UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

ALAN DOUGLAS CARVALHO REBOUÇAS

O PROBLEMA DE CORTE BIDIMENSIONAL GUILHOTINADO NÃO-ESTAGIADO: UMA ABORDAGEM VIA METAHEURÍSTICAS GRASP E BRKGA COM APRENDIZAGEM POR REFORÇO

MOSSORÓ - RN

2021

© Todos os direitos estão reservados a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do(a) autor(a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei n° 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei n° 9.610/1998. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu(a) respectivo(a) autor(a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

Catalogação da Publicação na Fonte.
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.

C331p Carvalho Rebouças, Alan Douglas
O PROBLEMA DE CORTE BIDIMENSIONAL GUILHOTINADO NÃO-ESTAGIADO: UMA ABORDAGEM VIA METAHEURÍSTICAS GRASP E BRKGA COM APRENDIZAGEM POR REFORÇO. / Alan Douglas Carvalho Rebouças. - Mossoró, 2021.
122p.

Orientador(a): Prof. Dr. Dario José Aloise.
Dissertação (Mestrado em Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação). Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.

1. Otimização combinatória. 2. Corte Bidimensional Guilhotinado Não-estagiado. 3. GRASP. 4. BRKGA. 5. Q-learning. I. Aloise, Dario José. II. Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. III. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC´s) foi desenvolvido pela Diretoria de Informatização (DINF), sob orientação dos bibliotecários do SIB-UERN, para ser adaptado às necessidades da comunidade acadêmica UERN.

ALAN DOUGLAS CARVALHO REBOUÇAS

O PROBLEMA DE CORTE BIDIMENSIONAL GUILHOTINADO NÃO-ESTAGIADO: UMA ABORDAGEM VIA METAHEURÍSTICAS GRASP E BRKGA COM APRENDIZAGEM POR REFORÇO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação - associação ampla entre a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte e a Universidade Federal Rural do Semi-Árido, para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

APROVADA EM: 10/09/2021.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Dario José Aloise
Orientador

Dr. Francisco Chagas de Lima Júnior
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN

Dr. Fábio Francisco da Costa Fontes
Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA

Dra. Andréa Cynthia dos Santos
Université Le Havre Normandie

Dedico este trabalho aos meus pais, Algecira e José Maurílio, e ao meu irmão, Alex.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu Senhor Jesus Cristo, por ter me ajudado e me dado forças para a chegar até aqui, sem Ele nada seria possível.

À minha família, em especial aos meus pais, José Maurílio e Algecira, ao meu irmão, Alex, por todo incentivo, cuidado, por serem meu alicerce e por me apoiarem sempre, não medindo esforços para me ajudar nos meus objetivos e não me deixar desistir nunca nos momentos de dificuldade.

À minha namorada, Diana Reis, por todo o amor, carinho, companheirismo, por sempre acreditar em mim, por estar do meu lado nos momentos difíceis, me acalmando nos momentos de ansiedade.

Ao meu orientador, professor Dario, pelas orientações, pela paciência, por ter dedicado parte do seu tempo me ajudando, me orientando e por não me deixar desistir.

A Thiago Henrique e Jonathan Lopes, pela ajuda no entendimento dos problemas e algoritmos.

Aos professores do PPgCC, pela contribuição para o meu desenvolvimento como profissional.

A todos os amigos que fiz durante o mestrado, pelos agradáveis momentos que compartilhamos, em especial a Daniela Sena, Virgínia Maia e ao Professor Fábio Fontes.

À CAPES pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

A todos que fizeram parte e me ajudaram direta ou indiretamente na minha formação até aqui, muito obrigado!

"E a paz de Deus, que excede todo o entendimento, guardará o vosso coração e a vossa mente em Cristo Jesus." Filipenses 4:7

Resumo

O Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado, frequentemente encontrado na indústria, tem como objetivo determinar a melhor maneira de se produzir peças retangulares menores, realizando cortes do tipo guilhotina, a partir de placas de tamanho maior. Esse problema é NP-difícil e, portanto, não se pode garantir a obtenção dos melhores resultados para todas instâncias utilizando os métodos exatos, em um tempo computacional viável. Assim sendo, este trabalho propõe uma abordagem metaheurística híbrida, BRKGA (Biased Random-Key Genetic Algorithm) e GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure) com Aprendizagem por Reforço, especificamente o Algoritmo Q-learning. O Q-learning é utilizado como uma estratégia de exploração/explotação para as metaheurísticas. No BRKGA é o gerador da população inicial, e no GRASP, substitui a fase construtiva. Este processo teve como objetivo melhorar a qualidade das soluções iniciais para ambas as metaheurísticas, fazendo com que a busca inicie com boas soluções. Testes computacionais foram realizados sobre classes de instâncias conhecidas da literatura e os métodos propostos se mostraram competitivos e promissores, quando comparados aos resultados de outras metaheurísticas aplicadas ao problema.

Palavras-chave: Otimização combinatória, Corte Bidimensional Guilhotinado Não-estagiado, GRASP, BRKGA, Q-learning.

Abstract

The Two-Dimensional Guillotine Cutting Problem, often found in the industry, aims to determine the best way to produce smaller rectangular pieces, making guillotine cuts from larger size plates. This problem is NP-hard and, therefore, it is not possible to guarantee the best results for all instances using the exact methods, in a viable computational time. Therefore, this work proposes a hybrid metaheuristic approach, BRKGA (Biased Random-Key Genetic Algorithm) and GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure) with Reinforcement Learning, specifically the Q-learning Algorithm. Q-learning is used as an exploration/explotation strategy for metaheuristics. In BRKGA it is the generator of the initial population, and in GRASP, it replaces the constructive phase. This process aimed to improve the quality of initial solutions for both metaheuristics, making the search start with good solutions. Computational tests were performed on instances classes known in the literature and the proposed methods proved to be competitive and promising when compared to the results of other metaheuristics applied to the problem.

Keywords: Combinatorial Optimization, Non-Staged Two-dimensional Guillotined Cutting, GRASP, BRKGA, Q-learning.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de problema unidimensional 18
Figura 2 – Exemplo de um problema de corte bidimensional 19
Figura 3 – Exemplo de um problema de corte bidimensional 19
Figura 4 – Tipologia proposta por Wascher 21
Figura 5 – Exemplo de objetos e demanda de itens 22
Figura 6 – Ilustração de uma guilhotina e do processo de corte 23
Figura 7 – Exemplo de padrões de corte guilhotinado e não-guilhotinado 23
Figura 8 – Exemplo ilustrativo de um movimento *2-Opt* 32
Figura 9 – Processo evolutivo do BRKGA 34
Figura 10 – Exemplo de recombinação PUC, tendo a = 0, 7 35
Figura 11 – Estrutura do BRKGA 36
Figura 12 – Rotina de corte 38
Figura 13 – Rotina Posição 39
Figura 14 – Comportamento da HHDHeuristic 40
Figura 15 – Interação entre um agente de aprendizado por reforço e o ambiente . . 41
Figura 16 – Algoritmo *Q-Learning* 43
Figura 17 – Funcionamento geral das Metaheurísticas GRASP e BRKGA 45
Figura 18 – Troca *2-opt* em árvore binária 46
Figura 19 – Exemplo do ambiente do problema 47
Figura 20 – Lisra de peças 49
Figura 21 – Estrutura de funcionamento do *Q-learning* 50
Figura 22 – Cromossomo 51
Figura 23 – Formação da população inicial pelo *Q-learning* 52
Figura 24 – Decodificador do BRKGA 53
Figura 25 – Funcionamento Geral do GRASP-Learning 55
Figura 26 – Gráfico Comparativo entre Os Resultados Obtidos e o Limite Inferior . 59
Figura 27 – Gráfico Comparativo entre o desvio padrão para o BRKGA e BRKGA-L 59
Figura 28 – Gráfico Comparativo entre o desvio padrão para o GRASP e GRASP-L 60
Figura 29 – Gráfico Comparativo entre o GRASP-L e o Limite Inferior 60

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores recomendados para os parâmetros do BRKGA 36
Tabela 2 – Parâmetros do *Q-learning* 57
Tabela 3 – Comparativo entre os resultados do GRASP e GRASP-L 57
Tabela 4 – Comparativo entre os resultados do BRKGA e BRKGA-L 58
Tabela 5 – Comparativo entre os resultados de todos os algoritmos 58
Tabela 6 – Comparativo entre os resultados da Classe 10 para os algoritmos propostos e resultados da literatura 61
Tabela 7 – Comparativo entre os resultados de todas as classes para os algoritmos propostos e resultados da literatura 62

Lista de abreviaturas e siglas

AR - Aprendizagem por Reforço

BFIH – Best-Fit Insertion Heuristic

BRKGA - Biased Random-Key Genetic Algorithm

CFIH – Critical-Fit Insertion Heuristic

DQN - Deep Q-Network

DRL - Deep Reinforcement Learning

EA-LGFi – Evolutionary Algorithm LGFi

FBS - Finite Best Strip

FC - Floor-Ceiling

FFDH – First Fit Decreasing Height

FFF - Finite First-Fit

FFIH – First-Fit Insertion Heuristic

GLS – Guided Local Search

GRASP - Greedy Randomized Adaptive Search Procedure

KP - Knapsack Problem

LC - Lista de Candidatos

LRC - Lista Retrita de Candidatos

MS-LGFi – Multi-Start LGF

PCE - Problemas de Corte e Empacotamento

PE - Problemas de Empacotamento

PUC - Parametrized Uniform Crossover

RKGA - Random-Key Genetic Algorithm

TSKP - Two-Stage Knapsack problem

Sumário

1 INTRODUÇÃO 13
1.1 Motivação 14
1.2 Objetivos 14
1.2.1 Objetivo Geral 14
1.2.2 Objetivos Específicos 14
1.3 Organização do Trabalho 15

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 16
2.1 O Problema de Corte e Empacotamento 16
2.1.1 Tipologia dos Problemas de Corte e Empacotamento 17
2.2 O Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado 21
2.2.1 Formulação Matemática 23
2.3 Revisão da Literatura 24

3 ABORDAGENS HEURÍSTICAS 29
3.1 *Metaheurísticas* 29
3.1.1 GRASP 29
3.1.2 Fase Construtiva 30
3.1.3 Fase de Busca Local 31
3.1.4 BRKGA 32
3.1.5 Parâmetros do BRKGA 36
3.2 HHDHeuristic 37
3.3 Aprendizado por Reforço 40
3.3.1 Algoritmo *Q-learning* 42

4 MÉTODOS HÍBRIDOS PROPOSTOS 44
4.1 O Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado como um Problema de Decisão Sequencial 46
4.2 Q-Learning Aplicado ao Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado 49
4.2.1 Detalhes do Algortimo Q-learning Implementado 49
4.3 O Método BRKGA-Learning aplicado ao Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado 51
4.3.1 Representação do Cromossomo 51
4.3.2 População Inicial 51
4.3.3 Decodificador 53

4.4 O Método GRASP-Learning Aplicado ao Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado 53

5 RESULTADOS COMPUTACIONAIS 56
5.1 Instâncias do Problema 56
5.2 Limites Inferiores 56
5.3 Resultados e Análises dos Experimentos 56
5.3.1 Ambiente de Desenvolvimento 56
5.3.2 Análise dos Resultados 57
5.3.3 Comparação com Resultados da Literatura 60

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS 63

REFERÊNCIAS 64

APÊNDICES 67

APÊNDICE A – RESULTADOS TOTAIS DO GRASP 68

APÊNDICE B – RESULTADOS TOTAIS DO GRASP-LEARNING 82

APÊNDICE C – RESULTADOS TOTAIS DO BRKGA 96

APÊNDICE D – RESULTADOS TOTAIS DO BRKGA-LEARNING 110

1 Introdução

As industrias, diante da atual competitividade imposta pelo mercado globalizado, veem-se frequentemente desafiadas a tomar decisões vitais à sua sobrevivência. Tais tomadas de decisão têm como objetivo, principalmente, a redução de custos estratégicos, táticos e operacionais enquanto continuamente melhoram a qualidade de seus serviços e produtos, tendo em vista que pequenas reduções no custo de produção podem trazer grandes ganhos, favorecendo, por sua vez, a competitividade e a permanência destas empresas no mercado.

Segundo Kantorovich (1939) existem duas maneiras de aumentar a eficiência do trabalho de uma empresa. Uma maneira é por vários aperfeiçoamentos em tecnologia; isto é, novos acessórios para máquinas individuais, mudanças nos processos tecnológicos e a descoberta de novos e melhores tipos de matérias-primas. A outra forma é a melhoria na organização de planejamento e produção. Aqui estão incluídas, por exemplo, questões como a distribuição do trabalho entre as máquinas individuais da empresa ou entre mecanismos, a correta distribuição de pedidos entre as empresas, a correta distribuição de diferentes tipos de matérias-primas, combustível entre outros fatores.

Vários problemas de produção podem ser reprensentados, por meio de modelos matemáticos, como problemas de otimização. Neste cenário, dentre a imensa variedade de problemas industriais, está incluída uma classe de problemas denominada Problemas de Corte e Empacotamento. De modo geral, estes problemas são aqueles que requerem que um conjunto de itens menores (por exemplo, peças, retângulos) sejam cortados dentro de um conjunto de objetos maiores (por exemplo, placas, folhas de laminados), podendo também ser visualizado como problema de empacotamento, de forma que os itens agora devem ser alocados ou empacotados. Seja corte ou empacotamento, o objetivo principal é sempre buscar o melhor aproveitamento dos objetos utilizados. Apesar da aparente simplicidade e da fácil compreensão, estes problemas possuem uma natureza altamente combinatória, caracterizando-se, portanto, como NP-Difíceis (CHUNG; GAREY; JOHNSON, 1982).

Este trabalho considera um problema específico da classe de Problemas de Corte e Empacotamento citado na literatura como Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado Não-Estagiado, o qual objetiva a otimização do corte guilhotinado de peças retangulares, com demandas definidas e dimensões que podem diferir, a partir de uma placa maior, também com formato retangular existente em estoque.

O objetivo do trabalho é propor uma abordagem híbrida, utilizando as metaheurísticas GRASP e BRKGA, em conjunto com uma técnica de Aprendizado por Reforço, mais especificamente o Algoritmo *Q-Learning*. A ideia ou estratégia é construir as metaheu-

rísticas de maneira que o método de AR gere soluções iniciais de alta aptidão para as metaheurísticas, visando assim que a metaheurística possa obter resultados melhores em suas iterações. Para tanto, o *Q-learning* irá funcionar como gerador da população inicial de alta aptidão e boa diversidade para o BRKGA e, no GRASP, funcionará como método construtor de soluções iniciais.

1.1 Motivação

A motivação deste trabalho surge, sobretudo, devido ao grande número de aplicações industriais as quais o problema pode ser encontrado. Podemos citar, por exemplo, aplicação nas indústrias que atuam no corte de peças de mármore e granito, na fabricação de chapas de aço, peças de vidro, peças de madeira, painéis de acrílico, entre outras.

Outro fator motivador deste trabalho é a importância do tema, tanto econômica, quanto ecológica, visto que a redução do desperdício da matéria-prima tornará o processo de produção mais otimizado (com o menor custo possível) acarretando no aumento de produção, podendo reduzir também, indiretamente, outros insumos necessários á manufatura, como energia elétrica, água, entre outros.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta pesquisa é desenvolver as metaheurísticas GRASP e BRKGA utilizadas em conjunto com uma técnica de Aprendizagem por Reforço, como mecanismo de exploração/explotação, mais especificamente, o algoritmo *Q-Learning*, para o Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado Não-Estagiado.

1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Investigar o estado da arte sobre o Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado;
- Realizar um estudo de otimização combinatória e metaheurística focado nas metaheurísticas propostas, bem como na Aprendizagem por Reforço;
- Implementar os métodos computacionais propostos;
- Resolver instâncias da literatura com os algoritmos desenvolvidos;
- Avaliar e validar a abordagem através dos resultados obtidos nos testes computacionais e fazer uma comparação com resultados da literatura.

1.3 Organização do Trabalho

O documento está organizado da seguinte forma: O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica, em que os problemas de corte e empacotamento são explicados, bem como suas tipologias e o Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado. O Capítulo 3 faz uma explanação sobre as metaheurísticas, a Apredizagem por Reforço e o *Q-Learning* e a heurística construtiva, HHDHeurístic, métodos estes que serão utilizados para solucionar o problema em questão. O Capítulo 4 aborda, em detalhes, como os métodos foram implementados. Por fim, o Capítulo 5 apresenta os resultados computacionais e a análise dos experimentos e o Capítulo 6 traz as conclusões e propostas de trabalhos futuros.

2 Fundamentação Teórica

2.1 O Problema de Corte e Empacotamento

Os Problemas de Corte e Empacotamento (PCE) constituem uma classe de problemas que se caracterizam pelo objetivo comum de dividir matéria-prima ou espaço (objetos de dimensões maiores) em partes menores (itens) de dimensões e formas definidas. Por exemplo, em uma indústria moveleira é necessário realizar cortes na madeira de forma a ter menos desperdício possível, ou em uma empresa de transporte de cargas, realizar uma distribuição da carga que aproveite ao máximo espaço dos veículos.

Nos problemas de corte, como exemplificado acima, os objetos de dimensões maiores são materiais sólidos que devem ser cortados em itens menores, como peças. Estes problemas podem ser considerados unidimensionais em que, por exemplo, barras metálicas, barras de aço e bobinas de papel sao cortados apenas em uma dimensão, bidimensionais em que placas de madeira, tecido e chapas de aço sao cortadas em duas dimensões, ou tridimensionais, em que blocos de espumas, por exemplo, para a produção de colchões, travesseiros são cortados em três dimensões. O objetivo é minimizar os desperdícios que têm um impacto direto na produção.

Os problemas de empacotamento são análogos aos Problemas de Corte, mas neste caso os objetos de dimensões maiores podem ser definidos como o espaço vazio útil dos veículos, carros, paletes, contêineres e assim por diante. Empacotar itens pequenos nestes objetos também pode ser considerado como cortar o espaço vazio dos grandes objetos em partes de espaços vazios, os quais serão ocupados por pequenos itens (DYCKHOFF, 1990). O objetivo, no caso, é empacotar os itens de forma que minimize o espaço ocioso.

Posto isto, observa-se que existe uma grande variedade de problemas dessa natureza, que seguem uma mesma estrutura, podem ser descritos de forma similar e que buscam objetivos equivalentes, mas com algumas características diferentes. Em suma, são problemas de otimização combinatória e buscam determinar um arranjo ótimo de peças menores (as quais são denominadas itens) dentro de peças maiores (objetos), obedecendo certas restrições e maximizando a ocupação dos objetos ou minimizando desperdícios.

Para facilitar a visualização das variações destes problemas, Dyckhoff (1990) propôs uma tipologia a fim de padronizar os PCE, que mais adiante, devido a limitações encontradas para representar novos problemas, foi atualizada por Wäscher, Haußner e Schumann (2007).

2.1.1 Tipologia dos Problemas de Corte e Empacotamento

Como enfatizado anteriormente, apesar de sua diversidade, os problemas de corte e de empacotamento possuem, essencialmente, uma mesma estrutura lógica. De forma geral, estes problemas possuem como entrada:

- Um conjunto de objetos grandes, que é o conjunto em estoque de matéria-prima ou espaço, os quais serão utilizados para recorte ou alocação de itens (por exemplo, placas de aço, espaço vazio de um contêiner);
- Um conjunto de objetos menores, denominados itens, que representam a demanda que deve ser recortada ou empacotada nos objetos.

Tendo a entrada bem definida, alguns ou todos os itens, dependendo de qual variação do problema está sendo tratada, são selecionados e atribuídos aos objetos de forma que:

- Todos os itens encaixam inteiramente dentro do objeto ao qual foram atribuídos;
- Os itens não se sobrepõem.

Por fim, uma função objetivo deve ser otimizada. Esta estrutura engloba todas as variações dos problemas de corte e empacotamento.

Dyckhoff (1990) propôs uma classificação para os PCE, que foi atualizada por Wäscher, Haußner e Schumann (2007), e segue os seguintes critérios:

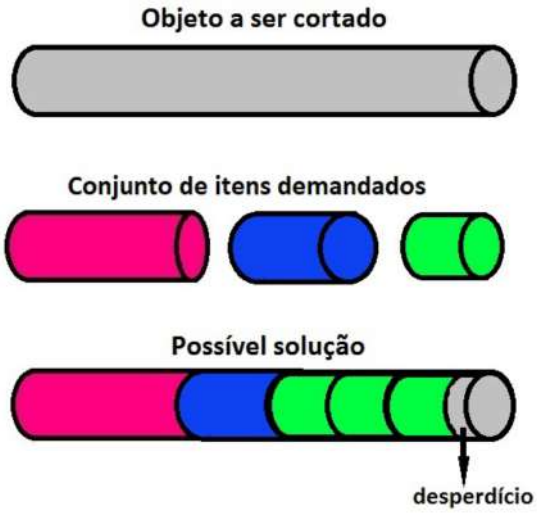
1. **Dimensionalidade**

O critério de dimensionalidade classifica os problemas em relação ao número mínimo de dimensões relevantes necessárias para descrever o problema geometricamente.

- **Problemas unidimensionais**

  Um PCE é dito unidimensional se somente uma dimensão (largura) é considerada para realizar o processo.

Figura 1 – Representação de problema unidimensional



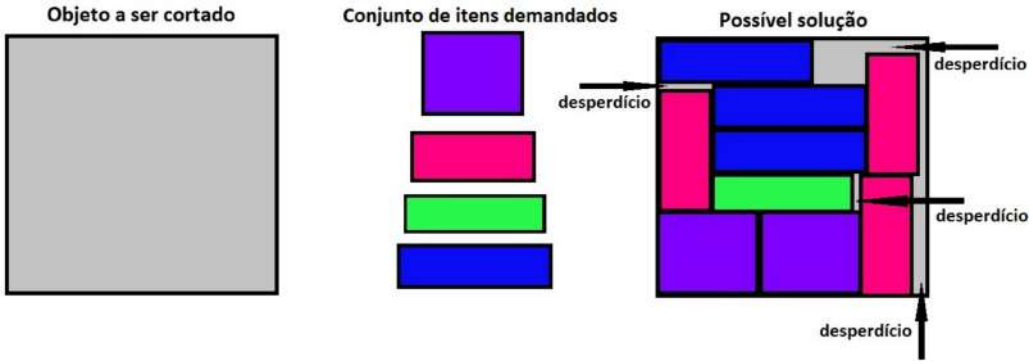
Fonte: Bezerra (2018)

Um dos mais conhecidos problemas de empacotamento unidimensionais é o problema da mochila (do inglês *Knapsack Problem*). O nome dá-se devido ao modelo de uma situação em que é necessário preencher uma mochila com objetos de diferentes pesos e valores. O objetivo é que se preencha a mochila com o maior valor possível, não ultrapassando a capacidade máxima da mochila. Já o problema de corte unidimensional consiste em obter itens de tamanho específico a partir de um objeto maior, com o objetivo de maximizar a utilização deste objeto, isto é, a soma dos comprimentos dos itens obtidos deve ser próxima do comprimento total do objeto. Este tipo de problema possui várias aplicações industriais, como por exemplo, na indústria de papel, cortes de barras de aço, corte de canos, onde grandes rolos são cortados em rolos de comprimentos menores e de mesmo diâmetro.

- **Problemas bidimensionais**

  O problema é considerado bidimensional quando duas dimensões (altura e largura) são relevantes ao processo de corte. Este problema é encontrado em indústrias de placas de madeira, vidro, entre outras, onde placas retangulares grandes precisam ser cortadas em peças menores (itens) as quais compõem os produtos demandados, ver Figura 2.

Figura 2 – Exemplo de um problema de corte bidimensional



Fonte: Bezerra (2018)

- **Problemas tridimensionais**

  Os problemas são tridimensionais quando três dimensões (altura, largura e comprimento) são relevantes no processo de corte ou empacotamento. Este problema tem como finalidade alocar itens tridimensionais em objetos maiores, como mostra a Figura 3. Aplicações do problema são encotradas no corte de espumas para a produção colchões e travesseiros, no empacotamento de caixas em galpões ou de cargas em contêineres, entre outras.

Figura 3 – Exemplo de um problema de corte bidimensional

Fonte: Silva (2009)

2. **Tipos de atribuição**

   O critério Tipos de atribuição apresenta dois casos: minimização da entrada e maximização da saída.

   - Maximização da entrada

     Neste tipo de problema, os objetos disponíveis não são suficientes para alocar todos os itens. Desta forma, é necessário selecionar os itens de modo que maximize a utilização dos objetos.

   - Minimização da saída

Neste critério, os objetos disponíveis são suficientes para alocar todos os itens, sendo necessário que a alocação de itens seja feita de modo a minimizar a quantidade de objetos utilizados.

3. **Variedade dos objetos**

Em relação à variedade dos objetos, são considerados os seguintes casos:

- Um único objeto

  Neste caso, o conjunto de objetos que vai compor os itens é constituído por um único elemento. Este elemento pode ter todas as dimensões fixas ou sua extensão pode ser variável em uma ou mais dimensões.

- Vários objetos

  Aqui, o conjunto de objetos em estoque necessários para alocar os itens é composto por vários objetos de dimensões fixas. Podemos distinguir entre objetos **idênticos, pouco heterogêneos e muito heterogêneos**.

4. **Variedade dos itens**

No que diz respeito a variedade dos itens, os problemas se distinguem em três casos:

- itens idênticos;
- itens pouco heterogêneos;
- itens muito heterogêneos.

5. **Forma dos itens**

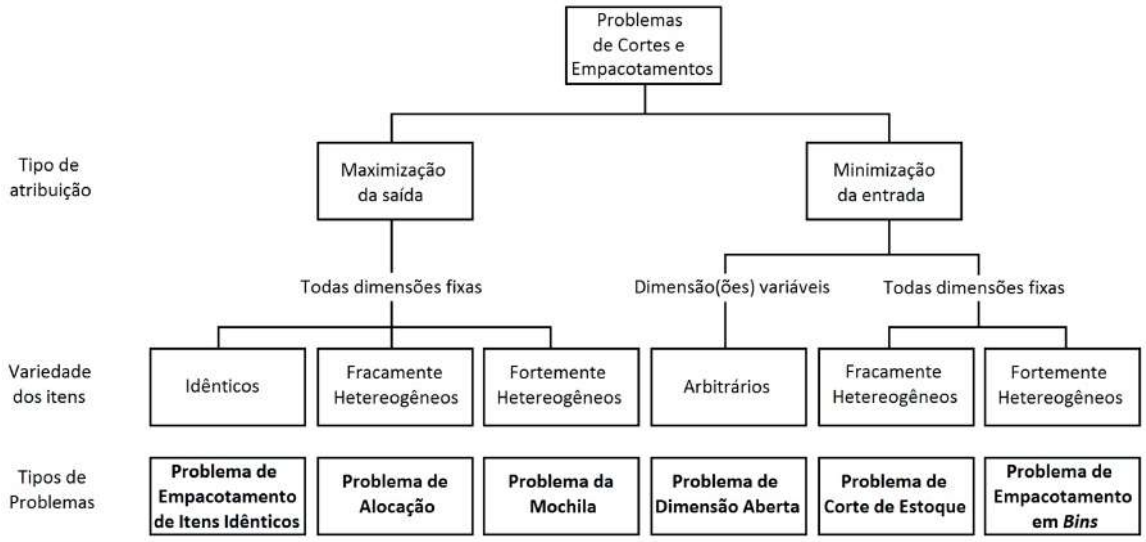
Os autores classificam os problemas que possuem duas ou três dimensões de acordo com a forma de seus itens:

- Regulares
- Irregulares

Problemas que permitem layouts não ortogonais e/ou misturas de itens regulares e irregulares são encarados como problemas variantes.

Portanto, a estrutura da classe de problemas de corte e empacotamento, segundo a classificação de Wäscher, Haußner e Schumann (2007), define-se em três etapas, sendo a primeira, a identificação dos critérios de atribuição e tipo dos itens; na segunda etapa, define-se o tipo de objetos; e, finalmente, na terceira, os critérios de dimensionalidade e a forma dos itens, definindo a estrutura geral do problema a ser trabalhado. A Figura 4 mostra em detalhes esta classificação.

Figura 4 – Tipologia proposta por Wascher

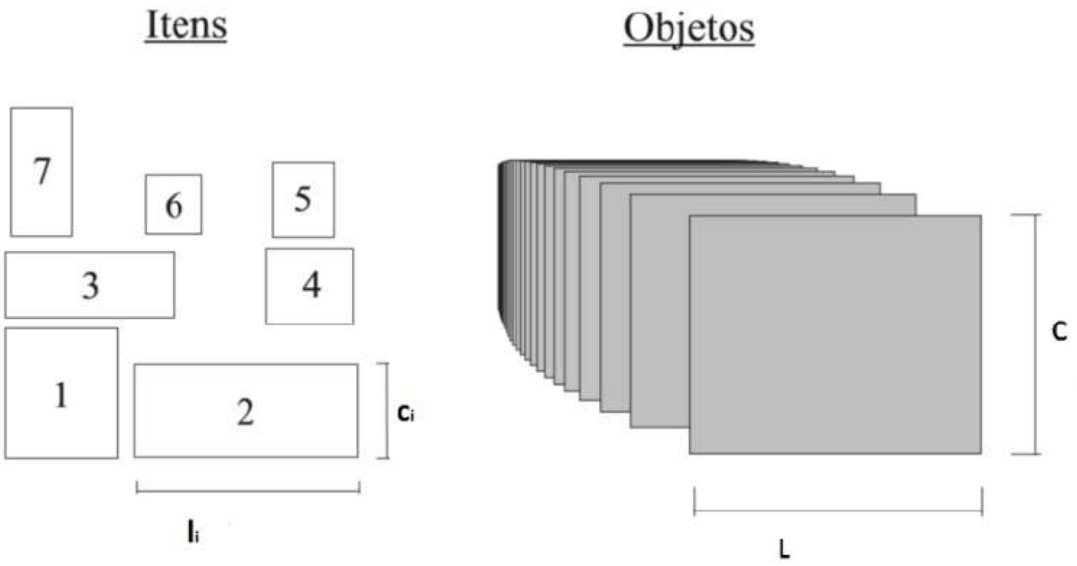


Fonte: Wäscher, Haußner e Schumann (2007)

2.2 O Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado

O Problema de Corte Bidimensional caracteriza-se pelo corte de peças retangulares maiores, geralmente de tamanho padrão, para obtenção de peças retangulares menores com a finalidade de atender uma demanda específica. O processo de corte normalmente implica na perda de matéria prima o que influencia diretamente na competitividade e no lucro da empresa (CHUNG; GAREY; JOHNSON, 1982). Define-se o problema de corte bidimensional como a necessidade de cortar um número finito de objetos retangulares maiores de largura e comprimento (L, C) armazenados em estoque, a fim de obter itens menores com dimensões (l_i, c_i), de modo a atender uma demanda di, para $i = 1, 2, 3, ..., n$ e respeitando $l_i \leq L$ e $c_i \leq C$.

Figura 5 – Exemplo de objetos e demanda de itens



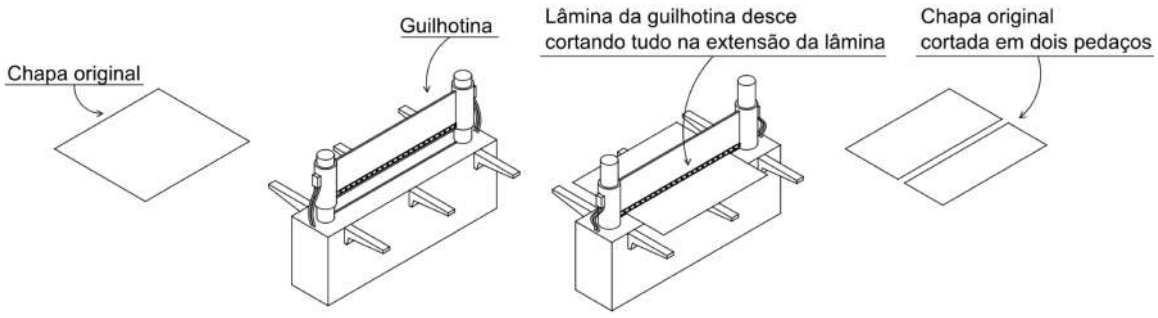
Fonte: (TEMPONI, 2007)

É preciso atender a um conjunto de outras restrições que caracterizam o problema. Por exemplo, com relação ao número de peças existentes em um padrão de corte, o problema de corte pode ser restrito ou irrestrito. Dessa forma, seja um padrão de corte determinado por um possível arranjo de peças em uma placa, este é dito restrito se há uma limitação na quantidade de peças obtidas, ou seja, o número de determinada peça a ser obtida com os cortes efetuados nas placas deve satisfazer uma demanda. Assim, para o problema dito restrito há imposição de um limite superior à quantidade de uma determinada peça, em um padrão, acrescentando dificuldades à resolução do problema. Se não houver restrições de limitação associadas ao número de peças, o problema é irrestrito (VELASCO, 2005).

