



**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE  
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA  
COMPUTAÇÃO**



**CEDMA RANIELLY SANTOS FIRMINO**

**META-HEURÍSTICAS PARA O PROBLEMA DE  
LOCALIZAÇÃO DE SEÇÕES ELEITORAIS E ALOCAÇÃO  
DE ELEITORES**

**MOSSORÓ - RN  
2017**

**CEDMA RANIELLY SANTOS FIRMINO**

**META-HEURÍSTICAS PARA O PROBLEMA DE  
LOCALIZAÇÃO DE SEÇÕES ELEITORAIS E ALOCAÇÃO  
DE ELEITORES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação - associação ampla entre a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte e a Universidade Federal Rural do Semi-Árido, para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dario Jose Aloise, D.Sc.

**MOSSORÓ - RN  
2017**

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

F  
525m      Firmino, Cedma Ranielly Santos.  
            META-HEURÍSTICAS PARA O PROBLEMA DE  
LOCALIZAÇÃO DE SEÇÕES ELEITORAIS E ALOCAÇÃO DE  
ELEITORES / Cedma Ranielly Santos Firmino. - 2017.  
            61 f. : il.

            Orientador: Dario Jose Aloise.  
            Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal  
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em  
Ciência da Computação, 2017.

            1. Problema de localização de seções eleitorais.  
            2. Otimização combinatória. 3. Meta-heurísticas. I.  
            Aloise, Dario Jose, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

CEDMA RANIELLY SANTOS FIRMINO

**META-HEURÍSTICAS PARA O PROBLEMA DE  
LOCALIZAÇÃO DE SEÇÕES ELEITORAIS E ALOCAÇÃO  
DE ELEITORES**

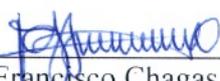
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

APROVADA EM: 10 / 11 / 2017.

BANCA EXAMINADORA



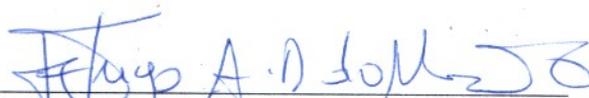
Prof. Dr. Dario José Aloise  
Orientador e Presidente



Prof. Dr. Francisco Chagas de Lima Júnior  
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte



Prof. Dr. Carlos Heitor Pereira Liberalino  
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte



Prof. Dr. Hugo Alexandre Dantas do Nascimento  
Universidade Federal de Goiás - UFG

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, por tudo que tem proporcionado em minha vida.

A minha família, pelo incentivo e carinho incondicional. Ao meu amado Diego, por todas as batalhas juntos enfrentadas durante todos esses anos.

A minha amiga Rosita Rodrigues, por sempre acreditar em mim.

Ao meu amigo e companheiro de jornada Jonathan Lopes, por toda a disponibilidade, presteza e amizade dedicada.

Ao amigo Márcio Oliveira, por toda ajuda e incentivo prestados.

A todos que compõe o Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação UERN e UFERSA que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação. Agradeço em especial ao professor Dr Dario Aloise pelo incentivo e paciência durante todo o mestrado, assim como todo o conhecimento compartilhado.

Aos membros da banca, pelas contribuições e por toda a ajuda prestada.

A todos os meus amigos que me incentivaram.

Por último e não menos importante, agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio recebido para o desenvolvimento deste trabalho.

## RESUMO

O problema de localização de seções eleitorais (PLSE) e alocação de eleitores é considerado um problema de otimização, que busca pela menor quantidade e melhor local estratégico das seções eleitorais, com o objetivo de reduzir custos de instalação e alocação dos eleitores. O problema trata a questão contando com a possibilidade de total rearranjo da estrutura eleitoral existente. Neste trabalho, propõe-se otimizar os locais de votação para alocação de eleitores, através de um modelo matemático que considera a disposição de locais já utilizados, causando um menor impacto à estrutura eleitoral vigente. Por tratar-se de um problema de otimização combinatória NP-difícil, a pesquisa envolveu a aplicação de uma formulação matemática e meta-heurísticas – algoritmo genético, BRKGA, recozimento simulado e uma abordagem híbrida – para obtenção da solução. Para realização dos experimentos, foram utilizadas instâncias da cidade de Mossoró/RN. Os resultados obtidos mostraram-se bastante satisfatórios em termos de redução do número de locais, aproveitamento da solução vigente e em tempo computacional.

**Palavras-chave:** Problema de localização de seções eleitorais, otimização combinatória, meta-heurísticas

## ABSTRACT

The problem of locating polling stations is an optimization problem, that seeks to reduce the number of polling stations and to provide a better strategic location to than, in order to reduce the costs of installation and allocation of voters. Such problem addresses then issue with a possibility of total rearrangement of the existing electoral structure. In this work, it is proposed to optimize the polling places for voter allocation, through a mathematical model that considers a provision of resources already used, causing a lower impact on the current electoral structure. Since this is an NP-hard combinatorial optimization problem, the current research involve the application of a mathematical formulation and metaheuristics (genetic algorithm, BRKGA, simulated annealing and a hybrid approach) to obtain a solution. Experiments were done with instances from the city of Mossoró / RN. The results obtained are quite satisfactory in terms of reduction of number of sites, similarity to the current polling station structure and computational time.

**Key-words:** The polling-station location problem, combinatorial optimization, metaheuristics.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Taxonomia dos modelos de localização. . . . .	16
Figura 2 – Problemas de localização discretos. . . . .	17
Figura 3 – Método utilizado na pesquisa. . . . .	31
Figura 4 – Exemplo dos componentes do problema. . . . .	33
Figura 5 – Seleção dos locais de votação para alocação de eleitores. . . . .	34
Figura 6 – Representação da instância $Mos_{27 \times 20}$ . . . . .	34
Figura 7 – Solução PLSE para a instância $Mos_{27 \times 20}$ . . . . .	35
Figura 8 – Disposição das seções eleitorais pelo TRE. . . . .	36
Figura 9 – Algoritmo genético desenvolvido para o PLSE+. . . . .	38
Figura 10 – BRKGA desenvolvido para o PLSE+. . . . .	40
Figura 11 – Recozimento simulado desenvolvido para o PLSE+. . . . .	41
Figura 12 – Algoritmo genético + Recozimento simulado aplicado ao PLSE+ . . . . .	43
Figura 13 – Solução da instância $Mos_{27 \times 20}$ pelo PLSE+ (esquerda) e PLSE (direita). . . . .	45
Figura 14 – Resultados dos métodos de solução x Gap da solução encontrada para instância $Mos_{112 \times 82}$ . . . . .	52
Figura 15 – Resultados dos métodos de solução x Gap da solução encontrada para instância $Mos_{242 \times 166}$ . . . . .	53
Figura 16 – Resultados dos métodos de solução x Gap da solução encontrada para instância $Mos_{287 \times 198}$ . . . . .	54
Figura 17 – Comparativo entre os tempos de resposta dos algoritmos propostos . . . . .	55
Figura 18 – Crescimento do tempo de execução dos algoritmos x tamanho da instância. . . . .	55

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados obtidos para as instâncias $Mos_{112 \times 82}$ , $Mos_{242 \times 166}$ e $Mos_{287 \times 198}$	46
Tabela 2 – Resultados obtidos para as instâncias $Mos_{112 \times 82}$ , $Mos_{242 \times 166}$ e $Mos_{287 \times 198}$	46
Tabela 3 – Percentual dos locais escolhidos já utilizados pelo TRE . . . . .	46
Tabela 4 – Parâmetros de configuração escolhidos para o AG e BRKGA . . . . .	47
Tabela 5 – Resultados do algoritmo genético para as instâncias do PLSE+ . . . . .	48
Tabela 6 – Resultados do AG (cruzamento 1p) para as instâncias do PLSE+ . . . . .	48
Tabela 7 – Resultados do AG (cruzamento 2p) para as instâncias do PLSE+ . . . . .	49
Tabela 8 – Resultados do BRKGA para as instâncias do PLSE+ . . . . .	49
Tabela 9 – Resultados do recozimento simulado para as instâncias do PLSE+ . . . . .	49
Tabela 10 – Parâmetros de calibração do AG+RS . . . . .	50
Tabela 11 – Resultados do AG+RS para as instâncias do PLSE+ . . . . .	50
Tabela 12 – Comparativo entre os métodos de soluções propostos . . . . .	51
Tabela 13 – Comparativo entre os tempos de processamentos dos algoritmos no processo de busca de uma solução . . . . .	53
Tabela 14 – Comparativo entre o número de locais encontrados pelos métodos propostos e a situação real . . . . .	54

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO . . . . .	11
1.2	PROBLEMATIZAÇÃO . . . . .	12
1.3	JUSTIFICATIVA . . . . .	13
1.4	OBJETIVOS . . . . .	14
1.4.1	Geral . . . . .	14
1.4.2	Específico . . . . .	14
1.5	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO . . . . .	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .	15
2.1	LOCALIZAÇÃO DE FACILIDADES . . . . .	15
2.1.1	Modelos de localização discretos . . . . .	17
2.1.1.1	Modelos baseados em medianas . . . . .	18
2.2	PROBLEMAS EM OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA . . . . .	20
2.2.1	Meta-heurísticas . . . . .	22
2.3	TRABALHOS RELACIONADOS . . . . .	27
3	METODOLOGIA . . . . .	30
3.1	CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA . . . . .	30
3.2	MÉTODO PROPOSTO . . . . .	30
4	PROPOSTA: O PLSE+, UMA ABORDAGEM EXATA E METAHEURÍSTICA . . . . .	33
4.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	33
4.2	ABORDAGEM EXATA . . . . .	35
4.2.1	Modelo matemático para o PLSE+ . . . . .	35
4.3	ABORDAGENS META-HEURÍSTICAS . . . . .	38
4.3.1	Algoritmo genético . . . . .	38
4.3.2	Algoritmo genético com chaves aleatórias viciadas - BRKGA . . . . .	40
4.3.3	Recozimento Simulado . . . . .	41
4.3.4	Abordagem híbrida: algoritmo genético e recozimento simulado . . . . .	43
5	RESULTADOS . . . . .	44
5.1	MATERIAIS UTILIZADOS . . . . .	44
5.2	RESULTADOS COMPUTACIONAIS . . . . .	44
5.2.1	Método exato . . . . .	44
5.2.2	Resultados do algoritmo genético e BRKGA . . . . .	47

5.2.3	Resultados do Recozimento Simulado . . . . .	49
5.2.4	Resultados do algoritmo híbrido - Algoritmo genético + Recozimento simulado . . . . .	50
5.3	ANÁLISE DOS RESULTADOS . . . . .	51
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	56
	REFERÊNCIAS . . . . .	58

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O Problema de Localização de Seções Eleitorais (PLSE) é compreendido pela busca pela menor quantidade e melhor localização das seções eleitorais, com o objetivo de reduzir custos, mas garantindo a satisfação do eleitor. Caracteriza-se como um problema de localização de facilidades (*facility location problem*), quando se busca posicionar os postos de serviços no melhor local para o atendimento da demanda. A escolha do melhor ponto de atendimento sempre depende das características e restrições inerentes à cada problema que se busca solucionar. Por exemplo, selecionar o melhor local para instalação de postos policiais irá depender das necessidades e restrições envolvidas no processo de fixação desses pontos de vigilância.

Segundo Daskin (2008), o que se busca é localizar as facilidades em um dado espaço, via processos de modelagem, formulação e solução de uma classe de problemas. Os modelos matemáticos aplicáveis ao problema de localização de facilidades devem abordar algumas questões, incluindo: a quantidade de facilidades que serão instaladas, onde cada uma será instalada, suas capacidades e qual a demanda que cada uma poderá atender.

No Brasil, o PLSE foi primeiro descrito por Oliveira (2013), o qual tratou a temática em seu trabalho de dissertação de mestrado, na qual apresentou o problema e os aspectos associados à logística de uma eleição em detalhes. Para tanto, considerou importantes características inerentes ao problema, que oneram os custos e tornam a gestão complexa, como a alocação dos eleitores com o custo de transporte, a disponibilização da força pública para garantir segurança, a ordem, o deslocamento dos equipamentos antes e ao final da votação, dentre outros.

