvio padrão relativo dos valores da função objetivo obtidos pelo MSRKSA, expressando a estabilidade dos resultados. A coluna “D.P.T.E.(%)” indica o desvio padrão relativo dos tempos de execução do MSRKSA, refletindo a consistência temporal do método. A coluna “P.D. (%)” mostra o percentual de desvio entre a solução ótima obtida pelo CPLEX e a média das soluções encontradas pelo MSRKSA, considerando apenas as instâncias em que o ótimo foi de fato alcançado pelo CPLEX.

Os testes com o CPLEX revelam pontos importantes sobre o desempenho do modelo matemático proposto para o *cross-selling* em *marketplaces*, especialmente em relação ao tempo de execução. A Tabela 10 mostra que instâncias menores ($n = 8$, $m = 6$ ou 8) são resolvidas em tempo razoável, enquanto instâncias maiores ($n = 10$, $m = 12$) exigem várias horas. Das 45 instâncias testadas, 10 não atingiram a solução ótima no tempo limite, com GAPs entre 5,56% e 74,16%; e 9 extrapolaram a memória disponível, marcadas com (*). Assim, apenas 26 instâncias foram resolvidas, evidenciando a complexidade do problema e as limitações dos métodos exatos para instâncias maiores.

Dentro do contexto dinâmico dos *marketplaces* digitais, em que a agilidade e a capacidade de resposta rápida são cruciais, a dependência exclusiva de métodos exatos, como o CPLEX, pode não ser a abordagem mais eficiente. Neste sentido, uma alternativa viável seria a utilização de algoritmos heurísticos e/ou metaheurísticas, como é o caso do algoritmo MSRKSA proposto. Para uma comparação mais justa, é importante considerar, inicialmente, apenas as 26 instâncias nas quais o valor ótimo foi encontrado pelo CPLEX. Nessas instâncias, a média do percentual de desvio da função objetivo obtida pelo algoritmo MSRKSA em relação ao ótimo do CPLEX foi de:

$$\frac{\sum P.D.(%) }{26} = \frac{729,63}{26} \approx 28,06 \% \quad (5.1)$$

¹ O valor do GAP é fornecido diretamente pelo CPLEX.

Esse valor indica que, em média, as soluções geradas pelo MSRKSA ficaram aproximadamente 28% abaixo do valor ótimo conhecido. Apesar de representar uma diferença considerável, esse resultado pode ser considerado aceitável em aplicações em que a obtenção da solução exata não é estritamente necessária, principalmente quando se leva em conta o tempo computacional envolvido.

Por outro lado, a diferença relativa de tempo entre os dois métodos — também considerando apenas as instâncias em que o ótimo foi encontrado — é dada por:

$$\frac{\sum T.E._{MSRKSA}}{\sum T.E._{CPLEX}} = \frac{413.702,33}{785.150,58} \times 100 \approx 52,69 \% \quad (5.2)$$

O tempo médio do MSRKSA nessas instâncias representa apenas 52,69% do tempo demandado pelo CPLEX, o que demonstra uma economia computacional de aproximadamente 47,31%. Essa redução de quase metade do tempo de processamento evidencia a vantagem da metaheurística em contextos nos quais tempo e escalabilidade são fatores limitantes.

Ao ampliar a análise para o conjunto completo de 45 instâncias, a média do desvio padrão da função objetivo (D.P. F.O. (%)) obtido pelo MSRKSA foi de:

$$\frac{\sum D.P.F.O.(%) }{45} = \frac{257,20}{45} \approx 5,72 \% \quad (5.3)$$

A média do desvio padrão do tempo de execução do MSRKSA (D.P. T.E. (%)) foi de:

$$\frac{\sum D.P.T.E.(%) }{45} = \frac{2.604,91}{45} \approx 57,89 \% \quad (5.4)$$

Por último, a média do tempo total de execução (T.E. (s)) do MSRKSA foi de:

$$\frac{\sum T.E_{\text{MSRKSA}}}{45} = \frac{1.152.061,28}{45} \approx 25.601,36 \text{ segundos.} \quad (5.5)$$

A média do desvio padrão relativo da função objetivo (5,72%) demonstra que o MSRKSA apresenta uma boa consistência nos resultados, com variações relativamente baixas entre diferentes execuções da mesma instância. Entretanto, o desvio padrão do tempo de execução (57,89%) indica uma maior instabilidade temporal, possivelmente decorrente de flutuações no processo estocástico do algoritmo e do uso da estratégia de *first improvement*.

Em termos absolutos, o tempo médio de execução do MSRKSA foi de aproximadamente 25.601 segundos (cerca de 7 horas), o que ressalta a necessidade de ajustes na eficiência do algoritmo, principalmente para aplicações em tempo real. Mesmo assim, em comparação com o CPLEX, que em várias instâncias superou o tempo limite configurado, o MSRKSA foi capaz de fornecer soluções viáveis em todas as execuções dentro de um tempo controlado.

Os resultados obtidos evidenciam a capacidade do MSRKSA em encontrar soluções relativamente próximas do ótimo, apresentando um desvio médio de aproximadamente 28,06% em relação ao valor ótimo da função objetivo nas instâncias em que esse foi identificado pelo CPLEX. Embora tal desvio represente uma perda em qualidade, ele se mostra aceitável em contextos onde a solução exata não é estritamente necessária e o tempo de resposta é um fator crítico.

Cabe ressaltar que, das 45 instâncias avaliadas, apenas 26 tiveram o ótimo solucionado pelo CPLEX, o que reforça a complexidade do problema tratado e expõe limitações dos métodos exatos frente a instâncias mais desafiadoras. Esse cenário destaca o potencial do MSRKSA como uma alternativa viável, especialmente quando se considera a possibilidade de incorporar estratégias complementares — como mecanismos de intensificação da busca local ou a hibridização com outras metaheurísticas — para aprimorar sua robustez e capacidade de convergência.

Além disso, o tempo de execução do MSRKSA representou, em média, apenas 52,69% do tempo consumido pelo CPLEX, o que indica uma economia computacional significativa. Essa redução é particularmente vantajosa em aplicações

em tempo real ou em situações que envolvem grandes volumes de dados. Ainda assim, considerando que o algoritmo atualmente utiliza a estratégia de *first improvement* na busca local, há espaço para melhorias adicionais. A adoção de abordagens como *best improvement*, por exemplo, pode ampliar o potencial exploratório do algoritmo, elevando a qualidade das soluções obtidas, mesmo que a um custo computacional ligeiramente superior — custo esse que pode ser justificado pela melhoria global no desempenho.

Assim, a combinação entre boa qualidade de solução, expressiva economia de tempo e possibilidades concretas de aprimoramento posiciona o MSRKSa como uma abordagem promissora para problemas complexos de alocação em ambientes dinâmicos, como os *marketplaces* digitais.

6 Conclusões

A presente pesquisa buscou investigar e aprimorar uma estratégia de otimização do *cross-selling* em plataformas digitais de *marketplace*, buscando superar os desafios enfrentados na personalização das recomendações de produtos ou serviços aos clientes em um ambiente complexo e dinâmico. O crescimento destes modelos de negócios, assim como a importância desta estratégia de *marketing* e das técnicas de otimização matemática, evidencia a necessidade de aplicar e analisar as ferramentas disponíveis na literatura e, se necessário, propor uma nova abordagem para este problema.

Desta forma, este trabalho buscou atender os objetivos estabelecidos na seção 1.3 e responder as questões de pesquisa da subseção 1.4.1.

Para tanto, a Revisão Sistemática de Literatura desenvolvida no Capítulo 2, buscou responder a primeira questão de pesquisa, proporcionando uma análise aprofundada das tendências, desafios e avanços de estratégias aplicadas a otimização do *cross-selling* em diferentes contextos. Uma lacuna notável identificada reside na falta de adaptabilidade dos modelos matemáticos de otimização encontrados na literatura, especificamente em relação à sua aplicabilidade em *marketplaces* digitais e na capacidade de oferecer recomendações personalizadas, levando em conta as características individuais dos clientes.

Desta forma, o modelo matemático apresentado no Capítulo 3, para a otimização do problema em questão, pode ser uma alternativa para suprir a lacuna existente na literatura, respondendo a segunda questão de pesquisa. Ao considerar uma abordagem mais coerente com as plataformas digitais de *marketplace*, além de acrescentar características, como a disponibilidade ou estoque dos produtos ou serviços, histórico de compras e a segmentação por meio de perfis de clientes, o modelo proposto evidencia o *cross-selling* entre os produtos ou serviços existentes a partir de uma previsão de compras.

Os resultados computacionais apresentados no Capítulo 5 validaram o modelo e algoritmo proposto, respondendo a quarta questão de pesquisa. As

análises foram realizadas tanto pelo CPLEX, um método exato, quanto pelo algoritmo mateheurístico MSRKSA proposto no Capítulo 4, que buscou responder a terceira questão de pesquisa. No entanto, ambos apresentam vantagens e limitações. O CPLEX, mesmo sendo executado em uma máquina de alta capacidade, não conseguiu encontrar a solução ótima para algumas instâncias consideradas pequenas dentro do tempo limite de 48 horas, evidenciando a complexidade do problema. Por outro lado, o MSRKSA foi capaz de gerar soluções viáveis em um tempo computacionalmente aceitável, mas com qualidade inferior à ótima. Esses fatores ressaltam a necessidade de aprimoramentos, seja na modelagem do problema ou na aplicação de novas técnicas heurísticas e metaheurísticas para equilibrar tempo de execução e qualidade das soluções.