Outra restrição a permissão ou não da rotação dos itens. A escolha pela rotação dos itens torna o problema ainda mais complexo, uma vez que são consideradas as rotações possíveis antes da alocação do item, acrescentando mais combinações a serem testadas.

Uma terceira restrição, extremamente relevante, diz respeito a extensão do corte em determinada direção, que caracteriza o processo de corte como guilhotinado ou não-guilhotinado. No corte guilhotinado, a guilhotina (Figura 6) possui uma grande lâmina que corta toda uma faixa, separando a placa original em dois pedaços, os quais serão utilizados no processo repetidamente até a obtenção de todas as peças desejadas.

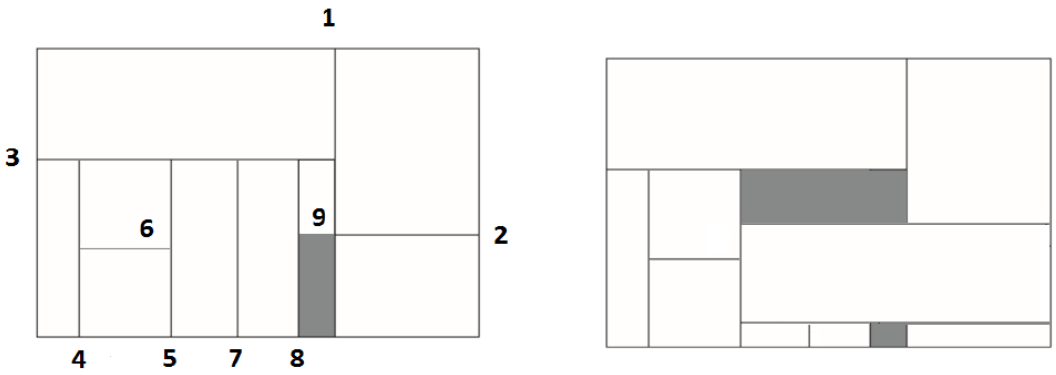
Figura 6 – Ilustração de uma guilhotina e do processo de corte



Fonte: Silva (2017)

Em resumo, o problema abordado neste trabalho e suas características mais representativas são:

Figura 7 – Exemplo de padrões de corte guilhotinado e não-guilhotinado



Fonte: Mariano (2014)

- Os objetos possuem largura e altura fixa;
- Os itens têm dimensões diferenciadas;
- Todos os itens e objetos possuem forma retangular;
- Os itens podem ser rotacionados em 90°;
- Os cortes são do tipo guilhotinado; e
- O principal objetivo é minimizar o desperdício dos objetos utilizados.

2.2.1 Formulação Matemática

Segundo Silva (2017), da década de 60 para os dias atuais, nenhuma formulação para o corte guilhotinado não estagiado foi encontrada, até Messaoud, Chu e Espinouse

(2008) apresentarem um modelo para a variação do problema proveniente do problema de uma dimensão aberta ou problema de faixa (*Strip Packing Problem*). Mas, somente Furini, Malaguti e Thomopulos (2016) apresentaram um modelo capaz de tratar o caso derivado do problema de corte e empacotamento. Portanto, o Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado, pode ser modelado, segundo Furini, Malaguti e Thomopulos (2016), como:

$$min \sum_{o \in O} \sum_{q \in Q} x^o_{q,0} + y_0 \tag{2.1}$$

$$\sum_{k \in J} \sum_{o \in O} \sum_{q \in Q(k,o)} a^o_{q,k,j} x^o_{l,k} - \sum_{o \in O} \sum_{q \in Q(j,o)} x^o_{q,j} - y_j \geq 0, \forall j \in \bar{J}, j \neq 0 \tag{2.2}$$

$$\sum_{k \in J} \sum_{o \in O} \sum_{q \in Q(k,o)} a^o_{q,k,j} x^o_{l,k} - \sum_{o \in O} \sum_{q \in Q(j,o)} x^o_{q,j} \geq 0, \forall j \in J \setminus \bar{J} \tag{2.3}$$

$$y_j = d_j, \forall j \in \bar{J} \tag{2.4}$$

$$x^o_{q,j} \in \mathbb{Z}^+, \forall j \in J, o \in O, q \in Q(j,o) \tag{2.5}$$

$$x^o_{q,j} \in \mathbb{Z}^+, \forall j \in \bar{J} \tag{2.6}$$

A função objetivo está definida em (2.1), a qual tenta minimizar o numero de contêineres utilizados. A restrição (2.2) impõe que o número de partes j que estão em cada retângulo ou itens individuais não exceda o número de retângulos j obtidos através de corte de algum outro retângulo. A restrição (2.3) é equivalente à restrição (2.4) para os retângulos $j \notin \bar{J}$ (consequentemente, para quando as variáveis correspondentes y_j não estejam definidas). A restrição (2.3) impõe que a demanda associada a cada item seja satisfeita e as restrições (2.4) e (2.5) definem o escopo das variáveis. O principal problema dessa abordagem é a quantidade de variáveis geradas e isso impacta fortemente na complexidade em solucionar o problema. Como dito pelos próprios autores, um exemplo do uso desse modelo para solucionar o caso da mochila, onde poucos contêineres são utilizados (geralmente um) gerou cerca de sessenta e seis milhões de variáveis para 50 itens.

2.3 Revisão da Literatura

Os problemas de corte se caracterizam como problemas de otimização combinatória e estão preocupados em encontrar bons arranjos de vários itens de tamanhos menores em regiões de objetos maiores. O principal propósito no processo de corte é maximizar o

aproveitamento do material utilizado e, por conseguinte, minimizar a área de desperdício. Isto é de um interesse especial para indústrias envolvidas em processos de produção em massa, visto que pequenas melhorias na disposição dos itens podem resultar em uma poupança de material significativa nos custos de produção (GOMES, 2011).

Kantorovich (1960) foi um dos pioneiros a estudar os problemas de corte e empacotamento. Através de seu trabalho "Mathematical methods of organizing and planning production". Neste trabalho, Kantorovich apresenta modelos matemáticos de programação linear para o planejamento e organização da produção, além de métodos de solução para os problemas apresentados. Dentre os diversos problemas abordados neste trabalho, está o problema de corte de estoque unidimensional.

Em 1961, Gilmore e Gomory (1961) apresentaram uma formulação matemática para o problema de corte de estoque unidimensional e propuseram o Método Simplex com geração de colunas para a solução da relaxação linear do problema que, pela primeira vez, resolveu problemas de maior porte para o caso unidimensional.

Em 1963, Gilmore e Gomory (1963) apresentaram um método novo para o problema da mochila e mostraram uma nova formulação para o problema de corte de estoque unidimensional. Neste trabalho, foi acrescentada uma nova restrição ao problema, o número limite de lâminas na máquina.

Em Gilmore e Gomory (1965), os métodos descritos nos trabalhos anteriores foram adaptados para o problema de corte de estoque bidimensional, impondo algumas restrições, a saber: o corte guilhotinado, estagiado e irrestrito.

Berkey e Wang (1987) introduziram alguns algoritmos para o problema de corte e empacotamento, utilizando premissas simples, como o *first-fit*, *next-fit* e algoritmos híbridos.

Dyckhoff (1990), com o intuito de facilitar a visualização das diversas variações existentes desta classe de problemas, fez uma revisão dos trabalho existentes e propôs uma tipologia dos problemas de corte e empacotamento. A tipologia divide os problemas por características, tais como dimensionalidade, avaliação da qualidade, forma das figuras, diversidade, disponibilidade, restrições de padrões, restrições de atribuição, objetivos e estado da informação e variabilidade.

Martello e Vigo (1998) apresentaram um algoritmo exato baseado em árvores e alguns algoritmos heurísticos. Produziram ainda algumas classes de instâncias desse problema, sendo seis delas baseadas no procedimento descrito no artigo de Berkey e Wang (1987) e seis novas classes. Essas classes possuem cinquenta problemas cada, divididas em cinco grupos pelo número total de itens (vinte, quarenta, sessenta, oitenta e cem itens).

Nascimento, Longo e Aloise (1999) propuseram uma heurística $O(m.n)$ para o corte bidimensional guilhotinado, onde m é a quantidade de itens diferentes a serem cortados

e n é a quantidade total de itens. A heurística soluciona o problema da seguinte forma: dada uma lista ordenada de itens, esta é transformada em um arranjo de corte, alocando o maior item na menor sobra que lhe comporte. Essa alocação pode gerar duas novas sobras que serão utilizadas na próxima iteração como entrada para o próximo item da lista.

Lodi, Martello e Vigo (1999) estendeu ambas as heurísticas FBS e FFF de Berkey e Wang (1987) para o caso com rotação dos itens permitida. As heurísticas utilizadas por Lodi et al. são a *Floor-Ceiling (FC)*, que é uma abordagem que estende a maneira como os itens são acondicionados em níveis e a *Knapsack Problem (KP)* que é baseada no problema da mochila. A heurística *Floor-Ceiling (FC)* proposta por Lodi et al. (1999) pode ser vista como uma melhoria da heurística FBS. Ambas as heurísticas FC e KP foram aplicadas ao Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado.

Velasco (2005) propôs um algoritmo GRASP utilizando listas ordenadas baseadas nas alturas e nas larguras dos itens. Essas listas são utilizadas para formar faixas horizontais e verticais. Dependendo do aproveitamento, uma delas é selecionada e o algoritmo recomeça a partir da sobra. O algoritmo trata o problema com restrição ao número de estágios de corte, de modo que são permitidos apenas três estágios de corte.

Clautiaux, Jouglet e Hayek (2007) apresentaram um novo método para encontrar os limites inferiores para o problema de corte bidimensional guilhotinado no qual rotações são permitidas.

Fleszar (2013) abordou o problema de corte e estoque bidimensional com restrição de corte guilhotinado, com ou sem rotação, com aplicações em indústrias de corte de vidro e madeira. O autor propôs três novas heurísticas construtivas. A representação dos padrões de corte (soluções) é na forma de árvores, onde cada árvore representa um padrão de corte em uma placa. Nessa representação todos os nós folhas da árvore representam itens (as sobras são negligenciadas). Todos os outros nós são de dois tipo, H representando cortes horizontais ou V representando cortes verticais.

Mariano (2014) apresentou uma abordagem baseada em time assíncrono, utilizando o GRASP proposto por Velasco (2005) e o HHDHeuristic proposto por Nascimento, Longo e Aloise (1999). A abordagem conseguiu bons resultados, em face, principalmente ao que as heurísticas GRASP e HHDHeuristic conseguiram isoladamente. Essa abordagem contou ainda com uma heurística de melhoria baseada na desconstrução de subárvores com um percentual alto de sobras e sua reconstrução, tentando retirar elementos da placa com menos itens. Isso foi feito com a intenção de reaproveitar os espaços intermediários deixados nas placas e esvaziar a última placa, reduzindo assim o número de placas necessárias para cortar os itens.

Russo, Sforza e Sterle (2014) propuseram um método baseado em programação dinâmica para solucionar de forma exata o problema de corte guilhotinado irrestrito. Nessa

modalidade, há apenas uma grande placa retangular no estoque e deseja-se obter uma certa quantidade de retângulos menores, cada um com suas dimensões e lucro diferente.

Furini, Malaguti e Thomopulos (2016) apresentaram uma formulação linear para o problema de corte bidimensional guilhotinado. Os autores abordaram a mesma variação do problema atacado por Russo, Sforza e Sterle (2014), além de formulações para o Cutting Stock Problem e o Strip Paking Problem.

Yao, Lai e Cui (2017) propôs Uma abordagem heurística para problemas de embalagem bidimensional com corte guilhotinado em que a proposta é minimizar o uso de bin, maximizando a eficiência do espaço dado dimensões. Três conceitos eficazes são combinados em uma única heurística coerente: (1) valor mais alto e a prioridade de embalagem é atribuída a itens considerados mais difíceis de embalar em espaços residuais; (2) os espaços de embalagem são selecionados em ordem decrescente de área; e (3) expansão ou fusão residual pequenos espaços irão melhorar a taxa de utilização, e espaço inutilizável deve ser adicionado ao resíduo conjunto de espaço adjacente. Experimentos computacionais em conjuntos de teste de benchmark sugerem os rivais de abordagem métodos de empacotamento existentes com potencial para uso nos dois padrões de RG e OG.

Silva (2017) propôs uma nova formulação matemática para o Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado Não-Estagiado, bem como diversas metaheurísticas para resolvê-lo. As metaheurísticas utilizam uma estratégia de codificação/decodificação da solução, através de uma heurística construtiva, visando contornar a complexidade das restrições impostas pelo problema. Estas metaheurísticas foram utilizadas, ainda, em um time assíncrono como agentes de melhoria e construção.

Kundu, Dutta e Kumar (2019) analisa o problema de corte e empacotamento 2D online, em que o objetivo é alocar um objeto de entrada de forma a maximizar a utilização do contêiner. Uma estrutura de aprendizado de reforço profundo com base em DQN (Deep Q-Network) duplo é proposto para resolver este problema, o qual leva uma imagem mostrando o estado atual do contêiner como entrada e distribui a localização do pixel onde o objeto de entrada precisa ser colocado como a saída. A função de recompensa é definida de tal forma que que o sistema aprende a colocar um objeto de entrada adjacente aos itens já alocados de modo que a maior área não utilizada seja utilizada para futuras inserções.

Verma et al. (2020) propôs um algoritmo Deep Reinforcement Learning (Deep RL) para resolver o problema de empacotamento 3D online para um número arbitrário de caixas e qualquer tamanho de caixa. O foco está em produzir decisões que podem ser fisicamente implementadas por um braço de carregamento robótico. Um protótipo de laboratório foi usado para testes.

Zhao et al. (2020) resolveram uma variante do problema de corte e empacotamento

3D (3D-BPP). Neste problema, o agente tem informações limitadas sobre os itens a serem embalados em uma única caixa, e um item deve ser embalado imediatamente após sua chegada sem buffer ou reajuste. O posicionamento do item também está sujeito às restrições de dependência de ordem e estabilidade física. Para solucionar este problema, os autores utilizaram um métodos de Deep Reinforcement Learning (Deep RL), que definiram como um método Deep Reinforcement Learning (DRL) sob um framework do ator-crítico.

3 Abordagens Heurísticas

3.1 *Metaheurísticas*

Segundo Osman e Kelly (1996) metaheurísticas são métodos iterativos de geração de soluções que guiam uma heurística subordinada combinando de forma inteligente diferentes conceitos para explorar e explotar o espaço de busca, utilizando estratégias de aprendizagem para estruturar informações a fim de localizar eficientemente soluções próximas do ótimo. Diferentemente dos algoritmos de otimização exata, as metaheurísticas não garantem a otimização das soluções obtidas. E, ao contrário dos algoritmos de aproximação, as metaheurísticas não definem quão próximas estão as soluções obtidas das melhores.

Assim como as heurísticas, as metaheurísticas podem ser consideradas um algoritmo geral que pode ser aplicada a diferentes problemas de otimização com poucas modificações para adaptá-las a um problema específico. Alguns exemplos de metaheurísticas são: busca local iterada, busca tabu, algoritmo genético, otimização de colônias de formigas e recozimento simulado.

Para Blum e Roli (2003), há dois fatores em uma metaheurística que são de grande importância que é a diversificação e intensificação. O termo diversificação, refere-se a exploração do espaço de busca. A intensificação refere-se a explotação na experiência da busca acumulada. Sucintamente, a diversificação visa investigar soluções em diversas regiões diferentes do espaço de busca em um problema, e a intensificação utiliza informações de buscas anteriores para aprofundar em regiões promissoras do espaço de busca.

3.1.1 GRASP

A metaheurística GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*), desenvolvida, originalmente, por Feo e Resende (1989), é um processo iterativo composto por múltiplos inícios que, essencialmente, combina uma heurística construtiva com uma de Busca Local. A cada iteração é gerada uma solução viável aleatória que será sujeitada à Busca Local, esta tem como objetivo fazer uma busca na vizinhança tentando melhorar a solução obtida na fase anterior, sendo a melhor solução global mantida como resultado final. As iterações do GRASP são independentes, ou seja, a iteração atual não tem nenhum informação sobre as iterações passadas. Geralmente, o critério de parada utilizado é um número máximo de iterações predefinido. Para um melhor entendimento da metaheurística, as duas fases são descritas em detalhes nas sessões 3.1.2 e 3.1.3.

3.1.2 Fase Construtiva

A fase construtiva é responsável por, a cada iteração, gerar uma solução inicial viável para o GRASP. Esta solução é contruída selecionando-se um elemento por vez, de forma iterativa, e inserindo-o à solução parcial, até que esta esteja completa. A seleção dos elementos que vão compor a solução é feita com base em uma estratégia gulosa/aleatória.

Para formar esta solução, a fase construtiva utiliza-se de dois elementos denominados: Lista Retrita de Candidatos (LRC) e a Lista de Candidatos (LC). A LRC contém os elementos a compor o problema que possuem o melhor custo incremental, dentre a Lista de Candidatos (LC) que contém todos os elementos possíveis a integrar uma solução completa do problema.

Cada novo elemento a ser inserido na solução parcial é selecionado de forma aleatória da LRC. A LRC pode ser formada, segundo Lima Júnior (2009), de duas formas: baseada na cardinalidade da lista ou baseada na qualidade dos elementos. Para compreender melhor essas duas estratégias, considere um problema de minimização e um conjunto LC $= \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, onde $N = |E|$ e E é o conjunto formado por todos os possíveis elementos candidatos a fazerem parte da solução em construção (uma lista de candidatos). Seja $c(e_i)$ uma função gulosa que designa o custo incremental associado à incorporação do elemento e_i na solução corrente parcial. Representa-se por c_{min} e c_{max}, o menor e o maior custo incremental, respectivamente. Considere α um parâmetro no intervalo $[0, 1]$ que delimita o tamanho da LRC.

- **Estratégia de construção da LRC baseada na cardinalidade da lista**

  A LRC é formada pelos primeiros p elementos com os melhores custos incrementais, selecionados a partir da lista de candidatos (LC) ordenada em forma decrescente, de acordo com a função gulosa $c(e)$, em que p é um parâmetro calculado pela equação:

  $$p = 1 + \alpha(N - 1) \tag{3.1}$$

  no qual N é o número total de elementos candidatos.

- **Baseada na qualidade dos elementos**

  Neste caso, a LRC é construída considerando os valores associados a cada elemento $c \in LC$, que respeitem a condição imposta pela equação 3.2:

  $$LRC = \{e \in LC | c(e) \leq c_{min} + \alpha(c_{max} - c_{min}) \tag{3.2}$$

  possuindo, desta forma, tamanho variável.

O controle entre a gula e a aleatoriedade é controlado pelo parâmetro α, de modo que se $\alpha = 0$ o algoritmo é totalmente guloso, já que será escolhido somente o elemento

da LRC que tem o menor custo incremental e se $\alpha = 1$ o algoritmo torna-se totalmente aleatório, tendo em vista que a lista possui todos os candidatos possíveis. A aleatoriedade do algoritmo na geração da solução inicial assegura que mínimos locais diferentes possam ser obtidos. Dessa maneira, a fase construtiva é responsável pela exploração/diversificação da busca no espaço de soluções (RESENDE; RIBEIRO, 2003). Um pseudocódigo da fase construtiva é apresentado no Algoritmo 1.

Algorithm 1 Algoritmo Guloso Aleatório

```
1: procedure GULOSOALEATORIO(D, α)
2:     LC ← FuncAdapGulosa(D, LC)
3:     while "solução não estiver completa" do
4:         LRC ← ConstruirLRC(LC, α)
5:         e ← SelecElementoAleatorio(LRC)
6:         S_p ← S_p ∪ {e}
7:         LC ← FuncAdapGulosa(D, LC)
8:     return Retornar S_v como solução construída
```

3.1.3 Fase de Busca Local

A fase de busca local do GRASP é responsável por fazer uma busca na vizinhaça da solução gerada na primeira etapa e tentar melhorá-la. Uma vizinhança de uma solução S é o conjunto de soluções que podem ser obtidas a partir de pequenas modificações realizadas em S. Esta fase representa a etapa de explotação da metaheurística, pois investiga a vizinhança da solução gerada até encontrar um ótimo local. Uma solução S_i é dita um ótimo local, se não existe nenhuma solução vizinha melhor que ela. Um ótimo global é a melhor solução existente no espaço de busca.

Os algoritmos de busca local apresentam três etapas durante a exploração de uma determinada vizinhança no espaço de soluções. A partida é uma solução obtida por um método construtivo. Na etapa de iteração, a solução corrente é substituída sucessivamente pela melhor encontrada por uma busca na sua vizinhança. A parada do algoritmo ocorre quando um ótimo local é encontrado. O Algoritmo 2 demonstra o procedimento básico de busca local para um problema de minimização.

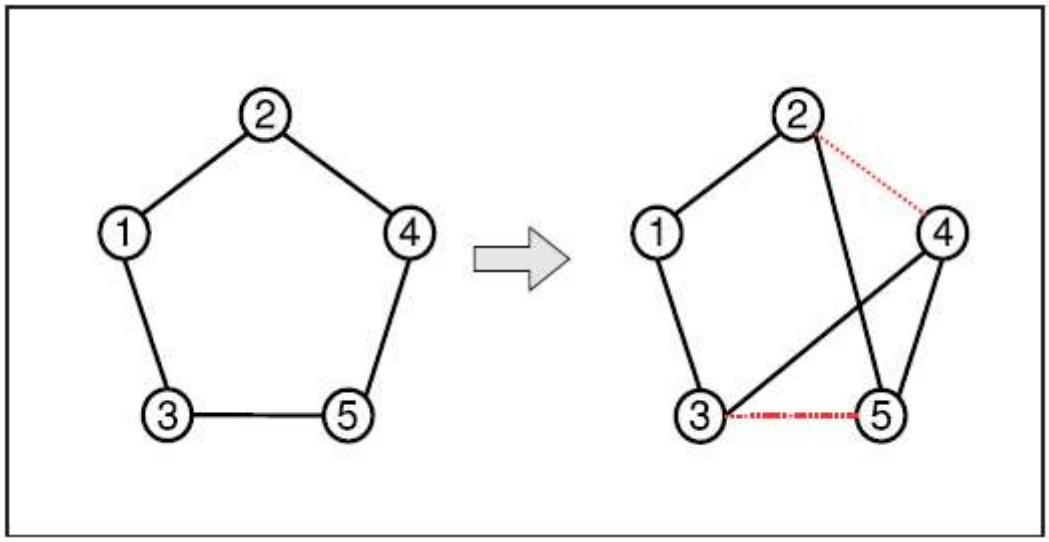
Algorithm 2 Algoritmo de busca local

```
1: procedure BUSCALOCAL(D, S_v)
2:     while "solução não for localmente ótima" do
3:         Encontrar uma solução S' ∈ Viz(S_v)
4:         if f(D, S') < f(D, S_v) then
5:             S ← S'
6:     return S
```

Existem vários algoritmos de busca local. Normalmente, estes algoritmos são baseados em trocas de posição entre elementos da sequência que forma a solução, de

modo a obter um novo ordenamento. Movimentos do tipo *2-Opt* (Figura 8) e *3-Opt* são bastante utilizados na busca local de metaheuristicas aplicadas a problemas otimização combinatória NP-árduos, e necessitam de dois e três movimentos, respectivamente, para transformar uma sequência em outra (uma solução vizinha). O método *2-Opt* parte de uma solução corrente, testa todas as combinações obtidas com a troca de posição entre dois elementos e escolhe a combinação que retorna o melhor valor da função de custo (JOHNSON; MCGEOCH, 2003).

Figura 8 – Exemplo ilustrativo de um movimento *2-Opt*



Fonte: Lima Júnior (2009)

Segundo Feo e Resende (1995) o desempenho de um algoritmo de busca local é dependente de vários aspectos, dentre os quais podemos citar: estrutura da vizinhança da solução, eficiência da avaliação da função de custo e a qualidade da solução inicial. Os autores ainda destacam que a fase construtiva da metaheurística GRASP é relevante relacionado ao último aspecto citado, uma vez que um algoritmo de construção que obtenha soluções de boa qualidade pode reduzir o tempo gasto pelo algoritmo de busca local.

3.1.4 BRKGA

O Algoritmo Genético de Chaves Aleatórias Viciadas (BRKGA, do inglês *Biased Random-Key Genetic Algorithm*), proposto por Gonçalves e Resende (2011), é uma metaheurística evolutiva, para problemas de otimização discreta e global, baseada no Algoritmo de Chaves Aleatórias (RKGA, do inglês *Random-Key Genetic Algorithm*) de Bean (1994). O BRKGA, assim como o RKGA, tem o funcionamento semelhante ao Algoritmo Genético tradicional, mas com algumas particularidades que serão detalhadas a seguir.

O BRKGA, assim como o Algoritmo Genético e o RKGA, também faz uso do princípio Darwinista, onde os indivíduos mais fortes de uma população possuem mais chances de se reproduzir e passar seu material genético para as próximas gerações. A primeira diferença é que, seguindo os passos do RKGA, o BRKGA tem cada possível solução codificada por meio de um vetor de chaves aleatórias. Uma chave aleatória é apenas um número real que é gerado aleatoriamente em um intervalo contínuo [0, 1]. Essas chaves aleatórias são decodificadas através de um decodificador. Este é um algoritmo determinístico que é responsável em receber uma possível solução codificada, para encontrar uma solução factível do problema original, ou seja, o decodificador transforma uma vetor codificado para uma solução viável do problema (UZINSKI, 2014). No caso do decodificador de Bean (1994), ordena-se os elementos do vetor de chaves, gerando uma permutação que corresponde aos índices dos elementos ordenados.

O primeiro passo da meta-heurística BRKGA consiste em gerar uma população inicial de indivíduos, que é composta por p vetores de chaves aleatórias. A seguir, cada um dos indivíduos da população é avaliado e classificado de acordo com uma função fitness, que pode ou não estar associada ao valor da função objetivo do problema. De acordo com Goldberg e Holland (1988), fitness é uma função para medir lucro ou utilidade que queremos maximizar. O termo vem da biologia, onde fitness é a habilidade do indivíduo sobreviver ao ataque de predadores na natureza, pestes e outros obstáculos da vida adulta.

Com a população inicial gerada, o algoritmo começa a evolução e a produção de novas gerações, seguindo os passos:

I. Na k-ésima geração, os p vetores da população são particionados em um conjunto pequeno de $p_e < \frac{p}{2}$ vetores que correspondem às melhores soluções, conjunto esse é chamado de elite e o outro conjunto com o restante da população chamado de não-elite.

II. Classificados os cromossomos, Todos os vetores elite são copiados, sem mudança, para a população da $k + 1 - ésima$ geração, caracterizando o elitismo do princípio darwinista.

III. Em seguida, pm vetores de chaves aleatórias são introduzidos na população da $k + 1 - ésima$ geração. Esses vetores são chamados de mutantes e tem a função de evitar que a população convirja para um ótimo local não global.

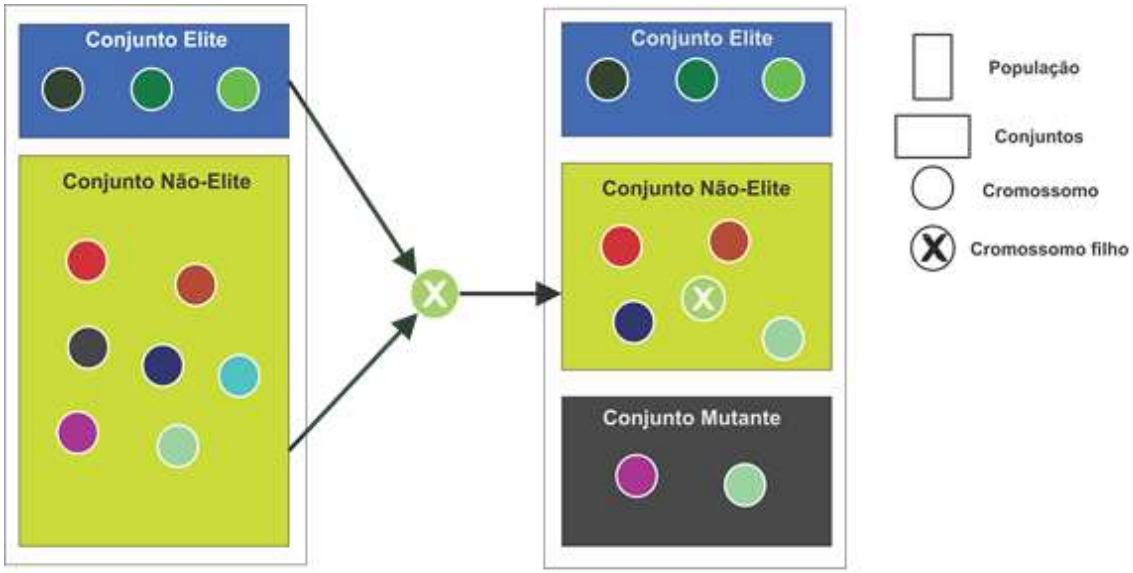
IV. Para completar a população da geração $k + 1 - ésima$, são gerados novos indivíduos utilizando os métodos de cruzamento.

A evolução é repetida iterativamente e cada iteração é chamada de uma geração. O processo é repetido até satisfazer um dos critérios de parada a seguir: parar após executar um

número de iterações predefinido, parar o processo se não encontra soluções melhores após um número de iterações especificado previamente ou parar o processo após atingir um limite de tempo de processamento.

A diferença entre BRKGA e RKGA está na forma que os pais são selecionados para realizar o cruzamento. O RKGA seleciona dois pais aleatoriamente da população inteira. Essa estratégia faz com que soluções de qualidade diversificada sejam escolhidas aleatoriamente, já que não é usado o valor da função objetivo para escolher os pais da novas soluções. Tendo isso em vista, Gonçalves, Resende e Mendes (2011) apresentaram uma nova forma de seleção dos pais que vão gerar novos indivíduos para as próximas gerações.

Figura 9 – Processo evolutivo do BRKGA



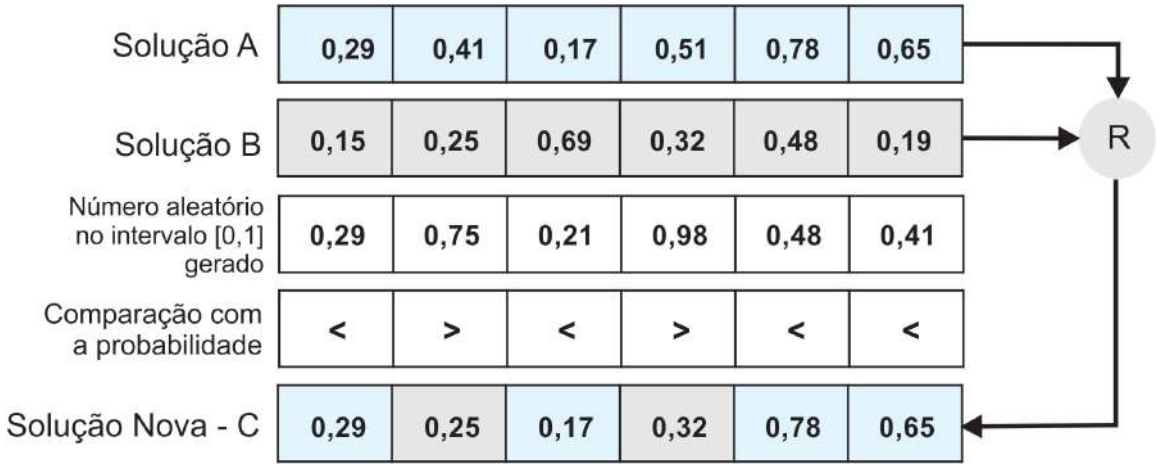
Fonte: Adaptado de Silva et al. (2012)

O BRKGA tem um pai que é sempre escolhido aleatoriamente no conjunto elite e o outro escolhido da população não-elite. A Figura 9 mostra a formação da nova população k+1 do BRKGA a partir da população k. O termo "viciada"(do inglês *Biased*), no BRKGA, surge a partir desta modificação, que foi definida pelos autores para definir que a recombinação de novos indivíduos não é puramente aleatória, ou seja, um dos pais devem ser necessariamente da população elite, isto é, a escolha é aleatória e tendenciosa.

Ambos os algoritmos, utilizam a recombinação de pais com o cruzamento uniforme parametrizado, mais conhecida como recombinação PUC, do inglês *Parametrized Uniform Crossover*, que foi elaborada por Spears e Jong (1995) para geração dos descendentes. O funcionamento dessa recombinação PUC para o BRKGA, se inicia com a seleção de um indivíduo A, do conjunto solução elite e o indivíduo B, da população não elite para participar da combinação. O PUC possui um parâmetro P_a que representa a probabilidade

de uma prole herdar um elemento (alelo) de vetor de seu pai elite, nesse caso, o indivíduo A. Então, para formar uma descendente C gera-se, aleatoriamente, um número entre $p\varepsilon[0,1]$ que será comparado com P_a. Se $P \leq P_a$ então, é copiado o valor do alelo armazenado no individuo A, caso contrário, copia-se o valor do alelo do indivíduo B. Geralmente, o valor para o parâmetro utilizado é $P_a = 0,7$. Dessa forma, aumenta a probabilidade do descendente C possuir uma grande quantidade de alelos da solução elite. Na Figura 10, é mostrada com mais detalhes como é gerado um descendente usando a combinação PUC. Nota-se que a diferença entre ambos os algoritmos é pequena, porém, existe uma grande diferença de desempenho entre ambos, sendo que o BRKGA, encontra soluções de qualidade muito melhores quando se considera o mesmo tempo de processamento.