O problema possui bastante relevância no que diz respeito à gestão dos gastos públicos, já que o processo eleitoral se caracteriza por ser o maior evento simultâneo realizado pelo poder público brasileiro e consome quantidade significativa de recursos. As eleições no Brasil são realizadas a cada dois anos em todas as esferas de governo, federal, estadual e municipal. Regido pela legislação brasileira, o problema possui uma série de restrições sobre os possíveis locais de votação. Segundo o Código Eleitoral Brasileiro (BRASIL, 1965), conforme citado e detalhado por Oliveira (2013), há algumas características e restrições do problema uma vez que as seções eleitorais não podem ser instaladas em qualquer local disponível, tais como:

- As seções eleitorais devem ser instaladas preferencialmente em prédios públicos. Na zona urbana, quando não houver prédios públicos disponíveis, poderão ser utilizados prédios particulares. Na zona rural não é permitido o funcionamento de seções em prédio particulares;

- Em cada local de votação podem funcionar tantas seções quantas salas adequadas estejam disponíveis. Em cada seção podem ser inscritos até 400 eleitores nas cidades do interior e até 500 nas capitais. Em casos excepcionais, os quais devem ser autorizados pelo Tribunal Regional Eleitoral (TRE), pode haver seção eleitoral com menos de 50 eleitores;
- Em cada seção trabalham quatro ou seis mesários, dependendo do Estado ou Distrito Federal, sendo um custo associado, independentemente do número de eleitores alistados. Em cada local de votação, além dos mesários, ficam disponíveis uma ou duas pessoas na segurança, além de uma ou duas pessoas no suporte técnico das máquinas;
- Quando uma localidade da zona rural não possuir os critérios para instalação de seções eleitorais a menos de uma distância determinada, a Justiça Eleitoral deverá fornecer transporte para todos os eleitores;
- A localização das seções influencia fortemente no tempo gasto para a apuração dos resultados, pois faz-se necessário que as mídias com os resultados sejam encaminhadas para a junta eleitoral. (OLIVEIRA, 2013)

Considerar todos os aspectos e restrições relacionados no processo de decisão de como arranjar os locais de votação de modo a atender a demanda dos eleitores, utilizando a menor quantidade de recursos, torna-se um problema de difícil solução. Técnicas de otimização combinatória, métodos exatos ou aproximativos, podem ser utilizadas para potencializar o gasto público dos órgãos envolvidos através de melhorias nos processos logísticos e decisórios.

Oliveira (2013) soluciona a questão partindo do princípio de que toda a estrutura pode ser remodelada e realocada, ou seja, todas as características e restrições são consideradas para compor um conjunto de locais de votação, como se não existisse um arranjo prévio, de modo a atender a demanda de forma otimizada. A solução proposta utiliza-se de métodos exatos, através de uma formulação matemática e experimentos realizados pelo CPLEX (IBM® ILOG® CPLEX® *Optimization Studio*®), e de métodos aproximativos, via uma meta-heurística GRASP.

É nesse contexto que se propõe a presente pesquisa, desenvolver um PLSE modificado, chamado de PLSE+, que contemple o arranjo já disposto pelo TRE como ponto de partida para atendimento das demandas atuais e futuras. Busca-se, portanto, otimizar o número de seções de modo a causar um impacto mínimo na estrutura vigente.

## 1.2 PROBLEMATIZAÇÃO

O PLSE avalia qual a menor quantidade de locais e sua melhor localização, sem considerar o arranjo existente, de modo que haja custo mínimo, garantindo que o maior número de eleitores seja atendido dentro de distâncias predeterminadas e satisfazendo as restrições e características impostas pelo problema.

Propor um novo arranjo, embora com menor custo associado, pode não ser interessante tendo em vista as considerações culturais e políticas que envolve a reformulação dos locais existentes. Em face disso, busca-se com essa pesquisa aproximar a modelagem e o conjunto de soluções da realidade, considerando a estrutura já disponibilizada pelo

TRE como pontos preferenciais para alocação das seções eleitorais, otimizando a rede de serviços disposta durante o processo eleitoral.

Para tanto, serão consideradas as seguintes questões de pesquisa:

- É possível formular um modelo matemático que represente uma função de decisão associada aos locais que já existem e as características importantes do processo de escolha de onde localizar seções eleitorais?
- Havendo um modelo matemático, existe um método que gere uma solução ótima para o problema em tempo viável, independentemente do tamanho da instância utilizada?
- Não havendo um modelo que gere uma solução ótima, independentemente do tamanho da instância, é possível aplicar meta-heurísticas que apresentem soluções eficientes e eficazes para o problema?
- Que melhorias os métodos utilizados geram em relação ao adotado atualmente pela Justiça Eleitoral e pelo proposto no trabalho de Oliveira (2013) para a instalação de seções eleitorais e alocação de eleitores?

Com o desenvolvimento esta pesquisa, buscou-se discutir e responder as questões listadas, através de formulações e experimentos realizados.

### 1.3 JUSTIFICATIVA

A localização de seções eleitorais é um dos fatores que mais influenciam no custo do processo eleitoral. A escolha dessa localização está diretamente ligada à satisfação do eleitor, tendo em vista a comodidade de deslocamento e tempo de espera para efetuar seu ato de direito, e à velocidade de conclusão dos trabalhos eleitorais e a divulgação dos resultados. O problema de instalação de seções eleitorais é um modelo do problema de otimização combinatória conhecido na literatura como localização de facilidades.

O PSLE, e grande parte do campo de estudo sobre localização de facilidades, caracteriza-se como um problema NP-difícil, sendo, assim, desconhecido um algoritmo exato em tempo hábil para auxiliar o processo decisório. Faz-se necessário, em muitos casos, o desenvolvimento de algoritmos, heurísticas e meta-heurísticas, para solucioná-los. A proposta da presente pesquisa é formular um modelo matemático para o problema que considere os locais já existentes que viabilize a utilização de técnicas de otimização combinatória para apresentar boas soluções para o problema de instalação de seções eleitorais.

## 1.4 OBJETIVOS

### 1.4.1 Geral

É o objetivo geral deste trabalho, apresentar um modelo de otimização para o Problema de Localização de Seções Eleitorais produzindo um impacto mínimo na estrutura atualmente existente no mundo real.

### 1.4.2 Específico

Como objetivos específicos da pesquisa, tem-se:

- formular um modelo matemático que represente as variáveis envolvidas no processo de instalação de seções eleitorais, a partir do qual seja possível dar ênfase ou prioridade às facilidades já existentes.
- desenvolver abordagens meta-heurísticas para a solução do problema.
- analisar e comparar os resultados obtidos na pesquisa com a estrutura atual fornecida pela Justiça Eleitoral, tomando por base a cidade de Mossoró/RN;

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Este documento está estruturado em seis capítulos. Após este capítulo introdutório, no capítulo 2 são relatados os principais conceitos sobre localização de facilidades, como se trata os principais modelos existentes e os métodos meta-heurísticos para solução de problemas computacionalmente difíceis. O capítulo 3 descreve a metodologia de pesquisa utilizada, com os passos necessários para o desenvolvimento da pesquisa. O capítulo 4 apresenta os métodos de solução para o problema. No capítulo 5, são apresentados os resultados obtidos através dos experimentos com as abordagens de solução. Concluindo a dissertação, o capítulo 6 traz as considerações finais e propostas de trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo será evidenciada a base teórica que sustenta o problema de pesquisa abordado no presente trabalho. O PLSE faz parte do campo de pesquisa de localização de facilidades. Trata-se de um problema de natureza discreta, onde os pontos de demanda e de atendimento estão posicionados em pontos específicos do espaço geográfico, e, por essa razão, configura-se como um problema de otimização NP-difícil. Para buscar soluções ótimas ou aproximadas, torna-se necessária a utilização de técnicas heurísticas e meta-heurísticas.

### 2.1 LOCALIZAÇÃO DE FACILIDADES

A teoria e modelagem dos problemas de localização de facilidades tem sua origem no trabalho de Weber (1909), o qual considerou instalar uma única facilidade para minimizar a distância total de deslocamento entre os clientes e o local de atendimento. Na década de 50, esse trabalho foi investigado por diversos pesquisadores que buscava introduzir a questão de localização de instalações industriais como uma ferramenta de planejamento estratégico gerencial. Posteriormente, surgiram diversas aplicações nos mais diferentes campos de pesquisa. Inúmeras classes de problemas têm sido identificadas e solucionadas, e os modelos de localização têm sido estendidos para uma grande variedade de aplicações práticas (BRANDEAU; CHIU, 1989).

Brandeau e Chiu (1989) apresentam um problema de localização definido como um problema de alocação de recursos no espaço, no qual uma ou mais instalações servem um conjunto de demandas distribuídas. Há quatro componentes que caracterizam este tipo de problema: consumidores ou clientes, os quais representa a demanda que se pretende atender, e que são considerados localizados em pontos ou rotas; facilidades ou instalações, as que serão localizadas para prestação de um serviço; um espaço, no qual os consumidores e as facilidades estão ou serão localizados; e uma métrica, que indica distância ou o tempo entre clientes e instalações (REVELLE; EISELT, 2005).

Daskin (2008) discute a ampla aplicabilidade de problemas de localização de facilidades e uma vasta área para pesquisadores interessados em modelagem, desenvolvimento de algoritmos e teoria da complexidade, graças à relação de diversos problemas práticos desenvolvidos. Entre as aplicações de modelagem de localização, destacam-se a escolha de bases de serviço médico emergencial, escolas, hospitais, hubs aéreos, incluindo também áreas não tradicionais como diagnósticos médicos, roteamento de veículos e análises de sítios arqueológicos.

Há muitas classificações na literatura para caracterizar os problemas e os modelos de localização de facilidades (BRANDEAU; CHIU, 1989) (DASKIN, 1995) (HAMACHER;

NICKEL; SCHNEIDER, 1998) (REVELLE; EISELT, 2005). Daskin (1995), por exemplo, lista uma variedade de características que podem ser usadas como critério de classificação de problemas, tais como: a disposição da facilidade no espaço geográfico; quanto ao número de facilidades; quanto à natureza das entradas (se são estáticos ou dinâmicos, determinísticos ou probabilístico) de objetivo simples ou múltiplo; dentre outros.

Como já mencionando, uma das formas de diferenciar os grupos de modelos de localização é pela forma com que a demanda é distribuída sobre um espaço e como as instalações podem ser localizadas dentro dessa área. Daskin (2008) apresenta uma classificação atualizada para problemas de localização baseados fundamentalmente no espaço ao qual o problema está inserido. Essa classificação pode ser vista na Figura 1.

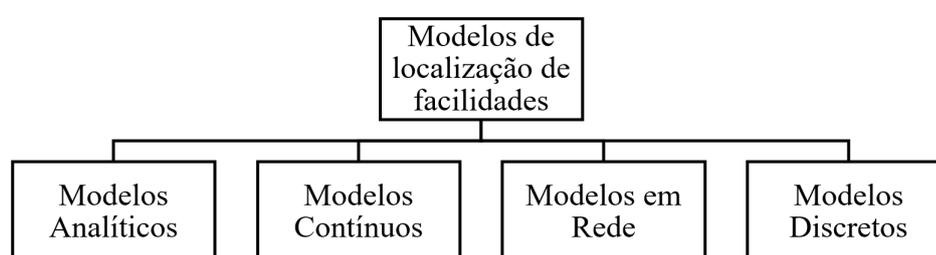


Figura 1 – Taxonomia dos modelos de localização.

Fonte: Adaptado de Daskin (2008)

Os modelos analíticos são caracterizados pela distribuição uniforme da demanda e as facilidades podem ser instaladas em qualquer lugar. Por sua natureza simplificada, são solucionados usando técnicas matemáticas simples. Nos modelos contínuos, as facilidades podem ser instaladas em qualquer lugar, sendo as demandas conhecidas e localizadas em pontos discretos. Os modelos em rede são aqueles em que as demandas e facilidades podem somente ser localizadas em uma rede composta por nós e links, onde os nós correspondem as demandas e a facilidade pode ser posicionada em qualquer lugar da rede (DASKIN, 2008).