Para aprimorar os resultados, algumas melhorias podem ser implementadas. A inclusão de uma estratégia ao MSRKSA como a lista tabu poderia mitigar repetições indesejadas de soluções, aumentando a diversidade da busca. Além disso, explorar metaheurísticas populacionais, como *genetic algorithms*, *particle swarm optimization* e *ant colony optimization*, poderia expandir o espaço de soluções e evitar a estagnação em ótimos locais.

Outra possibilidade interessante seria investigar diferentes formas de construir a solução inicial, seja através de técnicas baseadas em *clustering*, aprendizado de máquina ou heurísticas construtivas, para que a compra ou seleção de compras ou serviços x_{ik} seja mais eficiente. Da mesma forma, novos critérios de avaliação da solução vizinha poderiam levar a melhorias no refinamento dos resultados, como o princípio de *ruin and recreate*, que combina uma fase de destruição seguida de uma fase de reconstrução para melhorar soluções heurísticas em problemas de otimização combinatória (MISEVICIUS, 2003).

Além disso, a generalização do modelo para considerar unidades variáveis de itens adquiridos (x inteiro) em vez de uma decisão binária (compra ou não compra) ampliaria a aplicabilidade para casos reais de *marketplaces*. Outra abordagem promissora seria adaptar o modelo para que a variável de decisão de compra ou seleção de produtos ou serviços x seja um dado de entrada, reduzindo a complexidade do problema. Na prática, isso faz sentido, pois as plataformas digitais poderiam capturar as compras ou seleções dos usuários em tempo real, tornando o processo de

recomendação mais dinâmico e alinhado ao comportamento atual dos consumidores.

Por fim, para garantir uma validação mais robusta ao problema desenvolvido, recomenda-se a busca por dados reais provenientes de *marketplaces* digitais, possibilitando um estudo de caso mais próximo do cenário prático, colaborando ainda mais com o setor.

Em síntese, este estudo ressalta a importância de uma abordagem integrada e adaptativa no contexto de uma estratégia de otimização do *cross-selling* em plataformas digitais de *marketplace*. A necessidade contínua de pesquisa e desenvolvimento é evidenciada pela busca por soluções eficientes e eficazes que atendam às necessidades tanto dos fornecedores quanto dos consumidores nestes ambientes de negócios dinâmicos. Além disso, este trabalho contribui para uma melhor compreensão desta área de pesquisa, sendo relevante não apenas para acadêmicos, mas também para administradores e empreendedores interessados em aprimorar suas estratégias de vendas e relacionamento com clientes em *marketplaces* digitais.

Referências

AHN, H.; AHN, J. J.; OH, K. J.; KIM, D. H. Facilitating cross-selling in a mobile telecom market to develop customer classification model based on hybrid data mining techniques. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 38, n. 5, p. 5005–5012, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.09.150>>. Citado na página 30.

AHN, K.-I. Effective product assignment based on association rule mining in retail. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 39, n. 16, p. 12551–12556, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2012.04.086>>. Citado 7 vezes nas páginas 39, 40, 42, 46, 47, 50 e 51.

AKÇURA, M. T.; SRINIVASAN, K. Research note: customer intimacy and cross-selling strategy. *Management Science*, INFORMS, v. 51, n. 6, p. 1007–1012, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/mnsc.1050.0390>>. Citado na página 12.

AL-SAADI, M. R. A.; ALZUBAIDI, A. M. N. Social recommendation system: A literature review. In: IEEE. *2022 International Conference on Data Science and Intelligent Computing (ICDSIC)*. 2022. p. 245–250. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ICDSIC56987.2022.10076047>>. Citado na página 20.

ALI, N. B.; PETERSEN, K.; WOHLIN, C. A systematic literature review on the industrial use of software process simulation. *Journal of Systems and Software*, Elsevier, v. 97, p. 65–85, 2014. Disponível em: <<http://doi.org/10.1016/j.jss.2014.06.059>>. Citado na página 25.

ALI, Ö. G.; AKÇAY, Y.; SAYMAN, S.; YILMAZ, E.; ÖZÇELİK, M. H. Cross-selling investment products with a win-win perspective in portfolio optimization. *Operations Research*, INFORMS, v. 65, n. 1, p. 55–74, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/opre.2016.1556>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 39.

ALLAHYARI, M. Z.; AZAB, A. Mathematical modeling and multi-start search simulated annealing for unequal-area facility layout problem. *Expert systems with applications*, Elsevier, v. 91, p. 46–62, 2018. Citado na página 60.

ALYARI, F.; NAVIMIPOUR, N. J. Recommender systems: a systematic review of the state of the art literature and suggestions for future research. *Kybernetes*,

- Emerald Publishing Limited, v. 47, n. 5, p. 985–1017, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/K-06-2017-0196>>. Citado na página 20.
- ANAND, S. S.; PATRICK, A.; HUGHES, J. G.; BELL, D. A. A data mining methodology for cross-sales. *Knowledge-based systems*, Elsevier, v. 10, n. 7, p. 449–461, 1998. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0950-7051\(98\)00035-5](https://doi.org/10.1016/S0950-7051(98)00035-5)>. Citado na página 12.
- ANGUN, E.; OZKAN, C. E. A joint assortment planning and shelf space allocation optimization for a supermarket chain in turkey. In: *23rd International Conference of Production Research*. [S.l.: s.n.], 2015. Citado 3 vezes nas páginas 35, 39 e 40.
- ANSELL, J.; HARRISON, T.; ARCHIBALD, T. Identifying cross-selling opportunities, using lifestyle segmentation and survival analysis. *Marketing Intelligence & Planning*, Emerald Group Publishing Limited, v. 25, n. 4, p. 394–410, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/02634500710754619>>. Citado na página 35.
- AREF, S. M.; FOUAD, M. M.; SAYED, H. A.; GABER, M. I. Cross-selling artificial intelligence-based approaches in insurance industry: A review. In: *IEEE. 2024 14th International Conference on Electrical Engineering (ICEENG)*. [S.l.], 2024. p. 323–328. Citado na página 19.
- ASKARI-NASAB, H.; POURRAHIMIAN, Y.; BEN-AWUAH, E.; KALANTARI, S. Mixed integer linear programming formulations for open pit production scheduling. *Journal of Mining Science*, Springer, v. 47, p. 338–359, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1134/S1062739147030117>>. Citado na página 13.
- ASLAM, W.; HUSSAIN, A.; FARHAT, K.; ARIF, I. Underlying factors influencing consumers' trust and loyalty in e-commerce. *Business Perspectives and Research*, SAGE Publications Sage India: New Delhi, India, v. 8, n. 2, p. 186–204, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/2278533719887451>>. Citado na página 11.
- BAGUI, S.; JUST, J.; BAGUI, S. Deriving strong association mining rules using a dependency criterion, the lift measure. *Int. J. Data Anal. Tech. Strateg.*, v. 1, p. 297–312, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1504/IJDATS.2009.024297>>. Citado na página 50.
- BAKOS, Y. The emerging role of electronic marketplaces on the internet. *Communications of the ACM*, ACM New York, NY, USA, v. 41, n. 8, p. 35–42, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/280324.280330>>. Citado na página 10.

- BALAKRISHNAN, J.; CHENG, C.-H.; WONG, K.-F.; WOO, K.-H. Product recommendation algorithms in the age of omnichannel retailing—an intuitive clustering approach. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 115, p. 459–470, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.12.005>>. Citado na página 29.
- BAST, H.; DELLING, D.; GOLDBERG, A.; MÜLLER-HANNEMANN, M.; PAJOR, T.; SANDERS, P.; WAGNER, D.; WERNECK, R. F. Route planning in transportation networks. *Algorithm engineering: Selected results and surveys*, Springer, p. 19–80, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-49487-6_2>. Citado na página 13.
- BAWACK, R. E.; WAMBA, S. F.; CARILLO, K. D. A.; AKTER, S. Artificial intelligence in e-commerce: a bibliometric study and literature review. *Electronic markets*, Springer, v. 32, n. 1, p. 297–338, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s12525-022-00537-z>>. Citado na página 19.
- BEAN, J. C. Genetic algorithms and random keys for sequencing and optimization. *ORSA journal on computing*, INFORMS, v. 6, n. 2, p. 154–160, 1994. Citado na página 62.
- BEKTAS, T. The multiple traveling salesman problem: an overview of formulations and solution procedures. *omega*, Elsevier, v. 34, n. 3, p. 209–219, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.omega.2004.10.004>>. Citado na página 13.
- BELLMAN, R. Dynamic programming. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 153, n. 3731, p. 34–37, 1966. Disponível em: <<https://doi.org/10.1126/science.153.3731.34>>. Citado na página 13.
- BERK, J.; GUPTA, S.; RANA, S.; VENKATESH, S. Randomised gaussian process upper confidence bound for bayesian optimisation. *arXiv preprint arXiv:2006.04296*, 2020. Citado na página 84.
- BHARETI, K.; PERERA, S.; JAMAL, S.; PALLEGE, M. H.; AKASH, V.; WIIEWEERA, S. A literature review of recommendation systems. In: IEEE. *2020 IEEE International Conference for Innovation in Technology (INOCON)*. 2020. p. 1–7. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/INOCON50539.2020.9298450>>. Citado na página 20.
- BHASKAR, T.; SUNDARARAJAN, R.; KRISHNAN, P. G. A fuzzy mathematical programming approach for cross-sell optimization in retail banking. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 60, n. 5, p. 717–727, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2602609>>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 41.