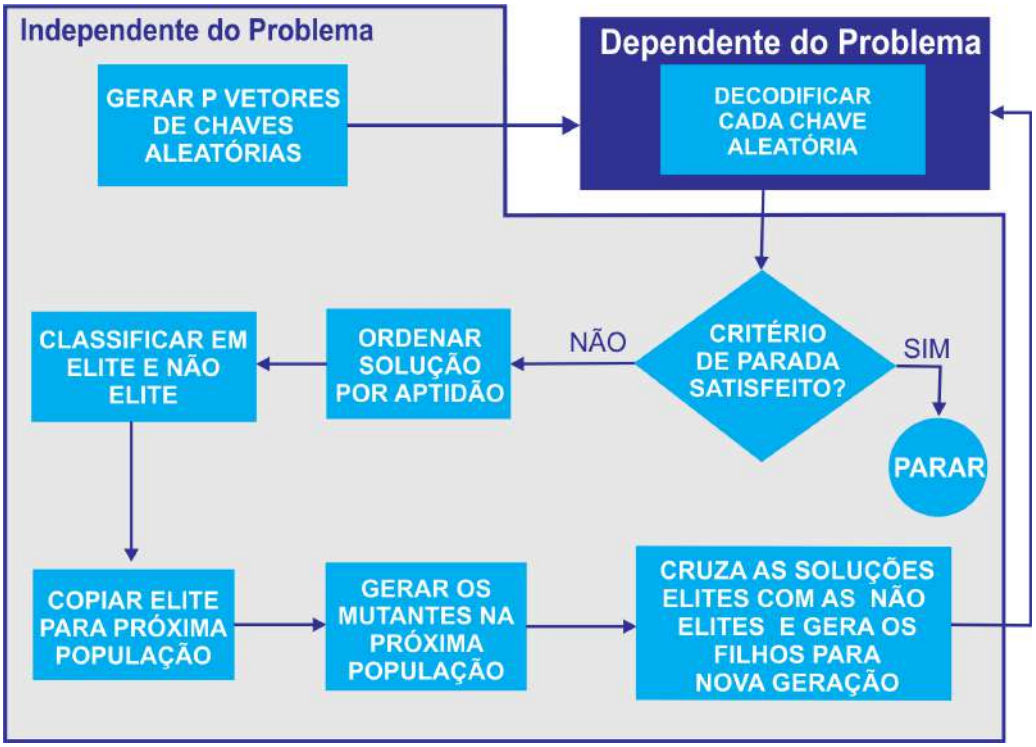
Figura 10 – Exemplo de recombinação PUC, tendo a = 0, 7



Fonte: Gonçalves e Resende (2011)

No fluxograma do BRKGA, mostrado na Figura 11, pode-se notar que existem duas partes muito bem diferenciadas, uma parte independente do problema, aplicável a qualquer tipo de problema e outra parte que depende do tipo de problema que se pretende resolver. Assim, a parcela independente do BRKGA pode ser implementada uma única vez e depois reaproveitada para resolver outros problemas. Então, quando pretende-se aplicar o BRKGA para outro tipo de problema será necessário apenas implementar o decodificador para o problema em questão.

Figura 11 – Estrutura do BRKGA



Fonte: Gonçalves e Resende (2011)

3.1.5 Parâmetros do BRKGA

O BRKGA possui alguns parâmetros que precisam ser escolhidos e calibrados. Os parâmetros são: o tamanho do vetor de codificação de chaves aleatórias (n), o tamanho da população (npop), o número das soluções elite (ne), o número das soluções mutantes (nm) e a probabilidade (e) de um descendente incorporar a informação do pai elite. Na Tabela 1, são apresentados valores recomendados desses parâmetros que são apresentados por Gonçalves, Resende e Mendes (2011). Esses valores dos parâmetros foram obtidos através de experimentos em vários tipos de problemas de otimização combinatória que usaram essa metaheurística.

Tabela 1 – Valores recomendados para os parâmetros do BRKGA

Parâmetros	Especificação	Valores Recomendados
n_{pop}	Tamanho da população	$n_{pop} = a \times n$ onde $1 \leq a \in \mathbb{R}$ é uma constante que depende de n comprimento de uma proposta de solução codificada pelo vetor de chaves aleatórias
n_e	Tamanho das soluções de elite	$0,10 \times n_{pop} \leq n_e \leq 0,25 \times n_{pop}$
n_m	Tamanho das soluções de mutantes	$0,10 \times n_{pop} \leq n_m \leq 0,30 \times n_{pop}$
p_e	Probabilidade de herdar um gene do pai elite	$0,50 \times n_{pop} \leq p_e \leq 0,80 \times n_{pop}$

3.2 HHDHeuristic

A HHDHeuristic é uma heurística construtiva elaborada no intuito de solucionar o Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado. Dada uma lista de pedidos, a serem atendidos, o algoritmo funciona da seguinte maneira:

- A lista de pedidos sempre é mantida ordenada de forma decrescente e a lista de sobras de forma crescente, ambas pela área do pedaço.
- Procura-se cortar a maior peça (pedido) cujas dimensões caibam no menor pedaço disponível (sobra);
- A peça será cortada sempre no canto inferior esquerdo da chapa ou pedaço, de modo que possa ser imediatamente destacada, isto é: pode ser realizado um corte horizontal e em seguida um corte vertical, ou vice-versa. Caso o tamanho da peça seja menor que o pedaço sendo cortado, restarão um ou dois pedaços após a operação.

Deve ser escolhido o tipo de corte a ser realizado (horizontal ou vertical) com base em algumas estratégias: Escolher o corte que maximiza o aproveitamento da área, não nula, do menor pedaço restante; Escolher o corte que maximiza o aproveitamento da menor das dimensões, quanto à largura e a altura, de todas as possíveis áreas, não nulas dos pedaços restantes; Uma descrição mais detalhada é apresentada nos pseudocódigos das Figuras 15 e 16. Eles consistem das duas rotinas fundamentais na concepção do algoritmo. A primeira rotina é chamada CORTE e a segunda é a rotina POSIÇÃO (NASCIMENTO; LONGO; ALOISE, 1999).

A rotina CORTE recebe como entrada as dimensões L (largura) e H (altura) de uma chapa (objeto) padrão, uma lista P contendo n peças com suas respectivas largura, altura e demanda, representada, na forma (l_i, h_i, q_i) e um último parâmetro rot referindo-se a permissão de rotação das peças. A saída gerada pela rotina é uma lista $S = s_1, s_2, s_3, ..., s_r$ contendo r padrões (layouts) de corte, onde $s_j = (x_{11}, y_{11}, x_{21}, y_{21}), (x_{12}, y_{12}, x_{22}, y_{22}), ..., (x_{1k}, y_{1k}, x_{2k}, y_{2k})$ é uma lista de coordenadas de como cortar k peças de P para o layout de índice $j, 1 \leq j \leq k$.

Figura 12 – Rotina de corte

```
CORTE(L, H, P, rot)
1.    S ← ∅;
2.    j ← 0;
3.    Enquanto (P ≠ ∅) faça
4.      j ← j + 1;
5.      s_j ← ∅;
6.      A ← {(0, 0, L, H)}   ➢ inicia lista de chapas para corte.
7.      Enquanto (A ≠ ∅) faça
8.        a ← menor pedaço (chapa) em A;
9.        A ← A - {a};
10.       Procure a maior peça p em P que caiba em a;
11.       Se p existe então
12.         P ← P - {p}      ➢ retira p da lista de pedidos P
13.         <a1, a2, a3> ← POSIÇÃO(p, a, rot)
14.         s_j ← s_j + {a1};
15.         A ← A + {a2} + {a3};
16.       senão descarte a;  ➢  a é considerado sobra
17.     S ← S + {s_j};
18.   Retorne S;
```

Fonte: Nascimento, Longo e Aloise (1999)

As variáveis A e s_j são listas de coordenadas da forma (x_1, y_1, x_2, y_2) que determinam o canto inferior esquerdo (x_1, y_1) e superior direito (x_2, y_2) de uma região retangular sobre a chapa. A lista A armazena as coordenadas dos pedaços de chapa disponíveis para o corte, enquanto s_j contém as coordenadas das peças já cortadas para o layout j. Os símbolos + e − representam as operações de inserção e remoção de um elemento nas listas, respectivamente. A rotina POSIÇÃO é responsável por determinar a posição onde uma dada peça deve ser cortada em uma chapa, assim como os pedaços restantes do corte realizado. A Figura 17, a seguir, apresenta a rotina POSIÇÃO.

Figura 13 – Rotina Posição

POSIÇÃO(p, a, rot)

➢ peça não rotacionada com corte principal vertical
1. $a_1^1 \leftarrow (x1, y1, x1+l, y1+h)$;
2. $a_2^1 \leftarrow (x1, y1+h, x1+l, y2)$;
3. $a_3^1 \leftarrow (x1+l, y1, x2, y2)$;

➢ peça não rotacionada com corte principal horizontal
4. $a_1^2 \leftarrow (x1, y1, x1+l, y1+h)$;
5. $a_2^2 \leftarrow (x1, y1+h, x2, y2)$;
6. $a_3^2 \leftarrow (x1+l, y1, x2, y1+h)$;

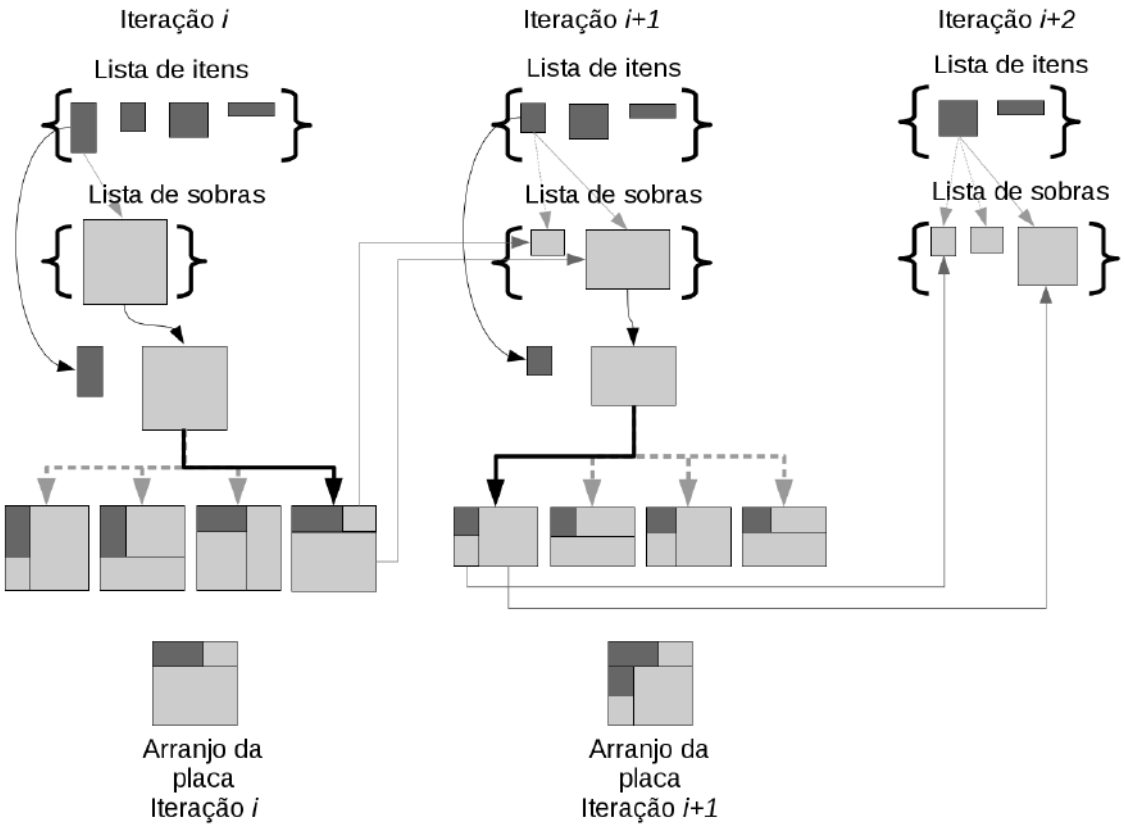
➢ peça rotacionada com corte principal vertical
7. $a_1^3 \leftarrow (x1, y1, x1+h, y1+l)$;
8. $a_2^3 \leftarrow (x1, y1+l, x1+h, y2)$;
9. $a_3^3 \leftarrow (x1+h, y1, x2, y2)$;

➢ peça rotacionada com corte principal horizontal
10. $a_1^4 \leftarrow (x1, y1, x1+h, y1+l)$;
11. $a_2^4 \leftarrow (x1, y1+l, x2, y2)$;
12. $a_3^4 \leftarrow (x1+h, y1, x2, y1+l)$;
13. **Se** *rot = verdadeiro* **então** $kmax \leftarrow 4$
14. **senão** $kmax \leftarrow 2$
15. Escolha k de modo que a_1^k esteja contido em a, e que o $min(a_2^k, a_3^k)$ seja o maior pedaço possível, considerando apenas as áreas dos pedaços restantes não nulas, para $1 \leq k \leq kmax$;
16. **Retorne** $<a_1^k, a_2^k, a_3^k>$

Fonte: Nascimento, Longo e Aloise (1999)

A rotina POSIÇÃO recebe como entrada a descrição da peça p; a descrição do pedaço disponível para o corte a e um parâmetro lógico rot que indica se a rotação será permitida ou não no processo de corte. A saída resultante da rotina POSIÇÃO é uma sequência, na forma $< a_1, a_2, a_3 >$, de modo que a_1 indica as coordenadas da peça p no pedaço a_1, a_2 e a_3 representa as coordenadas dos pedaços restantes resultante do corte realizado (NASCIMENTO, ALOISE e LONGO, 1999). A Figura 14 exemplifica o comportamento da HHDHeuristic.

Figura 14 – Comportamento da HHDHeuristic



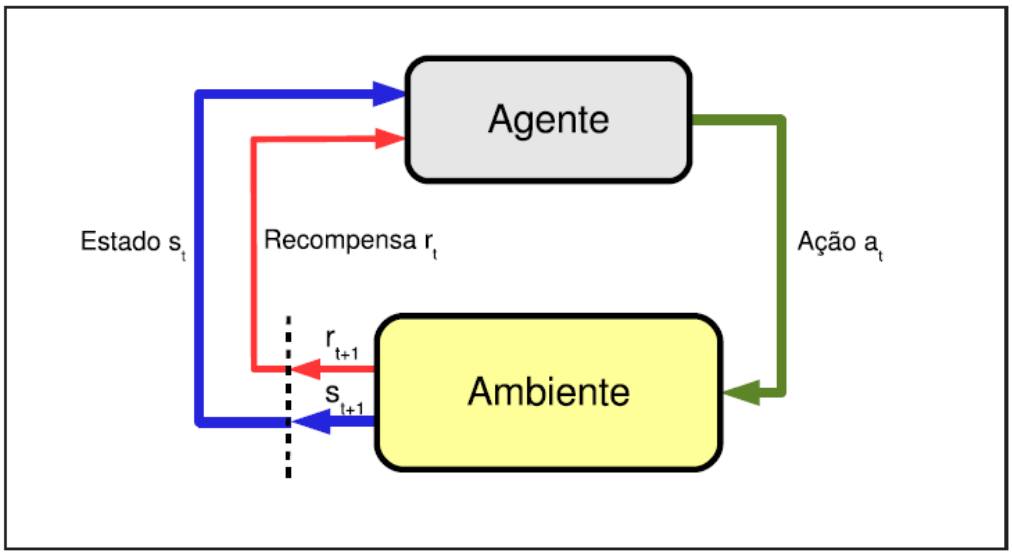
Fonte: Silva (2009)

3.3 Aprendizado por Reforço

Segundo Sutton e Barto (2018), a Aprendizagem por Reforço resume-se no aprendizado do mapeamento de estados em ações, tendo como objetivo, maximizar o valor de recompensa. O agente aprendiz não é informado quais ações escolher, tendo que descobrir por conta própria, quais ações têm as maiores recompensas através de tentativas. Para alguns casos, as ações podem não apenas influir na recompensa imediata, mas também, nas recompensas seguintes. O agente aprende de forma autônoma, qual é a melhor política de atuação, se aprimorando através da experiência de suas ações e, dessa forma, interagindo com o ambiente.

A Figura 15, representa o modo como um agente de AR, interage com o ambiente durante processo de aprendizagem. A cada instante t de tempo, o agente percebe o ambiente, e, com base nas informações adquiridas, escolhe e executa uma ação. Essa ação modifica o estado do ambiente, e uma medida dessa modificação de estado, é informada ao agente por meio de um valor de sinal de reforço, r. Este processo interativo permite ao agente adquirir, após um determinado número de iterações, conhecimentos para definir qual a melhor ação a ser executada em cada estado (LIMA JÚNIOR, 2009).

Figura 15 – Interação entre um agente de aprendizado por reforço e o ambiente



Fonte: Lima Júnior (2009)

Dessa forma, o aprendizado por reforço, é indicado quando não se conhece a priori o ambiente, ou as informações sobre as situações a serem enfrentadas pelo agente, não estão acessíveis ou são imprecisas. Na AR o agente interage diretamente com o ambiente, cujo o objetivo, é executar uma política ótima de ações, que o levem a encontrar seus objetivos. Outro ponto importante dos problemas em aprendizado por reforço, é o dilema chamado de exploração versus explotação. O agente deve ser capaz de decidir de forma autônoma, quando irá obter um novo aprendizado ou utilizar o conhecimento adquirido até o momento. A complexidade está na tarefa de examinar uma série de possibilidades: favorecer progressivamente aquelas que fornecem melhores resultados, ou agir de forma a explorar ações ainda não selecionadas pelo agente (ALMEIDA, 2014).

Quatro elementos básicos de AR, além do ambiente e o agente, definidos por Sutton e Barto (2018) são:

Política: define o padrão de comportamento do agente aprendiz, ou seja, como esse deve decidir, em um dado instante de tempo, entre quais ações tomar e quais serão desprezadas. Seja S o conjunto de estados do ambiente e $A(s)$ o conjunto de ações disponíveis para $s \in S$. Uma política é uma função de mapeamento de estados em ações:

$$\pi(s), \forall a \in A(s), s \in S \tag{3.3}$$

isto é, dado um estado s a política indica qual a ação a o agente deve escolher.

Função de recompensa: Essa função é quem define o objetivo em um problema de AR. Ela define para cada estado um sinal numérico (uma recompensa), indicando a atratividade do estado. Dessa forma, o agente tem como objetivo a maximização da

quantidade total de reforços recebidos ao longo da execução, denominado de retorno acumulado. Um artifício para que o valor do retorno não se torne muito grande é a utilização do fator de desconto $\gamma(0 \leq \gamma \leq 1)$ é introduzido para reduzir gradativamente os valores futuros.

Função Valor: Esta função realiza a soma de todas as recompensas obtidas pelo agente, a partir do estado atual e dos estados futuros, ou seja, a função valor indica uma estimativa do ganho total que pode ser acumulado pelo agente durante a aprendizagem. Quando a função valor considera apenas o estado s, ela é denominada função valor-estado, e denotada por $V(s)$:

$$V(s) = E\{r_{t+1} + r_{t+2} + ... + r_{t+n} \mid s_t = s\}, \tag{3.4}$$

sendo E o valor total esperado dos retornos acumulados pelo agente, seguindo uma política , a partir de um estado $S_t = s$, no instante t. No caso em que a função valor considera as ações possíveis para um dado estado, esta é denominada função valor estado-ação e é denotada por $Q(s, a)$, como segue:

$$Q(s, a) = E\{r_{t+1} + r_{t+2} + ... + r_{t+n} \mid S_t = s, a_t = a\} \tag{3.5}$$

A diferença da equação 3.2 para 3.3 é o fato de que o ganho esperado depende da ação escolhida no instante t.

Modelo do ambiente: Tem a função de demonstrar o comportamento do ambiente, ou seja, dados o estado e a ação, o modelo pode prever o próximo estado e a próxima recompensa de acordo com a probabilidade de transição.

3.3.1 Algoritmo *Q-learning*

O algoritmo *Q-learning*, proposto por Watkins (1989), é considerado uma das mais importantes contribuições em Aprendizagem por reforço. O algoritmo *Q-learning* foi classificado como um método de diferença temporal *off-policy* , ou seja, não necessita de uma modelagem completa do ambiente, pois a sua convergência para ótimos de Q, não depende da política que estão sendo utilizada, ou seja, a função ação-valor Q se aproxima da função ação valor ótima $Q*$, por meio de atualizações dos pares estado-ação realizadas conforme os pares são visitados. A expressão de atualização do valor de Q no algoritmo *Q-learning*, é denotada por:

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha[r_t + \gamma \max Q(s_{t+1}, a) - Q(s_t, a_t)] \tag{3.6}$$

onde $s_t = s$ é o estado atual, $a_t = a$ é a ação realizada no estado s_t, r_t (s_t, a_t) é o retorno recebido após at ser executada em s_t, s_{t+1} é o estado seguinte, γ é o fator

de desconto ($0 \leq \gamma < 1$) e , ($0 < \gamma < 1$), é o coeficiente de aprendizagem. A função $Q(s, a)$ é o valor atribuído ao par estado-ação (s, a) e representa o quão boa é a escolha na maximização da função valor.

Um relevante aspecto desse método é a estratégia de diversificação/intensificação, na qual se deve decidir entre aprender ou usar o conhecimento já adquirido. No algoritmo *Q-Learning* é comum utilizar uma política de decisão ϵ-gulosa, a qual o método tem comportamento guloso-aleatório, de modo que escolha entre intensificar sua busca, tendo como base a melhor informação até o momento, ou ainda diversificar, explorando novos estados de maneira que informações inéditas possam ser obtidas e posteriormente utilizadas. Tal política tem a "gula" e aleatoriedade controladas pelo valor do parâmetro ϵ. A atuação da política de modo aleatório têm probabilidade ϵ e quando gulosa $(1 - \epsilon)$. Em sua implementação o algoritmo a cada iteração, chamada de episódio, o agente aprende a melhor decisão a ser tomada na escolha de uma ação. O algoritmo apresentado na Figura 16 é baseado em (WATKINS, 1989).

Figura 16 – Algoritmo *Q-Learning*

Algoritmo 1: Algoritmo Q-learning

início
  Entrada: $\alpha, \varepsilon, \gamma, NumEpis$
1 Inicializar R(s,a) Matriz de recompensas;
2 Inicializar Q(s,a) Matriz dos Q-valores incialmente zerada;
3 **enquanto** *não atingir NumEsp episódios* **faça**
4 Inicialize s;
5 **enquanto** *não encontrou estado final* **faça**
6 Seleciona a de acordo com a política ε-gulosa;
7 Receber a recompensa r(s,a) e observar o próximo estado s';
8 $Q(s,a) \leftarrow Q(s,a) + \alpha[r_t + \gamma \max_{a \in A} Q(s',a) - Q(s,a)]$;
9 $s \leftarrow s'$;
10 **fim**
11 **fim**
fim

Fonte: Watkins (1989)

4 Métodos Híbridos Propostos

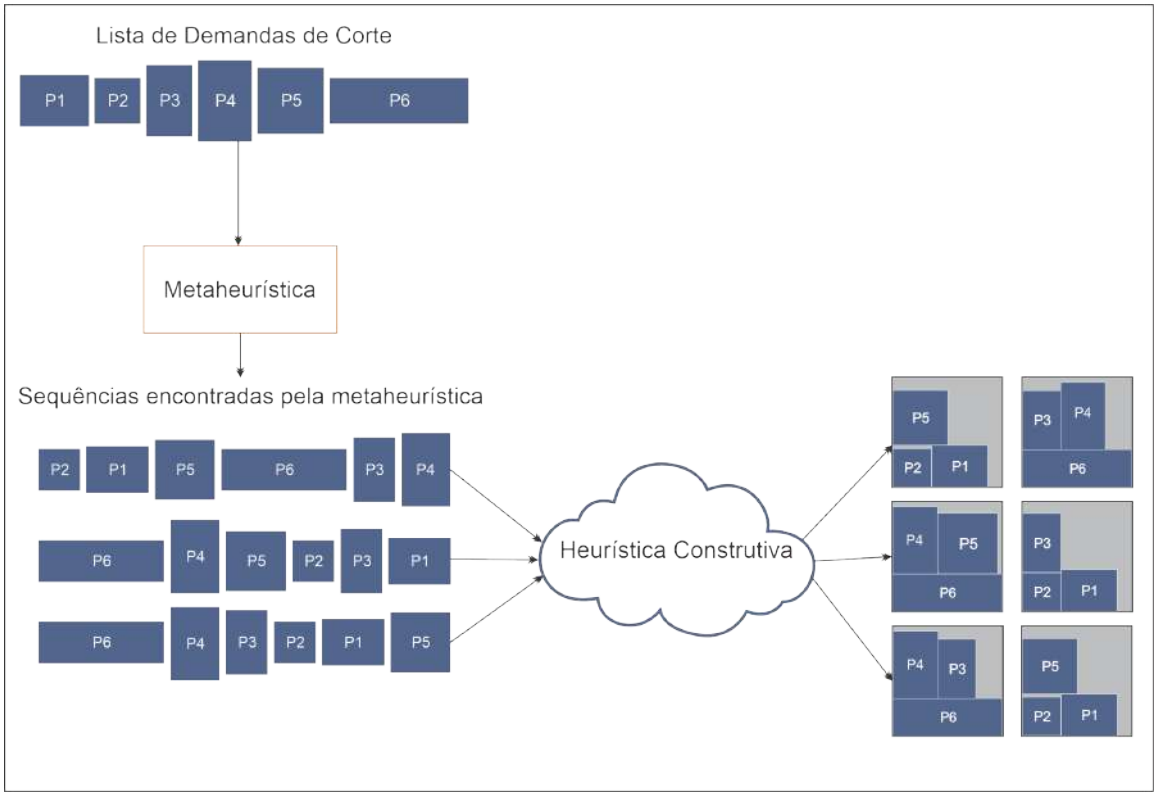
As metaheurísticas são algoritmos aproximativos que dependem de boas estratégias de exploração/explotação e que se baseiam em conhecimento prévio do problema, para guiar o processo de busca de uma solução eventualmente ótima, fugindo de mínimos locais. Boas estratégias (ou boas heurísticas) são aquelas capazes de alternar adequadamente entre exploração e explotação, ou seja, são aquelas que dispõem de mecanismos que possibilitam manter o equilíbrio entre estes dois processos durante a busca pela solução ótima (LIMA JÚNIOR, 2009).

O Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado, como visto na seção 2.2, devido as suas características e restrições, como, por exemplo, a obrigatoriedade do corte por guilhotina e a rotação das peças, traz dificuldades para representá-lo computacionalmente, quando se trabalha com métodos de busca e melhoria. Portanto, os metódos híbridos propostos neste trabalho fazem uso de uma estratégia utilizada por Silva (2017) visando contornar estas dificuldades.

A estratégia utiliza-se de uma heurística construtiva que vai realizar a montagem dos arranjos para as metaheurísticas e para o agente aprendiz, no caso do *Q-Learning*. A heurística construtiva utilizada é a *HHDHeuristic*, detalhada na seção 3.2, proposta por (NASCIMENTO; LONGO; ALOISE, 1999).

As metaheurísticas aqui propostas realizam a busca sobre uma lista de peças, gerando diferentes sequências dos itens que a compõe. Estas sequências são enviadas à heurística construtiva que, por sua vez, monta e avalia o arranjo, com base na ordem de itens recebida, e retorna a solução para a metaheurística, como exemplificado na Figura 17.

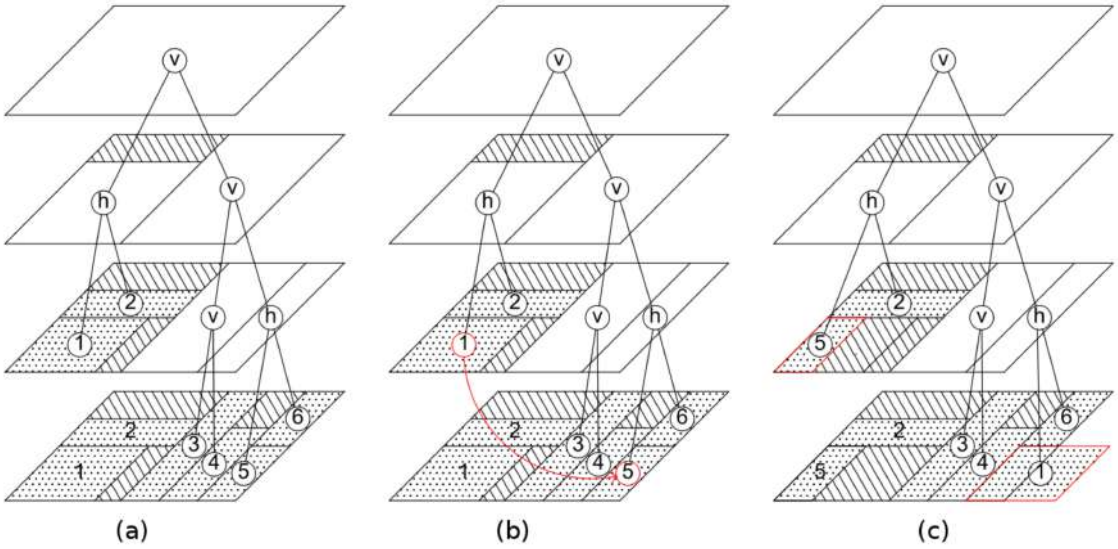
Figura 17 – Funcionamento geral das Metaheurísticas GRASP e BRKGA



Fonte: Autoria Própria

Esta estratégia torna as metaheurísticas independentes do problema, ou seja, o processo de construção do arranjo de peças, a avaliação, garante que as restrições não sejam violadas e toda complexidade associada a estes procedimentos não são transparentes às metaheurísticas, já que isto fica por conta da heurística construtiva. Outra vantagem de se utilizar este método, é que não são necessárias estruturas de dados complexas, como as características do problema exigem, para reprensentá-lo, e, consequentemente, facilita também os processos de busca e melhoria realizados pelos algoritmos.

Figura 18 – Troca *2-opt* em árvore binária



Fonte:Silva (2009)

É importante notar que, apesar da árvore binária conseguir representar bem o arranjo dos itens dentro de uma placa no problema de Corte Bidimensional Guilhotinado, ela não é tão interessante para as fases de busca e melhoria uma vez que a troca de posição entre duas folhas dessa árvore pode resultar em estados inválidos, como mostra a Figura 18.

A avaliação das soluções na heurística é realizada de forma a reduzir as sobras nos contêineres anteriores, concentrando todas em uma única sobra e tentando otimizar os arranjos dos contêineres intermediários, pois quanto menos e menores forem as sobras dos contêineres intermediários, melhor será o aproveitamento dos mesmos. Portanto, a avaliação se resume na soma da quantidade de contêineres gerados com o desperdício da placa menos utilizada (placa com o maior despedício gerado), que, neste trabalho, sempre é o último contêiner formado. Esta estratégia foi utilizada em Silva (2017), a qual obteve excelentes resultados.