Nos modelos discretos, as demandas geralmente surgem nos nós e a localização das instalações são restritas a um conjunto finito de locais candidatos. Estes se destacam pois apresentam elevado grau de complexidade de solução, mesmo para problemas de pequeno porte, mas que estão associados a diversas aplicações práticas (DASKIN, 2008).

Como já mencionado, o presente trabalho aborda o PLSE e propõe especificações a partir de suas características. Este problema foi caracterizado em Oliveira (2013) como um problema de localização de facilidades discreto. Portanto, os modelos discretos serão detalhados na próxima subseção.

### 2.1.1 Modelos de localização discretos

Modelos de localização discretos destacam-se devido à complexidade que os caracterizam. Os locais e os pontos de demanda encontram-se prefixados, o que restringe as possibilidades de alocação dos postos de atendimento com relação às necessidades que se busca atender.

Daskin (2008) relaciona os principais modelos de localização de facilidades discretos, agrupando-os em três categorias de problemas: modelos baseados em cobertura, modelos baseados em medianas e outros modelos não classificados nas duas anteriores. Na Figura 2, é possível visualizar as categorias de modelos discretos, bem como suas subdivisões.

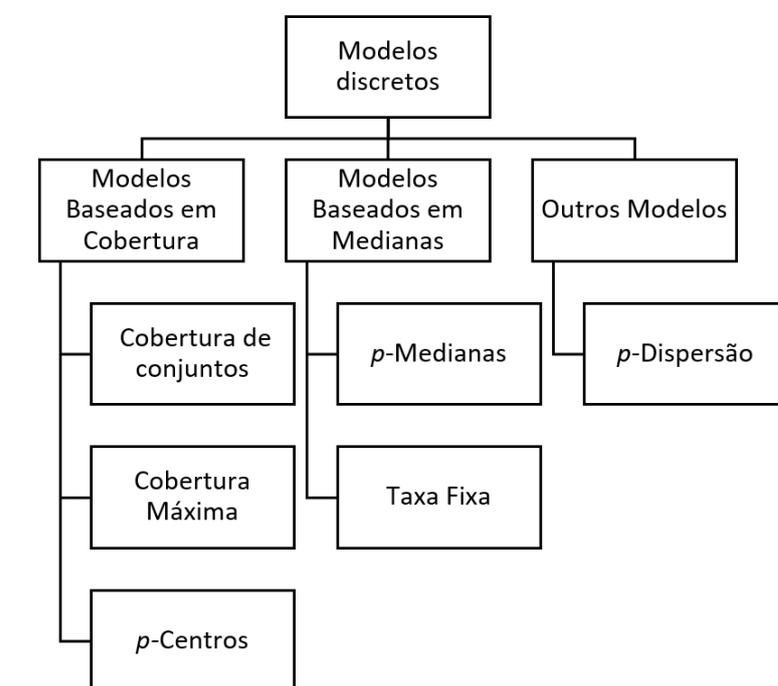


Figura 2 – Problemas de localização discretos.

Fonte: Adaptado de Daskin (2008)

Os modelos baseados em cobertura supõem que exista alguma distância aceitável ou tempo máximo de atendimento de uma necessidade, sendo fixada uma distância ou tempo máximo de atendimento de uma determinada demanda. Esta é considerada coberta, enquanto que aquelas que não estejam dentro do limite estabelecido são consideradas descobertas. Já os modelos baseados em medianas buscam minimizar a distância média ponderada entre um nó de demanda e uma facilidade para o qual esse nó está designado. Os outros modelos são os que não estão caracterizados nos grupos apresentados, como, por exemplo, o  $p$ -Dispersão, o qual busca maximizar a distância mínima entre quaisquer pares de facilidades (DASKIN, 2008).

Os modelos de localização discretos possuem, além dos grupos que os classificam, uma série de submodelos que vem sendo utilizados e aprimorados ao longo do tempo. A seguir, detalhamos os modelos baseados em medianas, que se tratam da base conceitual utilizada por Oliveira (2013) para modelar o PLSE.

### 2.1.1.1 Modelos baseados em medianas

A distância para se alcançar uma facilidade é, em muitos casos, o fator dominante na definição de sua localização. Os modelos baseados em medianas buscam minimizar a distância média ponderada entre um nó de demanda e uma facilidade para o qual está designado. Tais modelos são normalmente utilizados em contextos de planejamento de distribuição em que minimizar a saída total ou custo de transporte de entrada é essencial (DASKIN, 2008). Dois problemas são classificados nessa categoria e são apresentados a seguir.

#### Problema das $p$ -Medianas (p-Median Problem - PMP)

O problema das  $p$ -medianas objetivam minimizar a soma dos custos, distância média ponderada, de distribuição entre as instalações e os pontos de demanda, dado um determinado número de instalações a serem localizadas (DASKIN, 2008). É dado pela seguinte formulação:

MINIMIZE

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} e_i d_{ij} y_{ij} \quad (2.1)$$

SUJEITO A

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in J} X_j = P \quad (2.3)$$

$$y_{ij} \leq X_j \quad \forall i \in I, j \in J \quad (2.4)$$

VARIÁVEL DE DECISÃO

$$X_j = \{0, 1\} \quad \forall j \in J \quad (2.5)$$

$$y_{ij} = \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (2.6)$$

ONDE

$J$  = conjunto de possíveis facilidades (indexado por  $j$ )

$I$  = conjunto de nós de demanda (indexado por  $i$ )

$e_i$  = demanda no nó  $i$

$P$  = número de facilidades a serem instaladas

$d_{ij}$  = menor distância entre o nó  $i$  e a facilidade  $j$

$X_j = \begin{cases} 1 & \text{se a facilidade } j \text{ for instalada} \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$

$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se a demanda } i \text{ for atendida na solução} \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$

A função objetivo 2.1 visa minimizar a distância total percorrida pela população ( $e_i$ ) até a facilidade ( $j$ ) que irá atendê-la. A restrição 2.2 impõe que a demanda de um setor ( $i$ ) seja atendida somente por uma facilidade ( $j$ ). A restrição 2.3 impõe que o número de facilidades instaladas ( $x_j$ ) seja igual ao número de facilidades definidas de início a serem instaladas. A restrição 2.4 impõe que  $y_{ij}$  seja maior ou igual ao somatório das facilidades eleitas que atendem à demanda  $i$ , de modo que não seja possível haver demanda atendida  $y_{ij}$  quando nenhum dos locais eleitos ( $x_j$ ) para a solução atenda à demanda. As restrições 2.5 e 2.6 determinam que as variáveis de decisão ( $x_j$ ) e ( $y_i$ ) assumam valores inteiros 0 ou 1.

#### Problema de localização com taxa fixa

Semelhante ao PMP, os modelos com taxa fixa consideram que, além da minimização das distâncias entre as facilidades e os pontos de demanda, há um custo para a instalação de facilidades (DASKIN, 2008). A formulação para esse modelo é apresentada a seguir:

MINIMIZE

$$\sum_{j \in J} f_j X_j + \alpha \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} e_i d_{ij} y_{ij} \quad (2.7)$$

SUJEITO A

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (2.8)$$

$$y_{ij} \leq X_j \quad \forall i \in I, j \in J \quad (2.9)$$

VARIÁVEL DE DECISÃO

$$X_j = \{0, 1\} \quad \forall j \in J \quad (2.10)$$

$$y_{ij} = \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (2.11)$$

ONDE

$J$  = conjunto de possíveis facilidades (indexado por  $j$ )

$I$  = conjunto de nós de demanda (indexado por  $i$ )

$e_i$  = demanda no nó  $i$

$d_{ij}$  = menor distância entre o nó  $i$  e a facilidade  $j$

$f_j$  = custo de instalação da facilidade  $j$

$\alpha$  = custo de transporte de uma pessoa por quilômetro

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{se a facilidade } j \text{ for instalada} \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a demanda } i \text{ for atendida na solução} \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

A função objetivo 2.7 busca minimizar o custo total do sistema considerando, na primeira parte da função, um custo  $f_j$  para cada possível facilidade  $X_j$  escolhida e, na segunda parte, um custo de deslocamento de uma pessoa por espaço percorrido. A restrição 2.8 impõe que a demanda de um setor ( $i$ ) seja atendida somente por uma facilidade ( $j$ ). A restrição 2.9 impõe que  $y_{ij}$  seja maior ou igual ao somatório das facilidades eleitas que atendem à demanda  $i$ , de modo que não seja possível haver demanda atendida ( $y_{ij}$ ) quando nenhum dos locais eleitos ( $x_j$ ) para a solução atenda à demanda. As restrições 2.10 e 2.8 impõem os valores inteiros 0 ou 1 para as variáveis de decisão  $x_j$  e  $y_i$ .

Modelos baseados em medianas, uma vez que se classificam como modelos discretos, são enquadrados como NP-difícil (REVELLE; EISELT, 2005). Para tratar essa categoria, fazem necessárias técnicas de otimização combinatória para buscar uma solução em tempo computacional viável.

## 2.2 PROBLEMAS EM OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

A otimização combinatória é o campo do conhecimento cujas técnicas visam determinar os extremos (máximos ou mínimos) de funções, em domínios determinados. Consiste em buscar o melhor arranjo de um conjunto de variáveis associadas, de modo a atingir objetivos predefinidos, assim como atender às restrições características do problema.

É importante definir o motivo pelo qual se deseja determinar o extremo de uma função com tal significado: a melhor configuração (máximo ou mínimo) representa a

melhor maneira possível de construir o sistema que está sendo projetado. O domínio no qual é executada a otimização, ou seja, a região do espaço de variáveis da função na qual se procura determinar seu extremo, corresponde ao conjunto das alternativas diferentes disponíveis para construir o sistema em questão (CUNHA; TAKAHASHI; ANTUNES, 2012).

Muitos problemas práticos de otimização, bem como aqueles de importância teórica, consistem da busca por uma “melhor” configuração de um conjunto de variáveis para alcançar determinadas metas. Eles dividem-se em duas categorias: aqueles para os quais as soluções são codificadas com variáveis de valor real, e aqueles cujas soluções são codificadas com variáveis discretas. Entre estes últimos, caracteriza-se a classe de problemas de Otimização Combinatória (BLUM; ROLI, 2003).

O processo de pesquisa pela melhor solução ou solução ótima de um problema de Otimização Combinatória pode se dar através da busca entre todas as possíveis combinações de valores para melhorar as variáveis do problema, calculando a função objetivo e verificando se atende as restrições do problema. A grande questão é que, dependendo do tamanho do problema, essa busca torna-se inviável, pois em situações em que o tempo e/ou custo de processamento é importante, não se consegue chegar em uma solução em tempo razoável.

A teoria da complexidade explica a noção de tempo razoável de processamento, demonstrando que muitos problemas não possuem algoritmos que realizem a busca completa no espaço de solução em tempo polinomial. A busca exaustiva de problemas de otimização combinatória torna-se impossível quando aumenta o tamanho do problema (número de variáveis envolvidas), dada a quantidade de combinações possíveis entre seus elementos, sendo estes problemas classificados como NP-difíceis (CUNHA; TAKAHASHI; ANTUNES, 2012).

Para problemas NP-difíceis não são conhecidos algoritmos em tempo polinomial, assim, o processamento em busca de um resultado pode exigir grande quantidade de recursos computacionais, levando a tempos de computação muito elevados para fins práticos. Para tanto, existem técnicas especializadas para explorar o espaço de solução em busca de bons resultados, vasculhando-o de forma inteligente, sem comprometer a eficiência computacional, mas ao preço de não garantirem encontrar a solução ótima. A utilização de tais métodos, ditos aproximados, tem recebido cada vez mais atenção. Com eles, sacrificamos a garantia de encontrar as melhores soluções para o bem de obter boas soluções em uma quantidade significativamente reduzida de tempo. Os métodos aproximados para solução dessa classe de problemas incluem: algoritmos heurísticos e meta-heurísticas (BLUM; ROLI, 2003).