BIOLCHINI, J.; MIAN, P. G.; NATALI, A. C. C.; TRAVASSOS, G. H. Systematic review in software engineering. *System engineering and computer science department COPPE/UFRJ, Technical Report ES*, v. 679, n. 05, p. 45, 2005. Citado na página 22.

BLUM, C.; ROLI, A. Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison. *ACM computing surveys (CSUR)*, Acm New York, NY, USA, v. 35, n. 3, p. 268–308, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/937503.937505>>. Citado na página 14.

BORGWARDT, K. H. *The simplex method: a probabilistic analysis*. Springer Science & Business Media, 2012. v. 1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/opre.14.4.699>>. Citado na página 13.

BOSCHETTI, M. A.; MANIEZZO, V.; ROFFILLI, M.; RÖHLER, A. B. Matheuristics: Optimization, simulation and control. In: SPRINGER. *International workshop on hybrid metaheuristics*. [S.l.], 2009. p. 171–177. Citado na página 59.

BRIJS, T.; SWINNEN, G.; VANHOOF, K.; WETS, G. Using association rules for product assortment decisions: A case study. In: *Proceedings of the fifth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*. [s.n.], 1999. p. 254–260. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/312129.312241>>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 42.

BROWN, D. E.; HUNTLEY, C. L. A practical application of simulated annealing to clustering. *Pattern recognition*, Elsevier, v. 25, n. 4, p. 401–412, 1992. Citado na página 60.

BRUNN, P.; JENSEN, M.; SKOVGAARD, J. e-marketplaces:: Crafting a winning strategy. *European Management Journal*, Elsevier, v. 20, n. 3, p. 286–298, 2002. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0263-2373\(02\)00045-2](https://doi.org/10.1016/S0263-2373(02)00045-2)>. Citado na página 10.

CAO, K.; YANG, Z. A study of e-commerce adoption by tourism websites in china. *Journal of Destination Marketing & Management*, Elsevier, v. 5, n. 3, p. 283–289, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jdmm.2016.01.005>>. Citado na página 11.

ČERNÝ, V. Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. *Journal of optimization theory and applications*, Springer, v. 45, p. 41–51, 1985. Citado na página 60.

CHAVES, A.; RESENDE, M.; SILVA, R. A random-key grasp for combinatorial optimization. *Journal of Nonlinear Variational Analysis*, v. 8, p. 855–881, 2024. Citado na página 63.

CHAVES, A. A.; LORENA, L. H. N. An adaptive and near parameter-free brkga using q-learning method. In: IEEE. *2021 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*. [S.l.], 2021. p. 2331–2338. Citado na página 63.

CHEBA, K.; KIBA-JANIAK, M.; BARANIECKA, A.; KOŁAKOWSKI, T. Impact of external factors on e-commerce market in cities and its implications on environment. *Sustainable Cities and Society*, Elsevier, v. 72, p. 103032, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.scs.2021.103032>>. Citado na página 10.

CHEN, L.-S.; HSU, F.-H.; CHEN, M.-C.; HSU, Y.-C. Developing recommender systems with the consideration of product profitability for sellers. *Information sciences*, Elsevier, v. 178, n. 4, p. 1032–1048, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ins.2007.09.027>>. Citado na página 11.

CHEN, Y.-L.; CHEN, J.-M.; TUNG, C.-W. A data mining approach for retail knowledge discovery with consideration of the effect of shelf-space adjacency on sales. *Decision support systems*, Elsevier, v. 42, n. 3, p. 1503–1520, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.dss.2005.12.004>>. Citado na página 12.

CHEN, Z.; MIRZA, N.; HUANG, L.; UMAR, M. Green banking—can financial institutions support green recovery? *Economic Analysis and Policy*, Elsevier, v. 75, p. 389–395, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.eap.2022.05.017>>. Citado na página 10.

CHEN, Z.-Y.; FAN, Z.-P.; SUN, M. A svm ensemble learning method using tensor data: An application to cross selling recommendation. In: IEEE. *2015 12th International Conference on Service Systems and Service Management (ICSSSM)*. 2015. p. 1–4. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/10.1109/ICSSSM.2015.7170282>>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 41.

CHEN, Z.-Y.; FAN, Z.-P.; SUN, M. A multi-kernel support tensor machine for classification with multitype multiway data and an application to cross-selling recommendations. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 255, n. 1, p. 110–120, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.05.020>>. Citado 3 vezes nas páginas 30, 39 e 43.

CHIANG, W.-C.; RUSSELL, R. A. Simulated annealing metaheuristics for the vehicle routing problem with time windows. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 63, p. 3–27, 1996. Citado na página 60.

CHOUDHURY, V.; HARTZEL, K. S.; KONSYNSKI, B. R. Uses and consequences of electronic markets: An empirical investigation in the aircraft

parts industry. *MIS quarterly*, JSTOR, p. 471–507, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/249552>>. Citado na página 10.

COELHO, V. N.; OLIVEIRA, T. A.; COELHO, I. M.; COELHO, B. N.; FLEMING, P. J.; GUIMARÃES, F. G.; RAMALHINHO, H.; SOUZA, M. J.; TALBI, E.-G.; LUST, T. Generic pareto local search metaheuristic for optimization of targeted offers in a bi-objective direct marketing campaign. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 78, p. 578–587, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cor.2016.09.008>>. Citado na página 42.

COLORNI, A.; DORIGO, M.; MANIEZZO, V. Distributed optimization by ant colonies. In: PARIS, FRANCE. *Proceedings of the first European conference on artificial life*. [S.l.], 1991. v. 142, p. 134–142. Citado na página 14.

COOIL, B.; AKSOY, L.; KEININGHAM, T. L. Approaches to customer segmentation. *Journal of Relationship Marketing*, Taylor & Francis, v. 6, n. 3-4, p. 9–39, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1300/J366v06n03_02>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 49 e 50.

COROMINAS, A.; GARCÍA-VILLORIA, A.; PASTOR, R. Technical note: a systematic procedure based on calibra and the nelder mead algorithm for fine-tuning metaheuristics. *Journal of the Operational Research Society*, v. 64, p. 276–282, 2013. Citado na página 82.

CORREIA, I.; GOUVEIA, L.; GAMA, F. Saldanha-da. Solving the variable size bin packing problem with discretized formulations. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 35, n. 6, p. 2103–2113, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cor.2006.10.014>>. Citado na página 13.

DAI, Q.; KAUFFMAN, R. J. Business models for internet-based e-procurement systems and b2b electronic markets: an exploratory assessment. In: IEEE. *Proceedings of the 34th Annual Hawaii International Conference on System Sciences*. 2001. p. 10–pp. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/HICSS.2001.927035>>. Citado na página 10.

DELAHAYE, D.; CHAIMATANAN, S.; MONGEAU, M. Simulated annealing: From basics to applications. *Handbook of metaheuristics*, Springer, p. 1–35, 2019. Citado na página 61.

DENG, Y.; BARD, J. F. A reactive grasp with path relinking for capacitated clustering. *Journal of Heuristics*, Springer, v. 17, p. 119–152, 2011. Citado na página 64.

- DORIGO, M. Optimization, learning and natural algorithms. *Ph. D. Thesis, Politecnico di Milano*, 1992. Citado na página 14.
- DOYLE, S. Software review: Optimising the allocation of cross-selling resource while managing the customer relationship. *Journal of Database Marketing & Customer Strategy Management*, Springer, v. 9, p. 285–290, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1057/palgrave.jdm.3240010>>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 41.
- DUCH-BROWN, N.; GRZYBOWSKI, L.; ROMAHN, A.; VERBOVEN, F. The impact of online sales on consumers and firms. evidence from consumer electronics. *International Journal of Industrial Organization*, Elsevier, v. 52, p. 30–62, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijindorg.2017.01.009>>. Citado na página 11.
- ESCOBAR-RODRÍGUEZ, T.; BONSON-FERNÁNDEZ, R. Analysing online purchase intention in spain: fashion e-commerce. *Information Systems and e-Business Management*, Springer, v. 15, p. 599–622, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10257-016-0319-6>>. Citado na página 11.
- FEO, T. A.; RESENDE, M. G. A probabilistic heuristic for a computationally difficult set covering problem. *Operations research letters*, Elsevier, v. 8, n. 2, p. 67–71, 1989. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0167-6377\(89\)90002-3](https://doi.org/10.1016/0167-6377(89)90002-3)>. Citado na página 14.
- FERREIRA, C. E.; MARTIN, A.; SOUZA, C. C. de; WEISMANTEL, R.; WOLSEY, L. A. The node capacitated graph partitioning problem: a computational study. *Mathematical programming*, Springer, v. 81, p. 229–256, 1998. Citado na página 64.
- FISCHETTI, M.; FISCHETTI, M. Matheuristics. In: *Handbook of heuristics*. [S.l.]: Springer, 2018. p. 121–153. Citado na página 59.
- FISHER, M. L. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management science*, INFORMS, v. 27, n. 1, p. 1–18, 1981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/mnsc.27.1.1>>. Citado na página 13.
- FONTES, F. F. da C.; GONCALVES, G. Hub location and routing problem with alternative paths. In: IEEE. *2015 4th International Conference on Advanced Logistics and Transport (ICALT)*. 2015. p. 317–322. Disponível em: <<https://10.1109/ICAAdLT.2015.7136624>>. Citado na página 13.
- FRAZIER, P. A tutorial on bayesian optimization. *ArXiv*, abs/1807.02811, 2018. Citado na página 83.