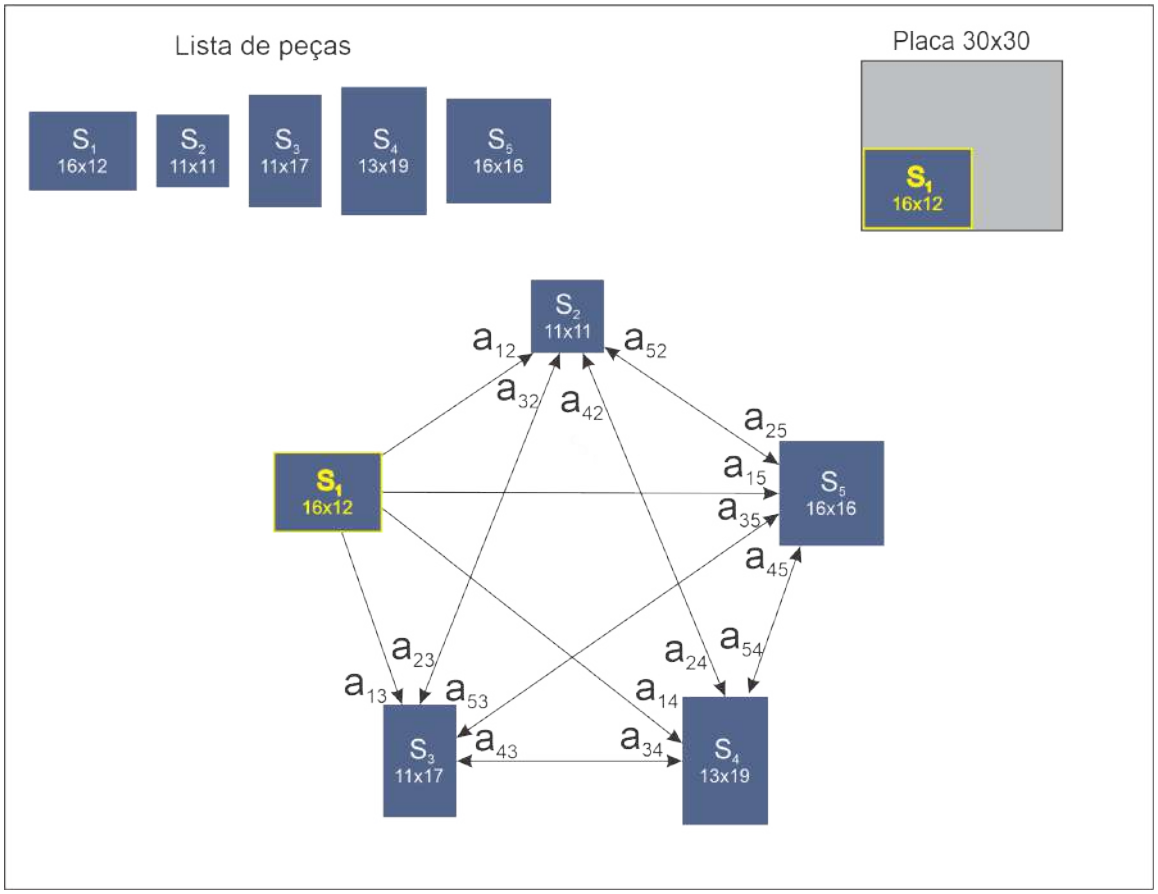
4.1 O Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado como um Problema de Decisão Sequencial

Nos métodos propostos neste trabalho, para que seja possível aplicar a técnica de aprendizagem por reforço, é necessário estabelecer um modelo que descreva formalmente como ocorre o processo de tomada de decisão. Neste caso, o Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado foi modelado como um problema de decisão sequencial, representado pela quíntupla $M = \{T, S, A, R, P\}$.

Para compreender melhor o modelo proposto, considere o exemplo da Figura 19

formado por uma demanda de 5 itens (peças) que devem ser cortados, ilustrada por um grafo completo $G(V, E)$, em que V é o conjunto de vértices, representando as peças , E é o conjunto de arcos entre os vértices, mostrando as possibilidades de inserção das peças na placa. Uma ação a_{12}, por exemplo, significa o encaixe da peça 2 na placa e a transição do estado S_1 para o estado S_2.

Figura 19 – Exemplo do ambiente do problema



Fonte: Baseado em Lima Júnior (2009)

Considerando o grafo $G(V, E)$ a quíntupla $M = \{T, S, A, R, P\}$ que representa um processo de decisão sequencial pode ser definida para o Problema de Corte Bidimensional Guilhtinado da seguinte forma:

T: Conjunto de instantes de decisão, denotado por $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, o qual a cardinalidade de T, corresponde à quantidade de peças a compor um arranjo para o problema.

S: Conjunto de estados, representado por $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ em que cada um dos estados p_i, $i = 1, ..., 5$ corresponde a uma peça a ser encaixada na placa.

A: Conjunto das possíveis ações denotado por:

$$
\begin{aligned}
A &= A(s1) \cup A(s2) \cup A(s3) \cup A(s4) \cup A(s5) \\
A &= \{a_{12}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}\} \cup \{a_{23}, a_{24}, a_{25}\} \\
&\cup \{a_{32}, a_{34}, a_{35}\} \cup \{a_{42}, a_{43}, a_{45}\} \\
&\cup \{a_{52}, a_{53}, a_{54}\} \\
A &= \{a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{32}, \\
&\quad a_{34}, a_{35}, a_{42}, a_{43}, a_{45}, a_{52}, a_{53}, a_{54}\}
\end{aligned}
$$

É importante destacar que, durante a contrução da solução, algumas ações podem não estar disponíveis. Conforme as peças vão sendo encaixadas, estas deixam de fazer parte dos estados disponíveis e, consequentemente, as ações não são mais permitidas. Outro caso é quando a placa não tem capacidade para comportar a peça, fazendo com que esta ação também não seja permitida. Quando não há mais estados disponíveis, ou seja, a placa não tem capacidade para encaixar nenhuma peça, e ainda restam peças na lista de demandas, uma nova placa é adicionada e as peças restantes passam a ser os estados disponíveis.

R: S×A → R: Função de retorno esperado. Para o Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado a recompensa r_i é calculada em função da área de ocupação do itens p_i na placa. O retorno, neste caso, é dado por uma premiação que estimule a escolha da peça que encaixa e ocupada a maior área na placa. Desta forma, o cálculo da recompensa é dado por:

$$r_i = \frac{area\ da\ Peça_i}{area\ da\ placa}$$

ou seja, a recompensa é dada pela porcentagem de ocupação do item Pi na placa.

P: S×A×S → [0,1]: Função que define as probabilidades de transição entre os estados $s \in S$, onde os elementos $p_{ij}(s_j|s_i, a_{ij})$ correspondem às probabilidades de se atingir o estado(peça) s_j estando no estado s_i e escolhendo a ação a_{ij}. Na modelagem adotada neste trabalho, tem-se sempre $p_{ij}(s_j|s_i, a_{ij}) = 1$, ou seja, o problema é completamente determinístico.

É importante frisar também que as rotações das peças e o tipo de corte inicial, ou seja, se o primeiro corte para destacar a peça selecionada será horizontal ou vertical, não foram considerados na modelagem, uma vez que estas particularidades serão tratadas pela heurística construtiva, como mostrado no início do capítulo.

4.2 Q-Learning Aplicado ao Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado

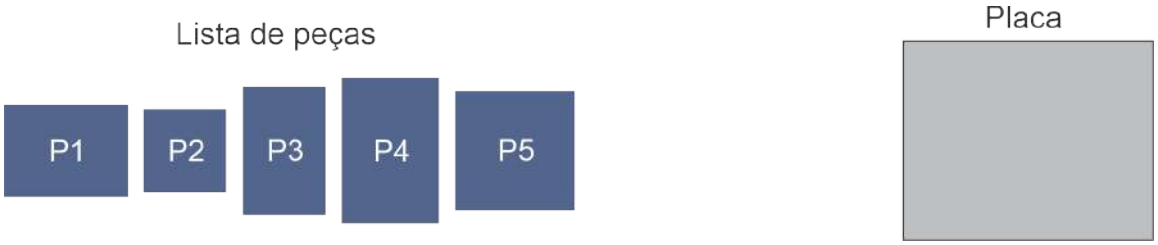
4.2.1 Detalhes do Algortimo Q-learning Implementado

O *Q-Learning* foi implementado como mecanismo de exploração/explotação para as metaheurísticas GRASP e BRKGA aqui propostas. O objetivo é encontrar soluções iniciais de alta aptidão para o Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado, possibilitando às metaheurísticas iniciarem a busca já partindo de boas soluções. A implementação segue a modelagem do problema como um problema de decisão sequencial descrita na seção 4.1.

Uma política ótima para o Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado é aquela que estabelece a melhor organização viável entre as peças utilizando-se do menor número de placas possível.

Para o melhor entendimento da implementação do algoritmo, neste trabalho, considere a lista de peças a serem recortadas e a placa, ilustradas na figura 15 e a estrura da Figura 16. Cada peça é um estado a ser visitado pelo agente aprendiz, como mostrado na seção 4.1. As ações caracterizam a escolha de uma peça para encaixe na placa. A matriz dos Q-Valores, neste caso, será sempre uma matriz quadrada NxN, sendo N a quantidade de itens na demanda.

Figura 20 – Lisra de peças



Fonte: Autoria própria

O algoritmo recebe como entrada a demanda de peças e as dimensões da placa na qual estas devem ser alocadas. O estado inicial S_0 é fixado sempre como a primeira peça da lista. A partir deste estado, o *Q-learning* usa a política ϵ-gulosa Adaptativa para selecionar as demais ações e definir o comportamento do agente aprendiz.

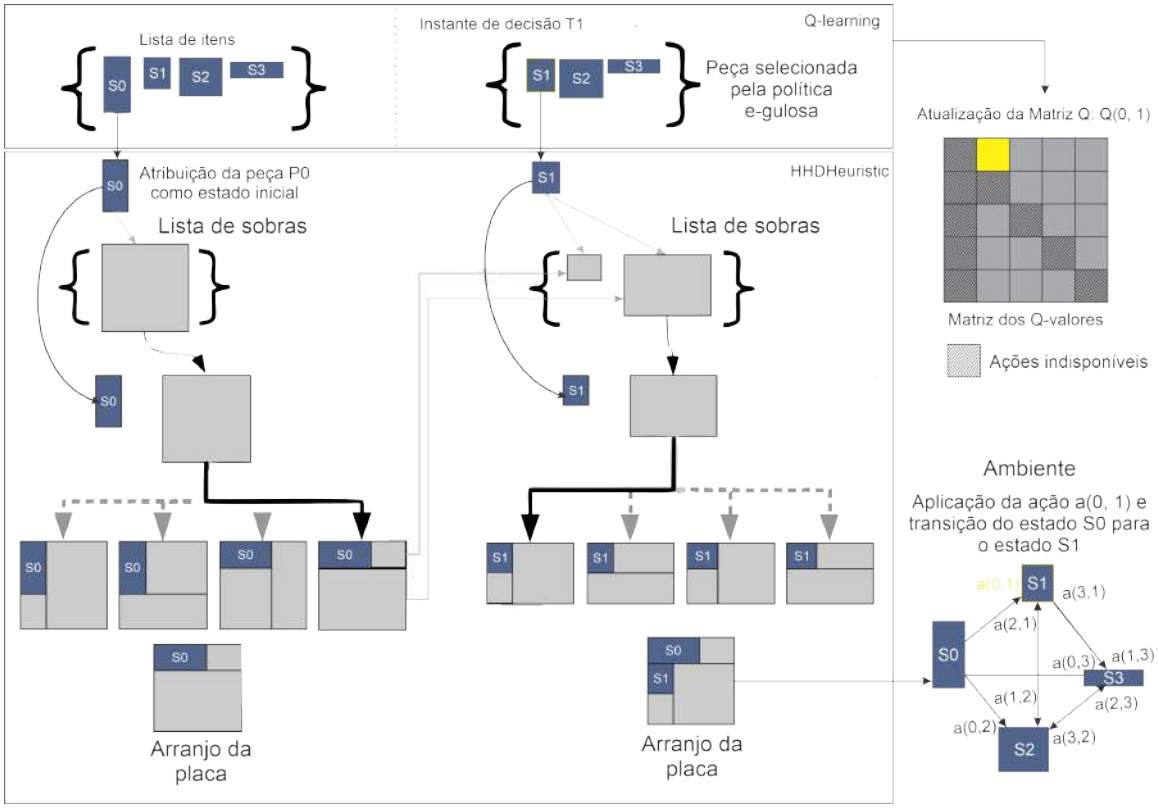
Como os demais métodos propostos, o Q-Learning utiliza-se da heurística construtiva, HHDHeuristic, para verificar como a peça será alocada. O agente aprendiz, ao selecionar uma peça de acordo com a política, invoca a heurística, que faz a verificação de como esta peça melhor se encaixa na placa, como mostra a Figura 16.

A HHDHeuristic, como detalhado na seção 3.2, ao inserir uma peça, divide a placa em pedaços menores, denominados sobras. Na Figura 16, a política selecionou a peça que

representa o estado S_1. Inicialmente, escolhe-se a primeira sobra que comporta a peça. A heurística verifica todas a rotações e possibilidades de corte e seleciona, seguindo um critério predefinido, o melhor encaixe. O critério utilizado, neste caso, é o que maximiza a área da maior sobra. Ao alocar a peça, a heurística informa ao *Q-learning*, este faz a transição do estado atual, S_0, para o próximo estado, S_1, atribui a recompensa imediata e atualiza a matriz dos Q-valores.

Note que, na atribuição do estado inicial, S_0, não ocorre atualização na matriz Q, pois ainda não foram iniciados os episódios. Este estado é utilizado somente como estado de partida.

Figura 21 – Estrutura de funcionamento do *Q-learning*



Fonte: Autoria Própria

A cada peça alocada é feita uma verificação nas sobras restantes de quais peças ainda podem ser inseridas na placa atual, para que não haja ações inviáveis. Neste caso, uma ação só é válida se o encaixe é possível. Caso existam peças que não podem mais ser encaixadas, estas são removidas do conjunto de ações. Se a placa não pode comportar mais nenhuma peça da lista de demanda, uma nova placa é adicionada à lista de sobras, as peças que não foram alocadas voltam ao conjunto de ações possíveis e o algoritmo dá prosseguimento até que não haja mais peças na lista. Um episódio termina quando um arranjo completo é formado, ou seja, quando todas as peças foram alocadas. Ao final de todos os episódios, o Q-learning possui a melhor política encontrada para a inserção das

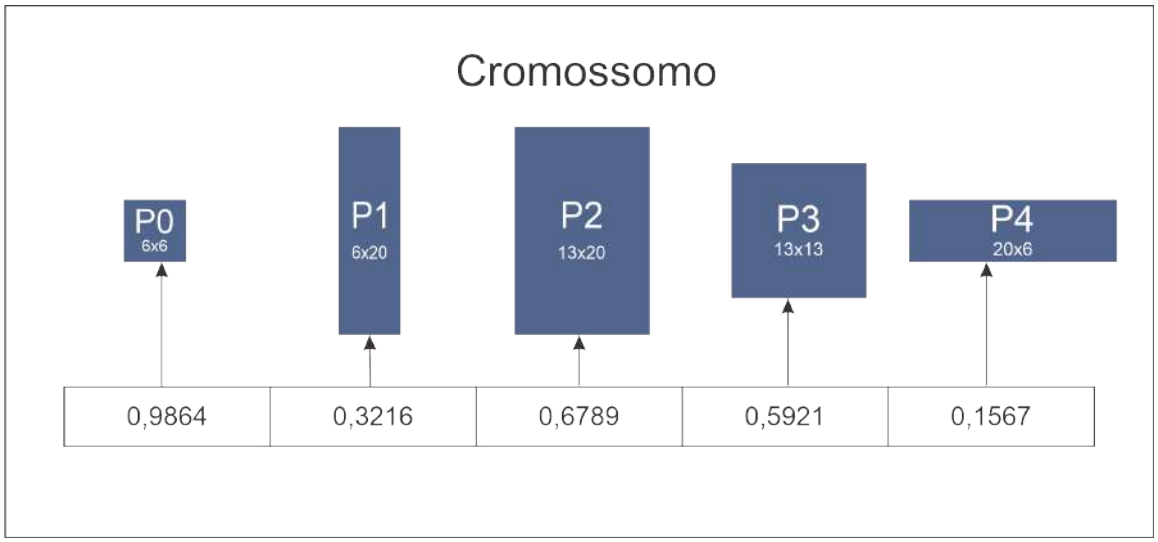
peças nas placas.

4.3 O Método BRKGA-Learning aplicado ao Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado

4.3.1 Representação do Cromossomo

Para representar o cromossomo utilizou-se uma lista de peças, como mostrado no início do capítulo, em que cada peça está associada a uma chave aleatória e possui altura e largura. Uma solução para o Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado consiste na formação de um arranjo de peças dentro de objetos maiores (placas), em que estas peças não se sobrepõem e o arranjo não excede a área da placa. Desta forma, cada cromossomo é constituído de uma sequência que será submetida ao processo de montagem e avaliação dos arranjos pela heurística construtiva.

Figura 22 – Cromossomo



Fonte: Autoria Própria

4.3.2 População Inicial

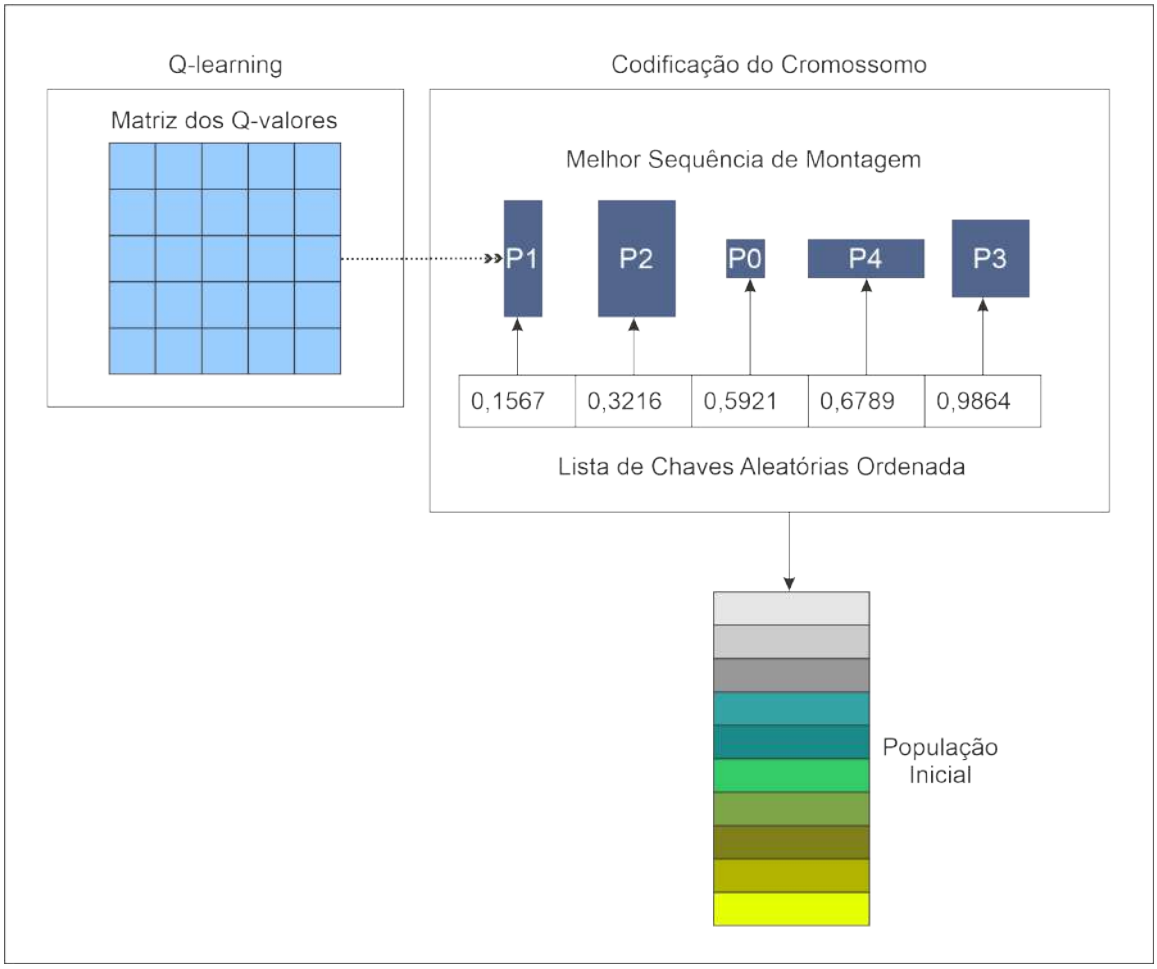
O BRKGA híbrido proposto neste trabalho recorre ao algoritmo *Q-learning*, descrito na seção 4.2, a fim de utilizar os conceitos de aprendizagem por reforço, para construir uma população inicial de alta aptidão e com boa taxa de diversidade, iniciando-se, portanto, a busca, partindo de soluções com boa qualidade, para o Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado.

No processo de aprendizagem, o algoritmo Q-learning pondera entre usar o conhecimento já obtido e escolher novos espaços de busca ainda não explorados, ou seja, ele apresenta características de um algoritmo guloso-aleatório, guloso ao fazer uso do máximo

valor de Q(s,a) para selecionar a ação a que contribua com maior retorno no estado s e aleatório ao usar uma política de escolha de ações que possibilite eventuais visitas a todos os demais estados do ambiente, este comportamento por parte do Q-learning lhe confere atributos capazes de produzir consideráveis melhorias ao algoritmo genético tradicional (LIMA JÚNIOR, 2009).

A população inicial do BRKGA é gerada executando-se o *Q-Learning* um determinado número de episódios (NEp). Ao fim dos episódios, a matriz Q é utilizada para gerar um cromossomo. O critério de escolha na criação de cada cromossomo é o valor de Q(s,a) associado a cada gene, de forma que, genes que têm maior valor de Q(s,a) serão escolhidos prioritariamente na formação do cromossomo. Tendo o cromossomo formado, este é codificado e inserido na população inicial. Este processo é repetido até que p cromossomos sejam formados, em que p é o tamanho da população.

Figura 23 – Formação da população inicial pelo *Q-learning*



Fonte: Autoria Própria

Ao fazer a seleção dos melhores genes da matriz Q, a solução completa é dada por uma sequência de peças. Esta deve passar por um processo de codificação para ser incluída na população inicial. A codificação é feita gerando-se um vetor de chaves aleatórias de

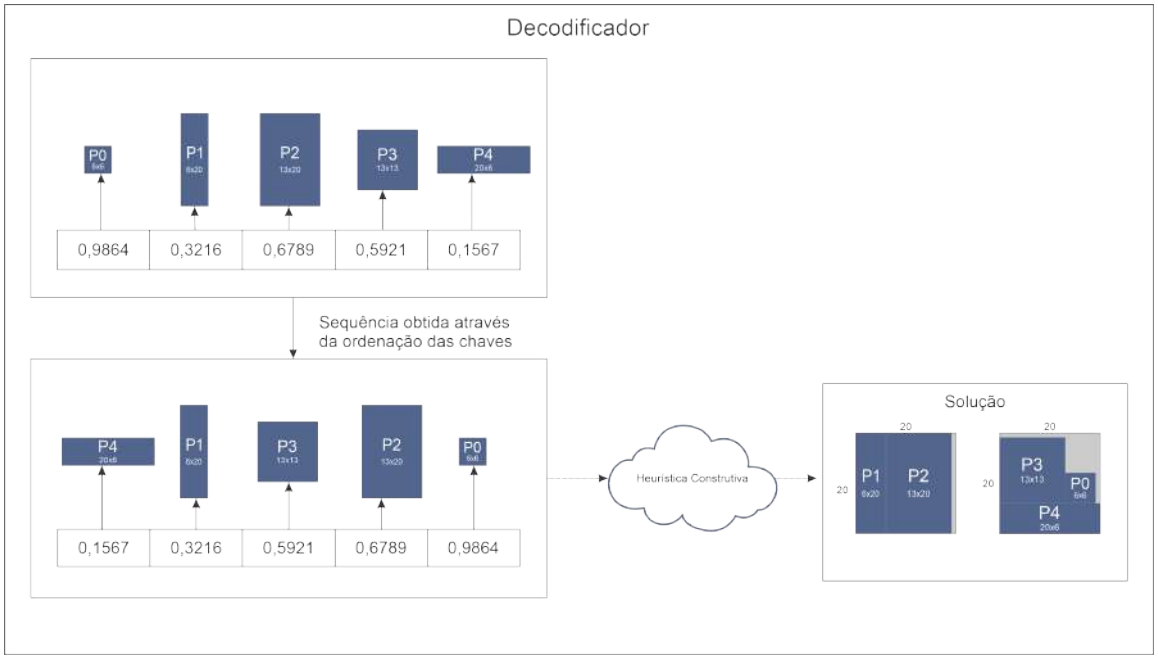
tamanho T, sendo T a quantidade de peças na demanda de cortes. O vetor de chaves é ordenado e cada chave é associada a respectiva posição da peça dada pelo *Q-learning*, como exemplicado na figura 23.

4.3.3 Decodificador

Como foi visto, o BRKGA gera cromossomos, nos quais, cada chave do vetor é gerada aleatoriamente no intervalo [0,1]. Para a verificação da qualidade do cromossomo, é necessário realizar a decodificação. Esse processo de decodificação consiste em um método heurístico que tem como entrada uma lista de itens e as chaves aleatórias associadas a cada item. Ao final do procedimento, uma solução viável é gerada como saída.

O decodificador do BRKGA utiliza a HHDHeuristic em seu núcleo para fazer a montagem e avaliação dos arranjos, como detalhado no início deste capítulo. Esta recebe os cromossomos, realiza os testes de cortes e rotações e entrega a soluçãos montadas com suas respectivas avaliações.

Figura 24 – Decodificador do BRKGA



Fonte: Autoria Própria

4.4 O Método GRASP-Learning Aplicado ao Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado

No GRASP-Learning, assim como no BRKGA, o algoritmo Q-learning, detalhado na seção 4.2.2, será utilizado como construtor de soluções iniciais para o GRASP, de forma que, a cada iteração do algoritmo seja construída uma solução viável de boa

qualidade utilizando as informações contidas na matriz dos Q-valores. Assim, a cada iteração GRASP, o conhecimento da matriz dos Q-valores será utilizada como uma espécie de memória adaptativa permitindo que a experiência passada seja utilizada no futuro. O termo adaptativa refere-se ao fato de que, a cada iteração, novas informações serão inseridas através da atualização da matriz Q, influenciando assim na fase construtiva da próxima iteração.

O algoritmo *Q-learning* substituirá, portanto, a fase construtiva do GRASP, atuando como o algoritmo guloso-aleatório que forma a solução inicial do GRASP. O controle da entre "gula" (Exploração) e "aleatoriedade" (Explotação) será feito pelo parâmetro da regra de transição definida na equação 4.4 e utilizará a equação 4.7 para determinar a matriz de recompensas.

Inicialmente a tabela de valores estado-ação Q (matriz dos Q-valores) recebe valor zero para todos os itens; Para iniciar o processo de atualização da mesma, o estado s_0, é atribuído como sendo o primeiro item da lista de peças. A partir do estado s_0, utilizando a regra de transição -gulosa adaptativa, pode-se obter o estado S_1 através de uma das seguintes opções:

- Sorteando-se uma nova peça para compor a placa aleatoriamente;
- Utilizando o argumento máximo de Q em relação ao estado anterior S_0.

Posto isto, inicia-se o processo iterativo que atualiza a tabela Q. Após um número máximo de episódios, obtém-se a tabela Q da qual será retirada a melhor sequência de itens para a construção da solução. Para obtenção desta sequência, é feito o seguinte:

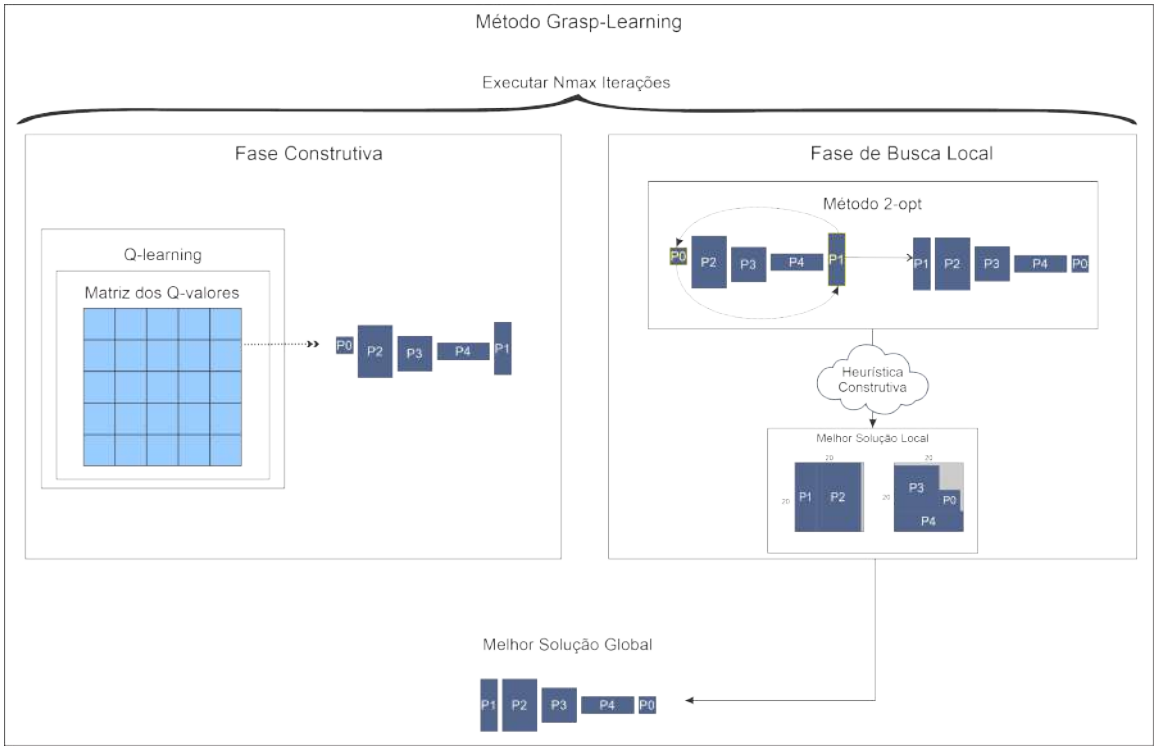
- Copia-se os dados da matriz Q para uma matriz auxiliar Q1;
- A partir da linha 0 (estado s_0), seleciona-se o maior valor na mesma. O índice c da coluna deste valor corresponderá ao próximo item a compor a sequência;
- Atribui-se valor nulo a todos os valores da coluna c em Q1, a fim de garantir a não repetição da mesmo item, já que este só pode ser encaixado uma vez em uma placa;
- Continua-se o processo enquanto a sequência não incluir todos os itens da demanda de corte.

A cada iteração do GRASP a matriz Q é atualizada pela execução do algoritmo Qlearning, ou seja, no final de Nmax iterações o algoritmo Q-learning terá executado Nmax NEp episódios, onde NEp denota o número de episódios executados em cada iteração. O fato da matriz dos Q-valores ser atualizada a cada iteração do GRASP permite que ao longo do processo de busca a qualidade das informações coletadas seja melhorada.

A contrução da solução, igualmente aos demais algoritmos, é feita utilizando-se a heurística construtiva, *HHDHeuristic*. Desta forma, após obter a sequência de montagem do Q-learning, o GRASP a envia para a heurística que monta e avalia a solução.

Com relação à fase de busca local, utilizou-se um método de descida *2-Opt*, que é uma técnica de busca local que move-se para uma solução vizinha somente se esta representar uma melhoria na função objetivo. O método de busca local recebe a sequência gerada pelo *Q-learning*, faz os movimentos de troca dos itens, e envia a nova sequência, a cada troca, para ser montada e avaliada pela *HHDHeuristic*. Se esta obtiver uma melhora na função objetivo, ela passa a ser a melhor solução encontrada. Uma visão geral do método é encontrado na Figura 25.

Figura 25 – Funcionamento Geral do GRASP-Learning



Fonte: Autoria Própria

5 Resultados Computacionais

Este capítulo, tem como objetivo mostrar os resultados computacionais obtidos na realização da pesquisa utilizando os algoritmos mencionados no Capítulo 4. Além disso, será feito uma comparação com alguns trabalhos do estado-da-arte.

Inicialmente, será descrito o ambiente de desenvolvimento (Seção 5.2.2), no qual os algoritmos foram executados. Em seguida, são apresentadas as instâncias e posteriormente a análise dos resultados obtidos. Por fim, é feita uma comparação dos resultados com outras estratégias de resolução da literatura.

5.1 Instâncias do Problema

Foram escolhidas as instâncias de Berkey, Wang, Martello e Vigo, compiladas no trabalho de Lodi, Martello e Vigo (1999a), que são muito utilizadas na literatura dos problemas de corte bidimensionais. O conjunto de instâncias possui dez classe com cinquenta instâncias. Cada classe é dividida em cinco grupos contendo 20, 40, 60, 80 e 100 itens, totalizando 500 instâncias. As 6 primeiras classes foram geradas randomicamente utilizando o método proposto por Berkey e Wang (1987) enquanto as outras quatro classes foram criadas usando o método proposto por Martello e Vigo (1998).

5.2 Limites Inferiores

Dell'Amico, Martello e Vigo (2002) apresentaram um método pseudo polinomial para obter limites inferiores para o problema. Esse método transforma os itens retangulares em quadrados através de sucessivos cortes. Esses quadrados são então unidos e o número de placas necessárias para comporta todos os itens passa a ser o limie inferior. Clautiaux, Jouglet e El Hayek (2007) aprimoraram esse método e geraram novos limites inferiores para o problema, que serão utilizados como base de comparação nos testes realizados neste trabalho.

5.3 Resultados e Análises dos Experimentos

5.3.1 Ambiente de Desenvolvimento

Os algoritmos deste trabalho foram implementados na linguagem Python 3.8, utilizando a IDE Spyder 4.3. Os testes foram executados sobre as dez classes de instâncias, 20, 40, 60, 80 e 100 itens, em computador do tipo PC com o sistema operacional Windows

10 64 bits, com 8 Gb de memória RAM com frequência de 1333 Mhz e processador Intel Core i7 de 2.5 Ghz com 2 núcleos.