Para este trabalho, é necessário definir as meta-heurísticas e seu campo de estudo, uma vez que caracterizam o grupo de ferramentas utilizado para solucionar o problema PLSE+ em tempo computacional viável.

### 2.2.1 Meta-heurísticas

Meta-heurísticas são estratégias gerais que "orientam" o processo de busca para evitar a retenção do resultado em máximos ou mínimos locais. O objetivo é explorar eficientemente o espaço de busca para encontrar soluções ótimas ou próximas das ótimas, por isso também chamado de métodos aproximados para soluções de problemas. Técnicas que abordam algoritmos meta-heurísticos vão desde procedimentos de busca locais simples até processos de aprendizagem complexos (BLUM; ROLI, 2003).

As origens das meta-heurísticas encontram-se na Inteligência Artificial e Pesquisa Operacional. O termo se refere a algoritmos aproximados para a otimização que não são especificamente expressos para um problema particular. Recozimento Simulado (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983), Busca Tabu (GLOVER, 1986), Algoritmo Genético (HOLLAND, 1992), Otimização da Colônia de Formigas (DORIGO; CARO, 1999), GRASP (FEO; RESENDE, 1995) e Busca Local Iterativa (LOURENÇO; MARTIN; STÜTZLE, 2002) são representantes típicos da classe de algoritmos meta-heurísticos. Cada uma dessas meta-heurísticas tem seu próprio contexto histórico, sendo algumas inspiradas em processos naturais, tais como na evolução biológica, enquanto outras são extensões de algoritmos menos sofisticados como de heurísticas gulosas e da busca local.

Blum e Roli (2003) afirma que as meta-heurísticas são estratégias de alto nível para explorar espaços de busca usando diferentes métodos. De grande importância, é que se dá um equilíbrio dinâmico entre diversificação e intensificação. O termo diversificação geralmente se refere à exploração do espaço de busca, enquanto o termo intensificação refere-se à exploração da experiência de pesquisa acumulada. O equilíbrio entre diversificação e intensificação como mencionado acima é importante, de um lado, para identificar rapidamente regiões no espaço de busca com soluções de alta qualidade e, por outro lado, não desperdiçar muito tempo em regiões do espaço de busca que já foram exploradas ou que não oferecem soluções de alta qualidade.

#### Algoritmos genéticos

O algoritmo genético (AG), proposto por Holland (1975), vem sendo estudado e adaptado ao longo dos anos aos mais diversos problemas de otimização combinatória. Ele segue o princípio evolutivo de Darwin, no qual os mais aptos se sobressaem em relação aos demais e têm mais chances de passarem seus genes para a próxima geração de indivíduos (HOLLAND, 1992).

Os indivíduos são soluções codificadas como um conjunto de parâmetros (genes) unidos na forma de uma sequência (cromossomo), uma estrutura de dados que representa uma das possíveis soluções do espaço de busca do problema. É necessário, portanto, codificar essa estrutura para comportar todos os genes envolvidos. Há alguns métodos

de codificação (binária, sequencial e valor) consolidados na literatura e a natureza do problema é quem irá determinar qual a mais adequada para uso (SIVANANDAM; DEEPA, 2009).

Um conjunto de cromossomos é denominado população. Em geral, a população inicial é selecionada aleatoriamente e submetida a um processo evolucionário que envolve avaliação, seleção, recombinação sexual (*crossover*) e mutação. A avaliação das soluções candidatas é dada através de uma função chamada de *fitness* e tem o objetivo de medir a aptidão de um indivíduo e determinar a proximidade deste da solução ótima (LUGER, 2004).

Após avaliar cada indivíduo, os pais da próxima geração são escolhidos aleatoriamente utilizando algum artifício que favoreça os indivíduos de melhor avaliação. Os métodos de seleção mais comuns são: aleatória – os participantes do processo de reprodução são determinados de forma aleatória, sem considerar portanto a aptidão de cada candidato; por roleta – os indivíduos mais aptos detêm das maiores chances de reproduzir, a fatia da roleta é proporcional a sua força diante dos demais; por ranking – busca eliminar a possibilidade de domínio da roleta por elementos que se destacam diante dos demais (roleta viciada) através da determinação da fatia por um índice de posição previamente estabelecido; e torneio - são criados de forma aleatória pequenos grupos de indivíduos e realizado o confronto entre eles, os vencedores da disputa serão utilizados (SIVANANDAM; DEEPA, 2009).

Uma vez selecionados os pais, os filhos são gerados através da recombinação destes utilizando um processo chamado cruzamento, mutações também podem ser incluídas para diversificar a população. Nos algoritmos genéticos clássicos, o cruzamento utiliza porções de carga genética dos pais para gerar novos indivíduos. As técnicas mais utilizadas são: por um ponto – o ponto de cruzamento é escolhido e os cromossomos dos pais são divididos do mesmo modo, o indivíduo é formado a partir da combinação da série de genes da primeira parte de um pai com segunda parte do outro; dois pontos - o cromossomo é dividido em dois pontos e o indivíduo é formado com a combinação de grupos de genes distintos de pais também distintos. Na mutação de um indivíduo é realizado a troca de forma aleatória de alguns de seus aspectos (um ou mais genes), dada através de uma probabilidade para que ocorra (SIVANANDAM; DEEPA, 2009).

O algoritmo genético continua até que um critério de parada seja satisfeito, avalia se são necessárias mais iterações ou se a solução encontrada é satisfatória. Vários critérios de paradas podem ser considerados, alguns deles são: quantidade de gerações e qualidade da população. Uma vez satisfeito, melhor cromossomo é retornado como a solução

### Algoritmos Genéticos com Chaves Aleatórias Viciadas

O Algoritmo Genético com Chaves Aleatórias viciadas (BRKGA – *Biased Random-Key Genetic Algorithm*) provém do Algoritmo Genético com Chaves Aleatórias (RKGA - *Random-Key Genetic Algorithms*), o qual foi desenvolvido por Bean (1994) como uma proposta de evolução dos algoritmos genéticos clássicos. Esses algoritmos representam uma solução de um problema como um vetor de chaves aleatórias, cromossomos representados através de vetores reais com valores no intervalo  $[0,1]$ . Há a presença de um decodificador que mapeia um vetor de chaves aleatórias numa solução do problema de otimização e calcula o custo desta solução (RESENDE., 2013).

Uma vez calculado a aptidão do indivíduo pelo decodificador, a população ( $p$ ) é dividida em dois grupos: população elite ( $p_e$ ) e população não elite. O RKGA possui uma estratégia elitista, onde todas as soluções elite são copiadas para a próxima geração. Em seguida, um conjunto de soluções aleatórias -  $p_m$  (conjunto da população imigrante ou mutante) - são introduzidas com intuito de escapar de ótimos locais. Para completar os  $p$  elementos da população, ( $p, p_e, p_m$ ) são adicionados através do cruzamento parametrizado de Spears (1991 apud GONÇALVES; RESENDE, 2011, p. 4), onde os pais são escolhidos aleatoriamente entre toda a população (elite e não elite) (GONÇALVES; RESENDE, 2011).

O BRKGA é baseado no RKGA em sua essência e difere no ponto de que o cruzamento é realizado necessariamente entre um pai da população elite e um pai da população não-elite. O BRKGA considera uma tendência na escolha dos genes de herança. Para cada gene sorteado, há uma probabilidade ( $P_e$ ) de herdar características de um indivíduo da população elite e  $1 - P_e$  da população não-elite (RESENDE., 2013).

### Recozimento simulado

O Recozimento Simulado (RS), do inglês *Simulated Annealing*, foi proposto por Scoot Kirkpatrick et al. (1983). O objetivo desse algoritmo heurístico (ou meta-heurístico) é a resolução de problemas de otimização através de um analogia com o processo de recozimento de metais. No processo de recozimento, o que se busca é aquecer o sólido além do seu ponto de fusão, para que a matéria passe do estado sólido para o líquido, resfriado lentamente. Se o resfriamento é suficientemente lento, obtêm-se uma estrutura cristalina livre de imperfeições (estado de baixa energia) (CUNHA; TAKAHASHI; ANTUNES, 2012).

O recozimento simulado foi inspirado no Algoritmo de Metropolis empregado numa sequência de temperaturas decrescentes para gerar soluções de um problema de otimização. O processo começa com um valor  $T$  elevado e a cada  $T$  geram-se soluções até que o equilíbrio àquela temperatura seja alcançado. A temperatura é então rebaixada e o processo prossegue até o congelamento (ou seja, não se obtêm mais uma

diminuição de custo). A sequência de temperaturas empregada, juntamente com o número de iterações a cada temperatura, constitui uma prescrição de *annealing* que deve ser definida empiricamente (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983).

Durante o recozimento, o material passa por vários estados possíveis. O que se busca é um estado de energia mínima para a matéria. Um resfriamento rápido conduz a produtos metaestáveis, de maior energia interna. Um resfriamento lento conduz a produtos mais estáveis, estruturalmente fortes, de menor energia.

O procedimento Metropolis da mecânica estatística fornece uma generalização da melhoria iterativa em que etapas de subida controlada também podem ser incorporadas na busca de uma solução melhor. Em cada passo desse algoritmo, um átomo recebe um pequeno deslocamento aleatório e a mudança resultante,  $\Delta E$ , na energia do sistema é calculada. Se  $\Delta E \leq 0$ , o deslocamento é aceito e a configuração com o átomo deslocado é usada como o ponto de partida do próximo passo. O caso  $\Delta E > 0$  é tratado de forma probabilística, dada por  $p = \exp(-\Delta E / (T * K))$ , onde  $T$  = temperatura atual e  $K$  uma constante. Se a  $p >$  que um aleatório sorteado, a solução de maior energia é aceita. (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983).

Quanto menor o estado de energia da solução, a propabilidade de uma nova solução ruim ser aceita também diminui. Portanto, o algoritmo de Metropolis permite a aceitação de uma piora no estado da solução (aumento da função) segundo uma certa probabilidade, como fomar de dificultar o alcance do estado intermediário do sólido (metaestáveis) (CUNHA; TAKAHASHI; ANTUNES, 2012). A temperatura é atualizada, decrescida pela equação de Geman e Geman (1984)  $T = T_0 / \log(1 + it)$ , sendo  $it$  = iteração corrente. Após esse procedimento, uma nova iteração é iniciada.

### Meta-heurísticas híbridas

Por muito tempo as comunidades de pesquisas em meta-heurística focaram no desenvolvimento das técnicas já citadas, as quais não interagem entre si e nem com a comunidade de Pesquisa Operacional. Devido a apresentar resultados significativos para área, essas meta-heurísticas puras alcançaram grande sucesso. Por exemplo, a comunidade de computação evolutiva cresceu em relativo isolamento e seguidas à risca o pensamento orientação biológica. No entanto, a tentativa de ser diferente ao tradicional apresentado na Pesquisa Operacional levou a uma desconsideração de conhecimentos valiosos de otimização recolhidos ao longo dos anos. Somente quando se tornou claro que meta-heurísticas puras tinha atingido os seus limites, investigadores voltaram-se para a combinação de diferentes algoritmos (BLUM; ROLI, 2003).

Ao longo dos últimos anos, foram relatados diversos algoritmos que não seguem o paradigma tradicional de uso de uma única Meta-heurística. Pelo contrário, os trabalhos expõem com sucesso a combinação dos vários componentes algorítmicos, muitas vezes proveniente de algoritmos de outras áreas de pesquisa sobre otimização.

As meta-heurísticas híbridas se dão através da combinação de duas ou mais estratégias de soluções de problemas, tais como diferentes meta-heurísticas, meta-heurísticas com técnicas de inteligência artificial ou de pesquisa operacional, dentre outras (RAIDL, 2006).