- FRAZIER, P.; WANG, J. Bayesian optimization for materials design. *arXiv: Machine Learning*, 2015. Citado na página 83.
- FREITAS, C. C. D.; ALOISE, D. J.; FONTES, F. F. D. C.; SANTOS, A. C.; MENEZES, M. D. S. A biased random-key genetic algorithm for the two-level hub location routing problem with directed tours. *OR Spectrum*, Springer, v. 45, n. 3, p. 903–924, 2023. Citado na página 64.
- GAJEWSKA, T.; ZIMON, D.; KACZOR, G.; MADZÍK, P. The impact of the level of customer satisfaction on the quality of e-commerce services. *International Journal of Productivity and Performance Management*, Emerald Publishing Limited, v. 69, n. 4, p. 666–684, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/IJPPM-01-2019-0018>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 43.
- GALHOTRA, B.; DEWAN, A. Impact of covid-19 on digital platforms and change in e-commerce shopping trends. In: IEEE. *2020 fourth international conference on I-SMAC (IoT in social, mobile, analytics and cloud)(I-SMAC)*. 2020. p. 861–866. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/I-SMAC49090.2020.9243379>>. Citado na página 10.
- GARIMELLA, V. R. K.; WEBER, I. Co-following on twitter. In: *Proceedings of the 25th ACM conference on Hypertext and social media*. [s.n.], 2014. p. 249–254. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/2631775.2631820>>. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 37.
- GARNETT, R. Bayesian optimization. 2023. Citado na página 83.
- GAWER, A. Bridging differing perspectives on technological platforms: Toward an integrative framework. *Research policy*, Elsevier, v. 43, n. 7, p. 1239–1249, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.respol.2014.03.006>>. Citado na página 10.
- GHONIEM, A.; MADDAAH, B.; IBRAHIM, A. Optimizing assortment and pricing of multiple retail categories with cross-selling. *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 66, p. 291–309, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10898-014-0238-3>>. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 41.
- GHOSHAL, A.; MOOKERJEE, V. S.; SARKAR, S. Recommendations and cross-selling: Pricing strategies when personalizing firms cross-sell. *Journal of Management Information Systems*, Taylor & Francis, v. 38, n. 2, p. 430–456, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/07421222.2021.1912930>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 19 e 49.

- GIAGLIS, G. M.; KLEIN, S.; O'KEEFE, R. M. The role of intermediaries in electronic marketplaces: developing a contingency model. *Information systems journal*, Wiley Online Library, v. 12, n. 3, p. 231–246, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1046/j.1365-2575.2002.00123.x>>. Citado na página 10.
- GLOVER, F. Tabu search—part i. *ORSA Journal on computing*, Informs, v. 1, n. 3, p. 190–206, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/ijoc.1.3.190>>. Citado na página 14.
- GLOVER, F. Tabu search—part ii. *ORSA Journal on computing*, Informs, v. 2, n. 1, p. 4–32, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/ijoc.2.1.4>>. Citado na página 14.
- GOEL, A.; GRUHN, V. A general vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 191, n. 3, p. 650–660, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.12.065>>. Citado na página 13.
- GONÇALVES, J. F.; RESENDE, M. G. Biased random-key genetic algorithms for combinatorial optimization. *Journal of Heuristics*, Springer, v. 17, n. 5, p. 487–525, 2011. Citado na página 63.
- GONZALEZ, T. F. *Handbook of approximation algorithms and metaheuristics*. [S.l.]: CRC Press, 2007. Citado na página 14.
- GRIEGER, M. Electronic marketplaces: A literature review and a call for supply chain management research. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 144, n. 2, p. 280–294, 2003. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(02\)00394-6](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00394-6)>. Citado na página 18.
- GUELMAN, L.; GUILLÉN, M.; PEREZ-MARIN, A. M. A survey of personalized treatment models for pricing strategies in insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, Elsevier, v. 58, p. 68–76, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2014.06.009>>. Citado na página 12.
- GÜNEŞ, E. D.; AKŞIN, O. Z.; ÖRMECI, E. L.; ÖZDEN, S. H. Modeling customer reactions to sales attempts: If cross-selling backfires. *Journal of Service Research*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 13, n. 2, p. 168–183, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1094670509352677>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 39.
- GUPTA, S. A literature review on recommendation systems. *Int. Res. J. Eng. Technol*, v. 7, p. 3600–3605, 2020. Citado na página 20.

GURVICH, I.; ARMONY, M.; MAGLARAS, C. Cross-selling in a call center with a heterogeneous customer population. *Operations research*, INFORMS, v. 57, n. 2, p. 299–313, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/opre.1080.0568>>. Citado na página 12.

HAGIU, A.; WRIGHT, J. Marketplace or reseller? *Management Science*, INFORMS, v. 61, n. 1, p. 184–203, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/mnsc.2014.2042>>. Citado na página 11.

HAMAD, H.; ELBELTAGI, I.; EL-GOHARY, H. An empirical investigation of business-to-business e-commerce adoption and its impact on smes competitive advantage: The case of egyptian manufacturing smes. *Strategic Change*, Wiley Online Library, v. 27, n. 3, p. 209–229, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/jsc.2196>>. Citado na página 11.

HARYANTI, T.; SUBRIADI, A. P. Factors and theories for e-commerce adoption: A literature review. *International Journal of Electronic Commerce Studies*, v. 11, n. 2, p. 87–106, 2020. Disponível em: <<http://doi.org/10.7903/ijecs.1910>>. Citado na página 19.

HELL, F.; TAHA, Y.; HINZ, G.; HEIBEI, S.; MÜLLER, H.; KNOLL, A. Graph convolutional neural network for a pharmacy cross-selling recommender system. *Information*, MDPI, v. 11, n. 11, p. 525, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/info11110525>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 19 e 49.

HILLIER, F. S. *Introduction to operations research*. [S.l.]: McGrawHill, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 41.

HOLLAND, J. H. Adaptation in natural and artificial systems. *Ann Arbor: The University of Michigan Press*, p. 32, 1975. Citado na página 14.

HROMKOVIČ, J. *Algorithmics for hard problems: introduction to combinatorial optimization, randomization, approximation, and heuristics*. Springer Science & Business Media, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-662-05269-3>>. Citado na página 14.

HU, M.; CHAUDHRY, S. S. Enhancing consumer engagement in e-commerce live streaming via relational bonds. *Internet Research*, Emerald Publishing Limited, v. 30, n. 3, p. 1019–1041, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/INTR-03-2019-0082>>. Citado na página 11.

HUANG, C.; LI, Y.; YAO, X. A survey of automatic parameter tuning methods for metaheuristics. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 24, p. 201–216, 2020. Citado na página 82.

HUANG, H.; YAO, L.; CHANG, J.-S.; TSAI, C.-Y.; KUO, R. Using product network analysis to optimize product-to-shelf assignment problems. *Applied Sciences*, MDPI, v. 9, n. 8, p. 1581, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/app9081581>>. Citado 3 vezes nas páginas 39, 41 e 42.

HUANG, J.; JI, S.; XIE, H.; WANG, X. Research on cross-selling in the express delivery enterprise based on data mining. In: IEEE. *2008 International Conference on Service Systems and Service Management*. 2008. p. 1–6. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ICSSSM.2008.4598443>>. Citado na página 37.

HUANG, S.-H.; TSAI, C.-Y.; LO, C.-C. A multi-data mining approach for shelf space optimization: Considering customer behaviour. In: IEEE. *2014 11th International Conference on e-Business (ICE-B)*. [S.l.], 2014. p. 89–95. Citado na página 35.

IMANI, M.; IMANI, M.; GHOREISHI, S. F. Bayesian optimization for expensive smooth-varying functions. *IEEE Intelligent Systems*, v. 37, p. 44–55, 2022. Citado na página 83.

JAROSZEWICZ, S. Cross-selling models for telecommunication services. *Journal of Telecommunications and Information Technology*, n. 3, p. 52–59, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 49.

JOHNSON, D. S. Approximation algorithms for combinatorial problems. In: *Proceedings of the fifth annual ACM symposium on Theory of computing*. [s.n.], 1973. p. 38–49. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/800125.804034>>. Citado na página 14.

JOHNSON, D. S.; ARAGON, C. R.; MCGEOCH, L. A.; SCHEVON, C. Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation; part i, graph partitioning. *Operations research*, INFORMS, v. 37, n. 6, p. 865–892, 1989. Citado na página 60.

JOHNSON, D. S.; ARAGON, C. R.; MCGEOCH, L. A.; SCHEVON, C. Optimization by simulated annealing: an experimental evaluation; part ii, graph coloring and number partitioning. *Operations research*, INFORMS, v. 39, n. 3, p. 378–406, 1991. Citado na página 60.