5.3.2 Análise dos Resultados

Esta seção discute sobre os resultados obtidos pelos algoritmos para as instâncias descritas anteriormente. Os algoritmos executaram 50 vezes sobre cada uma das instâncias, que compõem as 10 classes, com a mesma configuração de parâmetros para suas respectivas versões. O GRASP tradicional foi configurado com $\alpha = 0.2$ e 50 iterações. O BRKGA, por sua vez, executou com uma população de 200 indivíduos, a população elite configurada para 0.3, taxa de herança de um pai elite 0.7 e população mutante de 0.3. O algoritmo executou 250 gerações. A tabela 2 apresenta os parâmetros aplicados no *Q-learning*.

Tabela 2 – Parâmetros do *Q-learning*

Parâmetro	Função	Valor
NEp	Número de episódios	200
α	Taxa de aprendizagem	0.9
γ	Fator de desconto	0.9
ϵ	Controle entre a gula e aleatoriedade	0.9
τ	Taxa de decaimento do ϵ	0.97

A Tabela 3 mostra a comparação dos resultados totais entre o GRASP e o GRASP-Learning de forma resumida. Os resultados completos encontram-se no apêndice A para o GRASP e Apêndice B para o GRASP-Learning. A tabela é composta pelos valores referentes a soma dos contêineres encontrados para o melhor e pior caso (colunas 2 e 3), a média das soluções (coluna 4) para as 50 execuções, bem como o desvio padrão e a média do tempo de processamento (colunas 5 e 6).

Tabela 3 – Comparativo entre os resultados do GRASP e GRASP-L

Metaheurística	Melhor	Pior	Média	Desvio Padrão	Tempo(s)
GRASP	7051	7112	7058.00	0.033	16.89
GRASP-Learning	7045	7068	7057.65	0.011	33.79

A análise dos resultados apresentados na Tabela 3 demonstra que a metaheurística GRASP-Learning, obteve, em média, os melhores resultados. Os resultados obtidos com o método híbrido foram melhores do que os resultados relativos à versão tradicional do algoritmo, tendo no pior caso, 7068 placas, enquanto o GRASP encontrou 7112 placas, apresentando, portanto, uma redução de 44 placas. No melhor caso, obteve-se 7045 placas para o GRASP-L e 7051 para o GRASP. A metaheurística híbrida conseguiu melhorar o resultado somente em 06 placas. Em relação ao tempo de processamento, o algoritmo híbrido foi mais lento, com uma média de 33,79s, contra 16,89s da sua versão tradicional.

A Tabela 4 apresenta a média obtida com 50 execuções para as versões do BRKGA implementadas seguindo o mesmo padrão. Os resultados obtidos nos experimentos são disponibilizados na íntegra nas tabelas no Apêndice C para o BRKGA tradicional e no Apêndice D para o BRKGA-Learning.

Tabela 4 – Comparativo entre os resultados do BRKGA e BRKGA-L

Metaheurística	Melhor	Pior	Média	Desvio Padrão	Tempo(s)
BRKGA	7140	7190	7145.46	0.027	14.58
BRKGA-Learning	7064	7092	7067.52	0.015	29.17

Ao se analisar os resultados experimentais obtidos pode-se perceber que a versão do BRKGA com aprendizagem por reforço obteve melhores resultados para o valor da função objetivo, o mesmo não acontece com o tempo de processamento, assim como no GRASP-L. o resultado obtido é conseqüência da boa qualidade da população inicial gerada pelo algoritmo Q-learning. O BRKGA encontrou, no pior caso, 7190 placas, contra sua versão híbrida que obteve 7092, uma diferença de 98 placas. No melhor caso, a melhora também é significativa, sendo 7140 placas encontradas pelo BRKGA e 7064 no BRKGA-L. Obteve-se portanto, uma melhora de 76 contêineres no melhor caso. O tempo de processamento, como pode ser visto, foi uma média de $14,58s$ para o BRKGA e de $29,17s$ para o método híbrido.

A Tabela 6 apresenta uma comparação dos resultados de todos os algortimos implementados neste trabalho. Como pode-se ver, O GRASP-Learning foi o algoritimo que se sobressaiu em todos os casos, tanto no pior, como no melhor caso e, foi também, o algoritmo com maior tempo de processamento entre os demais. No pior caso, o GRASP tradicional 7108 contêineres contra 7190 do BRKGA. No melhor caso, foram 7049 oara o GRASP contra 7140 do BRKGA. Uma melhora de 91 contêineires. Já no caso das versões híbridas, apesar do uso da aprendizagem por reforço trazer uma melhora significativa para o BRKGA Learning, este ainda fica atrás do GRASP-Learning, com uma diferença de 19 contêineres. Conclui-se, portanto, que o GRASP-Learning foi o algoritmos que obteve os melhores resultados, mas, proporcionalmente falando, o BRKGA-Learning se beneficiou mais da aprendizagem por reforço.

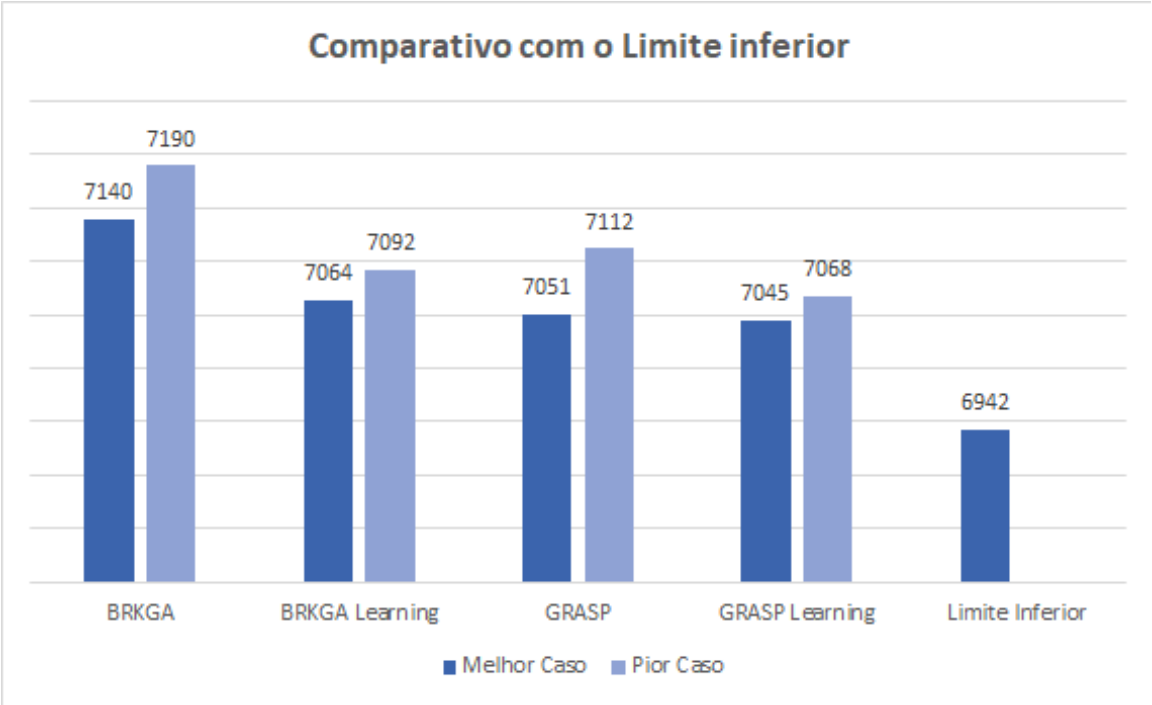
Tabela 5 – Comparativo entre os resultados de todos os algoritmos

Metaheurística	Melhor	Pior	Média	Desvio Padrão	Tempo(s)
GRASP	7051	7112	7058.00	0.033	16.89
BRKGA	7140	7190	7145.46	0.027	14.58
GRASP-Learning	7045	7068	7057.65	0.011	33.79
BRKGA-Learning	7064	7092	7067.52	0.015	29.17

O gráfico ilustrado pela Figura 21 contém uma comparação dos algoritmos com o limite inferior de Clautiaux, Jouglet e El Hayek (2007). Em relação aos limites inferiores,

os métodos que obteve os melhores resultados, que foi o GRASP-Learning, ficou a uma diferença de 103 contêineres do limite inferior.

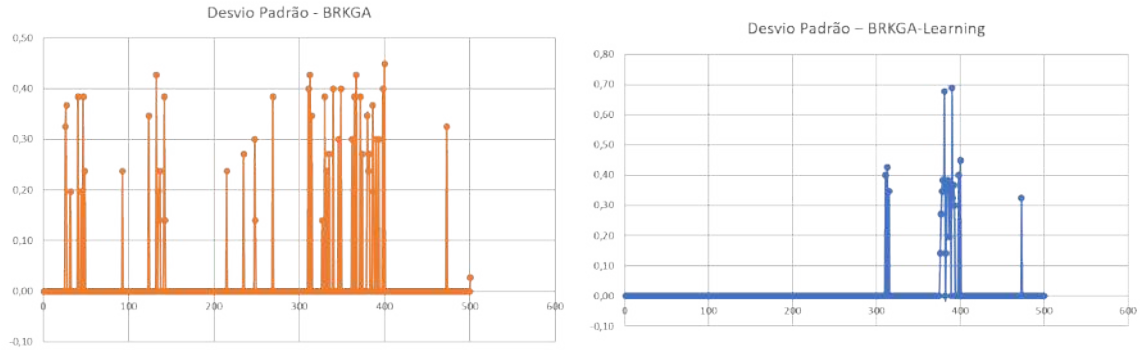
Figura 26 – Gráfico Comparativo entre Os Resultados Obtidos e o Limite Inferior



Fonte: Autoria Própria

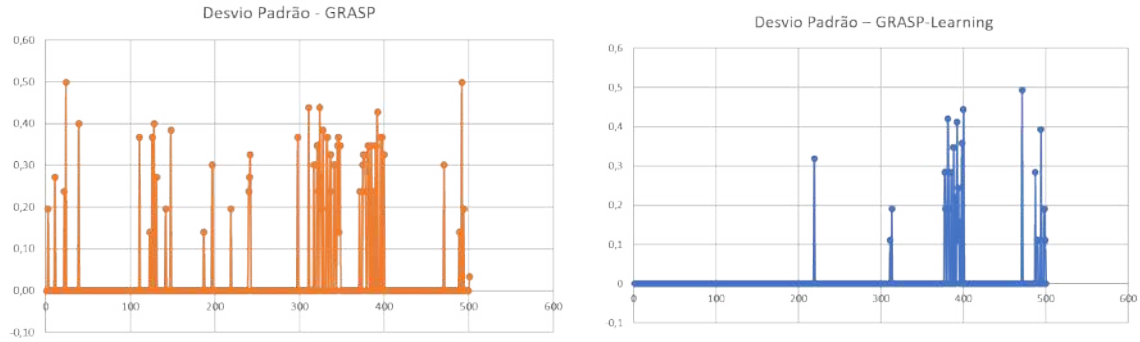
Os gráficos das figuras 27 e 28 mostram a comparação entre o desvio padrão obtido nas execuções para o GRASP e GRASP-L e BRKGA e BRKGA-L. Os algoritmos que não utilizaram o *Q-learning* apresentam uma dispersão maior tanto para o conjunto total de instâncias quanto para as execuções em cada instância individual.

Figura 27 – Gráfico Comparativo entre o desvio padrão para o BRKGA e BRKGA-L



Fonte: Autoria Própria

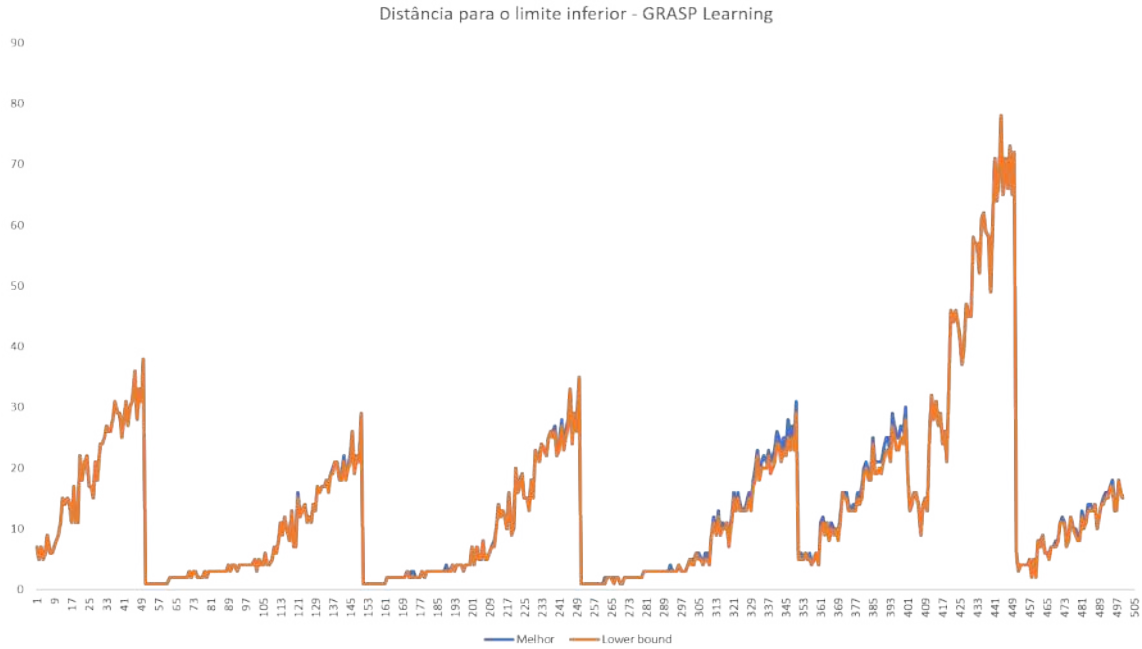
Figura 28 – Gráfico Comparativo entre o desvio padrão para o GRASP e GRASP-L



Fonte: Autoria Própria

O gráfico da Figura 29 exibe o comportamento do algoritmo GRASP-Learning em relação ao limite inferior.

Figura 29 – Gráfico Comparativo entre o GRASP-L e o Limite Inferior



Fonte: Autoria Própria

5.3.3 Comparação com Resultados da Literatura

A Tabela 5 apresenta um comparativo entre os resultados obtidos neste trabalho e um comparativo, feito por Mariano (2014) e atualizado por Silva (2017), para a Classe 10. Somente a Classe 10 é utilizada porque o autor optou apenas por esta classe para comparar com os demais algoritmos.

Tabela 6 – Comparativo entre os resultados da Classe 10 para os algoritmos propostos e resultados da literatura

Métodos	Quantidade de itens					Ano
	20	40	60	80	100	
FBS2	42	75	103	131	163	1999
FC2	41	74	101	130	163	1999
BuscaTabu-Lodi	43	75	104	130	166	2002
GLS	42	74	102	130	162	2003
HBP	42	74	102	130	160	2003
WA	43	74	102	129	159	2009
GRASP-Velasco	42	74	100	129	159	2010
MS-LGFi	42	74	101	129	160	2012
EA-LGFi	42	74	101	128	160	2012
FFIH	42	73	101	130	161	2013
BFIH	42	73	101	130	160	2013
CFIH	43	73	101	129	159	2013
FFIH+J4	42	73	101	130	161	2013
BFIH+J4	42	73	101	129	160	2013
CFIH+J4	42	73	101	129	159	2013
Time assíncrono - Mariano	41	73	100	127	159	2014
Time assíncrono - Silva	41	73	99	126	158	2017
BRKGA-Learning	41	73	100	130	162	2021
GRASP-Learning	41	73	99	126	158	2021
Limite inferior-CJH	39	70	95	122	153	2007

A Tabela 6 apresenta um comparativo dos melhores resultados encontrados na revisão bibliográfica para o conjunto de instâncias, juntamente com suas heurísticas, com os métodos aqui propostos. Observa-se que o GRASP-Learning conseguiu igualar a quantidade de contêineres do encontrados pelo time assíncrono, que é o melhor resultado, no melhor caso. O BRKGA-Learning também ficou bem posicionado na comparação.

Tabela 7 – Comparativo entre os resultados de todas as classes para os algoritmos propostos e resultados da literatura

Método	Tipo			Contêineres	%lim. inferior	Ano
TSKP	H	M		7101	3,032%	1999
GLS	H			7367	6,982%	2003
A-B	H	Hp		7063	2,481%	2009
CH	H			7161	3,903%	2011
CHBP	H	A		7064	2,495%	2011
CFIH	H			7100	3,018%	2013
CFIH+J4	H	A		7080	2,728%	2013
HHDHeuristic	H			7349	6,631%	1999
GRASP+HHDHeuristic	H	M		7049	2,278%	2017
Time assíncrono-Silva	H	M	A-team	7045	2,220%	2017
BRKGA-Learning	H	M	RL	7064	2.495%	2021
GRASP-Learning	H	M	RL	7045	2.219%	2021
Lower Bound				6892	0,000%	2007

H: Heurística
A: Aprimoramento
M: Metaheurística
Hp: Hiperheurística
RL: Reinforcement Learning
(Aprendizagem por Reforço)

6 Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, aprensentou-se uma nova proposta de resolução para o Problema de Corte Bidimensional Guilhotinado, utilizando-se de metaheurísticas hibridizadas com técnicas da Aprendizagem por Reforço. Quatro métodos foram implementadas, sendo eles o GRASP e o BRKGA, em suas versões tradicionais, bem como suas versões híbridas. As versões híbridas utilizaram-se do algoritmo *Q-Learning*, e foram chamadas de BRKGA-Learning e GRASP-Learning. O algoritmo de aprendizagem reforço teve a tarefa de criar bons indivíduos da população inicial no BRKGA-Learning. Já no GRASP-Learning, foi responsável por ser o contrutor das soluções iniciais para a metaheurística. Além disso, todos os algoritmos implementados têm em seu núcleo uma heurística construtiva, chamada aqui de HHDHeuristic.

Com o objetivo de validar os métodos propostos, extensivos experimentos computacionais foram realizados utilizando-se de intâncias presentes na literatura. Os algoritmos foram executados 50 vezes sobre cada uma dessas instâncias, configurados com os mesmos parâmetros para suas respectivas versões, bem como para o *Q-learning*. Os resultados computacionais foram coletados e avaliados, sob o critério da qualidade das soluções, a média de tempo e distância para limite inferior.

A análise dos resultados mostrou que a utilização do algoritmo *Q-learning* se mostrou promissora na estratégia adotada, conseguindo alcançar melhores resultados que as metaheurísticas tradicionais, sendo o BRKGA o algoritmo mais beneficiado. Frente aos algoritmos encontrados na literatura, os métodos também ficaram bem posicionados. Posto isto, conclui-se que os resultados obtidos neste trabalho e a estratégia utilizada se mostraram satisfatórios, podendo ser expandido para testes em outros problemas similares.

Como proposta de trabalhos futuros pode-se citar:

- A implementação do *Q-Learning* e das metaheurísticas com outra heurística de montagem;
- Realização de um estudo comparativo com várias políticas de seleção no algoritmo Q-learning.
- Testar outras técnicas de busca local nas metaheurísticas, como, por exemplo, a técnica de *Vocabulary Building* (VB).

Referências

ALMEIDA, I. I. d. Metaheuristica híbrida utilizando grasp realivo e aprendizagem por reforço: Uma aplicação na seguranca. *Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio Grande do Norte*, 2014. Citado na página 41.

BEAN, J. C. Genetic algorithms and random keys for sequencing and optimization. *ORSA Journal on Computing*, v. 6, n. 2, p. 154–160, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.

BERKEY, J. O.; WANG, P. Y. Two-dimensional finite bin-packing algorithms. *Journal of the operational research society*, Springer, v. 38, n. 5, p. 423–429, 1987. Citado na página 25.

BEZERRA, V. M. R. *Problemas de empacotamento bidimensional em níveis: estratégias baseadas em modelagem matemática*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

CHUNG, F. R.; GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. On packing two-dimensional bins. *IAM Journal on Algebraic Discrete Methods, SIAM*, v. 3, n. 1, p. 66–76, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 21.

CLAUTIAUX, F.; JOUGLET, A.; HAYEK, J. E. A new lower bound for the non-oriented two-dimensional bin-packing problem. *Operations Research Letters*, Elsevier, v. 35, n. 3, p. 365–373, 2007. Citado na página 26.

DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research, Elsevier*, v. 44, n. 2, p. 145–159, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 25.

FEO, T. A.; RESENDE, M. G. A probabilistic heuristic for a computationally difficult set covering problem. *Operations research letters*, Elsevier, v. 8, n. 2, p. 67–71, 1989. Citado na página 29.

FLESZAR, K. Three insertion heuristics and a justification improvement heuristic for two-dimensional bin packing with guillotine cuts. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 40, n. 1, p. 463–474, 2013. Citado na página 26.

FURINI, F.; MALAGUTI, E.; THOMOPULOS, D. Modeling two-dimensional guillotine cutting problems via integer programming. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 28, n. 4, p. 736–751, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 27.

GILMORE, P.; GOMORY, R. A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operational Research*, v. 9, p. 849–859, 1961. Citado na página 25.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problem—part ii. *Operations research*, INFORMS, v. 11, n. 6, p. 863–888, 1963. Citado na página 25.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations research*, INFORMS, v. 13, n. 1, p. 94–120, 1965. Citado na página 25.

GOLDBERG, D. E.; HOLLAND, J. H. Genetic algorithms and machine learning. Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers; Kluwer Academic Publishers ..., 1988. Citado na página 33.

GOMES, J. A. R. Problema de corte bidimensional: Aplicação a um caso real. *Dissertação de Mestrado.*, 2011. Citado na página 25.

GONÇALVES, J. F.; RESENDE, M. G.; MENDES, J. J. A biased random-key genetic algorithm with forward-backward improvement for the resource constrained project scheduling problem. *Journal of Heuristics*, Springer, v. 17, n. 5, p. 467–486, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.

GONÇALVES, J. F.; RESENDE, M. G. C. Biased random-key genetic algorithms for combinatorial optimization. *Journal of Heuristics*, v. 17, n. 5, p. 487–525, Oct 2011. ISSN 1572-9397. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10732-010-9143-1>. Citado 3 vezes nas páginas 32, 35 e 36.

KANTOROVICH, L. V. Mathematical methods of organizing and planning production (tradução de um trabalho em russo datado de 1939). *Management Science*, v. 6, p. 366–422, 1939. Citado na página 13.

KANTOROVICH, L. V. Mathematical methods of organizing and planning production. *Management science*, INFORMS, v. 6, n. 4, p. 366–422, 1960. Citado na página 25.

KUNDU, O.; DUTTA, S.; KUMAR, S. Deep-pack: A vision-based 2d online bin packing algorithm with deep reinforcement learning. In: IEEE. *2019 28th IEEE International Conference on Robot and Human Interactive Communication (RO-MAN)*. [S.l.], 2019. p. 1–7. Citado na página 27.

LIMA JÚNIOR, F. C. Algoritmo q-learning como estratégia de exploração e/ou explotação para metaheurísticas grasp e algoritmo genético. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2009. Citado 7 vezes nas páginas 30, 32, 40, 41, 44, 47 e 52.

LODI, A.; MARTELLO, S.; VIGO, D. Heuristic and metaheuristic approaches for a class of two-dimensional bin packing problems. *Journal on Computing*, p. 345–357, 1999. Citado na página 26.

MARIANO, M. F. D. S. Uma metaheurística a-teams aplicada ao problema do corte bidimensional guilhotinado. *Dissertação (Mestrado)—Universidade Do Estado do Rio Grande Do Norte*, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 23, 26 e 60.

MARTELLO, S.; VIGO, D. Exact solution of the two-dimensional finite bin packing problem. *Management science*, INFORMS, v. 44, n. 3, p. 388–399, 1998. Citado na página 25.

MESSAOUD, S. B.; CHU, C.; ESPINOUSE, M.-L. Characterization and modelling of guillotine constraints. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 191, n. 1, p. 112–126, 2008. Citado na página 24.

NASCIMENTO, H. A. do; LONGO, H. J.; ALOISE, D. J. Uma heurística o (mn) para o corte bidimensional guilhotinado. 1999. Citado 5 vezes nas páginas 25, 37, 38, 39 e 44.

OSMAN, I. H.; KELLY, J. P. Meta-heuristics: an overview. *Meta-heuristics*, Springer, p. 1–21, 1996. Citado na página 29.

SILVA, C. T. L. d. *Otimização de processos acoplados: programação da produção e corte de estoque*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 19, 40 e 46.

SILVA, J. L. d. Contribuições em otimização combinatória para o problema de corte bidimensional guilhotinado não-estagiado. Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 23, 27, 44, 46 e 60.

SPEARS, W. M.; JONG, K. D. D. *On the virtues of parameterized uniform crossover*. [S.l.], 1995. Citado na página 34.

SUTTON, R. S.; BARTO, A. G. *Reinforcement learning: An introduction*. [S.l.]: MIT press, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

TEMPONI, E. C. C. Uma proposta de resolução do problema de corte bidimensional via abordagem metaheurística. *Belo Horizonte - MG. Dissertação de mestrado*, 2007. Citado na página 22.

UZINSKI, H. Otimização de problemas multimodais usando meta-heurísticas evolutivas. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2014. Citado na página 33.

VELASCO, A. S. Grasp para o problema de corte bidimensional guilhotinado e restrito. *Dissertação (Mestrado)—Universidade Estadual do Norte Fluminense - UENF,*, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 26.

VERMA, R.; SINGHAL, A.; KHADILKAR, H.; BASUMATARY, A.; NAYAK, S.; SINGH, H. V.; KUMAR, S.; SINHA, R. A generalized reinforcement learning algorithm for online 3d bin-packing. *arXiv preprint arXiv:2007.00463*, 2020. Citado na página 27.

WÄSCHER, G.; HAUSSNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 183, n. 3, p. 1109–1130, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 20 e 21.

WATKINS, C. J. C. H. Learning from delayed rewards. King's College, Cambridge United Kingdom, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

YAO, Y.; LAI, C.; CUI, Y. A constructive heuristic for the two-dimensional bin packing based on value correction. *International Journal of Computer Applications in Technology*, Inderscience Publishers (IEL), v. 55, n. 1, p. 12–21, 2017. Citado na página 27.

ZHAO, H.; SHE, Q.; ZHU, C.; YANG, Y.; XU, K. Online 3d bin packing with constrained deep reinforcement learning. *arXiv preprint arXiv:2006.14978*, 2020. Citado na página 27.

Apêndices

APÊNDICE A – Resultados Totais do GRASP

Instancia	Melhor	Pior	Media	Desvio Padrão	Tempo
1_20_1_1	7	7	7	0,00	2,02
1_20_2_2	5	5	5	0,00	1,87
1_20_3_3	7	8	7,04	0,20	1,84
1_20_4_4	5	5	5	0,00	1,96
1_20_5_5	6	6	6	0,00	2,03
1_20_6_6	9	9	9	0,00	2,60
1_20_7_7	6	6	6	0,00	2,22
1_20_8_8	6	6	6	0,00	2,27
1_20_9_9	7	7	7	0,00	2,29
1_20_10_10	8	8	8	0,00	2,32
1_40_1_11	9	10	9,08	0,27	4,16
1_40_2_12	11	12	11	0,00	6,00
1_40_3_13	15	15	15	0,00	6,59
1_40_4_14	14	14	14	0,00	5,95
1_40_5_15	15	15	15	0,00	5,57
1_40_6_16	14	14	14	0,00	5,92
1_40_7_17	11	11	11	0,00	5,15
1_40_8_18	17	17	17	0,00	5,73
1_40_9_19	11	11	11	0,00	5,40
1_40_10_20	11	11	11	0,00	4,96
1_60_1_21	22	22	22	0,00	10,77
1_60_2_22	18	19	18,06	0,24	4,02
1_60_3_23	21	21	21	0,00	10,98
1_60_4_24	22	23	22,48	0,50	10,82
1_60_5_25	17	17	17	0,00	10,57
1_60_6_26	17	17	17	0,00	10,84
1_60_7_27	15	15	15	0,00	10,09
1_60_8_28	21	21	21	0,00	11,07
1_60_9_29	18	18	18	0,00	10,75
1_60_10_30	24	24	24	0,00	11,79
1_80_1_31	24	24	24	0,00	13,56

1_80_2_32	25	25	25	0,00	0,41
1_80_3_33	27	27	27	0,00	12,90
1_80_4_34	26	26	26	0,00	12,75
1_80_5_35	26	26	26	0,00	13,14
1_80_6_36	28	28	28	0,00	13,22
1_80_7_37	31	31	31	0,00	13,27
1_80_8_38	29	29	29	0,00	13,01
1_80_9_39	29	30	29,2	0,40	13,16
1_80_10_40	25	25	25	0,00	12,37
1_100_1_41	28	28	28	0,00	29,70
1_100_2_42	31	31	31	0,00	31,17
1_100_3_43	27	28	27	0,00	29,42
1_100_4_44	30	30	30	0,00	20,44
1_100_5_45	31	31	31	0,00	30,59
1_100_6_46	36	36	36	0,00	21,27
1_100_7_47	28	28	28	0,00	29,03
1_100_8_48	33	33	33	0,00	20,85
1_100_9_49	31	31	31	0,00	20,85
1_100_10_50	38	38	38	0,00	21,33
2_20_1_51	1	1	1	0,00	3,21
2_20_2_52	1	1	1	0,00	2,53
2_20_3_53	1	1	1	0,00	2,67
2_20_4_54	1	1	1	0,00	2,83
2_20_5_55	1	1	1	0,00	2,84
2_20_6_56	1	1	1	0,00	3,16
2_20_7_57	1	1	1	0,00	2,66
2_20_8_58	1	1	1	0,00	3,21
2_20_9_59	1	1	1	0,00	3,35
2_20_10_60	1	1	1	0,00	3,68
2_40_1_61	1	1	1	0,00	6,76
2_40_2_62	2	2	2	0,00	9,33
2_40_3_63	2	2	2	0,00	8,10
2_40_4_64	2	2	2	0,00	8,54
2_40_5_65	2	2	2	0,00	9,10
2_40_6_66	2	2	2	0,00	8,95
2_40_7_67	2	2	2	0,00	8,75
2_40_8_68	2	2	2	0,00	7,16

2_40_9_69	2	2	2	0,00	8,98
2_40_10_70	2	2	2	0,00	7,61
2_60_1_71	3	3	3	0,00	11,12
2_60_2_72	2	2	2	0,00	10,13
2_60_3_73	3	3	3	0,00	10,44
2_60_4_74	3	3	3	0,00	11,22
2_60_5_75	2	2	2	0,00	10,71
2_60_6_76	2	2	2	0,00	10,83
2_60_7_77	2	2	2	0,00	10,65
2_60_8_78	3	3	3	0,00	11,60
2_60_9_79	2	2	2	0,00	10,25
2_60_10_80	3	3	3	0,00	11,64
2_80_1_81	3	3	3	0,00	13,61
2_80_2_82	3	3	3	0,00	13,77
2_80_3_83	3	3	3	0,00	12,64
2_80_4_84	3	3	3	0,00	13,13
2_80_5_85	3	3	3	0,00	13,99
2_80_6_86	3	3	3	0,00	14,33
2_80_7_87	3	3	3	0,00	14,52
2_80_8_88	3	3	3	0,00	14,49
2_80_9_89	4	4	4	0,00	14,21
2_80_10_90	3	3	3	0,00	14,91
2_100_1_91	4	4	4	0,00	24,33
2_100_2_92	4	4	4	0,00	24,72
2_100_3_93	3	3	3	0,00	24,28
2_100_4_94	4	4	4	0,00	23,48
2_100_5_95	4	4	4	0,00	24,21
2_100_6_96	4	4	4	0,00	24,05
2_100_7_97	4	4	4	0,00	23,51
2_100_8_98	4	4	4	0,00	22,78
2_100_9_99	4	4	4	0,00	23,93
2_100_10_100	4	4	4	0,00	24,57
3_20_1_101	5	5	5	0,00	2,32
3_20_2_102	3	3	3	0,00	2,11
3_20_3_103	5	5	5	0,00	3,70
3_20_4_104	4	4	4	0,00	2,12
3_20_5_105	4	4	4	0,00	4,21