A principal motivação por trás da hibridização de diferentes algoritmos é explorar o carácter complementar das diferentes estratégias de otimização. Na verdade, a escolha de uma combinação adequada de conceitos algorítmicos complementares podem ser a chave para alcançar o melhor desempenho na resolução de muitos problemas de otimização. Infelizmente, o desenvolvimento de uma abordagem híbrida eficaz é, em geral, uma tarefa difícil que exige conhecimentos de diferentes áreas de otimização. Além disso, a literatura mostra que é não trivial de generalizar, isto é, um certo híbrido pode funcionar bem para os problemas específicos, mas pode executar mal para os outros. No entanto, existem vários tipos de hibridização que têm demonstrado ser bem-sucedido para muitas aplicações (BLUM; ROLI, 2003).

Todas as meta-heurísticas existentes compartilham algumas ideias e diferem entre si por certos componentes-chave característicos. Tornar esses componentes-chave explícito e coletá-los produz uma caixa de ferramentas a partir do qual podemos escolher na concepção de um algoritmo de otimização qual parece ser o mais apropriado para o problema em questão. O objetivo por trás das hibridizações de diferentes conceitos algorítmicos é normalmente a obtenção de desempenho de sistemas que exploram e unem vantagens das estratégias puras individuais (RAIDL, 2006).

O processo de hibridização se dá a partir das possíveis combinações entre: diferentes estratégias meta-heurísticas; meta-heurísticas com certos algoritmos específicos para o problema que estamos a considerar; ou meta-heurísticas com outras técnicas mais gerais provenientes de campos como a pesquisa de operacional e inteligência artificial. Exemplos de métodos de otimização de outros campos que foram combinados com sucesso com meta-heurísticas são abordagens exatas como, programação dinâmica, *branch-and-bound* e várias técnicas de programação linear inteira específica de um lado e técnicas de computação, como redes neurais e lógica fuzzy no outro lado. Esse processo dar-se por algumas propriedades (RAIDL, 2006):

- Nível de hibridização: combinações de alto nível - mantém a identidade individual dos algoritmos originais que cooperam por meio de uma interface bem definida; combinações de baixo nível - algoritmos dependem fortemente um do outro - os componentes individuais dos algoritmos são trocados.
- Ordem de execução: modelo sequencial - um algoritmo é executado depois o outro, sendo a informação passada de forma unidirecional; intercalado - a cada iteração de um algoritmo, o outro é executado; modelo paralelo: - os algoritmos são executados em paralelo e a informação pode ser passada em qualquer direção.

Meta-heurísticas paralelas são hoje em dia um grande e importante campo de pesquisa.

- Estratégia de controle: na sequencial, um algoritmo é considerado um subordinado, ou seja, componente embutido de um outro algoritmo; na combinação colaborativa, os algoritmos trocam informação, mas não são partes um do outro.

Para problemas de Localização de facilidades, várias meta-heurísticas híbridas vem sendo utilizadas, como por exemplo: GRASP reativo + Aprendizagem por Reforço (ALMEIDA, 2014), GRASP + Busca Tabu (DÍAZ et al., 2017), Algoritmo genético + Aprendizagem de Máquina (GUO; CHENG; WANG, 2017), dentre outros. Para esse trabalho, serão utilizadas estratégias meta-heurísticas (Recozimento simulado e algoritmo genético) e uma abordagem híbrida dos dois para solução do problema PLSE+.

### 2.3 TRABALHOS RELACIONADOS

A temática de localização de seções eleitorais e alocação de eleitores é um problema ainda pouco abordado na literatura. Sendo o trabalho de Oliveira (2013) pioneiro no Brasil e que aborda questões da legislação brasileira, no qual tratou e descreve o problema e os aspectos associados à logística de uma eleição em detalhes. Para tanto, considerou importantes as características inerentes do problema, regidas pela legislação brasileira, que determina uma série de restrições sobre os possíveis locais de votação. As seções eleitorais não podem ser instaladas em qualquer local disponível.

Oliveira (2013) soluciona a questão partindo do princípio que toda a estrutura pode ser remodelada e realocada, ou seja, todas as características e restrições são consideradas para compor um conjunto de locais de votação, como se não existisse um arranjo prévio, de modo a atender a demanda de forma otimizada. A solução proposta por ele utiliza de métodos exatos, através de uma formulação matemática e experimentos realizados pelo CPLEX, e métodos aproximativos, de uma meta-heurística GRASP.

O PLSE, tratado por Oliveira (2013), considera um modelo uma taxa fixa (primeira parte da equação 3.1), aplicada à instalação de qualquer nova facilidade, de modo a impor ao modelo o cálculo do número mínimo de facilidades. Como não se tem informações suficientes para informar um valor de custo associado à instalação de uma nova facilidade, foi adotado um valor excessivamente grande ( $M$ ) de modo a inibir a instalação de nova facilidade pelo próprio modelo. O valor de  $M$  é calculado multiplicando-se a maior demanda pela maior distância da instância de trabalho e ainda, pelo número de locais elegíveis.

A segunda parte da equação 3.1 é derivada do PMP que procura minimizar a máxima distância de deslocamento populacional ao mesmo tempo em que visa reduzir

o número de locais necessários, de modo a que todos os eleitores sejam atendidos, respeitada a restrição de capacidade de cada local e com o mínimo de locais possível. O modelo é o seguinte:

MINIMIZE

$$\sum_{j \in J} MX_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} e_i d_{ij} y_{ij} \quad (2.12)$$

SUJEITO A

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (2.13)$$

$$\sum_{i \in I} e_i y_{ij} \leq K_j X_j \quad \forall j \in J \quad (2.14)$$

$$y_{ij} d_{ij} \leq S \quad \forall i \in I, j \in J \quad (2.15)$$

VARIÁVEL DE DECISÃO

$$X_j = \{0, 1\} \quad \forall j \in J \quad (2.16)$$

$$y_{ij} = \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (2.17)$$

ONDE

J = conjunto de possíveis facilidades (indexado por  $j$ )

I = conjunto de nós de demanda (indexado por  $i$ )

$e_i$  = demanda no nó  $i$

$d_{ij}$  = menor distância entre o nó  $i$  e a facilidade  $j$

S = distância máxima admitida

M =  $\{\max\} e_i * \{\max\} d_{ij} * n(J)$  - peso associado à instalação de nova facilidade

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{se a facilidade } j \text{ for instalada} \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a demanda } i \text{ estiver atendida pela instalação } j \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

A função objetivo é minimizar o custo total de operação que é medido pela soma da quantidade de locais instalados  $X_j$  multiplicado pela taxa de instalação  $M$  somado

com a distância total de deslocamento de todos os eleitores. A primeira restrição garante que a demanda de todos os setores seja atendida e, ainda, que cada demanda seja atendida por uma única facilidade. A segunda restrição garante que a capacidade de atendimento de cada facilidade não seja extrapolada. A terceira restrição impõe que toda a demanda seja atendida dentro de uma distância máxima predefinida.

Oliveira (2013) realizou teste com intuito de validar a coerência da formulação proposta. Utilizou de métodos exatos, através do uso do CPLEX, e de métodos aproximativos, através da meta-heurística GRASP. Conseguiu atingir resultados satisfatórios, diminuindo o número de locais para atendimento de toda a demanda eleitoral.

Silva (2015) abordou a problemática e realizou testes iniciais para a cidade de Palmas-TO. Considerou como pontos de demanda as seções eleitorais existentes, diferentemente de Oliveira (2013) que tratou a demanda segundo as regiões geográficas determinadas pelo IBGE. Logo, o que se buscou foi minimizar o número de locais para atender as seções eleitorais previstas pelo TRE para a cidade estudada. Foi criada uma pequena instância de teste (composta de 4 locais e 8 pontos de demandas – seções eleitorais) para efeitos de validação da abordagem apresentada, e através da aplicação do *Branch-and-Bound* foi possível encontrar os valores ótimos para os experimentos realizados. Para atendimentos dos 8 pontos de demandas, eram utilizados 3 locais. Segundo a abordagem proposta, dois locais atenderiam as demandas/seções em questão.

### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo é apresentada a metodologia da pesquisa, bem como os passos que foram necessários para o desenvolvimento do trabalho de dissertação

#### 3.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA

Quanto à abordagem a pesquisa caracteriza-se pelo aspecto quantitativo, pois se utiliza de ferramentas matemáticas para analisar os resultados obtidos quanto ao valor da função objetivo que será definida. Segundo Mascarenhas (2012), nesse tipo de pesquisa, é fundamental utilizar técnicas estatísticas para garantir a confiabilidade e imparcialidade do estudo. Dados e análises quantitativas oferecem uma base segura para que conclusões possam ser tiradas. Quanto à natureza da pesquisa, a pesquisa em questão é do tipo pesquisa aplicada, pois, segundo Cervo, Bervian e Silva (2006), os estudos são motivados pela necessidade de contribuir para fins práticos, buscando soluções para problemas concretos. São utilizados conhecimentos de otimização combinatória, aliados a conceitos de localização de facilidades para tratar o problema de localização de seções eleitorais e de alocação de eleitores. Quanto aos objetivos, ela é do tipo pesquisa exploratória, onde o objetivo é proporcionar uma maior familiaridade com o problema, com o intuito de torná-lo mais explícito, visando o aprimoramento dos conhecimentos teoricamente estabelecidos (sobre o problema de localização de facilidades) e do problema real Gil (2010). A pesquisa caracteriza-se ainda como de caráter experimental, onde, segundo Cervo, Bervian e Silva (2006), busca-se estudar as variáveis relacionadas ao objeto de estudo através de ferramentas e técnicas para explorar as relações existentes. Sendo assim, serão desenvolvidos modelos matemáticos para a formulação do problema e a associação das variáveis, com aplicação de algoritmos computacionais na busca de soluções.

#### 3.2 MÉTODO PROPOSTO

De acordo com Cervo, Bervian e Silva (2006), definir o método é gerar a sequência ordenada dos diversos processos necessários para se atingir o resultado esperado. Trata-se de um conjunto de procedimentos que se mostraram eficientes ao longo da história. O método científico caracteriza-se então por um instrumento de trabalho, composto por diversas etapas que devem ser seguidas para o desenvolvimento da pesquisa.

O método utilizado no desenvolvimento da pesquisa (ver figura 3) é composto por duas fases: a primeira, de ordem teórica, a qual trata do levantamento da bibliografia associada ao tema e escrita da dissertação; a segunda, de cunho prático, onde acontecerá

a busca por soluções para o problema, como também a análise e conclusões acerca dos experimentos computacionais realizados.

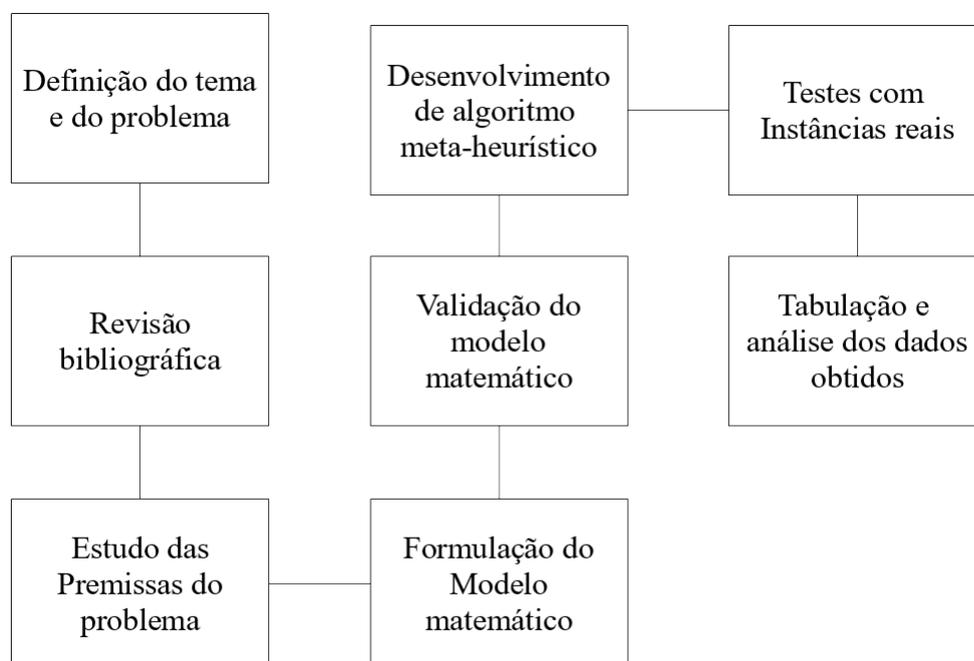


Figura 3 – Método utilizado na pesquisa.