KAISHEV, V. K.; NIELSEN, J. P.; THURING, F. Optimal customer selection for cross-selling of financial services products. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 40, n. 5, p. 1748–1757, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2012.09.026>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 37.

KAKU, I.; ZHANG, R.-q.; XIAO, Y.-y. A quantitative approach for estimating the opportunity cost with cross-selling. *International Journal of Services Sciences*, Inderscience Publishers Ltd, v. 4, n. 1, p. 14–37, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1504/IJSSCI.2011.038458>>. Citado na página 37.

KAMAKURA, W. A. Cross-selling. *Journal of Relationship Marketing*, Routledge, v. 6, n. 3-4, p. 41–58, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1300/J366v06n03_03>. Citado na página 12.

KAMAKURA, W. A.; WEDEL, M.; ROSA, F. D.; MAZZON, J. A. Cross-selling through database marketing: A mixed data factor analyzer for data augmentation and prediction. *International Journal of Research in marketing*, Elsevier, v. 20, n. 1, p. 45–65, 2003. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0167-8116\(02\)00121-0](https://doi.org/10.1016/S0167-8116(02)00121-0)>. Citado na página 12.

KASER, O.; LEMIRE, D. Tag-cloud drawing: Algorithms for cloud visualization. *arXiv preprint cs/0703109*, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.cs/0703109>>. Citado na página 28.

KATOH, N.; IBARAKI, T. Resource allocation problems. *Handbook of Combinatorial Optimization: Volume 1–3*, Springer, p. 905–1006, 1998. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0303-9_14>. Citado na página 13.

KATSIFOU, A.; SEIFERT, R. W.; TANCRES, J.-S. Joint product assortment, inventory and price optimization to attract loyal and non-loyal customers. *Omega*, Elsevier, v. 46, p. 36–50, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.omega.2014.02.002>>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 42.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: IEEE. *Proceedings of ICNN'95-international conference on neural networks*. 1995. v. 4, p. 1942–1948. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968>>. Citado na página 14.

KENNEY, M.; ZYSMAN, J. The rise of the platform economy. *Issues in science and technology*, Issues in Science and Technology, v. 32, n. 3, p. 61, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 43.

KIRKPATRICK, S.; JR, C. D. G.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. *science*, American association for the advancement of science, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1126/science.220.4598.671>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 60.

KITCHENHAM, B.; CHARTERS, S. *Guidelines for performing systematic literature reviews in software engineering*. [S.l.]: UK, 2007. Citado na página 22.

KITTS, B.; FREED, D.; VRIEZE, M. Cross-sell: a fast promotion-tunable customer-item recommendation method based on conditionally independent probabilities. In: *Proceedings of the sixth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*. [s.n.], 2000. p. 437–446. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/347090.347181>>. Citado na página 37.

KNOTT, A.; HAYES, A.; NESLIN, S. A. Next-product-to-buy models for cross-selling applications. *Journal of interactive Marketing*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 16, n. 3, p. 59–75, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/dir.10038>>. Citado na página 12.

KOCAS, C.; PAUWELS, K.; BOHLMANN, J. D. Pricing best sellers and traffic generators: the role of asymmetric cross-selling. *Journal of Interactive Marketing*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 41, n. 1, p. 28–43, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.intmar.2017.09.001>>. Citado na página 11.

KOOPMANS, T. C.; BECKMANN, M. Assignment problems and the location of economic activities. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 53–76, 1957. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1907742>>. Citado na página 46.

KORTE, B. H.; VYGEN, J.; KORTE, B.; VYGEN, J. *Combinatorial optimization*. Springer, 2011. v. 1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-662-56039-6>>. Citado na página 13.

KUBIAK, B. F.; WEICHBROTH, P. Cross-and up-selling techniques in e-commerce activities. *Journal of Internet Banking and Commerce*, v. 15, n. 3, p. 1–7, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 37.

KUMAR, V.; GEORGE, M.; PANCRAS, J. Cross-buying in retailing: Drivers and consequences. *Journal of retailing*, Elsevier, v. 84, n. 1, p. 15–27, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jretai.2008.01.007>>. Citado na página 12.

KUMAR, V.; RAHMAN, Z.; KAZMI, A. A. Sustainability marketing strategy: An analysis of recent literature. *Global Business Review*, SAGE Publications Sage India: New Delhi, India, v. 14, n. 4, p. 601–625, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/0972150913501598>>. Citado na página 19.

KUO, B. Y.; HENTRICH, T.; GOOD, B. M.; WILKINSON, M. D. Tag clouds for summarizing web search results. In: *Proceedings of the 16th international*

conference on World Wide Web. [s.n.], 2007. p. 1203–1204. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/1242572.1242766>>. Citado na página 28.

LAU, K.-N.; CHOW, H.; LIU, C. A database approach to cross selling in the banking industry: Practices, strategies and challenges. *Journal of Database Marketing & Customer Strategy Management*, Springer, v. 11, p. 216–234, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1057/palgrave.dbm.3240222>>. Citado na página 12.

LAWLER, E. L.; WOOD, D. E. Branch-and-bound methods: A survey. *Operations research*, INFORMS, v. 14, n. 4, p. 699–719, 1966. Citado na página 13.

LEE, C.-S.; WONG, Y.-O.; GUI, H.-Y. Differentiating persuasive factors for tourism booking websites: Towards matrix factorization. In: IEEE. *2022 22nd International Conference on Computational Science and Its Applications (ICCSA)*. 2022. p. 1–8. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ICCSA57511.2022.00011>>. Citado na página 35.

LEE, D.; PARK, S.-H.; MOON, S. Utility-based association rule mining: A marketing solution for cross-selling. *Expert Systems with applications*, Elsevier, v. 40, n. 7, p. 2715–2725, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2012.11.021>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 50.

LEI, D. Solving fuzzy job shop scheduling problems using random key genetic algorithm. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Springer, v. 49, p. 253–262, 2010. Citado na página 63.

LESSMANN, S.; CASERTA, M.; ARANGO, I. M. Tuning metaheuristics: A data mining based approach for particle swarm optimization. *Expert Syst. Appl.*, v. 38, p. 12826–12838, 2011. Citado na página 82.

LI, C.; JIANG, W.; YANG, Y.; PAN, S.; HUANG, G.; GUO, L. Predicting best-selling new products in a major promotion campaign through graph convolutional networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, IEEE, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TNNLS.2022.3155690>>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 43.

LI, J.; ZHANG, L.; MENG, F.; LI, F. Recommendation algorithm based on link prediction and domain knowledge in retail transactions. *Procedia Computer Science*, Elsevier, v. 31, p. 875–881, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.procs.2014.05.339>>. Citado na página 29.

LI, N.; ABE, N. Temporal cross-selling optimization using action proxy-driven reinforcement learning. In: IEEE. *2011 IEEE 11th International*

Conference on Data Mining Workshops. 2011. p. 259–266. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ICDMW.2011.163>>. Citado na página 39.

LI, N.; YANG, Y.; YAN, X. Cross-selling optimization for customized promotion. In: SIAM. *Proceedings of the 2010 SIAM International Conference on Data Mining*. 2010. p. 918–929. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/1.9781611972801.80>>. Citado na página 35.

LI, Q. An algorithm of quantitative association rule on fuzzy clustering with application to cross-selling in telecom industry. In: IEEE. *2009 International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization*. 2009. v. 1, p. 759–762. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/CSO.2009.441>>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 41.

LI, S.; SUN, B.; MONTGOMERY, A. L. Cross-selling the right product to the right customer at the right time. *Journal of Marketing Research*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 48, n. 4, p. 683–700, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1509/jmkr.48.4.683>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 39.

LI, S. S.; KARAHANNA, E. Online recommendation systems in a b2c e-commerce context: a review and future directions. *Journal of the association for information systems*, v. 16, n. 2, p. 2, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.17705/1jais.00389>>. Citado na página 19.

LIU, B.; KONG, F.; YANG, X. gmpis: maximal-profit item selection based on generalized cross-selling considerations. In: IEEE. *Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation (IEEE Cat. No. 04EX788)*. 2004. v. 5, p. 4255–4259. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/WCICA.2004.1342313>>. Citado na página 37.

LIU, C.-h.; CAI, S.-q. Customer cross-selling model based on counter propagation network. *Direct Marketing: An International Journal*, Emerald Group Publishing Limited, v. 2, n. 1, p. 36–47, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/17505930810863626>>. Citado na página 35.

LIU, L. e-commerce personalized recommendation based on machine learning technology. *Mobile Information Systems*, Hindawi, v. 2022, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2022/1761579>>. Citado na página 41.

LIU, Y.; KUANG, B.; FAN, C. An inventory decision model of bops retailing considering cross-selling. In: *WHICEB 2016 Proceedings*. 21. [S.l.: s.n.], 2016. Citado 3 vezes nas páginas 39, 41 e 43.

LOIOLA, E. M.; ABREU, N. M. M. D.; BOAVENTURA-NETTO, P. O.; HAHN, P.; QUERIDO, T. A survey for the quadratic assignment problem. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 176, n. 2, p. 657–690, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.09.032>>. Citado na página 46.

LOPES, M. C.; ANDRADE, C. E. de; QUEIROZ, T. A. de; RESENDE, M. G.; MIYAZAWA, F. K. Heuristics for a hub location-routing problem. *Networks*, Wiley Online Library, v. 68, n. 1, p. 54–90, 2016. Citado na página 82.