3_20_6_106	6	6	6	0,00	5,61
3_20_7_107	4	4	4	0,00	1,98
3_20_8_108	4	4	4	0,00	3,22
3_20_9_109	5	5	5	0,00	3,13
3_20_10_110	7	7	7	0,00	5,49
3_40_1_111	6	7	6,16	0,37	2,53
3_40_2_112	8	8	8	0,00	6,13
3_40_3_113	11	11	11	0,00	6,94
3_40_4_114	10	10	10	0,00	6,76
3_40_5_115	12	12	12	0,00	6,47
3_40_6_116	10	10	10	0,00	6,58
3_40_7_117	8	8	8	0,00	6,03
3_40_8_118	13	13	13	0,00	6,48
3_40_9_119	8	8	8	0,00	6,84
3_40_10_120	8	8	8	0,00	6,57
3_60_1_121	16	16	16	0,00	11,45
3_60_2_122	13	13	13	0,00	12,34
3_60_3_123	13	14	13,02	0,14	11,41
3_60_4_124	14	14	14	0,00	11,28
3_60_5_125	12	12	12	0,00	11,98
3_60_6_126	12	13	12,16	0,37	10,79
3_60_7_127	11	11	11	0,00	11,65
3_60_8_128	14	15	14,2	0,40	11,53
3_60_9_129	13	13	13	0,00	11,50
3_60_10_130	17	17	17	0,00	11,76
3_80_1_131	16	17	16,08	0,27	17,01
3_80_2_132	17	17	17	0,00	17,32
3_80_3_133	17	17	17	0,00	16,20
3_80_4_134	18	18	18	0,00	16,80
3_80_5_135	17	17	17	0,00	16,59
3_80_6_136	19	19	19	0,00	16,32
3_80_7_137	20	20	20	0,00	16,93
3_80_8_138	21	21	21	0,00	16,30
3_80_9_139	21	21	21	0,00	16,09
3_80_10_140	18	18	18	0,00	16,19
3_100_1_141	19	19	19	0,00	23,12
3_100_2_142	22	23	22,04	0,20	21,10

3_100_3_143	19	19	19	0,00	21,70
3_100_4_144	20	20	20	0,00	21,49
3_100_5_145	22	22	22	0,00	21,78
3_100_6_146	26	26	26	0,00	21,99
3_100_7_147	20	20	20	0,00	21,43
3_100_8_148	22	23	22,18	0,38	21,66
3_100_9_149	22	22	22	0,00	22,42
3_100_10_150	29	29	29	0,00	21,69
4_20_1_151	1	1	1	0,00	4,53
4_20_2_152	1	1	1	0,00	3,48
4_20_3_153	1	1	1	0,00	3,92
4_20_4_154	1	1	1	0,00	4,33
4_20_5_155	1	1	1	0,00	3,89
4_20_6_156	1	1	1	0,00	4,63
4_20_7_157	1	1	1	0,00	3,52
4_20_8_158	1	1	1	0,00	3,67
4_20_9_159	1	1	1	0,00	3,90
4_20_10_160	1	1	1	0,00	4,14
4_40_1_161	1	1	1	0,00	11,66
4_40_2_162	2	2	2	0,00	13,58
4_40_3_163	2	2	2	0,00	11,87
4_40_4_164	2	2	2	0,00	9,70
4_40_5_165	2	2	2	0,00	11,06
4_40_6_166	2	2	2	0,00	12,36
4_40_7_167	2	2	2	0,00	13,43
4_40_8_168	2	2	2	0,00	9,40
4_40_9_169	2	2	2	0,00	11,61
4_40_10_170	2	2	2	0,00	10,67
4_60_1_171	3	3	3	0,00	15,88
4_60_2_172	2	2	2	0,00	19,48
4_60_3_173	3	3	3	0,00	17,12
4_60_4_174	3	3	3	0,00	18,00
4_60_5_175	2	2	2	0,00	17,63
4_60_6_176	2	2	2	0,00	17,59
4_60_7_177	2	2	2	0,00	20,99
4_60_8_178	3	3	3	0,00	17,79
4_60_9_179	2	2	2	0,00	19,13

4_60_10_180	3	3	3	0,00	18,38
4_80_1_181	3	3	3	0,00	21,48
4_80_2_182	3	3	3	0,00	19,09
4_80_3_183	3	3	3	0,00	18,95
4_80_4_184	3	3	3	0,00	18,33
4_80_5_185	3	3	3	0,00	19,05
4_80_6_186	3	3	3	0,00	19,17
4_80_7_187	3	4	3,02	0,14	21,28
4_80_8_188	3	3	3	0,00	18,36
4_80_9_189	4	4	4	0,00	17,88
4_80_10_190	3	3	3	0,00	19,44
4_100_1_191	3	3	3	0,00	26,90
4_100_2_192	4	4	4	0,00	25,37
4_100_3_193	3	3	3	0,00	23,30
4_100_4_194	4	4	4	0,00	24,41
4_100_5_195	4	4	4	0,00	25,07
4_100_6_196	4	4	4	0,00	24,38
4_100_7_197	3	4	3,1	0,30	24,29
4_100_8_198	4	4	4	0,00	23,42
4_100_9_199	4	4	4	0,00	25,09
4_100_10_200	4	4	4	0,00	23,61
5_20_1_201	7	7	7	0,00	3,24
5_20_2_202	4	4	4	0,00	3,22
5_20_3_203	7	7	7	0,00	3,57
5_20_4_204	5	5	5	0,00	3,65
5_20_5_205	5	5	5	0,00	3,35
5_20_6_206	8	8	8	0,00	3,32
5_20_7_207	5	5	5	0,00	3,35
5_20_8_208	5	5	5	0,00	3,22
5_20_9_209	6	6	6	0,00	3,63
5_20_10_210	7	7	7	0,00	3,46
5_40_1_211	8	8	8	0,00	9,38
5_40_2_212	10	10	10	0,00	9,15
5_40_3_213	14	14	14	0,00	9,76
5_40_4_214	12	12	12	0,00	9,03
5_40_5_215	13	13	13	0,00	9,56
5_40_6_216	12	12	12	0,00	8,87

5_40_7_217	10	10	10	0,00	9,05
5_40_8_218	16	16	16	0,00	9,16
5_40_9_219	9	10	9,04	0,20	9,04
5_40_10_220	10	10	10	0,00	8,74
5_60_1_221	20	20	20	0,00	12,08
5_60_2_222	16	16	16	0,00	12,03
5_60_3_223	18	18	18	0,00	11,91
5_60_4_224	19	19	19	0,00	11,50
5_60_5_225	15	15	15	0,00	11,34
5_60_6_226	15	16	15	0,00	11,54
5_60_7_227	14	14	14	0,00	11,73
5_60_8_228	18	18	18	0,00	11,50
5_60_9_229	16	16	16	0,00	12,01
5_60_10_230	23	23	23	0,00	12,20
5_80_1_231	22	22	22	0,00	15,13
5_80_2_232	22	22	22	0,00	15,95
5_80_3_233	24	24	24	0,00	15,58
5_80_4_234	23	23	23	0,00	15,40
5_80_5_235	22	22	22	0,00	15,51
5_80_6_236	25	25	25	0,00	15,12
5_80_7_237	26	26	26	0,00	15,59
5_80_8_238	26	26	26	0,00	15,59
5_80_9_239	27	27	27	0,00	16,07
5_80_10_240	22	23	22,06	0,24	15,61
5_100_1_241	24	25	24,08	0,27	33,93
5_100_2_242	28	29	28,12	0,32	33,90
5_100_3_243	24	24	24	0,00	32,49
5_100_4_244	26	26	26	0,00	32,76
5_100_5_245	28	28	28	0,00	61,28
5_100_6_246	33	33	33	0,00	51,10
5_100_7_247	25	25	25	0,00	47,36
5_100_8_248	29	29	29	0,00	48,95
5_100_9_249	27	27	27	0,00	47,78
5_100_10_250	35	35	35	0,00	48,66
6_20_1_251	1	1	1	0,00	4,47
6_20_2_252	1	1	1	0,00	3,37
6_20_3_253	1	1	1	0,00	3,79

6_20_4_254	1	1	1	0,00	4,39
6_20_5_255	1	1	1	0,00	3,83
6_20_6_256	1	1	1	0,00	4,76
6_20_7_257	1	1	1	0,00	3,51
6_20_8_258	1	1	1	0,00	3,53
6_20_9_259	1	1	1	0,00	3,88
6_20_10_260	1	1	1	0,00	4,22
6_40_1_261	1	1	1	0,00	10,23
6_40_2_262	2	2	2	0,00	13,36
6_40_3_263	2	2	2	0,00	11,18
6_40_4_264	2	2	2	0,00	9,11
6_40_5_265	2	2	2	0,00	10,54
6_40_6_266	2	2	2	0,00	12,41
6_40_7_267	2	2	2	0,00	13,09
6_40_8_268	2	2	2	0,00	8,06
6_40_9_269	1	1	1	0,00	10,70
6_40_10_270	1	1	1	0,00	9,75
6_60_1_271	2	2	2	0,00	15,78
6_60_2_272	2	2	2	0,00	20,78
6_60_3_273	2	2	2	0,00	16,02
6_60_4_274	2	2	2	0,00	19,22
6_60_5_275	2	2	2	0,00	17,13
6_60_6_276	2	2	2	0,00	16,58
6_60_7_277	2	2	2	0,00	22,06
6_60_8_278	2	2	2	0,00	20,93
6_60_9_279	2	2	2	0,00	16,24
6_60_10_280	3	3	3	0,00	10,74
6_80_1_281	3	3	3	0,00	18,68
6_80_2_282	3	3	3	0,00	20,41
6_80_3_283	3	3	3	0,00	18,58
6_80_4_284	3	3	3	0,00	22,67
6_80_5_285	3	3	3	0,00	17,64
6_80_6_286	3	3	3	0,00	25,55
6_80_7_287	3	3	3	0,00	29,23
6_80_8_288	3	3	3	0,00	25,55
6_80_9_289	3	3	3	0,00	27,04
6_80_10_290	3	3	3	0,00	16,54

6_100_1_291	3	3	3	0,00	37,49
6_100_2_292	4	4	4	0,00	31,04
6_100_3_293	3	3	3	0,00	35,75
6_100_4_294	3	3	3	0,00	42,22
6_100_5_295	3	3	3	0,00	51,24
6_100_6_296	4	4	4	0,00	37,32
6_100_7_297	3	3	3	0,00	46,49
6_100_8_298	3	4	3,16	0,37	42,88
6_100_9_299	3	3	3	0,00	40,16
6_100_10_300	4	4	4	0,00	39,87
7_20_1_301	5	5	5	0,00	3,48
7_20_2_302	5	5	5	0,00	4,76
7_20_3_303	5	5	5	0,00	2,90
7_20_4_304	6	6	6	0,00	3,32
7_20_5_305	6	6	6	0,00	2,12
7_20_6_306	5	5	5	0,00	4,16
7_20_7_307	4	4	4	0,00	3,56
7_20_8_308	6	6	6	0,00	2,54
7_20_9_309	6	6	6	0,00	3,56
7_20_10_310	4	4	4	0,00	2,76
7_40_1_311	9	10	9,26	0,44	10,61
7_40_2_312	12	12	12	0,00	10,56
7_40_3_313	9	10	9	0,00	10,13
7_40_4_314	13	13	13	0,00	12,15
7_40_5_315	9	9	9	0,00	8,86
7_40_6_316	11	11	11	0,00	9,37
7_40_7_317	10	11	10,1	0,30	7,60
7_40_8_318	11	11	11	0,00	7,88
7_40_9_319	8	8	8	0,00	8,17
7_40_10_320	12	12	12	0,00	9,53
7_60_1_321	16	17	16,14	0,35	13,28
7_60_2_322	13	14	13,06	0,24	11,25
7_60_3_323	16	16	16	0,00	12,90
7_60_4_324	14	15	14,26	0,44	12,10
7_60_5_325	13	14	13,08	0,27	12,39
7_60_6_326	13	14	13,04	0,20	12,98
7_60_7_327	14	14	14	0,00	14,56

7_60_8_328	16	17	16,18	0,38	11,19
7_60_9_329	14	14	14	0,00	12,09
7_60_10_330	19	19	19	0,00	14,50
7_80_1_331	20	20	20	0,00	33,45
7_80_2_332	23	24	23,16	0,37	30,81
7_80_3_333	19	20	19,16	0,37	31,14
7_80_4_334	21	21	21	0,00	21,21
7_80_5_335	22	22	22	0,00	32,57
7_80_6_336	21	22	21,06	0,24	28,15
7_80_7_337	23	24	23,12	0,32	30,81
7_80_8_338	21	21	21	0,00	25,70
7_80_9_339	22	22	22	0,00	21,81
7_80_10_340	23	23	23	0,00	27,58
7_100_1_341	26	27	26,1	0,30	68,22
7_100_2_342	25	26	25,1	0,30	60,43
7_100_3_343	23	23	23	0,00	63,73
7_100_4_344	25	25	25	0,00	54,24
7_100_5_345	23	24	23,14	0,35	47,12
7_100_6_346	28	29	28,16	0,37	72,39
7_100_7_347	25	26	25,02	0,14	62,96
7_100_8_348	27	28	27,14	0,35	58,67
7_100_9_349	25	25	25	0,00	56,82
7_100_10_350	31	31	31	0,00	52,28
8_20_1_351	6	6	6	0,00	2,84
8_20_2_352	6	6	6	0,00	5,72
8_20_3_353	5	5	5	0,00	3,22
8_20_4_354	6	6	6	0,00	3,10
8_20_5_355	5	5	5	0,00	3,32
8_20_6_356	6	6	6	0,00	2,68
8_20_7_357	4	4	4	0,00	2,98
8_20_8_358	5	5	5	0,00	4,04
8_20_9_359	6	6	6	0,00	3,70
8_20_10_360	4	4	4	0,00	3,92
8_40_1_361	11	11	11	0,00	8,41
8_40_2_362	12	12	12	0,00	10,15
8_40_3_363	10	10	10	0,00	8,91
8_40_4_364	11	11	11	0,00	7,52

8_40_5_365	8	8	8	0,00	7,55
8_40_6_366	11	11	11	0,00	9,42
8_40_7_367	10	10	10	0,00	8,87
8_40_8_368	10	11	10	0,00	7,44
8_40_9_369	9	9	9	0,00	7,16
8_40_10_370	12	12	12	0,00	8,66
8_60_1_371	16	17	16,06	0,24	11,94
8_60_2_372	16	16	16	0,00	10,29
8_60_3_373	16	16	16	0,00	12,07
8_60_4_374	14	14	14	0,00	10,59
8_60_5_375	13	14	13,1	0,30	10,65
8_60_6_376	14	15	14,12	0,32	9,55
8_60_7_377	13	14	13,12	0,32	13,22
8_60_8_378	16	17	16,06	0,24	10,96
8_60_9_379	15	15	15	0,00	12,50
8_60_10_380	17	17	17	0,00	11,38
8_80_1_381	20	21	20,14	0,35	30,78
8_80_2_382	21	22	21,14	0,35	24,20
8_80_3_383	19	19	19	0,00	25,68
8_80_4_384	19	19	19	0,00	26,52
8_80_5_385	25	26	25,14	0,35	29,71
8_80_6_386	21	21	21	0,00	31,95
8_80_7_387	21	21	21	0,00	26,58
8_80_8_388	21	22	21,06	0,24	30,85
8_80_9_389	21	21	21	0,00	22,57
8_80_10_390	23	24	23,14	0,35	30,72
8_100_1_391	25	25	25	0,00	61,25
8_100_2_392	25	26	25,24	0,43	59,10
8_100_3_393	23	23	23	0,00	55,08
8_100_4_394	29	30	29	0,00	65,24
8_100_5_395	27	27	27	0,00	58,67
8_100_6_396	25	26	25,16	0,37	73,15
8_100_7_397	25	25	25	0,00	54,49
8_100_8_398	27	28	27,16	0,37	65,70
8_100_9_399	26	26	26	0,00	66,67
8_100_10_400	30	31	30,12	0,32	72,34
9_20_1_401	19	19	19	0,00	3,21

9_20_2_402	13	13	13	0,00	3,44
9_20_3_403	14	14	14	0,00	3,54
9_20_4_404	16	16	16	0,00	4,66
9_20_5_405	16	16	16	0,00	2,87
9_20_6_406	14	14	14	0,00	4,49
9_20_7_407	9	9	9	0,00	2,90
9_20_8_408	14	14	14	0,00	2,63
9_20_9_409	15	15	15	0,00	4,50
9_20_10_410	13	13	13	0,00	4,83
9_40_1_411	24	24	24	0,00	9,42
9_40_2_412	32	32	32	0,00	7,70
9_40_3_413	28	28	28	0,00	8,51
9_40_4_414	31	31	31	0,00	8,73
9_40_5_415	27	27	27	0,00	8,31
9_40_6_416	29	29	29	0,00	9,16
9_40_7_417	24	24	24	0,00	9,11
9_40_8_418	26	26	26	0,00	8,59
9_40_9_419	21	21	21	0,00	10,48
9_40_10_420	33	33	33	0,00	9,39
9_60_1_421	46	46	46	0,00	14,86
9_60_2_422	44	44	44	0,00	16,16
9_60_3_423	46	46	46	0,00	14,05
9_60_4_424	44	44	44	0,00	14,13
9_60_5_425	41	41	41	0,00	15,07
9_60_6_426	37	37	37	0,00	16,47
9_60_7_427	40	40	40	0,00	15,35
9_60_8_428	47	47	47	0,00	16,95
9_60_9_429	45	45	45	0,00	15,25
9_60_10_430	45	45	45	0,00	13,50
9_80_1_431	58	58	58	0,00	19,27
9_80_2_432	57	57	57	0,00	18,99
9_80_3_433	57	57	57	0,00	18,37
9_80_4_434	52	52	52	0,00	18,04
9_80_5_435	61	61	61	0,00	18,17
9_80_6_436	62	62	62	0,00	19,77
9_80_7_437	59	59	59	0,00	17,32
9_80_8_438	58	58	58	0,00	18,01

9_80_9_439	49	49	49	0,00	18,43
9_80_10_440	60	60	60	0,00	18,08
9_100_1_441	71	71	71	0,00	47,87
9_100_2_442	64	64	64	0,00	47,85
9_100_3_443	68	68	68	0,00	50,20
9_100_4_444	78	78	78	0,00	46,98
9_100_5_445	65	65	65	0,00	46,97
9_100_6_446	71	71	71	0,00	45,08
9_100_7_447	66	66	66	0,00	46,98
9_100_8_448	73	73	73	0,00	50,39
9_100_9_449	65	65	65	0,00	50,50
9_100_10_450	72	72	72	0,00	46,63
10_20_1_451	6	6	6	0,00	3,09
10_20_2_452	3	3	3	0,00	3,39
10_20_3_453	4	4	4	0,00	4,80
10_20_4_454	4	4	4	0,00	3,45
10_20_5_455	4	4	4	0,00	3,21
10_20_6_456	4	4	4	0,00	3,03
10_20_7_457	5	5	5	0,00	4,20
10_20_8_458	3	3	3	0,00	4,47
10_20_9_459	5	5	5	0,00	5,46
10_20_10_460	3	3	3	0,00	5,58
10_40_1_461	8	8	8	0,00	8,60
10_40_2_462	8	8	8	0,00	8,29
10_40_3_463	9	9	9	0,00	4,74
10_40_4_464	6	6	6	0,00	11,50
10_40_5_465	6	6	6	0,00	12,23
10_40_6_466	6	6	6	0,00	6,38
10_40_7_467	7	7	7	0,00	13,86
10_40_8_468	7	7	7	0,00	7,97
10_40_9_469	8	8	8	0,00	8,11
10_40_10_470	8	8	8	0,00	12,92
10_60_1_471	11	12	11,1	0,30	13,84
10_60_2_472	12	12	12	0,00	15,85
10_60_3_473	11	11	11	0,00	16,25
10_60_4_474	8	8	8	0,00	12,08
10_60_5_475	8	8	8	0,00	17,94

10_60_6_476	12	12	12	0,00	12,67
10_60_7_477	10	10	10	0,00	14,51
10_60_8_478	10	10	10	0,00	14,94
10_60_9_479	9	9	9	0,00	10,90
10_60_10_480	8	8	8	0,00	17,14
10_80_1_481	13	13	13	0,00	23,16
10_80_2_482	11	11	11	0,00	20,49
10_80_3_483	11	11	11	0,00	22,95
10_80_4_484	14	14	14	0,00	24,12
10_80_5_485	14	14	14	0,00	26,20
10_80_6_486	14	14	14	0,00	21,71
10_80_7_487	15	15	15	0,00	19,13
10_80_8_488	10	10	10	0,00	37,44
10_80_9_489	12	13	12,02	0,14	20,99
10_80_10_490	15	15	15	0,00	18,36
10_100_1_491	15	15	15	0,00	37,63
10_100_2_492	16	17	16,52	0,50	45,33
10_100_3_493	16	16	16	0,00	45,16
10_100_4_494	17	18	17,04	0,20	20,85
10_100_5_495	18	18	18	0,00	38,75
10_100_6_496	13	13	13	0,00	50,82
10_100_7_497	14	14	14	0,00	37,93
10_100_8_498	18	18	18	0,00	35,67
10_100_9_499	16	16	16	0,00	42,99
10_100_10_500	15	15	15	0,00	44,66
	7051	7112	7058	16,94	16,90

APÊNDICE B – Resultados Totais do GRASP-Learning

Instancia	Melhor	Pior	Media	Desvio Padrão	Tempo
1_20_1_1	7	7	7	0	4,03
1_20_2_2	5	5	5	0	3,74
1_20_3_3	7	7	7	0	3,68
1_20_4_4	5	5	5	0	3,92
1_20_5_5	6	6	6	0	4,07
1_20_6_6	9	9	9	0	5,2
1_20_7_7	6	6	6	0	4,44
1_20_8_8	6	6	6	0	4,55
1_20_9_9	7	7	7	0	4,59
1_20_10_10	8	8	8	0	4,64
1_40_1_11	9	9	9	0	8,31
1_40_2_12	11	11	11	0	11,99
1_40_3_13	15	15	15	0	13,19
1_40_4_14	14	14	14	0	11,9
1_40_5_15	15	15	15	0	11,15
1_40_6_16	14	14	14	0	11,84
1_40_7_17	11	11	11	0	10,31
1_40_8_18	17	17	17	0	11,47
1_40_9_19	11	11	11	0	10,8
1_40_10_20	11	11	11	0	9,92
1_60_1_21	22	22	22	0	21,55
1_60_2_22	18	18	18	0	8,05
1_60_3_23	21	21	21	0	21,96
1_60_4_24	22	22	22	0	21,65
1_60_5_25	17	17	17	0	21,14
1_60_6_26	17	17	17	0	21,69
1_60_7_27	15	15	15	0	20,19
1_60_8_28	21	21	21	0	22,14
1_60_9_29	18	18	18	0	21,51
1_60_10_30	24	24	24	0	23,57
1_80_1_31	24	24	24	0	27,12

1_80_2_32	25	25	25	0	0,81
1_80_3_33	27	27	27	0	25,8
1_80_4_34	26	26	26	0	25,49
1_80_5_35	26	26	26	0	26,27
1_80_6_36	28	28	28	0	26,43
1_80_7_37	31	31	31	0	26,54
1_80_8_38	29	29	29	0	26,01
1_80_9_39	29	29	29	0	26,32
1_80_10_40	25	25	25	0	24,74
1_100_1_41	28	28	28	0	59,4
1_100_2_42	31	31	31	0	62,34
1_100_3_43	27	27	27	0	58,85
1_100_4_44	30	30	30	0	40,88
1_100_5_45	31	31	31	0	61,18
1_100_6_46	36	36	36	0	42,53
1_100_7_47	28	28	28	0	58,06
1_100_8_48	33	33	33	0	41,7
1_100_9_49	31	31	31	0	41,7
1_100_10_50	38	38	38	0	42,66
2_20_1_51	1	1	1	0	6,43
2_20_2_52	1	1	1	0	5,05
2_20_3_53	1	1	1	0	5,35
2_20_4_54	1	1	1	0	5,66
2_20_5_55	1	1	1	0	5,67
2_20_6_56	1	1	1	0	6,32
2_20_7_57	1	1	1	0	5,33
2_20_8_58	1	1	1	0	6,43
2_20_9_59	1	1	1	0	6,7
2_20_10_60	1	1	1	0	7,36
2_40_1_61	1	1	1	0	13,52
2_40_2_62	2	2	2	0	18,67
2_40_3_63	2	2	2	0	16,21
2_40_4_64	2	2	2	0	17,08
2_40_5_65	2	2	2	0	18,2
2_40_6_66	2	2	2	0	17,9
2_40_7_67	2	2	2	0	17,5
2_40_8_68	2	2	2	0	14,32

2_40_9_69	2	2	2	0	17,95
2_40_10_70	2	2	2	0	15,22
2_60_1_71	3	3	3	0	22,24
2_60_2_72	2	2	2	0	20,27
2_60_3_73	3	3	3	0	20,88
2_60_4_74	3	3	3	0	22,45
2_60_5_75	2	2	2	0	21,41
2_60_6_76	2	2	2	0	21,67
2_60_7_77	2	2	2	0	21,3
2_60_8_78	3	3	3	0	23,2
2_60_9_79	2	2	2	0	20,5
2_60_10_80	3	3	3	0	23,27
2_80_1_81	3	3	3	0	27,23
2_80_2_82	3	3	3	0	27,55
2_80_3_83	3	3	3	0	25,28
2_80_4_84	3	3	3	0	26,26
2_80_5_85	3	3	3	0	27,99
2_80_6_86	3	3	3	0	28,66
2_80_7_87	3	3	3	0	29,04
2_80_8_88	3	3	3	0	28,99
2_80_9_89	4	4	4	0	28,42
2_80_10_90	3	3	3	0	29,83
2_100_1_91	4	4	4	0	48,66
2_100_2_92	4	4	4	0	49,44
2_100_3_93	3	3	3	0	48,56
2_100_4_94	4	4	4	0	46,96
2_100_5_95	4	4	4	0	48,43
2_100_6_96	4	4	4	0	48,11
2_100_7_97	4	4	4	0	47,02
2_100_8_98	4	4	4	0	45,56
2_100_9_99	4	4	4	0	47,86
2_100_10_100	4	4	4	0	49,15
3_20_1_101	5	5	5	0	4,64
3_20_2_102	3	3	3	0	4,22
3_20_3_103	5	5	5	0	7,39
3_20_4_104	4	4	4	0	4,24
3_20_5_105	4	4	4	0	8,43

3_20_6_106	6	6	6	0	11,22
3_20_7_107	4	4	4	0	3,96
3_20_8_108	4	4	4	0	6,43
3_20_9_109	5	5	5	0	6,26
3_20_10_110	7	7	7	0	10,98
3_40_1_111	6	6	6	0	5,07
3_40_2_112	8	8	8	0	12,26
3_40_3_113	11	11	11	0	13,89
3_40_4_114	10	10	10	0	13,53
3_40_5_115	12	12	12	0	12,94
3_40_6_116	10	10	10	0	13,16
3_40_7_117	8	8	8	0	12,07
3_40_8_118	13	13	13	0	12,97
3_40_9_119	8	8	8	0	13,69
3_40_10_120	8	8	8	0	13,14
3_60_1_121	16	16	16	0	22,9
3_60_2_122	12	12	12	0	24,69
3_60_3_123	13	13	13	0	22,83
3_60_4_124	14	14	14	0	22,55
3_60_5_125	12	12	12	0	23,96
3_60_6_126	12	12	12	0	21,57
3_60_7_127	11	11	11	0	23,29
3_60_8_128	14	14	14	0	23,06
3_60_9_129	13	13	13	0	22,99
3_60_10_130	17	17	17	0	23,53
3_80_1_131	16	16	16	0	34,03
3_80_2_132	17	17	17	0	34,63
3_80_3_133	17	17	17	0	32,4
3_80_4_134	18	18	18	0	33,59
3_80_5_135	17	17	17	0	33,18
3_80_6_136	19	19	19	0	32,63
3_80_7_137	20	20	20	0	33,86
3_80_8_138	21	21	21	0	32,6
3_80_9_139	21	21	21	0	32,19
3_80_10_140	18	18	18	0	32,38
3_100_1_141	19	19	19	0	46,25
3_100_2_142	22	22	22	0	42,2

3_100_3_143	19	19	19	0	43,39
3_100_4_144	20	20	20	0	42,97
3_100_5_145	22	22	22	0	43,55
3_100_6_146	26	26	26	0	43,98
3_100_7_147	20	20	20	0	42,85
3_100_8_148	22	22	22	0	43,31
3_100_9_149	22	22	22	0	44,85
3_100_10_150	29	29	29	0	43,37
4_20_1_151	1	1	1	0	9,06
4_20_2_152	1	1	1	0	6,95
4_20_3_153	1	1	1	0	7,84
4_20_4_154	1	1	1	0	8,65
4_20_5_155	1	1	1	0	7,77
4_20_6_156	1	1	1	0	9,25
4_20_7_157	1	1	1	0	7,05
4_20_8_158	1	1	1	0	7,33
4_20_9_159	1	1	1	0	7,81
4_20_10_160	1	1	1	0	8,29
4_40_1_161	1	1	1	0	23,31
4_40_2_162	2	2	2	0	27,16
4_40_3_163	2	2	2	0	23,74
4_40_4_164	2	2	2	0	19,4
4_40_5_165	2	2	2	0	22,13
4_40_6_166	2	2	2	0	24,71
4_40_7_167	2	2	2	0	26,86
4_40_8_168	2	2	2	0	18,8
4_40_9_169	2	2	2	0	23,23
4_40_10_170	2	2	2	0	21,33
4_60_1_171	3	3	3	0	31,77
4_60_2_172	2	2	2	0	38,97
4_60_3_173	3	3	3	0	34,23
4_60_4_174	3	3	3	0	35,99
4_60_5_175	2	2	2	0	35,27
4_60_6_176	2	2	2	0	35,19
4_60_7_177	2	2	2	0	41,99
4_60_8_178	3	3	3	0	35,58
4_60_9_179	2	2	2	0	38,26

4_60_10_180	3	3	3	0	36,75
4_80_1_181	3	3	3	0	42,95
4_80_2_182	3	3	3	0	38,18
4_80_3_183	3	3	3	0	37,91
4_80_4_184	3	3	3	0	36,66
4_80_5_185	3	3	3	0	38,1
4_80_6_186	3	3	3	0	38,34
4_80_7_187	3	3	3	0	42,56
4_80_8_188	3	3	3	0	36,72
4_80_9_189	4	4	4	0	35,76
4_80_10_190	3	3	3	0	38,88
4_100_1_191	3	3	3	0	53,79
4_100_2_192	4	4	4	0	50,73
4_100_3_193	3	3	3	0	46,59
4_100_4_194	4	4	4	0	48,83
4_100_5_195	4	4	4	0	50,14
4_100_6_196	4	4	4	0	48,76
4_100_7_197	3	3	3	0	48,59
4_100_8_198	4	4	4	0	46,85
4_100_9_199	4	4	4	0	50,17
4_100_10_200	4	4	4	0	47,22
5_20_1_201	7	7	7	0	6,48
5_20_2_202	4	4	4	0	6,45
5_20_3_203	7	7	7	0	7,14
5_20_4_204	5	5	5	0	7,3
5_20_5_205	5	5	5	0	6,69
5_20_6_206	8	8	8	0	6,65
5_20_7_207	5	5	5	0	6,7
5_20_8_208	5	5	5	0	6,44
5_20_9_209	6	6	6	0	7,25
5_20_10_210	7	7	7	0	6,92
5_40_1_211	8	8	8	0	18,76
5_40_2_212	10	10	10	0	18,3
5_40_3_213	14	14	14	0	19,52
5_40_4_214	12	12	12	0	18,06
5_40_5_215	13	13	13	0	19,11
5_40_6_216	12	12	12	0	17,73

5_40_7_217	10	10	10	0	18,1
5_40_8_218	16	16	16	0	18,32
5_40_9_219	9	10	9,888	0,318	18,08
5_40_10_220	10	10	10	0	17,48
5_60_1_221	20	20	20	0	24,16
5_60_2_222	16	16	16	0	24,06
5_60_3_223	18	18	18	0	23,81
5_60_4_224	19	19	19	0	23
5_60_5_225	15	15	15	0	22,68
5_60_6_226	15	15	15	0	23,07
5_60_7_227	14	14	14	0	23,47
5_60_8_228	18	18	18	0	23,01
5_60_9_229	16	16	16	0	24,02
5_60_10_230	23	23	23	0	24,4
5_80_1_231	22	22	22	0	30,26
5_80_2_232	22	22	22	0	31,9
5_80_3_233	24	24	24	0	31,16
5_80_4_234	23	23	23	0	30,8
5_80_5_235	22	22	22	0	31,02
5_80_6_236	25	25	25	0	30,23
5_80_7_237	26	26	26	0	31,18
5_80_8_238	26	26	26	0	31,19
5_80_9_239	27	27	27	0	32,14
5_80_10_240	22	22	22	0	31,22
5_100_1_241	24	24	24	0	67,86
5_100_2_242	28	28	28	0	67,8
5_100_3_243	24	24	24	0	64,97
5_100_4_244	26	26	26	0	65,52
5_100_5_245	28	28	28	0	122,56
5_100_6_246	33	33	33	0	102,2
5_100_7_247	25	25	25	0	94,71
5_100_8_248	29	29	29	0	97,91
5_100_9_249	27	27	27	0	95,56
5_100_10_250	35	35	35	0	97,32
6_20_1_251	1	1	1	0	8,94
6_20_2_252	1	1	1	0	6,73
6_20_3_253	1	1	1	0	7,57