Fonte: Autoria própria

O roteiro da pesquisa demonstrado na figura 3 é composto por:

- Definição do tema e do problema a ser abordado na dissertação;
- Revisão bibliográfica, na qual é realizado o levantamento, a pesquisa e a seleção da bibliografia inicial;
- Estudos das premissas do problema;
- Formulação do modelo matemático, com a seleção de variáveis e restrições que serão aplicadas;
- Validação do modelo matemático, envolvendo realização de testes quanto à validade e consistência do modelo proposto;
- Desenvolvimento dos algoritmos;
- Testes com as instâncias reais;
- Tabulação dos dados e resultados;

- Análise e conclusões sobre os resultados obtidos;

O planejamento da pesquisa foi fundamental para o desenvolvimento deste trabalho. Nas seções seguintes, serão descritas as atividades de implementação deste método.

## 4 PROPOSTA: O PLSE+, UMA ABORDAGEM EXATA E METAHEURÍSTICA

### 4.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O PLSE trata a questão da seleção das escolas que servirão como locais de votação e onde serão instaladas as seções eleitorais, buscando reduzir o custo de instalação e deslocamento dos eleitores, considerando-se como restrições: a distância máxima dos locais aos eleitores; a quantidade de possíveis seções em cada local de votação; e o número de eleitores que podem ser atendidos (capacidade) (OLIVEIRA, 2013).

A figura 4 exemplifica os componentes envolvidos no problema. O conjunto de blocos representa uma cidade, sendo a parte cinza a zona urbana e a branca correspondente à zona rural. Cada quadrado configura um setor geográfico definido pelo IBGE e utilizado como base para a modelagem do PLSE, que pode ser um bairro ou região e que possui demanda de eleitores. Os quadrados com figuras em formato de casa representam os locais que podem ser instaladas as seções com suas respectivas capacidades de atendimento.

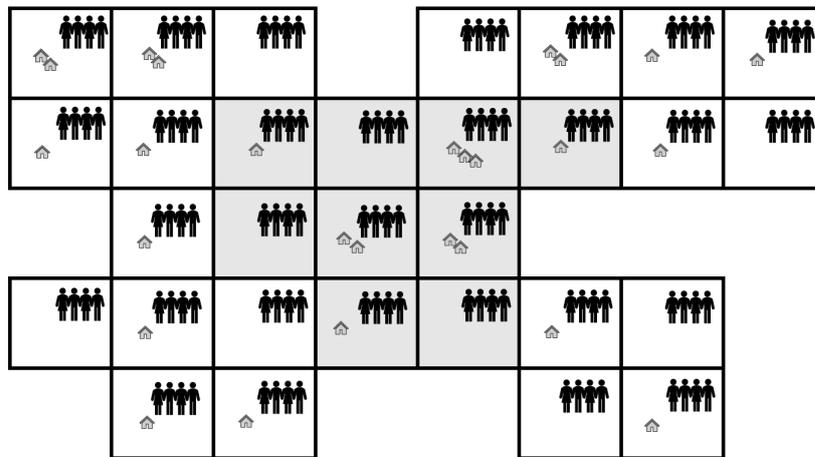


Figura 4 – Exemplo dos componentes do problema.

Fonte: Adaptado de Oliveira (2013)

Na figura 5 pode-se ver uma solução parcial para o problema, acima ilustrado, referente a zona urbana da cidade e um setor da zona rural. A quantidade de eleitores é representado pela letra  $e$ , e os locais pela letra  $L$ . Foram selecionado dois locais de votação ( $L_1$  e  $L_2$ ) para atendimento das demandas  $e_2, e_3, e_4, e_7$  e  $e_1, e_5, e_6, e_8, e_9, e_{10}$ , respectivamente (OLIVEIRA, 2013).

Para testes maiores, Oliveira (2013) utilizou a divisão censitária estabelecida pelo IBGE e marcou os possíveis locais de votação. No período de criação da instância, o TRE empregava 66 locais de votação para a cidade de Mossoró-RN, sendo 52 locais de

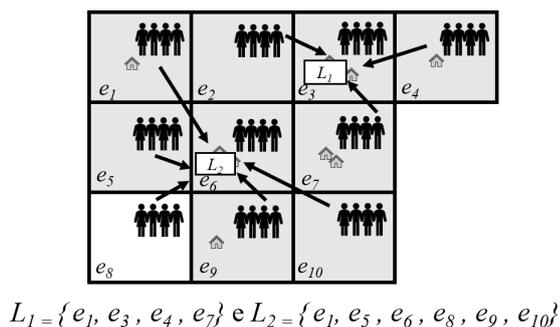


Figura 5 – Seleção dos locais de votação para alocação de eleitores.

Fonte: Adaptado de Oliveira (2013)

votação na zona urbana e 14 na zona rural.

Para exemplificar, tomamos uma instância parcial denominada  $Mos_{27 \times 20}$ , a qual corresponde a um grande e populoso bairro da cidade, cuja representação pode ser vista na figura 4.3. Para tal, foram considerados 27 setores geográficos (pontos de demandas, representados por blocos vermelhos) e 20 possíveis locais para atendimento (seções eleitorais, representados pelas casas verdes). Dessa estrutura, o TRE utiliza 11 locais, ou seja, 11 seções eleitorais são utilizadas para atendimento da demanda.

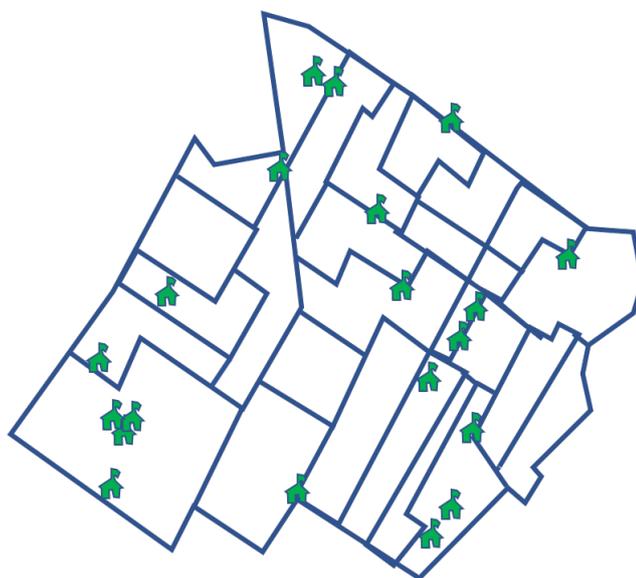


Figura 6 – Representação da instância  $Mos_{27 \times 20}$ .

Fonte: Autoria própria

O PLSE surge como abordagem para redução dos gastos com o grande número de seções abertas pelo TRE, sem qualquer critério para instalação. Como já discutido, parte do princípio de que todas os prédios disponíveis da região, normalmente escolas, são possíveis candidatos, escolhendo os melhores locais e assim remodelando toda

a estrutura de votação. Para a instância  $Mos_{27 \times 20}$ , utilizando os métodos de solução desenvolvido por Oliveira (2013), foi obtido como resultado a viabilidade de abertura de quatro locais de votação para todo o atendimento da demanda. A solução pode ser visualizada na figura 7, onde as casas em vermelho mostram a escolha ótima pelo modelo.

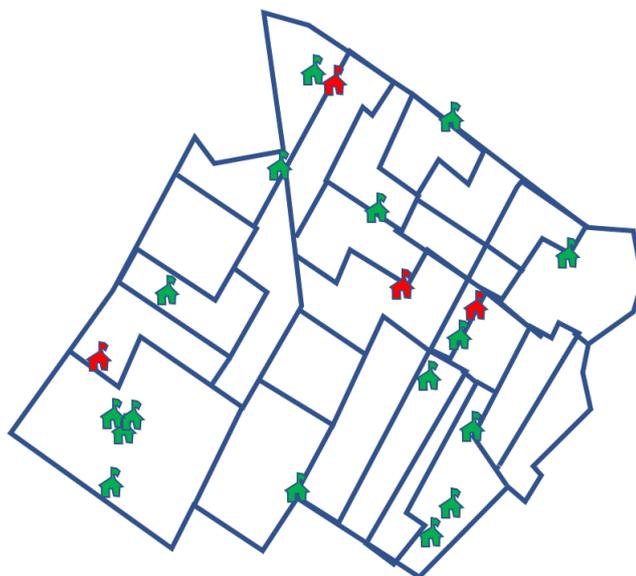


Figura 7 – Solução PLSE para a instância  $Mos_{27 \times 20}$ .

Fonte: Autoria própria

O PLSE+, ou PLSE modificado, foco deste trabalho, busca explorar os melhores locais, de modo a impactar minimamente a estrutura vigente definido pelo TRE. Desta forma, é considerado na obtenção da solução um critério de preferência dentre os prédios já utilizados como local de votação. Esse critério é dado através de um peso diferenciado a estes locais. Na figura 8, pode-se ter uma representação visual do PLSE+, onde os locais em destaques (casas azuis) são aqueles que são disponibilizados pela estrutura atual de votação.

Considerou-se, no processo de escolha dos locais de votação, aqueles locais que já são utilizados pelo TRE, com um parâmetro de preferência associado a estes locais. Na próxima seção, será mostrado como essa preferência é feita no novo modelo proposto.

## 4.2 ABORDAGEM EXATA

### 4.2.1 Modelo matemático para o PLSE+

Para este trabalho, considera-se desenvolver uma proposta para uma aproximação do problema para a utilização prática das soluções a serem desenvolvidas. Busca-se otimizar e melhor arranjar a estrutura existente, ou seja, determinar o arranjo ótimo da estrutura atual fornecida pelo TRE para os locais de votação. A preocupação em partir

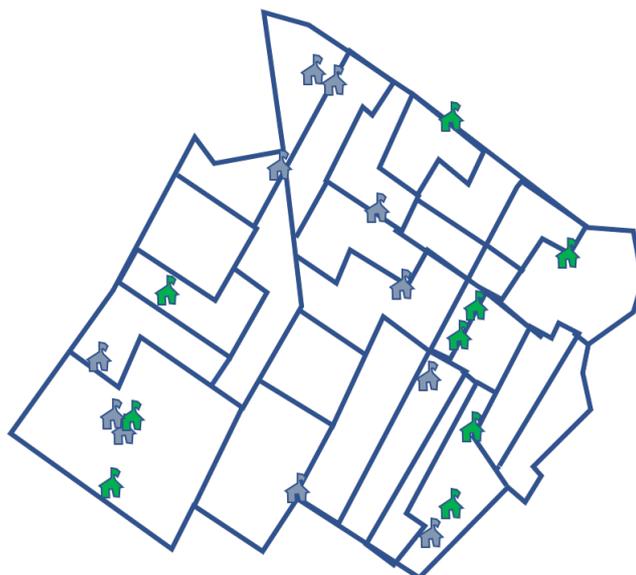


Figura 8 – Disposição das seções eleitorais pelo TRE.

Fonte: Autoria própria

da estrutura já existente surge da não viabilidade da composição de uma nova estrutura por considerar uma série de fatores políticos e sociais Oliveira (2013).