LOUBIÈRE, P.; JOURDAN, A.; SIARRY, P.; CHELOUAH, R. A sensitivity analysis method aimed at enhancing the metaheuristics for continuous optimization. *Artificial Intelligence Review*, v. 50, p. 625 – 647, 2017. Citado na página 82.

LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *Linear and nonlinear programming*. [S.l.]: Springer, 1984. v. 2. Citado na página 13.

LUKE, S. *Essentials of metaheuristics*. [S.l.: s.n.], 2009. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 42.

MANGUSSI, A.; POLA, H.; MACEDO, H.; JULIAO, L.; PROENÇA, M.; GIANFELICE, P.; SALEZZE, B.; CHAVES, A. Meta-heurísticas via chaves aleatórias aplicadas ao problema de localização de hubs em árvore. In: *Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. São José dos Campos: Galoa, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 63.

MANIEZZO, V.; BOSCHETTI, M.; STÜTZLE, T. M. *Algorithms and Implementations*. [S.l.]: Springer, 2021. Citado na página 69.

MANIEZZO, V.; STÜTZLE, T.; VOSS, S. *Matheuristics*. [S.l.]: Springer, 2021. Citado na página 59.

MARTINEZ, C.; LOISEAU, I.; RESENDE, M. G.; RODRIGUEZ, S. Brkga algorithm for the capacitated arc routing problem. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Elsevier, v. 281, p. 69–83, 2011. Citado na página 63.

MCINTYRE, D. P.; SRINIVASAN, A. Networks, platforms, and strategy: Emerging views and next steps. *Strategic management journal*, Wiley Online Library, v. 38, n. 1, p. 141–160, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/smj.2596>>. Citado na página 10.

MEHTA, J. Using customer segmentation to improve cross-selling and upselling efforts. *abmatic.ai Blog*, November 2023. Disponível em: <<https://abmatic.ai/blog/customer-segmentation-to-improve-cross-selling-and-upselling-efforts>>. Citado na página 49.

- MIRAGLIOTTA, G.; BRUN, A.; SOYDAN, I. A. Coordinating multi-business sales through management simulators. *International Journal of Production Economics*, Elsevier, v. 121, n. 2, p. 533–549, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2006.10.006>>. Citado na página 30.
- MISEVICIUS, A. Ruin and recreate principle based approach for the quadratic assignment problem. In: SPRINGER. *Genetic and Evolutionary Computation Conference*. [S.l.], 2003. p. 598–609. Citado na página 91.
- MURAD, D. F.; HERYADI, Y.; WIJANARKO, B. D.; ISA, S. M.; BUDIHARTO, W. Recommendation system for smart lms using machine learning: a literature review. In: IEEE. *2018 international conference on computing, engineering, and design (ICCED)*. 2018. p. 113–118. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ICCED.2018.00031>>. Citado na página 20.
- NARAYANAM, R.; NANAVATI, A. A. Viral marketing for product cross-sell through social networks. In: SPRINGER. *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases: European Conference, ECML PKDD 2012, Bristol, UK, September 24-28, 2012. Proceedings, Part II 23*. [S.l.], 2012. p. 581–596. Citado 4 vezes nas páginas 35, 39, 41 e 43.
- NARAYANAM, R.; NANAVATI, A. A. Design of viral marketing strategies for product cross-sell through social networks. *Knowledge and information systems*, Springer, v. 39, n. 3, p. 609–641, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10115-013-0630-1>>. Citado 6 vezes nas páginas 35, 37, 39, 41, 42 e 43.
- NASH, D.; STERNA-KARWAT, A. An application of dea to measure branch cross selling efficiency. *Computers & operations research*, Elsevier, v. 23, n. 4, p. 385–392, 1996. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0305-0548\(95\)00046-1](https://doi.org/10.1016/0305-0548(95)00046-1)>. Citado na página 39.
- NETESSINE, S.; SAVIN, S.; XIAO, W. Revenue management through dynamic cross selling in e-commerce retailing. *Operations Research*, INFORMS, v. 54, n. 5, p. 893–913, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/opre.1060.0296>>. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 42.
- NGAI, E. W.; WAT, F. A literature review and classification of electronic commerce research. *Information & Management*, Elsevier, v. 39, n. 5, p. 415–429, 2002. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0378-7206\(01\)00107-0](https://doi.org/10.1016/S0378-7206(01)00107-0)>. Citado na página 18.
- NISAR, T. M.; PRABHAKAR, G. What factors determine e-satisfaction and consumer spending in e-commerce retailing? *Journal of retailing*

- and consumer services*, Elsevier, v. 39, p. 135–144, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jretconser.2017.07.010>>. Citado na página 11.
- OKOLI, C.; SCHABRAM, K. A guide to conducting a systematic literature review of information systems research. Ssrn, 2015. Citado na página 21.
- OLÁH, J.; KITUKUTHA, N.; HADDAD, H.; PAKURÁR, M.; MÁTÉ, D.; POPP, J. Achieving sustainable e-commerce in environmental, social and economic dimensions by taking possible trade-offs. *Sustainability*, MDPI, v. 11, n. 1, p. 89, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/su11010089>>. Citado na página 11.
- ORDANINI, A.; POL, A. Infomediation and competitive advantage in b2b digital marketplaces. *European Management Journal*, Elsevier, v. 19, n. 3, p. 276–285, 2001. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0263-2373\(01\)00024-X](https://doi.org/10.1016/S0263-2373(01)00024-X)>. Citado na página 10.
- OZCAN, T.; ESNAF, S. A discrete constrained optimization using genetic algorithms for a bookstore layout. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, Taylor & Francis, v. 6, n. 2, p. 261–278, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/18756891.2013.768447>>. Citado 4 vezes nas páginas 35, 39, 40 e 42.
- PALOMARES, I.; PORCEL, C.; PIZZATO, L.; GUY, I.; HERRERA-VIDEIRA, E. Reciprocal recommender systems: Analysis of state-of-art literature, challenges and opportunities towards social recommendation. *Information Fusion*, Elsevier, v. 69, p. 103–127, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.inffus.2020.12.001>>. Citado na página 20.
- PAPADIMITRIOU, C. H.; STEIGLITZ, K. *Combinatorial optimization: algorithms and complexity*. [S.l.]: Courier Corporation, 1998. Citado na página 13.
- PAQUAY, C.; SCHYNS, M.; LIMBOURG, S. A mixed integer programming formulation for the three-dimensional bin packing problem deriving from an air cargo application. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 23, n. 1-2, p. 187–213, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/itor.12111>>. Citado na página 13.
- PARIS, D. L.; BAHARI, M.; IAHAD, N. A.; ISMAIL, W. Systematic literature review of e-commerce implementation studies. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, Asian Research Publishing Network, 2016. Citado na página 20.

PARKER, G. G.; ALSTYNE, M. W. V.; CHOUDARY, S. P. *Platform revolution: How networked markets are transforming the economy and how to make them work for you*. [S.l.]: WW Norton & Company, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 43.

PATHAK, B.; GARFINKEL, R.; GOPAL, R. D.; VENKATESAN, R.; YIN, F. Empirical analysis of the impact of recommender systems on sales. *Journal of Management Information Systems*, Taylor & Francis, v. 27, n. 2, p. 159–188, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/29780174>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 19 e 49.

PATHMANATHAN, P. R.; EL-EBIARY, Y. A. B.; YUSOFF, M. H.; ASEH, K.; AL-QUDAH, O. M. A. A.; PANDE, B.; ABU-ULBEH, W.; MOAIAD, Y. A.; BAMANSOOR, S. The benefit and impact of e-commerce in tourism enterprises. In: IEEE. *2021 2nd International Conference on Smart Computing and Electronic Enterprise (ICSCEE)*. 2021. p. 193–198. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ICSCEE50312.2021.9497947>>. Citado na página 11.

PATRIKSSON, M. A survey on the continuous nonlinear resource allocation problem. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 185, n. 1, p. 1–46, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.12.006>>. Citado na página 13.

PAUL, A. V. L.; LIEBRAND, W. B.; M., M. D.; AM, W. H. Introduction and literature review. *Social dilemmas*, Garland Science, p. 3–28, 2015. Citado na página 18.

PESSOA, L. S.; SANTOS, A. C.; RESENDE, M. G. A biased random-key genetic algorithm for the tree of hubs location problem. *Optimization Letters*, Springer, v. 11, p. 1371–1384, 2017. Citado na página 64.

PINHEIRO, P. R.; JÚNIOR, B. A.; SARAIVA, R. D. A random-key genetic algorithm for solving the nesting problem. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, Taylor & Francis, v. 29, n. 11, p. 1159–1165, 2016. Citado na página 63.

POCHET, Y.; WOLSEY, L. A. *Production planning by mixed integer programming*. Springer, 2006. v. 149. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/0-387-33477-7>>. Citado na página 13.

QIU, D.; WANG, Y.; ZHANG, Q. A model for a bank to identify cross-selling opportunities. In: IEEE. *2009 International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering*. 2009. p. 1–4. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/CISE.2009.5362870>>. Citado na página 35.