6_20_4_254	1	1	1	0	8,78
6_20_5_255	1	1	1	0	7,66
6_20_6_256	1	1	1	0	9,51
6_20_7_257	1	1	1	0	7,03
6_20_8_258	1	1	1	0	7,06
6_20_9_259	1	1	1	0	7,76
6_20_10_260	1	1	1	0	8,45
6_40_1_261	1	1	1	0	20,46
6_40_2_262	2	2	2	0	26,73
6_40_3_263	2	2	2	0	22,37
6_40_4_264	2	2	2	0	18,22
6_40_5_265	2	2	2	0	21,07
6_40_6_266	2	2	2	0	24,82
6_40_7_267	2	2	2	0	26,18
6_40_8_268	2	2	2	0	16,13
6_40_9_269	1	1	1	0	21,4
6_40_10_270	1	1	1	0	19,51
6_60_1_271	2	2	2	0	31,57
6_60_2_272	2	2	2	0	41,57
6_60_3_273	2	2	2	0	32,04
6_60_4_274	2	2	2	0	38,44
6_60_5_275	2	2	2	0	34,25
6_60_6_276	2	2	2	0	33,15
6_60_7_277	2	2	2	0	44,11
6_60_8_278	2	2	2	0	41,86
6_60_9_279	2	2	2	0	32,48
6_60_10_280	3	3	3	0	21,49
6_80_1_281	3	3	3	0	37,37
6_80_2_282	3	3	3	0	40,82
6_80_3_283	3	3	3	0	37,17
6_80_4_284	3	3	3	0	45,35
6_80_5_285	3	3	3	0	35,28
6_80_6_286	3	3	3	0	51,1
6_80_7_287	3	3	3	0	58,45
6_80_8_288	3	3	3	0	51,1
6_80_9_289	3	3	3	0	54,09
6_80_10_290	3	3	3	0	33,07

6_100_1_291	3	3	3	0	74,97
6_100_2_292	4	4	4	0	62,09
6_100_3_293	3	3	3	0	71,49
6_100_4_294	3	3	3	0	84,43
6_100_5_295	3	3	3	0	102,49
6_100_6_296	4	4	4	0	74,64
6_100_7_297	3	3	3	0	92,98
6_100_8_298	3	3	3	0	85,77
6_100_9_299	3	3	3	0	80,31
6_100_10_300	4	4	4	0	79,74
7_20_1_301	5	5	5	0	6,96
7_20_2_302	5	5	5	0	9,52
7_20_3_303	5	5	5	0	5,8
7_20_4_304	6	6	6	0	6,64
7_20_5_305	6	6	6	0	4,24
7_20_6_306	5	5	5	0	8,32
7_20_7_307	4	4	4	0	7,12
7_20_8_308	6	6	6	0	5,08
7_20_9_309	6	6	6	0	7,12
7_20_10_310	4	4	4	0	5,52
7_40_1_311	9	10	9,013	0,112	21,21
7_40_2_312	12	12	12	0	21,12
7_40_3_313	9	10	9,038	0,191	20,27
7_40_4_314	13	13	13	0	24,3
7_40_5_315	9	9	9	0	17,71
7_40_6_316	11	11	11	0	18,74
7_40_7_317	10	10	10	0	15,19
7_40_8_318	11	11	11	0	15,75
7_40_9_319	8	8	8	0	16,34
7_40_10_320	12	12	12	0	19,07
7_60_1_321	16	16	16	0	26,57
7_60_2_322	13	13	13	0	22,51
7_60_3_323	16	16	16	0	25,8
7_60_4_324	14	14	14	0	24,21
7_60_5_325	13	13	13	0	24,78
7_60_6_326	13	13	13	0	25,96
7_60_7_327	14	14	14	0	29,12

7_60_8_328	16	16	16	0	22,38
7_60_9_329	14	14	14	0	24,17
7_60_10_330	18	18	18	0	28,99
7_80_1_331	20	20	20	0	66,9
7_80_2_332	23	23	23	0	61,62
7_80_3_333	19	19	19	0	62,28
7_80_4_334	21	21	21	0	42,41
7_80_5_335	22	22	22	0	65,14
7_80_6_336	21	21	21	0	56,29
7_80_7_337	23	23	23	0	61,61
7_80_8_338	21	21	21	0	51,4
7_80_9_339	22	22	22	0	43,62
7_80_10_340	23	23	23	0	55,16
7_100_1_341	26	26	26	0	136,44
7_100_2_342	25	25	25	0	120,86
7_100_3_343	23	23	23	0	127,47
7_100_4_344	25	25	25	0	108,48
7_100_5_345	23	23	23	0	94,24
7_100_6_346	28	28	28	0	144,78
7_100_7_347	25	25	25	0	125,92
7_100_8_348	27	27	27	0	117,35
7_100_9_349	25	25	25	0	113,65
7_100_10_350	31	31	31	0	104,56
8_20_1_351	6	6	6	0	5,68
8_20_2_352	6	6	6	0	11,44
8_20_3_353	5	5	5	0	6,44
8_20_4_354	6	6	6	0	6,2
8_20_5_355	5	5	5	0	6,64
8_20_6_356	6	6	6	0	5,36
8_20_7_357	4	4	4	0	5,96
8_20_8_358	5	5	5	0	8,08
8_20_9_359	6	6	6	0	7,4
8_20_10_360	4	4	4	0	7,84
8_40_1_361	11	11	11	0	16,81
8_40_2_362	12	12	12	0	20,3
8_40_3_363	10	10	10	0	17,81
8_40_4_364	11	11	11	0	15,03

8_40_5_365	8	8	8	0	15,1
8_40_6_366	11	11	11	0	18,83
8_40_7_367	10	10	10	0	17,75
8_40_8_368	10	10	10	0	14,89
8_40_9_369	9	9	9	0	14,32
8_40_10_370	12	12	12	0	17,32
8_60_1_371	16	16	16	0	23,88
8_60_2_372	16	16	16	0	20,58
8_60_3_373	16	16	16	0	24,15
8_60_4_374	14	14	14	0	21,18
8_60_5_375	13	13	13	0	21,31
8_60_6_376	14	14	14	0	19,09
8_60_7_377	13	14	13,913	0,284	26,45
8_60_8_378	16	17	16,963	0,191	21,92
8_60_9_379	15	15	15	0	24,99
8_60_10_380	17	17	17	0	22,75
8_80_1_381	20	21	20,775	0,42	61,56
8_80_2_382	21	22	21,963	0,191	48,41
8_80_3_383	19	19	19	0	51,35
8_80_4_384	19	19	19	0	53,04
8_80_5_385	25	26	25,088	0,284	59,42
8_80_6_386	21	21	21	0	63,89
8_80_7_387	21	21	21	0	53,15
8_80_8_388	21	22	21,863	0,347	61,7
8_80_9_389	21	21	21	0	45,14
8_80_10_390	23	24	23,95	0,221	61,45
8_100_1_391	25	25	25	0	122,5
8_100_2_392	25	26	25,213	0,412	118,21
8_100_3_393	22	23	22,988	0,112	110,16
8_100_4_394	29	30	29,063	0,244	130,48
8_100_5_395	27	27	27	0	117,33
8_100_6_396	25	26	25,025	0,157	146,29
8_100_7_397	25	25	25	0	108,98
8_100_8_398	27	28	27,85	0,359	131,41
8_100_9_399	26	26	26	0	133,33
8_100_10_400	30	31	30,738	0,443	144,69
9_20_1_401	19	19	19	0	6,42

9_20_2_402	13	13	13	0	6,88
9_20_3_403	14	14	14	0	7,08
9_20_4_404	16	16	16	0	9,33
9_20_5_405	16	16	16	0	5,75
9_20_6_406	14	14	14	0	8,99
9_20_7_407	9	9	9	0	5,8
9_20_8_408	14	14	14	0	5,26
9_20_9_409	15	15	15	0	9,01
9_20_10_410	13	13	13	0	9,66
9_40_1_411	24	24	24	0	18,85
9_40_2_412	32	32	32	0	15,41
9_40_3_413	28	28	28	0	17,02
9_40_4_414	31	31	31	0	17,46
9_40_5_415	27	27	27	0	16,62
9_40_6_416	29	29	29	0	18,33
9_40_7_417	24	24	24	0	18,22
9_40_8_418	26	26	26	0	17,18
9_40_9_419	21	21	21	0	20,95
9_40_10_420	33	33	33	0	18,78
9_60_1_421	46	46	46	0	29,72
9_60_2_422	44	44	44	0	32,33
9_60_3_423	46	46	46	0	28,1
9_60_4_424	44	44	44	0	28,26
9_60_5_425	41	41	41	0	30,14
9_60_6_426	37	37	37	0	32,94
9_60_7_427	40	40	40	0	30,7
9_60_8_428	47	47	47	0	33,9
9_60_9_429	45	45	45	0	30,49
9_60_10_430	45	45	45	0	27
9_80_1_431	58	58	58	0	38,54
9_80_2_432	57	57	57	0	37,98
9_80_3_433	57	57	57	0	36,73
9_80_4_434	52	52	52	0	36,08
9_80_5_435	61	61	61	0	36,34
9_80_6_436	62	62	62	0	39,54
9_80_7_437	59	59	59	0	34,63
9_80_8_438	58	58	58	0	36,02

9_80_9_439	49	49	49	0	36,86
9_80_10_440	60	60	60	0	36,16
9_100_1_441	71	71	71	0	95,74
9_100_2_442	64	64	64	0	95,7
9_100_3_443	68	68	68	0	100,41
9_100_4_444	78	78	78	0	93,96
9_100_5_445	65	65	65	0	93,94
9_100_6_446	71	71	71	0	90,17
9_100_7_447	66	66	66	0	93,95
9_100_8_448	73	73	73	0	100,79
9_100_9_449	65	65	65	0	101
9_100_10_450	72	72	72	0	93,26
10_20_1_451	6	6	6	0	6,18
10_20_2_452	3	3	3	0	6,78
10_20_3_453	4	4	4	0	9,6
10_20_4_454	4	4	4	0	6,9
10_20_5_455	4	4	4	0	6,42
10_20_6_456	4	4	4	0	6,06
10_20_7_457	5	5	5	0	8,4
10_20_8_458	3	3	3	0	8,94
10_20_9_459	5	5	5	0	10,92
10_20_10_460	3	3	3	0	11,16
10_40_1_461	8	8	8	0	17,2
10_40_2_462	8	8	8	0	16,58
10_40_3_463	9	9	9	0	9,49
10_40_4_464	6	6	6	0	23,01
10_40_5_465	6	6	6	0	24,46
10_40_6_466	6	6	6	0	12,75
10_40_7_467	7	7	7	0	27,71
10_40_8_468	7	7	7	0	15,94
10_40_9_469	8	8	8	0	16,22
10_40_10_470	8	8	8	0	25,83
10_60_1_471	11	12	11,4	0,493	27,69
10_60_2_472	12	12	12	0	31,7
10_60_3_473	11	11	11	0	32,49
10_60_4_474	8	8	8	0	24,15
10_60_5_475	8	8	8	0	35,87

10_60_6_476	12	12	12	0	25,34
10_60_7_477	10	10	10	0	29,01
10_60_8_478	10	10	10	0	29,88
10_60_9_479	9	9	9	0	21,79
10_60_10_480	8	8	8	0	34,28
10_80_1_481	13	13	13	0	46,31
10_80_2_482	11	11	11	0	40,98
10_80_3_483	11	11	11	0	45,9
10_80_4_484	14	14	14	0	48,23
10_80_5_485	14	14	14	0	52,39
10_80_6_486	13	13	13	0	43,42
10_80_7_487	14	15	14,088	0,284	38,25
10_80_8_488	10	10	10	0	74,87
10_80_9_489	12	13	12,988	0,112	41,98
10_80_10_490	14	15	14,988	0,112	36,71
10_100_1_491	15	15	15	0	75,26
10_100_2_492	16	16	16	0	90,66
10_100_3_493	16	16	16	0	90,32
10_100_4_494	17	18	17,813	0,393	41,69
10_100_5_495	18	18	18	0	77,5
10_100_6_496	13	13	13	0	101,64
10_100_7_497	14	14	14	0	75,86
10_100_8_498	18	19	18,038	0,191	71,35
10_100_9_499	16	17	16,013	0,112	85,98
10_100_10_500	15	15	15	0	89,32
Total	7045	7068	7057,659	0,011966	33.79

APÊNDICE C – Resultados Totais do BRKGA

Instancia	Melhor	Pior	Media	Desvio Padrão	Tempo
1_20_1_1	7	7	7	0,00	1,68
1_20_2_2	5	5	5	0,00	1,04
1_20_3_3	7	7	7	0,00	2,18
1_20_4_4	5	5	5	0,00	2,00
1_20_5_5	6	6	6	0,00	2,52
1_20_6_6	9	9	9	0,00	1,55
1_20_7_7	6	6	6	0,00	1,07
1_20_8_8	6	6	6	0,00	1,55
1_20_9_9	7	7	7	0,00	2,06
1_20_10_10	8	8	8	0,00	1,70
1_40_1_11	10	10	10	0,00	3,36
1_40_2_12	12	12	12	0,00	5,76
1_40_3_13	15	15	15	0,00	6,68
1_40_4_14	14	14	14	0,00	4,58
1_40_5_15	15	15	15	0,00	3,44
1_40_6_16	14	14	14	0,00	6,08
1_40_7_17	11	11	11	0,00	4,59
1_40_8_18	17	17	17	0,00	5,03
1_40_9_19	11	11	11	0,00	6,84
1_40_10_20	11	11	11	0,00	5,66
1_60_1_21	22	22	22	0,00	0,53
1_60_2_22	19	19	19	0,00	8,55
1_60_3_23	21	21	21	0,00	2,30
1_60_4_24	22	22	22	0,00	9,14
1_60_5_25	17	17	17	0,00	9,95
1_60_6_26	17	18	17,12	0,32	10,98
1_60_7_27	15	16	15,16	0,37	8,21
1_60_8_28	21	21	21	0,00	9,78
1_60_9_29	18	18	18	0,00	9,86
1_60_10_30	24	24	24	0,00	9,02
1_80_1_31	24	24	24	0,00	13,86

1_80_2_32	25	26	25,04	0,20	14,88
1_80_3_33	27	27	27	0,00	13,68
1_80_4_34	26	26	26	0,00	6,83
1_80_5_35	26	26	26	0,00	1,82
1_80_6_36	28	28	28	0,00	11,36
1_80_7_37	31	31	31	0,00	10,70
1_80_8_38	29	29	29	0,00	1,61
1_80_9_39	30	30	30	0,00	17,13
1_80_10_40	25	25	25	0,00	15,18
1_100_1_41	28	29	28,18	0,38	18,14
1_100_2_42	32	32	32	0,00	21,12
1_100_3_43	28	28	28	0,00	21,08
1_100_4_44	30	30	30	0,00	24,12
1_100_5_45	31	32	31,04	0,20	21,89
1_100_6_46	36	36	36	0,00	19,98
1_100_7_47	28	29	28,18	0,38	19,85
1_100_8_48	33	33	33	0,00	6,98
1_100_9_49	31	32	31,06	0,24	19,55
1_100_10_50	38	38	38	0,00	1,76
2_20_1_51	1	1	1	0,00	1,41
2_20_2_52	1	1	1	0,00	1,82
2_20_3_53	1	1	1	0,00	1,38
2_20_4_54	1	1	1	0,00	1,35
2_20_5_55	1	1	1	0,00	1,65
2_20_6_56	1	1	1	0,00	1,34
2_20_7_57	1	1	1	0,00	1,02
2_20_8_58	1	1	1	0,00	2,52
2_20_9_59	1	1	1	0,00	1,47
2_20_10_60	1	1	1	0,00	1,08
2_40_1_61	2	2	2	0,00	2,34
2_40_2_62	2	2	2	0,00	2,63
2_40_3_63	2	2	2	0,00	5,84
2_40_4_64	2	2	2	0,00	2,97
2_40_5_65	2	2	2	0,00	1,76
2_40_6_66	2	2	2	0,00	5,10
2_40_7_67	2	2	2	0,00	4,58
2_40_8_68	2	2	2	0,00	5,85

2_40_9_69	2	2	2	0,00	2,49
2_40_10_70	2	2	2	0,00	4,71
2_60_1_71	3	3	3	0,00	7,08
2_60_2_72	2	3	2	0,00	7,70
2_60_3_73	3	3	3	0,00	1,82
2_60_4_74	3	3	3	0,00	6,95
2_60_5_75	2	2	2	0,00	10,76
2_60_6_76	2	2	2	0,00	9,11
2_60_7_77	2	2	2	0,00	8,37
2_60_8_78	3	3	3	0,00	6,50
2_60_9_79	2	2	2	0,00	11,97
2_60_10_80	3	3	3	0,00	8,49
2_80_1_81	3	3	3	0,00	14,45
2_80_2_82	3	3	3	0,00	12,95
2_80_3_83	3	3	3	0,00	14,76
2_80_4_84	3	3	3	0,00	15,05
2_80_5_85	3	3	3	0,00	15,00
2_80_6_86	3	3	3	0,00	14,57
2_80_7_87	4	4	4	0,00	7,61
2_80_8_88	3	3	3	0,00	11,94
2_80_9_89	4	4	4	0,00	8,49
2_80_10_90	3	3	3	0,00	15,87
2_100_1_91	4	4	4	0,00	13,34
2_100_2_92	4	4	4	0,00	19,80
2_100_3_93	3	4	3,06	0,24	12,20
2_100_4_94	4	4	4	0,00	19,10
2_100_5_95	4	4	4	0,00	14,01
2_100_6_96	4	4	4	0,00	27,84
2_100_7_97	4	4	4	0,00	15,56
2_100_8_98	4	4	4	0,00	14,60
2_100_9_99	4	4	4	0,00	18,86
2_100_10_100	4	4	4	0,00	20,51
3_20_1_101	5	5	5	0,00	2,72
3_20_2_102	3	3	3	0,00	1,94
3_20_3_103	5	5	5	0,00	2,79
3_20_4_104	4	4	4	0,00	2,87
3_20_5_105	4	4	4	0,00	2,27

3_20_6_106	6	6	6	0,00	1,62
3_20_7_107	4	4	4	0,00	0,74
3_20_8_108	4	4	4	0,00	0,12
3_20_9_109	5	5	5	0,00	2,52
3_20_10_110	7	7	7	0,00	0,05
3_40_1_111	7	7	7	0,00	5,52
3_40_2_112	8	8	8	0,00	9,14
3_40_3_113	11	11	11	0,00	0,75
3_40_4_114	10	10	10	0,00	2,21
3_40_5_115	12	12	12	0,00	0,36
3_40_6_116	10	10	10	0,00	0,09
3_40_7_117	8	8	8	0,00	9,38
3_40_8_118	13	13	13	0,00	0,11
3_40_9_119	8	8	8	0,00	9,62
3_40_10_120	8	8	8	0,00	6,02
3_60_1_121	16	16	16	0,00	16,28
3_60_2_122	13	13	13	0,00	19,88
3_60_3_123	14	14	14	0,00	17,84
3_60_4_124	14	15	14,14	0,35	11,06
3_60_5_125	12	12	12	0,00	17,72
3_60_6_126	13	13	13	0,00	14,52
3_60_7_127	11	11	11	0,00	15,69
3_60_8_128	15	15	15	0,00	18,48
3_60_9_129	13	13	13	0,00	17,15
3_60_10_130	17	17	17	0,00	14,88
3_80_1_131	17	17	17	0,00	28,26
3_80_2_132	18	18	18	0,00	28,37
3_80_3_133	17	18	17,24	0,43	26,64
3_80_4_134	18	18	18	0,00	25,47
3_80_5_135	17	18	17,04	0,20	29,54
3_80_6_136	19	20	19,02	0,14	27,36
3_80_7_137	20	21	20,06	0,24	31,28
3_80_8_138	21	21	21	0,00	22,05
3_80_9_139	22	22	22	0,00	25,43
3_80_10_140	18	18	18	0,00	23,85
3_100_1_141	20	20	20	0,00	45,68
3_100_2_142	23	24	23,18	0,38	46,55

3_100_3_143	19	20	19,02	0,14	31,73
3_100_4_144	21	21	21	0,00	41,93
3_100_5_145	23	23	23	0,00	43,95
3_100_6_146	26	26	26	0,00	42,83
3_100_7_147	20	20	20	0,00	31,94
3_100_8_148	23	23	23	0,00	39,38
3_100_9_149	22	22	22	0,00	36,18
3_100_10_150	29	29	29	0,00	1,07
4_20_1_151	1	1	1	0,00	2,21
4_20_2_152	1	1	1	0,00	1,94
4_20_3_153	1	1	1	0,00	3,33
4_20_4_154	1	1	1	0,00	3,11
4_20_5_155	1	1	1	0,00	2,40
4_20_6_156	1	1	1	0,00	3,51
4_20_7_157	1	1	1	0,00	2,66
4_20_8_158	1	1	1	0,00	2,06
4_20_9_159	1	1	1	0,00	2,57
4_20_10_160	1	1	1	0,00	2,03
4_40_1_161	1	1	1	0,00	8,07
4_40_2_162	2	2	2	0,00	8,03
4_40_3_163	2	2	2	0,00	7,58
4_40_4_164	2	2	2	0,00	6,92
4_40_5_165	2	2	2	0,00	6,56
4_40_6_166	2	2	2	0,00	3,65
4_40_7_167	2	2	2	0,00	6,03
4_40_8_168	2	2	2	0,00	6,98
4_40_9_169	2	2	2	0,00	7,13
4_40_10_170	2	2	2	0,00	5,69
4_60_1_171	3	3	3	0,00	10,05
4_60_2_172	2	2	2	0,00	15,24
4_60_3_173	3	3	3	0,00	14,31
4_60_4_174	3	3	3	0,00	8,70
4_60_5_175	2	2	2	0,00	13,64
4_60_6_176	2	2	2	0,00	16,52
4_60_7_177	2	2	2	0,00	11,63
4_60_8_178	3	3	3	0,00	9,53
4_60_9_179	2	2	2	0,00	16,01

4_60_10_180	3	3	3	0,00	16,70
4_80_1_181	3	3	3	0,00	25,88
4_80_2_182	3	3	3	0,00	27,21
4_80_3_183	3	3	3	0,00	22,68
4_80_4_184	3	3	3	0,00	24,81
4_80_5_185	3	3	3	0,00	24,14
4_80_6_186	3	3	3	0,00	24,27
4_80_7_187	4	4	4	0,00	15,75
4_80_8_188	4	4	4	0,00	11,40
4_80_9_189	4	4	4	0,00	22,73
4_80_10_190	3	3	3	0,00	22,07
4_100_1_191	4	4	4	0,00	24,51
4_100_2_192	4	4	4	0,00	33,99
4_100_3_193	3	3	3	0,00	32,21
4_100_4_194	4	4	4	0,00	29,99
4_100_5_195	4	4	4	0,00	32,07
4_100_6_196	4	4	4	0,00	39,68
4_100_7_197	4	4	4	0,00	26,01
4_100_8_198	4	4	4	0,00	32,88
4_100_9_199	4	4	4	0,00	33,24
4_100_10_200	4	4	4	0,00	33,60
5_20_1_201	7	7	7	0,00	0,05
5_20_2_202	4	4	4	0,00	2,91
5_20_3_203	7	7	7	0,00	2,61
5_20_4_204	5	5	5	0,00	2,93
5_20_5_205	5	5	5	0,00	3,03
5_20_6_206	8	8	8	0,00	0,05
5_20_7_207	5	5	5	0,00	2,45
5_20_8_208	5	5	5	0,00	3,21
5_20_9_209	6	6	6	0,00	2,42
5_20_10_210	7	7	7	0,00	0,14
5_40_1_211	8	8	8	0,00	8,09
5_40_2_212	10	10	10	0,00	10,28
5_40_3_213	14	14	14	0,00	0,12
5_40_4_214	12	12	12	0,00	1,61
5_40_5_215	13	14	13,06	0,24	9,05
5_40_6_216	12	12	12	0,00	0,11

5_40_7_217	10	10	10	0,00	9,83
5_40_8_218	16	16	16	0,00	0,12
5_40_9_219	10	10	10	0,00	9,06
5_40_10_220	10	10	10	0,00	8,03
5_60_1_221	20	20	20	0,00	14,88
5_60_2_222	16	16	16	0,00	20,16
5_60_3_223	18	18	18	0,00	20,45
5_60_4_224	19	19	19	0,00	0,48
5_60_5_225	15	15	15	0,00	21,68
5_60_6_226	16	16	16	0,00	20,27
5_60_7_227	14	14	14	0,00	21,38
5_60_8_228	18	18	18	0,00	21,60
5_60_9_229	16	16	16	0,00	22,70
5_60_10_230	23	23	23	0,00	0,21
5_80_1_231	22	22	22	0,00	22,55
5_80_2_232	23	23	23	0,00	35,04
5_80_3_233	24	24	24	0,00	0,87
5_80_4_234	23	23	23	0,00	33,42
5_80_5_235	22	23	22,08	0,27	30,09
5_80_6_236	25	25	25	0,00	19,65
5_80_7_237	26	26	26	0,00	26,30
5_80_8_238	26	26	26	0,00	25,14
5_80_9_239	27	27	27	0,00	33,21
5_80_10_240	23	23	23	0,00	29,04
5_100_1_241	25	25	25	0,00	46,97
5_100_2_242	29	29	29	0,00	54,41
5_100_3_243	24	24	24	0,00	51,83
5_100_4_244	27	27	27	0,00	49,68
5_100_5_245	29	29	29	0,00	45,45
5_100_6_246	33	33	33	0,00	10,28
5_100_7_247	25	25	25	0,00	45,66
5_100_8_248	29	30	29,1	0,30	27,47
5_100_9_249	27	28	27,02	0,14	50,84
5_100_10_250	35	35	35	0,00	0,72
6_20_1_251	1	1	1	0,00	2,90
6_20_2_252	1	1	1	0,00	1,19
6_20_3_253	1	1	1	0,00	2,57

6_20_4_254	1	1	1	0,00	2,40
6_20_5_255	1	1	1	0,00	2,51
6_20_6_256	1	1	1	0,00	3,20
6_20_7_257	1	1	1	0,00	0,36
6_20_8_258	1	1	1	0,00	2,57
6_20_9_259	1	1	1	0,00	3,30
6_20_10_260	1	1	1	0,00	2,55
6_40_1_261	1	1	1	0,00	8,46
6_40_2_262	2	2	2	0,00	9,60
6_40_3_263	2	2	2	0,00	7,95
6_40_4_264	2	2	2	0,00	5,09
6_40_5_265	2	2	2	0,00	6,06
6_40_6_266	2	2	2	0,00	8,30
6_40_7_267	2	2	2	0,00	7,46
6_40_8_268	2	2	2	0,00	7,79
6_40_9_269	1	2	1,18	0,38	7,56
6_40_10_270	2	2	2	0,00	7,04
6_60_1_271	3	3	3	0,00	9,42
6_60_2_272	2	2	2	0,00	16,58
6_60_3_273	2	2	2	0,00	18,27
6_60_4_274	2	2	2	0,00	15,65
6_60_5_275	2	2	2	0,00	16,08
6_60_6_276	2	2	2	0,00	13,38
6_60_7_277	2	2	2	0,00	17,34
6_60_8_278	2	2	2	0,00	19,55
6_60_9_279	2	2	2	0,00	17,21
6_60_10_280	3	3	3	0,00	14,91
6_80_1_281	3	3	3	0,00	26,45
6_80_2_282	3	3	3	0,00	28,89
6_80_3_283	3	3	3	0,00	28,08
6_80_4_284	3	3	3	0,00	26,00
6_80_5_285	3	3	3	0,00	26,15
6_80_6_286	3	3	3	0,00	26,46
6_80_7_287	3	3	3	0,00	26,48
6_80_8_288	3	3	3	0,00	28,56
6_80_9_289	3	3	3	0,00	27,09
6_80_10_290	3	3	3	0,00	29,49

6_100_1_291	3	3	3	0,00	42,68
6_100_2_292	4	4	4	0,00	43,20
6_100_3_293	3	3	3	0,00	45,77
6_100_4_294	3	3	3	0,00	40,82
6_100_5_295	4	4	4	0,00	36,11
6_100_6_296	4	4	4	0,00	39,05
6_100_7_297	3	3	3	0,00	44,30
6_100_8_298	4	4	4	0,00	33,26
6_100_9_299	3	3	3	0,00	45,50
6_100_10_300	4	4	4	0,00	41,97
7_20_1_301	5	5	5	0,00	3,48
7_20_2_302	5	5	5	0,00	2,72
7_20_3_303	5	5	5	0,00	1,82
7_20_4_304	6	6	6	0,00	2,52
7_20_5_305	6	6	6	0,00	1,29
7_20_6_306	5	5	5	0,00	2,52
7_20_7_307	4	4	4	0,00	2,90
7_20_8_308	6	6	6	0,00	2,99
7_20_9_309	6	6	6	0,00	2,79
7_20_10_310	4	4	4	0,00	3,59
7_40_1_311	9	10	9,2	0,40	10,08
7_40_2_312	12	12	12	0,00	8,97
7_40_3_313	9	10	9,24	0,43	7,89
7_40_4_314	13	13	13	0,00	9,57
7_40_5_315	9	10	9,14	0,35	9,98
7_40_6_316	11	11	11	0,00	9,72
7_40_7_317	11	11	11	0,00	8,16
7_40_8_318	11	11	11	0,00	7,37
7_40_9_319	8	8	8	0,00	7,70
7_40_10_320	12	12	12	0,00	8,21
7_60_1_321	17	17	17	0,00	17,76
7_60_2_322	14	14	14	0,00	18,03
7_60_3_323	16	16	16	0,00	15,05
7_60_4_324	15	15	15	0,00	18,03
7_60_5_325	14	14	14	0,00	19,35
7_60_6_326	14	14	14	0,00	17,34
7_60_7_327	14	15	14,02	0,14	15,33

7_60_8_328	17	17	17	0,00	16,77
7_60_9_329	14	15	14	0,00	14,49
7_60_10_330	19	20	19,18	0,38	14,79
7_80_1_331	21	21	21	0,00	29,37
7_80_2_332	24	25	24,06	0,24	26,99
7_80_3_333	20	20	20	0,00	31,49
7_80_4_334	22	22	22	0,00	27,06
7_80_5_335	22	23	22,08	0,27	25,92
7_80_6_336	22	22	22	0,00	23,45
7_80_7_337	24	24	24	0,00	28,61
7_80_8_338	22	22	22	0,00	29,16
7_80_9_339	23	23	23	0,00	26,37
7_80_10_340	23	24	23,2	0,40	27,81
7_100_1_341	27	27	27	0,00	28,56
7_100_2_342	27	27	27	0,00	40,07
7_100_3_343	24	24	24	0,00	45,11
7_100_4_344	26	26	26	0,00	39,05
7_100_5_345	24	24	24	0,00	30,60
7_100_6_346	29	30	29,1	0,30	40,73
7_100_7_347	26	26	26	0,00	41,63
7_100_8_348	28	28	28	0,00	47,51
7_100_9_349	25	26	25,2	0,40	37,02
7_100_10_350	31	32	31	0,00	48,18
8_20_1_351	6	6	6	0,00	2,15
8_20_2_352	6	6	6	0,00	3,06
8_20_3_353	5	5	5	0,00	3,02
8_20_4_354	6	6	6	0,00	3,42
8_20_5_355	5	5	5	0,00	3,17
8_20_6_356	6	6	6	0,00	2,31
8_20_7_357	4	4	4	0,00	3,08
8_20_8_358	5	5	5	0,00	4,14
8_20_9_359	6	6	6	0,00	2,33
8_20_10_360	4	4	4	0,00	2,22
8_40_1_361	11	11	11	0,00	6,45
8_40_2_362	12	13	12,1	0,30	10,40
8_40_3_363	10	10	10	0,00	7,55
8_40_4_364	11	11	11	0,00	10,19

8_40_5_365	8	9	8,18	0,38	7,74
8_40_6_366	11	11	11	0,00	7,95
8_40_7_367	10	11	10,24	0,43	10,92
8_40_8_368	11	11	11	0,00	9,59
8_40_9_369	9	9	9	0,00	10,40
8_40_10_370	12	12	12	0,00	10,16
8_60_1_371	17	17	17	0,00	18,60
8_60_2_372	16	17	16,18	0,38	19,91
8_60_3_373	16	16	16	0,00	19,02
8_60_4_374	14	15	14,08	0,27	16,14
8_60_5_375	14	14	14	0,00	19,92
8_60_6_376	15	15	15	0,00	18,80
8_60_7_377	14	14	14	0,00	17,13
8_60_8_378	17	17	17	0,00	22,40
8_60_9_379	16	16	16	0,00	15,92
8_60_10_380	17	18	17,14	0,35	14,67
8_80_1_381	21	22	21,06	0,24	22,10
8_80_2_382	22	23	22,08	0,27	29,70
8_80_3_383	20	20	20	0,00	29,39
8_80_4_384	20	20	20	0,00	31,02
8_80_5_385	26	26	26	0,00	30,38
8_80_6_386	21	22	21,16	0,37	31,13
8_80_7_387	21	22	21,04	0,20	29,28
8_80_8_388	22	22	22	0,00	31,07
8_80_9_389	21	21	21	0,00	33,96
8_80_10_390	24	25	24,1	0,30	35,48
8_100_1_391	26	26	26	0,00	37,86
8_100_2_392	26	26	26	0,00	44,79
8_100_3_393	23	24	23,1	0,30	33,83
8_100_4_394	30	30	30	0,00	43,50
8_100_5_395	28	28	28	0,00	44,73
8_100_6_396	26	26	26	0,00	39,33
8_100_7_397	26	26	26	0,00	50,15
8_100_8_398	28	29	28,2	0,40	46,83
8_100_9_399	27	27	27	0,00	36,90
8_100_10_400	31	32	31,28	0,45	46,53
9_20_1_401	19	19	19	0,00	0,06