Propõe-se então a adição de um parâmetro ao modelo matemático desenvolvido por Oliveira (2013),  $\alpha_j$ , que assume valor 1, caso a facilidade já seja utilizada pelo TRE e maior que 1, caso contrário. Com isso, busca-se forçar o modelo a priorizar as facilidades já utilizadas, alcançando a viabilidade prática para a solução do problema descrito. A modificação proposta pode ser visualizada a seguir:

MINIMIZE

$$\sum_{j \in J} \alpha_j M X_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} e_i d_{ij} y_{ij} \quad (4.1)$$

SUJEITO A

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (4.2)$$

$$\sum_{i \in I} e_i y_{ij} \leq K_j X_j \quad \forall j \in J \quad (4.3)$$

$$y_{ij} d_{ij} \leq S \quad \forall i \in I, j \in J \quad (4.4)$$

$$X_j = \{0, 1\} \quad \forall j \in J \quad (4.5)$$

$$y_{ij} = \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (4.6)$$

ONDE

$J$  = conjunto de possíveis facilidades (indexado por  $j$ )

$I$  = conjunto de nós de demanda (indexado por  $i$ )

$e_i$  = demanda no nó  $i$

$d_{ij}$  = menor distância entre o nó  $i$  e a facilidade  $j$

$S$  = distância máxima admitida

$\alpha_j = 1 + c$

$M = \{\max\}e_i * \{\max\}d_{ij} * n(J)$  (peso associado à instalação de nova facilidade)

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{se a facilidade } j \text{ for instalada} \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a demanda } i \text{ estiver atendida pela instalação } j \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

A primeira parte do modelo ( equação 4.1) utiliza uma taxa fixa, aplicada à instalação de qualquer nova facilidade, de modo a impor o cálculo do número mínimo de facilidades. Foi adotado um valor excessivamente grande ( $M$ ) de modo a inibir a instalação de nova facilidade pelo próprio modelo, além de um  $\alpha_j$  como forma de premiação ou punição pela escolha de locais já utilizados ou não pelo TRE.

A segunda parte da equação ( equação 4.2) é derivada do PMP, o qual procura minimizar a máxima distância de deslocamento populacional ao mesmo tempo em que visa reduzir o número de locais necessários, de modo a que todos os eleitores sejam atendidos, respeitada a restrição de capacidade de cada local e com o mínimo de locais possível.

Para o problema descrito, existe um subconjunto  $J' \subset J$  composto por todas as facilidades utilizadas pelo TRE. O que se pretende com a adição do  $\alpha_j$  na equação 4.1, baseada na taxa fixa, é que sejam preferidas as possibilidades de locais já existentes, ou seja, para estas escolhas seja dado um prêmio (menor custo dentre todas as possibilidades), na forma do valor 1 atribuído a  $\alpha_j$ . Caso a facilidade selecionada seja uma nunca utilizada, o valor de  $\alpha_j$  assume valor maior que 1. O resultado disso é uma tentativa de minimizar a escolha de facilidades com o menor impacto nas instalações já utilizadas pelo TRE, ou seja, que os locais que já são utilizadas sejam favorecidas diante das demais opções.

Assim, a função objetivo é minimizar o custo total de operação que é medido pela soma da quantidade de locais instalados ( $X_j$ ) multiplicado pela taxa de instalação ( $M$ ) e pelo peso associado a escolha da instalação ( $\alpha_j$ ) somado com a distância total de deslocamento de todos os eleitores. As demais restrições se assemelham ao descrito para o PLSE na seção 2.3.

### 4.3 ABORDAGENS META-HEURÍSTICAS

Nesta seção serão apresentadas as abordagens de solução do PLSE+ com meta-heurísticas, sendo elas o algoritmo genético, BRKG, recozimento simulado e um algoritmo híbrido.

#### 4.3.1 Algoritmo genético

Neste trabalho, apresentamos um algoritmo genético para resolução do PLSE+. Esse algoritmo utiliza um cromossomo formado pelas demandas e a ordem em que elas se encontram dentro do cromossomo define a precedência em relação à escolha do local de votação. Assim, as demandas no cromossomo escolhem o local de votação mais próximo a elas e que não esteja cheio. A medida que o algoritmo preenche os locais de votação, as demandas começam a ser alocadas aos locais de votação mais distantes, quando os mais próximos excedem a capacidade. A figura 4.6 apresenta um esquema do algoritmo proposto.

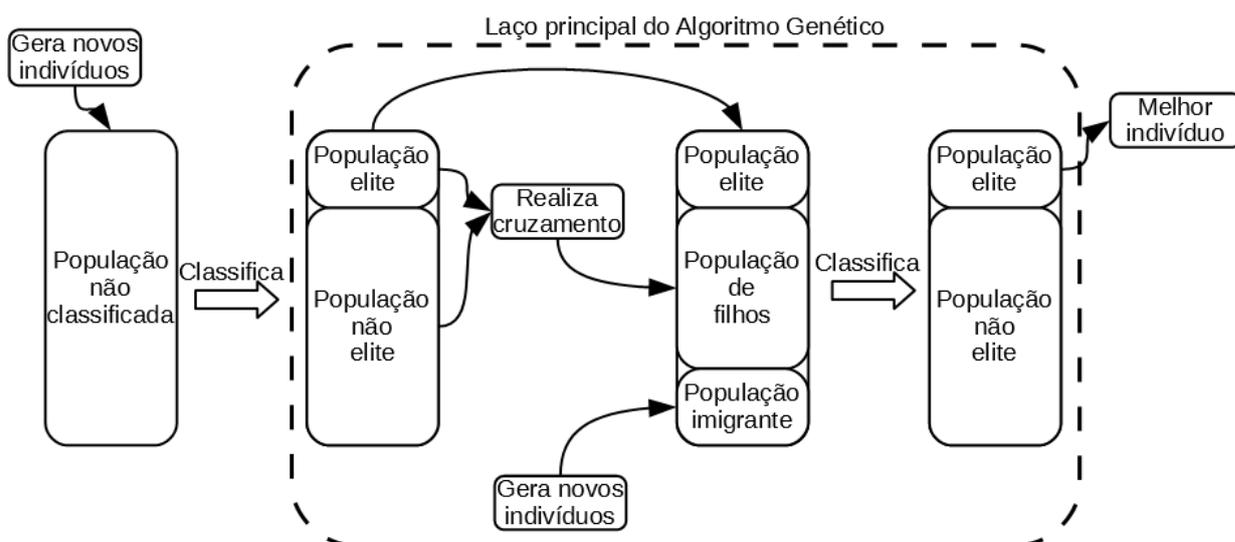


Figura 9 – Algoritmo genético desenvolvido para o PLSE+.

Fonte: Autoria própria

O algoritmo possui uma população com três grupos distintos de indivíduos. O primeiro é a população elite que corresponde aos  $p$  primeiros elementos da classificação da população. Essa população elite é salva de uma geração para outra e seus indivíduos possuem mais chances de passarem seus genes para as gerações seguintes.

O segundo grupo é a população de filhos, que é gerada a partir do cruzamento dos indivíduos da população atual. Para esse cruzamento, foi escolhida a política de ter sempre um indivíduo da população elite com um indivíduo da população não elite e há

uma tendência introduzida no algoritmo para que os genes dos pais da população elite tenham mais chances de serem escolhidos.

A terceira população é a população imigrante. Essa população é formada por indivíduos totalmente novos, gerados com o intuito de evitar que a população fique evolutivamente estagnada, quando a sua diversidade é muito baixa e cruzamentos geram indivíduos bem parecidos ou iguais aos pais.

O algoritmo genético (algoritmo 1) inicia, a partir da instância e parâmetros de configuração, gerando um conjunto de soluções aleatórias (linhas 4 a 5). A partir daí, dá-se o início do laço principal da abordagem genética (linha 7) e ele executa até que o critério de parada seja satisfeito.

---

### Algoritmo 1: Algoritmo genético / BRKGA

---

**Entrada:** Arquivo de instância e os parâmetros de configuração

**Saída:** Melhor solução encontrada

```

1 início
2   pA = população Atual; nP = nova População;
3   tamPe = tamanho da população elite; tamPi = tamanho da população imigrante;
4   para i ← 1 até pA.tam faça
5     | pA[i] ← novaSoluçãoRandômica();
6   fim
7   repita
8     | para i ← 1 até tamPe faça
9       | nP[i] ← pA[classificaçãoAtual[i]];
10    fim
11    para j ← 1 até tamPi faça
12      | nP[j + tamPe] ← novaSoluçãoRandômica();
13    fim
14    listaPais ← organizaPais(classificaçãoAtual);
15    para k ← 1 até tamPopulaçãoDeFilhos faça
16      | nP[k + tamPe + tamPi] ← cruzamento(listaPais,pA);
17    fim
18  até critériosDeParada;
19 fim

```

---

A população elite é salva uma iteração para a seguinte (linhas 8 a 10). Novos indivíduos são adicionados para compor a nova solução (linhas 11 a 13), etapa correspondente ao fenômeno de mutação. A lista de pais possíveis é gerada a partir da solução atual (linha 14). Para o cruzamento (linha 15 a 17), um indivíduo da população elite e um da população não-elite (população de filhos e imigrantes) são selecionados. O cruzamento testado ocorre de três formas: parametrizado, por um ponto e dois pontos. Nesse sorteio, uma tendência foi aplicada de modo que é mais fácil sortear genes da população elite que não elite. A população gerada é identificada e classificada para dar início a próxima geração.

A finalização do algoritmo se dá quando a condição de parada é satisfeita, a qual pode ser até que se realize um número de iterações determinado ou um tempo

de execução seja estabelecido. Neste caso, o algoritmo é executado por um total de trezentas iterações.

### 4.3.2 Algoritmo genético com chaves aleatórias viciadas - BRKGA

Para o PLSE+, são considerados as mesmas características descritas para o algoritmo genético apresentado anteriormente, com a distinção da presença do decodificador – que faz o mapeamento das chaves aleatórias para o cálculo da função objetivo (ver figura 10). O algoritmo é iniciado através da geração da população de novos indivíduos de chaves aleatórias.

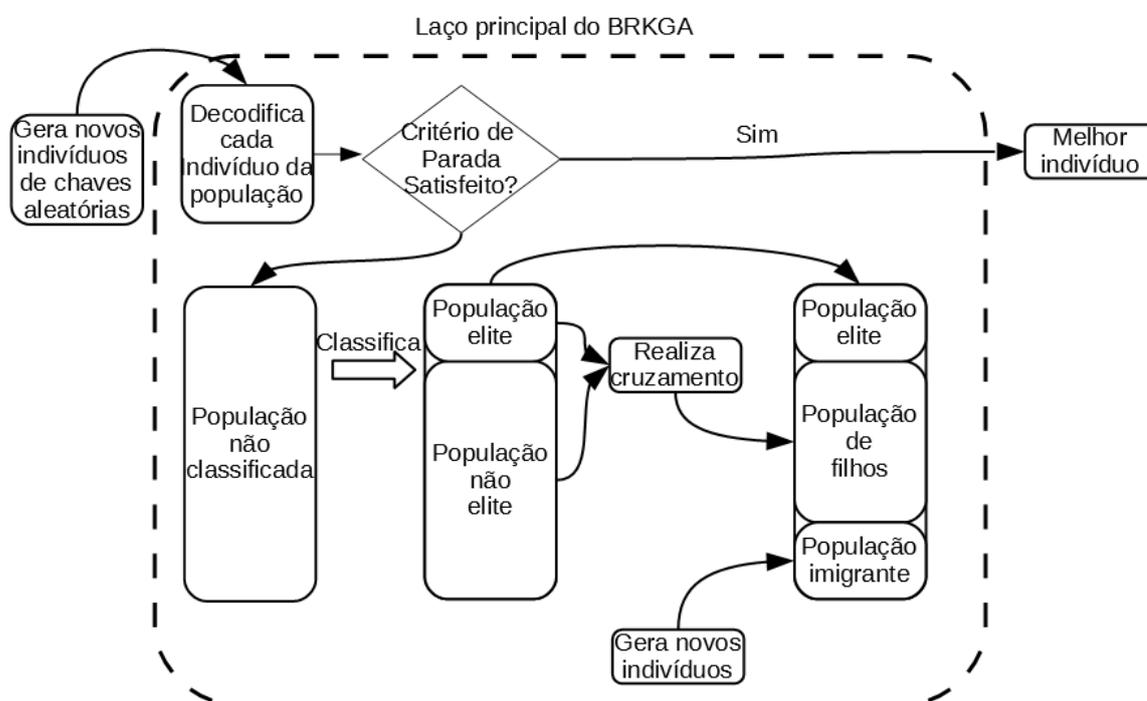


Figura 10 – BRKGA desenvolvido para o PLSE+.