- RABBANI, M.; SALEHI, R.; FARSHBAF-GERANMAYEH, A. Integrating assortment selection, pricing and mixed-bundling problems for multiple retail categories under cross-selling. *Uncertain Supply Chain Management*, v. 5, n. 4, p. 315–326, 2017. Disponível em: <<http://doi.org/10.5267/j.uscm.2017.5.001>>. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 41.
- RAPP, A.; BAKER, T. L.; BACHRACH, D. G.; OGILVIE, J.; BEITELSPACHER, L. S. Perceived customer showrooming behavior and the effect on retail salesperson self-efficacy and performance. *Journal of Retailing*, Elsevier, v. 91, n. 2, p. 358–369, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jretai.2014.12.007>>. Citado na página 12.
- RARDIN, R. L.; RARDIN, R. L. *Optimization in operations research*. [S.l.]: Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1998. v. 166. Citado na página 13.
- RODRIGUES, W. C. Metodologia científica. *Faetec/IST. Paracambi*, v. 2, 2007. Citado na página 15.
- ROSÁRIO, A.; RAIMUNDO, R. Consumer marketing strategy and e-commerce in the last decade: a literature review. *Journal of theoretical and applied electronic commerce research*, MDPI, v. 16, n. 7, p. 3003–3024, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/jtaer16070164>>. Citado na página 19.
- ROWLEY, J.; SLACK, F. Conducting a literature review. *Management research news*, Emerald Group Publishing Limited, v. 27, n. 6, p. 31–39, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/01409170410784185>>. Citado na página 18.
- RYU, M.; AHN, K.-I.; LEE, K. Finding effective item assignment plans with weighted item associations using a hybrid genetic algorithm. *Applied Sciences*, MDPI, v. 11, n. 5, p. 2209, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/app11052209>>. Citado 13 vezes nas páginas 8, 32, 39, 40, 42, 43, 46, 47, 48, 50, 51, 54 e 55.
- SAH, B.; TITIYAL, R.; BHANDARI, D. D. Product assignment using quadratic assignment model in retail. *International Journal of Services and Operations Management*, Inderscience Publishers (IEL), v. 32, n. 1, p. 25–43, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1504/IJSOM.2019.097037>>. Citado 8 vezes nas páginas 39, 40, 42, 46, 47, 50, 51 e 80.
- SAHNI, S.; GONZALEZ, T. P-complete approximation problems. *Journal of the ACM (JACM)*, ACM New York, NY, USA, v. 23, n. 3, p. 555–565, 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/321958.321975>>. Citado na página 46.

SANO, S.; KADOWAKI, T.; TSUDA, K.; KIMURA, S. Application of bayesian optimization for pharmaceutical product development. *Journal of Pharmaceutical Innovation*, p. 1–11, 2019. Citado na página 83.

SARI, J. N.; NUGROHO, L. E.; FERDIANA, R.; SANTOSA, P. I. Review on customer segmentation technique on ecommerce. *Advanced Science Letters*, American Scientific Publishers, v. 22, n. 10, p. 3018–3022, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1166/asl.2016.7985>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 49 e 50.

SCHMITZ, C. Group influences of selling teams on industrial salespeople's cross-selling behavior. *Journal of the Academy of Marketing Science*, Springer, v. 41, p. 55–72, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11747-012-0304-7>>. Citado na página 13.

SCHMITZ, C.; LEE, Y.-C.; LILIEN, G. L. Cross-selling performance in complex selling contexts: An examination of supervisory-and compensation-based controls. *Journal of Marketing*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 78, n. 3, p. 1–19, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1509/jm.12.0421>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

SCHUETZ, M. J.; BRUBAKER, J. K.; MONTAGU, H.; DIJK, Y. van; KLEPSCH, J.; ROSS, P.; LUCKOW, A.; RESENDE, M. G.; KATZGRABER, H. G. Optimization of robot-trajectory planning with nature-inspired and hybrid quantum algorithms. *Physical Review Applied*, APS, v. 18, n. 5, p. 054045, 2022. Citado na página 63.

SFENRIANTO; PURNAMASARI, I.; BAHAWERES, R. B. Naive bayes classifier algorithm and particle swarm optimization for classification of cross selling (case study: Pt telkom jakarta). In: *2016 4th International Conference on Cyber and IT Service Management*. [s.n.], 2016. p. 1–4. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/CITSM.2016.7577589>>. Citado na página 43.

SHAHRIARI, B.; SWERSKY, K.; WANG, Z.; ADAMS, R. P.; FREITAS, N. de. Taking the human out of the loop: A review of bayesian optimization. *Proceedings of the IEEE*, v. 104, p. 148–175, 2016. Citado na página 83.

SHARMA, G.; LIJUAN, W. The effects of online service quality of e-commerce websites on user satisfaction. *The electronic library*, Emerald Group Publishing Limited, v. 33, n. 3, p. 468–485, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/EL-10-2013-0193>>. Citado na página 11.

SPRINGENBERG, J. T.; KLEIN, A.; FALKNER, S.; HUTTER, F. Bayesian optimization with robust bayesian neural networks. p. 4134–4142, 2016. Citado na página 83.

STANDING, S.; STANDING, C.; LOVE, P. E. A review of research on e-marketplaces 1997–2008. *Decision Support Systems*, Elsevier, v. 49, n. 1, p. 41–51, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.dss.2009.12.008>>. Citado na página 19.

STEWART, J.; KENNELLY, P. J. Illuminated choropleth maps. *Annals of the Association of American Geographers*, Taylor & Francis, v. 100, n. 3, p. 513–534, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00045608.2010.485449>>. Citado na página 33.

SUNDARARAJAN, R.; BHASKAR, T.; SARKAR, A.; DASARATHA, S.; BAL, D.; MARASANAPALLE, J. K.; ZMUDZKA, B.; BAK, K. Marketing optimization in retail banking. *Interfaces, INFORMS*, v. 41, n. 5, p. 485–505, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1287/inte.1110.0597>>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 42.

TAHA, H. A. *Operations research*. [S.l.]: Pearson, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 41.

TALBI, E.-G. *Metaheuristics: from design to implementation*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 14, 42, 60, 61, 62 e 69.

TÄUSCHER, K.; LAUDIEN, S. M. Understanding platform business models: A mixed methods study of marketplaces. *European management journal*, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 319–329, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.emj.2017.06.005>>. Citado na página 10.

TEMPLIER, M.; PARÉ, G. A framework for guiding and evaluating literature reviews. *Communications of the Association for Information Systems*, v. 37, n. 1, p. 6, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.17705/1CAIS.03706>>. Citado na página 21.

THURING, F.; NIELSEN, J. P.; GUILLÉN, M.; BOLANCÉ, C. Selecting prospects for cross-selling financial products using multivariate credibility. *Expert systems with Applications*, Elsevier, v. 39, n. 10, p. 8809–8816, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2012.02.011>>. Citado na página 30.

THURING, F.; NIELSEN, J. P.; GUILLÉN, M.; BOLANCÉ, C. Segmenting and selecting cross-sale prospects using dynamic pricing. In: SCITEPRESS. *International Conference on Operations Research and Enterprise Systems*. 2013. v. 2, p. 103–108. Disponível em: <<https://doi.org/10.5220/0004336401030108>>. Citado na página 35.

- TIAN, L.; LI, L.; WANG, X. Study of identifying cross-selling for online retailers in e-commerce. In: IEEE. *2012 Fourth International Conference on Computational and Information Sciences*. 2012. p. 417–420. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ICCIS.2012.297>>. Citado na página 37.
- TIMONINA-FARKAS, A.; KATSIFOU, A.; SEIFERT, R. W. Product assortment and space allocation strategies to attract loyal and non-loyal customers. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 285, n. 3, p. 1058–1076, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.02.019>>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 42.
- TOTH, P.; VIGO, D. *The vehicle routing problem*. SIAM, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/1.9780898718515>>. Citado na página 13.
- TZAVLOPOULOS, I.; GOTZAMANI, K.; ANDRONIKIDIS, A.; VASSILIADIS, C. Determining the impact of e-commerce quality on customers' perceived risk, satisfaction, value and loyalty. *International Journal of Quality and Service Sciences*, Emerald Publishing Limited, v. 11, n. 4, p. 576–587, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/IJQSS-03-2019-0047>>. Citado na página 11.
- ULUNGU, E. L.; TEGHEM, J. Multi-objective combinatorial optimization problems: A survey. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Wiley Online Library, v. 3, n. 2, p. 83–104, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/mcda.4020030204>>. Citado na página 13.
- UMAR, M.; MIRZA, N.; HASNAOUI, J. A.; ROCHÓN, M. P. The nexus of carbon emissions, oil price volatility, and human capital efficiency. *Resources Policy*, Elsevier, v. 78, p. 102876, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2022.102876>>. Citado na página 10.
- VANDERBEI, R. J. *Linear Programming Foundations and Extensions*. [S.l.]: Springer, 2014. Citado na página 13.
- VIELMA, J. P. Mixed integer linear programming formulation techniques. *Siam Review*, SIAM, v. 57, n. 1, p. 3–57, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/130915303>>. Citado na página 13.
- VINCENT, F. Y.; LIN, S.-W. Multi-start simulated annealing heuristic for the location routing problem with simultaneous pickup and delivery. *Applied soft computing*, Elsevier, v. 24, p. 284–290, 2014. Citado na página 60.
- VIU-ROIG, M.; ALVAREZ-PALAU, E. J. The impact of e-commerce-related last-mile logistics on cities: A systematic literature review. *Sustainability*, v. 12,

n. 16, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/su12166492>>. Citado na página 11.