9_20_2_402	13	13	13	0,00	0,05
9_20_3_403	14	14	14	0,00	0,06
9_20_4_404	16	16	16	0,00	0,06
9_20_5_405	16	16	16	0,00	0,05
9_20_6_406	14	14	14	0,00	0,06
9_20_7_407	9	9	9	0,00	0,05
9_20_8_408	14	14	14	0,00	0,06
9_20_9_409	15	15	15	0,00	0,06
9_20_10_410	13	13	13	0,00	0,05
9_40_1_411	24	24	24	0,00	0,12
9_40_2_412	32	32	32	0,00	0,14
9_40_3_413	28	28	28	0,00	0,12
9_40_4_414	31	31	31	0,00	0,14
9_40_5_415	27	27	27	0,00	0,12
9_40_6_416	29	29	29	0,00	0,12
9_40_7_417	24	24	24	0,00	0,12
9_40_8_418	26	26	26	0,00	0,12
9_40_9_419	21	21	21	0,00	0,12
9_40_10_420	33	33	33	0,00	0,14
9_60_1_421	46	46	46	0,00	0,24
9_60_2_422	44	44	44	0,00	0,24
9_60_3_423	46	46	46	0,00	0,24
9_60_4_424	44	44	44	0,00	0,23
9_60_5_425	41	41	41	0,00	0,21
9_60_6_426	37	37	37	0,00	0,21
9_60_7_427	40	40	40	0,00	0,23
9_60_8_428	47	47	47	0,00	0,24
9_60_9_429	45	45	45	0,00	0,23
9_60_10_430	45	45	45	0,00	0,24
9_80_1_431	58	58	58	0,00	0,38
9_80_2_432	57	57	57	0,00	0,38
9_80_3_433	57	57	57	0,00	0,36
9_80_4_434	52	52	52	0,00	0,33
9_80_5_435	61	61	61	0,00	0,38
9_80_6_436	62	62	62	0,00	0,38
9_80_7_437	59	59	59	0,00	0,36
9_80_8_438	58	58	58	0,00	0,35

9_80_9_439	49	49	49	0,00	0,33
9_80_10_440	60	60	60	0,00	0,38
9_100_1_441	71	71	71	0,00	0,56
9_100_2_442	64	64	64	0,00	0,50
9_100_3_443	68	68	68	0,00	0,51
9_100_4_444	78	78	78	0,00	0,59
9_100_5_445	65	65	65	0,00	0,53
9_100_6_446	71	71	71	0,00	0,56
9_100_7_447	66	66	66	0,00	0,54
9_100_8_448	73	73	73	0,00	0,57
9_100_9_449	65	65	65	0,00	0,53
9_100_10_450	72	72	72	0,00	0,59
10_20_1_451	6	6	6	0,00	0,05
10_20_2_452	3	3	3	0,00	2,76
10_20_3_453	4	4	4	0,00	0,50
10_20_4_454	4	4	4	0,00	0,12
10_20_5_455	4	4	4	0,00	0,08
10_20_6_456	4	4	4	0,00	2,24
10_20_7_457	5	5	5	0,00	1,77
10_20_8_458	3	3	3	0,00	0,35
10_20_9_459	5	5	5	0,00	2,54
10_20_10_460	3	3	3	0,00	2,21
10_40_1_461	8	8	8	0,00	7,97
10_40_2_462	8	8	8	0,00	5,15
10_40_3_463	9	9	9	0,00	9,11
10_40_4_464	6	6	6	0,00	9,03
10_40_5_465	6	6	6	0,00	8,79
10_40_6_466	6	6	6	0,00	6,59
10_40_7_467	7	7	7	0,00	10,19
10_40_8_468	7	7	7	0,00	10,10
10_40_9_469	8	8	8	0,00	7,26
10_40_10_470	8	8	8	0,00	10,50
10_60_1_471	12	12	12	0,00	16,83
10_60_2_472	12	12	12	0,00	19,29
10_60_3_473	11	12	11,12	0,32	14,48
10_60_4_474	8	8	8	0,00	17,12
10_60_5_475	8	8	8	0,00	16,31

10_60_6_476	12	12	12	0,00	22,14
10_60_7_477	10	10	10	0,00	18,75
10_60_8_478	10	10	10	0,00	17,34
10_60_9_479	9	9	9	0,00	14,99
10_60_10_480	8	8	8	0,00	18,26
10_80_1_481	13	13	13	0,00	30,57
10_80_2_482	11	11	11	0,00	26,63
10_80_3_483	11	11	11	0,00	29,42
10_80_4_484	14	14	14	0,00	33,15
10_80_5_485	14	14	14	0,00	30,84
10_80_6_486	14	14	14	0,00	30,47
10_80_7_487	15	15	15	0,00	31,20
10_80_8_488	10	11	10	0,00	28,62
10_80_9_489	13	13	13	0,00	27,38
10_80_10_490	15	15	15	0,00	28,65
10_100_1_491	15	15	15	0,00	41,75
10_100_2_492	16	16	16	0,00	44,60
10_100_3_493	16	16	16	0,00	42,05
10_100_4_494	18	18	18	0,00	42,32
10_100_5_495	18	18	18	0,00	36,95
10_100_6_496	13	14	13	0,00	37,35
10_100_7_497	14	14	14	0,00	44,42
10_100_8_498	19	19	19	0,00	42,81
10_100_9_499	17	17	17	0,00	43,94
10_100_10_500	16	16	16	0,00	40,98
Total	7140	7190	7145,46	0,03	14,59

APÊNDICE D – Resultados Totais do BRKGA-Learning

Instancia	Melhor	Pior	Media	Desvio Padrão	Tempo
1_20_1_1	7	7	7	0,00	3,36
1_20_2_2	5	5	5	0,00	2,07
1_20_3_3	7	7	7	0,00	4,35
1_20_4_4	5	5	5	0,00	3,99
1_20_5_5	6	6	6	0,00	5,04
1_20_6_6	9	9	9	0,00	3,09
1_20_7_7	6	6	6	0,00	2,13
1_20_8_8	6	6	6	0,00	3,09
1_20_9_9	7	7	7	0,00	4,11
1_20_10_10	8	8	8	0,00	3,39
1_40_1_11	10	10	10	0,00	6,72
1_40_2_12	11	11	11	0,00	11,52
1_40_3_13	15	15	15	0,00	13,35
1_40_4_14	14	14	14	0,00	9,15
1_40_5_15	15	15	15	0,00	6,87
1_40_6_16	14	14	14	0,00	12,15
1_40_7_17	11	11	11	0,00	9,18
1_40_8_18	17	17	17	0,00	10,05
1_40_9_19	11	11	11	0,00	13,68
1_40_10_20	11	11	11	0,00	11,31
1_60_1_21	22	22	22	0,00	1,05
1_60_2_22	18	18	18	0,00	17,10
1_60_3_23	21	21	21	0,00	4,59
1_60_4_24	22	22	22	0,00	18,27
1_60_5_25	17	17	17	0,00	19,89
1_60_6_26	17	17	17	0,00	21,96
1_60_7_27	15	15	15	0,00	16,41
1_60_8_28	21	21	21	0,00	19,56
1_60_9_29	18	18	18	0,00	19,71
1_60_10_30	24	24	24	0,00	18,03
1_80_1_31	24	24	24	0,00	27,72

1_80_2_32	25	25	25	0,00	29,76
1_80_3_33	27	27	27	0,00	27,36
1_80_4_34	26	26	26	0,00	13,65
1_80_5_35	26	26	26	0,00	3,63
1_80_6_36	28	28	28	0,00	22,71
1_80_7_37	31	31	31	0,00	21,39
1_80_8_38	29	29	29	0,00	3,21
1_80_9_39	29	29	29	0,00	34,26
1_80_10_40	25	25	25	0,00	30,36
1_100_1_41	28	28	28	0,00	36,27
1_100_2_42	31	31	31	0,00	42,24
1_100_3_43	27	27	27	0,00	42,15
1_100_4_44	30	30	30	0,00	48,24
1_100_5_45	31	31	31	0,00	43,77
1_100_6_46	36	36	36	0,00	39,96
1_100_7_47	28	28	28	0,00	39,69
1_100_8_48	33	33	33	0,00	13,95
1_100_9_49	31	31	31	0,00	39,09
1_100_10_50	38	38	38	0,00	3,51
2_20_1_51	1	1	1	0,00	2,82
2_20_2_52	1	1	1	0,00	3,63
2_20_3_53	1	1	1	0,00	2,76
2_20_4_54	1	1	1	0,00	2,70
2_20_5_55	1	1	1	0,00	3,30
2_20_6_56	1	1	1	0,00	2,67
2_20_7_57	1	1	1	0,00	2,04
2_20_8_58	1	1	1	0,00	5,04
2_20_9_59	1	1	1	0,00	2,94
2_20_10_60	1	1	1	0,00	2,16
2_40_1_61	1	1	1	0,00	4,68
2_40_2_62	2	2	2	0,00	5,25
2_40_3_63	2	2	2	0,00	11,67
2_40_4_64	2	2	2	0,00	5,94
2_40_5_65	2	2	2	0,00	3,51
2_40_6_66	2	2	2	0,00	10,20
2_40_7_67	2	2	2	0,00	9,15
2_40_8_68	2	2	2	0,00	11,70

2_40_9_69	2	2	2	0,00	4,98
2_40_10_70	2	2	2	0,00	9,42
2_60_1_71	3	3	3	0,00	14,16
2_60_2_72	2	2	2	0,00	15,39
2_60_3_73	3	3	3	0,00	3,63
2_60_4_74	3	3	3	0,00	13,89
2_60_5_75	2	2	2	0,00	21,51
2_60_6_76	2	2	2	0,00	18,21
2_60_7_77	2	2	2	0,00	16,74
2_60_8_78	3	3	3	0,00	12,99
2_60_9_79	2	2	2	0,00	23,94
2_60_10_80	3	3	3	0,00	16,98
2_80_1_81	3	3	3	0,00	28,89
2_80_2_82	3	3	3	0,00	25,89
2_80_3_83	3	3	3	0,00	29,52
2_80_4_84	3	3	3	0,00	30,09
2_80_5_85	3	3	3	0,00	30,00
2_80_6_86	3	3	3	0,00	29,13
2_80_7_87	3	3	3	0,00	15,21
2_80_8_88	3	3	3	0,00	23,88
2_80_9_89	4	4	4	0,00	16,98
2_80_10_90	3	3	3	0,00	31,74
2_100_1_91	4	4	4	0,00	26,67
2_100_2_92	4	4	4	0,00	39,60
2_100_3_93	3	3	3	0,00	24,39
2_100_4_94	4	4	4	0,00	38,19
2_100_5_95	4	4	4	0,00	28,02
2_100_6_96	4	4	4	0,00	55,68
2_100_7_97	4	4	4	0,00	31,11
2_100_8_98	4	4	4	0,00	29,19
2_100_9_99	4	4	4	0,00	37,71
2_100_10_100	4	4	4	0,00	41,01
3_20_1_101	5	5	5	0,00	5,43
3_20_2_102	3	3	3	0,00	3,87
3_20_3_103	5	5	5	0,00	5,58
3_20_4_104	4	4	4	0,00	5,73
3_20_5_105	4	4	4	0,00	4,53

3_20_6_106	6	6	6	0,00	3,24
3_20_7_107	4	4	4	0,00	1,47
3_20_8_108	4	4	4	0,00	0,24
3_20_9_109	5	5	5	0,00	5,04
3_20_10_110	7	7	7	0,00	0,09
3_40_1_111	6	6	6	0,00	11,04
3_40_2_112	8	8	8	0,00	18,27
3_40_3_113	11	11	11	0,00	1,50
3_40_4_114	10	10	10	0,00	4,41
3_40_5_115	12	12	12	0,00	0,72
3_40_6_116	10	10	10	0,00	0,18
3_40_7_117	8	8	8	0,00	18,75
3_40_8_118	13	13	13	0,00	0,21
3_40_9_119	8	8	8	0,00	19,23
3_40_10_120	8	8	8	0,00	12,03
3_60_1_121	16	16	16	0,00	32,55
3_60_2_122	12	12	12	0,00	39,75
3_60_3_123	13	13	13	0,00	35,67
3_60_4_124	14	14	14	0,00	22,11
3_60_5_125	12	12	12	0,00	35,43
3_60_6_126	12	12	12	0,00	29,04
3_60_7_127	11	11	11	0,00	31,38
3_60_8_128	14	14	14	0,00	36,96
3_60_9_129	13	13	13	0,00	34,29
3_60_10_130	17	17	17	0,00	29,76
3_80_1_131	16	16	16	0,00	56,52
3_80_2_132	17	17	17	0,00	56,73
3_80_3_133	17	17	17	0,00	53,28
3_80_4_134	18	18	18	0,00	50,94
3_80_5_135	17	17	17	0,00	59,07
3_80_6_136	19	19	19	0,00	54,72
3_80_7_137	20	20	20	0,00	62,55
3_80_8_138	21	21	21	0,00	44,10
3_80_9_139	21	21	21	0,00	50,85
3_80_10_140	18	18	18	0,00	47,70
3_100_1_141	19	19	19	0,00	91,35
3_100_2_142	22	22	22	0,00	93,09

3_100_3_143	19	19	19	0,00	63,45
3_100_4_144	20	20	20	0,00	83,85
3_100_5_145	22	22	22	0,00	87,90
3_100_6_146	26	26	26	0,00	85,65
3_100_7_147	20	20	20	0,00	63,87
3_100_8_148	22	22	22	0,00	78,75
3_100_9_149	22	22	22	0,00	72,36
3_100_10_150	29	29	29	0,00	2,13
4_20_1_151	1	1	1	0,00	4,41
4_20_2_152	1	1	1	0,00	3,87
4_20_3_153	1	1	1	0,00	6,66
4_20_4_154	1	1	1	0,00	6,21
4_20_5_155	1	1	1	0,00	4,80
4_20_6_156	1	1	1	0,00	7,02
4_20_7_157	1	1	1	0,00	5,31
4_20_8_158	1	1	1	0,00	4,11
4_20_9_159	1	1	1	0,00	5,13
4_20_10_160	1	1	1	0,00	4,05
4_40_1_161	1	1	1	0,00	16,14
4_40_2_162	2	2	2	0,00	16,05
4_40_3_163	2	2	2	0,00	15,15
4_40_4_164	2	2	2	0,00	13,83
4_40_5_165	2	2	2	0,00	13,11
4_40_6_166	2	2	2	0,00	7,29
4_40_7_167	2	2	2	0,00	12,06
4_40_8_168	2	2	2	0,00	13,95
4_40_9_169	2	2	2	0,00	14,25
4_40_10_170	2	2	2	0,00	11,37
4_60_1_171	3	3	3	0,00	20,10
4_60_2_172	2	2	2	0,00	30,48
4_60_3_173	3	3	3	0,00	28,62
4_60_4_174	3	3	3	0,00	17,40
4_60_5_175	2	2	2	0,00	27,27
4_60_6_176	2	2	2	0,00	33,03
4_60_7_177	2	2	2	0,00	23,25
4_60_8_178	3	3	3	0,00	19,05
4_60_9_179	2	2	2	0,00	32,01

4_60_10_180	3	3	3	0,00	33,39
4_80_1_181	3	3	3	0,00	51,75
4_80_2_182	3	3	3	0,00	54,42
4_80_3_183	3	3	3	0,00	45,36
4_80_4_184	3	3	3	0,00	49,62
4_80_5_185	3	3	3	0,00	48,27
4_80_6_186	3	3	3	0,00	48,54
4_80_7_187	3	3	3	0,00	31,50
4_80_8_188	3	3	3	0,00	22,80
4_80_9_189	4	4	4	0,00	45,45
4_80_10_190	3	3	3	0,00	44,13
4_100_1_191	3	3	3	0,00	49,02
4_100_2_192	4	4	4	0,00	67,98
4_100_3_193	3	3	3	0,00	64,41
4_100_4_194	4	4	4	0,00	59,97
4_100_5_195	4	4	4	0,00	64,14
4_100_6_196	4	4	4	0,00	79,35
4_100_7_197	3	3	3	0,00	52,02
4_100_8_198	4	4	4	0,00	65,76
4_100_9_199	4	4	4	0,00	66,48
4_100_10_200	4	4	4	0,00	67,20
5_20_1_201	7	7	7	0,00	0,09
5_20_2_202	4	4	4	0,00	5,82
5_20_3_203	7	7	7	0,00	5,22
5_20_4_204	5	5	5	0,00	5,85
5_20_5_205	5	5	5	0,00	6,06
5_20_6_206	8	8	8	0,00	0,09
5_20_7_207	5	5	5	0,00	4,89
5_20_8_208	5	5	5	0,00	6,42
5_20_9_209	6	6	6	0,00	4,83
5_20_10_210	7	7	7	0,00	0,27
5_40_1_211	8	8	8	0,00	16,17
5_40_2_212	10	10	10	0,00	20,55
5_40_3_213	14	14	14	0,00	0,24
5_40_4_214	12	12	12	0,00	3,21
5_40_5_215	13	13	13	0,00	18,09
5_40_6_216	12	12	12	0,00	0,21

5_40_7_217	10	10	10	0,00	19,65
5_40_8_218	16	16	16	0,00	0,24
5_40_9_219	10	10	10	0,00	18,12
5_40_10_220	10	10	10	0,00	16,05
5_60_1_221	20	20	20	0,00	29,76
5_60_2_222	16	16	16	0,00	40,32
5_60_3_223	18	18	18	0,00	40,89
5_60_4_224	19	19	19	0,00	0,96
5_60_5_225	15	15	15	0,00	43,35
5_60_6_226	15	15	15	0,00	40,53
5_60_7_227	14	14	14	0,00	42,75
5_60_8_228	18	18	18	0,00	43,20
5_60_9_229	16	16	16	0,00	45,39
5_60_10_230	23	23	23	0,00	0,42
5_80_1_231	22	22	22	0,00	45,09
5_80_2_232	22	22	22	0,00	70,08
5_80_3_233	24	24	24	0,00	1,74
5_80_4_234	23	23	23	0,00	66,84
5_80_5_235	22	22	22	0,00	60,18
5_80_6_236	25	25	25	0,00	39,30
5_80_7_237	26	26	26	0,00	52,59
5_80_8_238	26	26	26	0,00	50,28
5_80_9_239	27	27	27	0,00	66,42
5_80_10_240	22	22	22	0,00	58,08
5_100_1_241	24	24	24	0,00	93,93
5_100_2_242	28	28	28	0,00	108,81
5_100_3_243	24	24	24	0,00	103,65
5_100_4_244	26	26	26	0,00	99,36
5_100_5_245	28	28	28	0,00	90,90
5_100_6_246	33	33	33	0,00	20,55
5_100_7_247	25	25	25	0,00	91,32
5_100_8_248	29	29	29	0,00	54,93
5_100_9_249	27	27	27	0,00	101,67
5_100_10_250	35	35	35	0,00	1,44
6_20_1_251	1	1	1	0,00	5,79
6_20_2_252	1	1	1	0,00	2,37
6_20_3_253	1	1	1	0,00	5,13

6_20_4_254	1	1	1	0,00	4,80
6_20_5_255	1	1	1	0,00	5,01
6_20_6_256	1	1	1	0,00	6,39
6_20_7_257	1	1	1	0,00	0,72
6_20_8_258	1	1	1	0,00	5,13
6_20_9_259	1	1	1	0,00	6,60
6_20_10_260	1	1	1	0,00	5,10
6_40_1_261	1	1	1	0,00	16,92
6_40_2_262	2	2	2	0,00	19,20
6_40_3_263	2	2	2	0,00	15,90
6_40_4_264	2	2	2	0,00	10,17
6_40_5_265	2	2	2	0,00	12,12
6_40_6_266	2	2	2	0,00	16,59
6_40_7_267	2	2	2	0,00	14,91
6_40_8_268	2	2	2	0,00	15,57
6_40_9_269	1	1	1	0,00	15,12
6_40_10_270	1	1	1	0,00	14,07
6_60_1_271	2	2	2	0,00	18,84
6_60_2_272	2	2	2	0,00	33,15
6_60_3_273	2	2	2	0,00	36,54
6_60_4_274	2	2	2	0,00	31,29
6_60_5_275	2	2	2	0,00	32,16
6_60_6_276	2	2	2	0,00	26,76
6_60_7_277	2	2	2	0,00	34,68
6_60_8_278	2	2	2	0,00	39,09
6_60_9_279	2	2	2	0,00	34,41
6_60_10_280	3	3	3	0,00	29,82
6_80_1_281	3	3	3	0,00	52,89
6_80_2_282	3	3	3	0,00	57,78
6_80_3_283	3	3	3	0,00	56,16
6_80_4_284	3	3	3	0,00	51,99
6_80_5_285	3	3	3	0,00	52,29
6_80_6_286	3	3	3	0,00	52,92
6_80_7_287	3	3	3	0,00	52,95
6_80_8_288	3	3	3	0,00	57,12
6_80_9_289	3	3	3	0,00	54,18
6_80_10_290	3	3	3	0,00	58,98

6_100_1_291	3	3	3	0,00	85,35
6_100_2_292	4	4	4	0,00	86,40
6_100_3_293	3	3	3	0,00	91,53
6_100_4_294	3	3	3	0,00	81,63
6_100_5_295	3	3	3	0,00	72,21
6_100_6_296	4	4	4	0,00	78,09
6_100_7_297	3	3	3	0,00	88,59
6_100_8_298	3	3	3	0,00	66,51
6_100_9_299	3	3	3	0,00	90,99
6_100_10_300	4	4	4	0,00	83,94
7_20_1_301	5	5	5	0,00	6,96
7_20_2_302	5	5	5	0,00	5,43
7_20_3_303	5	5	5	0,00	3,63
7_20_4_304	6	6	6	0,00	5,04
7_20_5_305	6	6	6	0,00	2,58
7_20_6_306	5	5	5	0,00	5,04
7_20_7_307	4	4	4	0,00	5,79
7_20_8_308	6	6	6	0,00	5,97
7_20_9_309	6	6	6	0,00	5,58
7_20_10_310	4	4	4	0,00	7,17
7_40_1_311	9	10	9,2	0,40	20,16
7_40_2_312	12	12	12	0,00	17,94
7_40_3_313	9	10	9,24	0,43	15,78
7_40_4_314	13	13	13	0,00	19,14
7_40_5_315	9	10	9,14	0,35	19,95
7_40_6_316	11	11	11	0,00	19,44
7_40_7_317	10	10	10	0,00	16,32
7_40_8_318	11	11	11	0,00	14,73
7_40_9_319	8	8	8	0,00	15,39
7_40_10_320	12	12	12	0,00	16,41
7_60_1_321	16	16	16	0,00	35,52
7_60_2_322	13	13	13	0,00	36,06
7_60_3_323	16	16	16	0,00	30,09
7_60_4_324	14	14	14	0,00	36,06
7_60_5_325	13	13	13	0,00	38,70
7_60_6_326	13	13	13	0,00	34,68
7_60_7_327	14	14	14	0,00	30,66

7_60_8_328	16	16	16	0,00	33,54
7_60_9_329	14	14	14	0,00	28,98
7_60_10_330	18	18	18	0,00	29,58
7_80_1_331	20	20	20	0,00	58,74
7_80_2_332	23	23	23	0,00	53,97
7_80_3_333	19	19	19	0,00	62,97
7_80_4_334	21	21	21	0,00	54,12
7_80_5_335	22	22	22	0,00	51,84
7_80_6_336	21	21	21	0,00	46,89
7_80_7_337	23	23	23	0,00	57,21
7_80_8_338	21	21	21	0,00	58,32
7_80_9_339	22	22	22	0,00	52,74
7_80_10_340	23	23	23	0,00	55,62
7_100_1_341	26	26	26	0,00	57,12
7_100_2_342	25	25	25	0,00	80,13
7_100_3_343	23	23	23	0,00	90,21
7_100_4_344	25	25	25	0,00	78,09
7_100_5_345	23	23	23	0,00	61,20
7_100_6_346	28	28	28	0,00	81,45
7_100_7_347	25	25	25	0,00	83,25
7_100_8_348	27	27	27	0,00	95,01
7_100_9_349	25	25	25	0,00	74,04
7_100_10_350	31	31	31	0,00	96,36
8_20_1_351	6	6	6	0,00	4,29
8_20_2_352	6	6	6	0,00	6,12
8_20_3_353	5	5	5	0,00	6,03
8_20_4_354	6	6	6	0,00	6,84
8_20_5_355	5	5	5	0,00	6,33
8_20_6_356	6	6	6	0,00	4,62
8_20_7_357	4	4	4	0,00	6,15
8_20_8_358	5	5	5	0,00	8,28
8_20_9_359	6	6	6	0,00	4,65
8_20_10_360	4	4	4	0,00	4,44
8_40_1_361	11	11	11	0,00	12,90
8_40_2_362	12	12	12	0,00	20,79
8_40_3_363	10	10	10	0,00	15,09
8_40_4_364	11	11	11	0,00	20,37

8_40_5_365	8	8	8	0,00	15,48
8_40_6_366	11	11	11	0,00	15,90
8_40_7_367	10	10	10	0,00	21,84
8_40_8_368	10	10	10	0,00	19,17
8_40_9_369	9	9	9	0,00	20,79
8_40_10_370	12	12	12	0,00	20,31
8_60_1_371	16	16	16	0,00	37,20
8_60_2_372	16	16	16	0,00	39,81
8_60_3_373	16	16	16	0,00	38,04
8_60_4_374	14	14	14	0,00	32,28
8_60_5_375	13	13	13	0,00	39,84
8_60_6_376	14	15	14,02	0,14	37,59
8_60_7_377	13	14	13,08	0,27	34,26
8_60_8_378	16	17	16,14	0,35	44,79
8_60_9_379	15	16	15,18	0,38	31,83
8_60_10_380	17	18	17,14	0,35	29,34
8_80_1_381	20	22	20,32	0,68	44,19
8_80_2_382	21	23	21	0,00	59,40
8_80_3_383	19	20	19,02	0,14	58,77
8_80_4_384	19	20	19,16	0,37	62,04
8_80_5_385	25	26	25,18	0,38	60,75
8_80_6_386	21	22	21,16	0,37	62,25
8_80_7_387	21	22	21,04	0,20	58,56
8_80_8_388	21	22	21,14	0,35	62,13
8_80_9_389	21	21	21	0,00	67,92
8_80_10_390	23	25	23,38	0,69	70,95
8_100_1_391	25	26	25,12	0,32	75,72
8_100_2_392	25	26	25,16	0,37	89,58
8_100_3_393	23	24	23,1	0,30	67,65
8_100_4_394	30	30	30	0,00	87,00
8_100_5_395	28	28	28	0,00	89,46
8_100_6_396	26	26	26	0,00	78,66
8_100_7_397	26	26	26	0,00	100,29
8_100_8_398	28	29	28,2	0,40	93,66
8_100_9_399	27	27	27	0,00	73,80
8_100_10_400	31	32	31,28	0,45	93,06
9_20_1_401	19	19	19	0,00	0,12

9_20_2_402	13	13	13	0,00	0,09
9_20_3_403	14	14	14	0,00	0,12
9_20_4_404	16	16	16	0,00	0,12
9_20_5_405	16	16	16	0,00	0,09
9_20_6_406	14	14	14	0,00	0,12
9_20_7_407	9	9	9	0,00	0,09
9_20_8_408	14	14	14	0,00	0,12
9_20_9_409	15	15	15	0,00	0,12
9_20_10_410	13	13	13	0,00	0,09
9_40_1_411	24	24	24	0,00	0,24
9_40_2_412	32	32	32	0,00	0,27
9_40_3_413	28	28	28	0,00	0,24
9_40_4_414	31	31	31	0,00	0,27
9_40_5_415	27	27	27	0,00	0,24
9_40_6_416	29	29	29	0,00	0,24
9_40_7_417	24	24	24	0,00	0,24
9_40_8_418	26	26	26	0,00	0,24
9_40_9_419	21	21	21	0,00	0,24
9_40_10_420	33	33	33	0,00	0,27
9_60_1_421	46	46	46	0,00	0,48
9_60_2_422	44	44	44	0,00	0,48
9_60_3_423	46	46	46	0,00	0,48
9_60_4_424	44	44	44	0,00	0,45
9_60_5_425	41	41	41	0,00	0,42
9_60_6_426	37	37	37	0,00	0,42
9_60_7_427	40	40	40	0,00	0,45
9_60_8_428	47	47	47	0,00	0,48
9_60_9_429	45	45	45	0,00	0,45
9_60_10_430	45	45	45	0,00	0,48
9_80_1_431	58	58	58	0,00	0,75
9_80_2_432	57	57	57	0,00	0,75
9_80_3_433	57	57	57	0,00	0,72
9_80_4_434	52	52	52	0,00	0,66
9_80_5_435	61	61	61	0,00	0,75
9_80_6_436	62	62	62	0,00	0,75
9_80_7_437	59	59	59	0,00	0,72
9_80_8_438	58	58	58	0,00	0,69

9_80_9_439	49	49	49	0,00	0,66
9_80_10_440	60	60	60	0,00	0,75
9_100_1_441	71	71	71	0,00	1,11
9_100_2_442	64	64	64	0,00	0,99
9_100_3_443	68	68	68	0,00	1,02
9_100_4_444	78	78	78	0,00	1,17
9_100_5_445	65	65	65	0,00	1,05
9_100_6_446	71	71	71	0,00	1,11
9_100_7_447	66	66	66	0,00	1,08
9_100_8_448	73	73	73	0,00	1,14
9_100_9_449	65	65	65	0,00	1,05
9_100_10_450	72	72	72	0,00	1,17
10_20_1_451	6	6	6	0,00	0,09
10_20_2_452	3	3	3	0,00	5,52
10_20_3_453	4	4	4	0,00	0,99
10_20_4_454	4	4	4	0,00	0,24
10_20_5_455	4	4	4	0,00	0,15
10_20_6_456	4	4	4	0,00	4,47
10_20_7_457	5	5	5	0,00	3,54
10_20_8_458	3	3	3	0,00	0,69
10_20_9_459	5	5	5	0,00	5,07
10_20_10_460	3	3	3	0,00	4,41
10_40_1_461	8	8	8	0,00	15,93
10_40_2_462	8	8	8	0,00	10,29
10_40_3_463	9	9	9	0,00	18,21
10_40_4_464	6	6	6	0,00	18,06
10_40_5_465	6	6	6	0,00	17,58
10_40_6_466	6	6	6	0,00	13,17
10_40_7_467	7	7	7	0,00	20,37
10_40_8_468	7	7	7	0,00	20,19
10_40_9_469	8	8	8	0,00	14,52
10_40_10_470	8	8	8	0,00	21,00
10_60_1_471	12	12	12	0,00	33,66
10_60_2_472	12	12	12	0,00	38,58
10_60_3_473	11	12	11,12	0,32	28,95
10_60_4_474	8	8	8	0,00	34,23
10_60_5_475	8	8	8	0,00	32,61

10_60_6_476	12	12	12	0,00	44,28
10_60_7_477	10	10	10	0,00	37,50
10_60_8_478	10	10	10	0,00	34,68
10_60_9_479	9	9	9	0,00	29,97
10_60_10_480	8	8	8	0,00	36,51
10_80_1_481	13	13	13	0,00	61,14
10_80_2_482	11	11	11	0,00	53,25
10_80_3_483	11	11	11	0,00	58,83
10_80_4_484	14	14	14	0,00	66,30
10_80_5_485	14	14	14	0,00	61,68
10_80_6_486	14	14	14	0,00	60,93
10_80_7_487	15	15	15	0,00	62,40
10_80_8_488	10	11	10	0,00	57,24
10_80_9_489	13	13	13	0,00	54,75
10_80_10_490	15	15	15	0,00	57,30
10_100_1_491	15	15	15	0,00	83,49
10_100_2_492	16	16	16	0,00	89,19
10_100_3_493	16	16	16	0,00	84,09
10_100_4_494	18	18	18	0,00	84,63
10_100_5_495	18	18	18	0,00	73,89
10_100_6_496	13	14	13	0,00	74,70
10_100_7_497	14	14	14	0,00	88,83
10_100_8_498	19	19	19	0,00	85,62
10_100_9_499	17	17	17	0,00	87,87
10_100_10_500	16	16	16	0,00	81,96
Total	7064	7092	7067,52	0,02	29,17