VRANCIC, I. Pattern recognition approach to customer analysis. In: IEEE. *ISPA 2001. Proceedings of the 2nd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis. In conjunction with 23rd International Conference on Information Technology Interfaces (IEEE Cat. 2001. p. 325–329*. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ISPA.2001.938650>>. Citado na página 35.

WAGNER, G.; SCHRAMM-KLEIN, H.; STEINMANN, S. Online retailing across e-channels and e-channel touchpoints: Empirical studies of consumer behavior in the multichannel e-commerce environment. *Journal of Business Research*, Elsevier, v. 107, p. 256–270, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jbusres.2018.10.048>>. Citado na página 11.

WANG, C.-C.; CHEN, C.-C. Electronic commerce research in latest decade: A literature review. *International Journal of Electronic Commerce Studies*, v. 1, n. 1, p. 1–14, 2010. Disponível em: <<http://doi.org/10.7903/ijecs.898>>. Citado na página 19.

WANG, K.; DOWLING, A. Bayesian optimization for chemical products and functional materials. *Current Opinion in Chemical Engineering*, 2022. Citado na página 83.

WANG, O.; SOMOGYI, S.; CHARLEBOIS, S. Food choice in the e-commerce era: a comparison between business-to-consumer (b2c), online-to-offline (o2o) and new retail. *British Food Journal*, Emerald Publishing Limited, v. 122, n. 4, p. 1215–1237, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/BFJ-09-2019-0682>>. Citado na página 11.

WANG, S.; ARCHER, N. P. Electronic marketplace definition and classification: literature review and clarifications. *Enterprise Information Systems*, Taylor & Francis, v. 1, n. 1, p. 89–112, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/17517570601088380>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 18.

WANG, S.; ZHENG, S.; XU, L.; LI, D.; MENG, H. A literature review of electronic marketplace research: Themes, theories and an integrative framework. *Information Systems Frontiers*, Springer, v. 10, p. 555–571, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10796-008-9115-2>>. Citado na página 18.

WANG, X.; JIN, Y.; SCHMITT, S.; OLHOFFER, M. Recent advances in bayesian optimization. *ACM Computing Surveys*, v. 55, p. 1 – 36, 2022. Citado na página 83.

- WANG, X.; NG, C. T. New retail versus traditional retail in e-commerce: channel establishment, price competition, and consumer recognition. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 291, p. 921–937, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10479-018-2994-9>>. Citado na página 11.
- WILLIAMSON, D. P.; SHMOYS, D. B. *The design of approximation algorithms*. [S.l.]: Cambridge university press, 2011. Citado na página 14.
- WINSTON, W. L. *Operations research: applications and algorithm*. [S.l.]: Thomson Learning, Inc., 2004. Citado na página 13.
- WOLSEY, L. A. *Integer programming*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020. Citado na página 13.
- WONG, R. C.-W.; FU, A. W.-C. Ism: item selection for marketing with cross-selling considerations. In: SPRINGER. *Pacific-Asia Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. 2004. p. 431–440. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-24775-3_53>. Citado na página 37.
- WONG, R. C.-W.; FU, A. W.-C.; WANG, K. Mpis: Maximal-profit item selection with cross-selling considerations. In: IEEE. *Third IEEE International Conference on Data Mining*. 2003. p. 371–378. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ICDM.2003.1250942>>. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 42.
- WONG, R. C.-W.; FU, A. W.-C.; WANG, K. Data mining for inventory item selection with cross-selling considerations. *Data mining and knowledge discovery*, Springer, v. 11, p. 81–112, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10618-005-1359-6>>. Citado 4 vezes nas páginas 37, 39, 40 e 42.
- WONG, W.-K.; LEUNG, S.; GUO, Z.; ZENG, X.; MOK, P. Y. Intelligent product cross-selling system with radio frequency identification technology for retailing. *International Journal of Production Economics*, Elsevier, v. 135, n. 1, p. 308–319, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2011.08.005>>. Citado na página 12.
- XIAO, Y.; WATSON, M. Guidance on conducting a systematic literature review. *Journal of planning education and research*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 39, n. 1, p. 93–112, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/0739456X17723971>>. Citado na página 21.
- XIUJUAN, X.; LIFENG, J.; ZHE, W.; HONGYAN, Z.; SHUANG, L.; CHUNGUANG, Z. Fast algorithm for mining item profit in retails based on

microeconomic view. In: IEEE. *2005 International Conference on Cyberworlds (CW'05)*. 2005. p. 5–pp. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/CW.2005.44>>. Citado na página 37.

XU, A. J.; LOI, R.; CHOW, C. W.; LIN, V. S. Driving retail cross-selling. *Journal of Service Research*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 26, n. 2, p. 212–232, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1094670522108739>>. Citado na página 12.

YAO, R. B.; SONG, A. P.; DING, X. H.; LI, M. B. Cross selling using association rule mining. *Applied Mechanics and Materials*, Trans Tech Publ, v. 687, p. 1337–1341, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.687-691.1337>>. Citado na página 35.

YU, M.; FAN, W. Calibration of microscopic traffic simulation models using metaheuristic algorithms. *International journal of transportation science and technology*, v. 6, p. 63–77, 2017. Citado na página 82.

ZBOJA, J. J.; HARTLINE, M. D. Using internal relationship marketing activities to enhance cross-selling performance in services. *Journal of Relationship Marketing*, Taylor & Francis, v. 9, n. 3, p. 117–131, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/15332667.2010.502004>>. Citado na página 37.

ZHANG, C.; RUAN, J. A modified apriori algorithm with its application in instituting cross-selling strategies of the retail industry. In: IEEE. *2009 International Conference on Electronic Commerce and Business Intelligence*. 2009. p. 515–518. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ECBI.2009.121>>. Citado na página 37.

ZHANG, C.; ZHANG, S. *Association rule mining: models and algorithms*. Springer, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/3-540-46027-6>>. Citado na página 50.

ZHANG, H.; ZHAO, L.; GUPTA, S. The role of online product recommendations on customer decision making and loyalty in social shopping communities. *Int. J. Inf. Manag.*, v. 38, p. 150–166, 2018. Citado na página 13.

ZHANG, R.; KAKU, I.; XIAO, Y. Model and heuristic algorithm of the joint replenishment problem with complete backordering and correlated demand. *International Journal of Production Economics*, Elsevier, v. 139, n. 1, p. 33–41, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2011.01.019>>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 42.

ZHAO, T.; MATTHEWS, K.; MURINDE, V. Cross-selling, switching costs and imperfect competition in british banks. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 37, n. 12, p. 5452–5462, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2013.03.008>>. Citado na página 37.

ZHU, Z.; BAI, Y.; DAI, W.; LIU, D.; HU, Y. Quality of e-commerce agricultural products and the safety of the ecological environment of the origin based on 5g internet of things technology. *Environmental Technology & Innovation*, Elsevier, v. 22, p. 101462, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.eti.2021.101462>>. Citado na página 11.

APÊNDICE A – Instâncias

Este apêndice apresenta um exemplo para a instância da solução ilustrativa do capítulo 3, com as matrizes l_{ij} , y_{kt} , w_{ik} e o vetor d_i , respectivamente.

```

[[0.0, 1.6, 0.0, 1.3, 0.0, 1.2],
 [1.6, 0.0, 1.1, 1.4, 0.0, 1.3],
 [0.0, 1.1, 0.0, 1.3, 1.5, 0.0],
 [1.3, 1.4, 1.3, 0.0, 0.0, 1.3],
 [0.0, 0.0, 1.5, 0.0, 0.0, 1.3],
 [1.2, 1.3, 0.0, 1.3, 1.3, 0.0]]

[[0, 1, 0, 1, 0, 0],
 [1, 0, 1, 0, 1, 0],
 [0, 1, 0, 0, 0, 1],
 [1, 0, 0, 0, 1, 0],
 [0, 1, 0, 1, 0, 1],
 [0, 0, 1, 0, 1, 0]]

[[1, 0, 0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 1, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0, 0, 1],
 [0, 0, 0, 0, 1, 0],
 [0, 0, 1, 0, 0, 0],
 [0, 1, 0, 0, 0, 0]]

[5, 5, 5, 5, 5, 5]

```

APÊNDICE B – Resultados do método exato

Este apêndice apresenta o resultado do algoritmo exato para a resolução da instância da solução ilustrativa do capítulo 3 para as variáveis x_{ik} e z_{ij} , respectivamente.

Optimal Value: 19.8

// SALES PREDICTION VARIABLE

$x[0][3] = 1$

$x[0][5] = 1$

$x[1][4] = 1$

$x[2][1] = 1$

$x[3][4] = 1$

$x[4][0] = 1$

$x[4][2] = 1$

$x[5][1] = 1$

// CROSS-SELLING VARIABLES

$z[0][3] = 1$

$z[1][0] = 1$

$z[1][2] = 1$

$z[1][5] = 1$

$z[2][1] = 1$

$z[2][3] = 1$

$$z[2][4] = 1$$

$$z[3][0] = 1$$

$$z[3][2] = 1$$

$$z[3][5] = 1$$

$$z[4][2] = 1$$

$$z[4][5] = 1$$

$$z[5][1] = 1$$

$$z[5][3] = 1$$

$$z[5][4] = 1$$