Fonte: Autoria própria

Esses indivíduos são decodificados e suas funções de custo calculadas, caso o critério de parada tenha sido satisfeito, o melhor indivíduo é apresentado, caso contrário, a população de chaves aleatórias é classificada e dividida em duas,  $p_e$  e  $p - p_e$ . A população elite é enviada em sua totalidade para a próxima geração, a população imigrante é criada e é realizado o cruzamento entre um membro aleatório  $p_e$  e da  $p - p_e$ . Uma vez gerada a nova população, esta é decodificada e avaliada. A sequência de passos é repetida até que o critério de parada seja satisfeito. No próximo capítulo é apresentado como essa configuração foi realizada para o algoritmo proposto.

Como já mencionado, o AG e o BRKG diferem entre si na forma como o cromossomo é codificado, portanto, o algoritmo 1 vale como pseudocódigo tanto para o AG como para o BRKGA.

### 4.3.3 Recozimento Simulado

O algoritmo RS desenvolvido para o PLSE+ pode ser visto na figura 11 e no algoritmo 2. O início do algoritmo se dá pela geração de uma solução aleatória (S1) de ponto de partida (linha 2). Essa solução é avaliada e armazenada, pois trata-se da melhor solução conhecida. É importante definir, nesse passo, a temperatura inicial do algoritmo (linha 3), que deve ser suficientemente grande para que todos os valores possíveis sejam aceitos inicialmente, permitindo que todo o espaço de busca possa ser explorado.

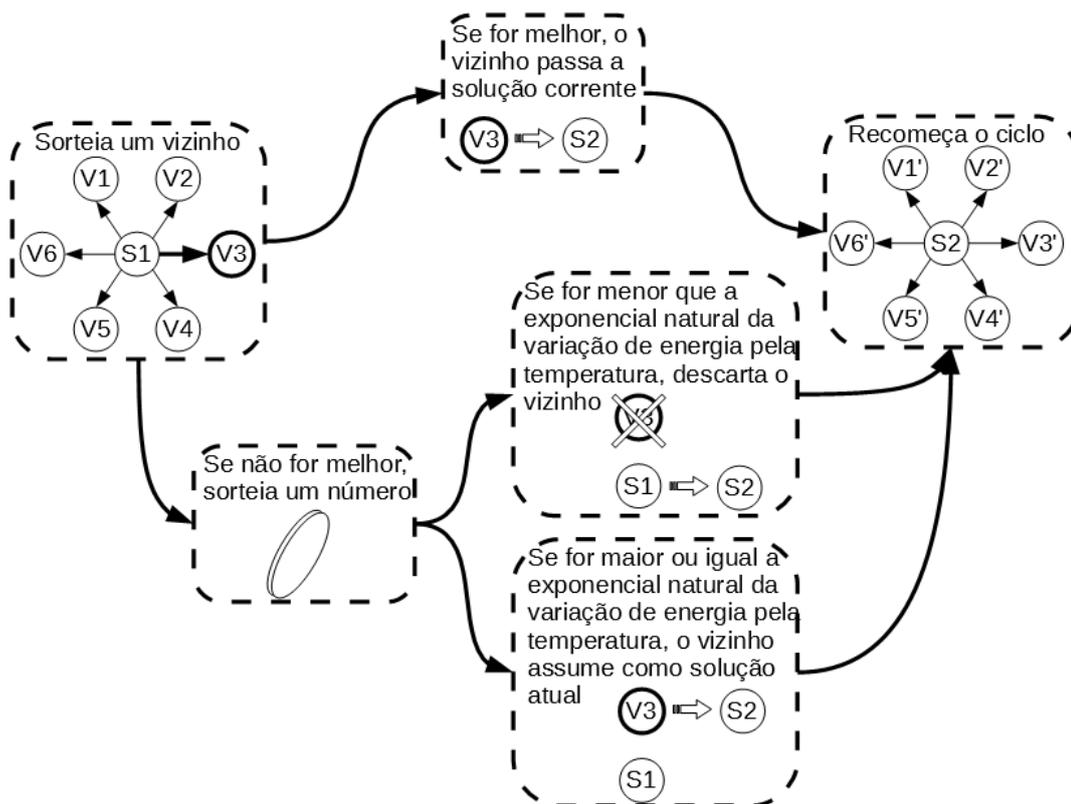


Figura 11 – Recozimento simulado desenvolvido para o PLSE+.

Fonte: Autoria própria

**Algoritmo 2:** Recozimento simulado

---

**Entrada:** Arquivo de instância e os parâmetros de configuração  
**Saída:** Melhor solução encontrada

```

1 início
2   S ← soluçãoInicial();
3   T ← temperaturaInicial;
4   iteração ← 1;
5   repita
6     para r ← 1 até rMáximo faça
7       S' ← perturbação(S);
8       ΔE ← energia(S') - energia(S);
9       if ΔE ≤ 0 ou exponencialNatural(ΔE / temperatura) then
10        S ← S'
11      fim
12      T' ← T / logaritmoNatural(1 + iteração);
13      iteração ← iteração + 1;
14 até critériosDeParada;
15 fim

```

---

Uma perturbação é aplicada na solução e um vizinho é encontrado (V3) (linha 7). Essa perturbação possui dois fatores: uma perturbação mínima e o fator Gaussiano. A força da perturbação é dada pela seguinte equação  $(tam * \frac{T}{T_{max}} + fm) * gaussrand$ , onde  $tam$  = tamanho da solução;  $T$  = temperatura atual;  $T_{max}$  = temperatura máxima;  $fm$  = força mínima de perturbação. Quanto maior a temperatura, maior a possibilidade de haver variações bruscas, ou seja, maior é a perturbação na solução. Essa possibilidade tende a diminuir com a queda temperatura. Além da temperatura, há uma distribuição gaussiana que aumenta as chances que vizinhos mais próximos sejam explorados. Já a força mínima impede que as perturbações tornem-se muito pequenas quando a temperatura cair.

A energia de V3 é calculada e uma variação é determinada com base a solução anterior ( $\Delta = E(atual) - E(anterior)$ ) (linha 8). Se  $\Delta$  é negativo, isso significa que a solução atual é melhor que a anterior, e esta última passa a ser a solução corrente. Se  $\Delta$  é positivo, a probabilidade desta solução de maior energia ser substituída é dada por  $p = exp(-\Delta / (T * K))$ , onde  $T$  = temperatura atual e  $K$  uma constante. Se a  $p >$  que um aleatório sorteado, a solução de maior energia é aceita. Caso contrário, a solução com mais baixo estado de energia permanece. A temperatura é atualizada, decrescida pela equação  $T = T_0 / log(1 + it)$ , sendo  $it$  = iteração corrente (linha 12 e 13). Após esse procedimento, uma nova iteração é iniciada. O algoritmo é finalizado quando o critério de parada é encontrado, tratando-se do número  $X$  de iterações atingidas.

### 4.3.4 Abordagem híbrida: algoritmo genético e recozimento simulado

Os métodos híbridos oferecem a possibilidade de gerar algoritmos com maior eficiência e/ou qualidade da solução do que as individuais, uma vez que possibilita a combinação dos pontos fortes das estratégias combinadas.

O híbrido apresentado nesta seção é do tipo intercalado, onde a cada interação de um algoritmo, outro é executado. O AG tenta otimizar globalmente, explorando o espaço de busca e gerando uma semente de qualidade (população elite) para a execução do RS. A figura 12 ilustra o algoritmo desenvolvido para o PLSE+.

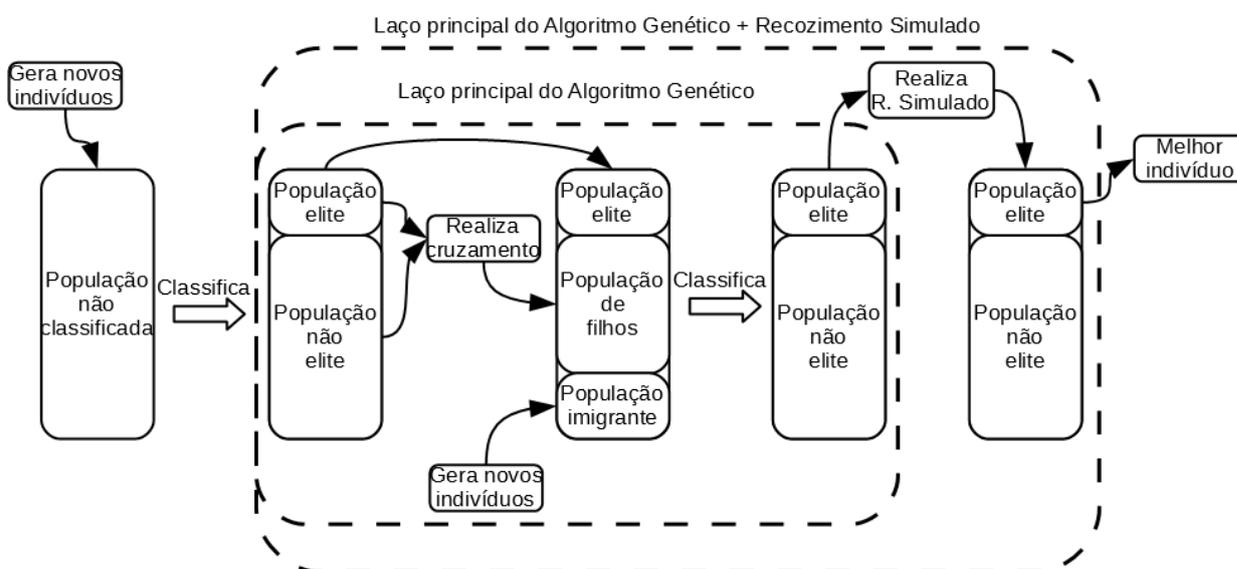


Figura 12 – Algoritmo genético + Recozimento simulado aplicado ao PLSE+

Fonte: Autoria própria

Após executada as iterações configuradas para o AG ( x número de rodadas), é sorteado uma solução da população elite, que servirá como ponto de partida para a execução do RS (substituindo o cruzamento naquele momento). O RS funcionará por um número de iterações pré-definidas (chamado de intervalo de uso), gerando a nova população de filhos. O cruzamento é retomado a partir desse ponto, e dá-se continuidade ao AG tradicional. A intercalação entre o AG e o RS se dá até que o número de rodas chegue ao fim. Assim, as soluções são classificadas e o melhor indivíduo encontrado é revelado.

## 5 RESULTADOS

Neste capítulo, os materiais e métodos, para validação das técnicas apresentadas no capítulo anterior, serão descritos. Os resultados dos testes realizados serão apontados e discutidos para a construção do conhecimento proposto por este trabalho, um estudo sobre meta-heurísticas para solução do PLSE+.

### 5.1 MATERIAIS UTILIZADOS

Os materiais para realização dos testes é composto pelos softwares e hardware. Foram utilizado dois recursos de software: para realizar a validação da modelagem matemática, foi utilizado o IBM ILOG CPLEX *Optimization Studio*<sup>1</sup>; para os algoritmos, foram desenvolvidos e compilados na plataforma Ubuntu Linux 16.04, através da linguagem C e compilador GCC 4.8. O hardware utilizado foi um computador PC com processador AMD Phenon II - 3,4GHz e 4GB de memória RAM DDR2 800MHz.

Para os testes dos métodos de solução desenvolvidos foram utilizadas as instâncias criadas por Oliveira et al. (2013) em sua pesquisa de mestrado, na qual descreve o procedimento metodológico para sua obtenção e valida a consistência destas através da análise de sensibilidade para as soluções encontradas. A instância total gerada para o município de Mossoró é formada por 287 setores, urbanos e rurais, e 198 locais de votação, o que gera uma matriz de distância que contem 56826 elementos (instância denominada  $Mos_{287 \times 198}$ ). Para fins de teste e diversificação dos resultados e aprofundamento do estudo, foram geradas duas sub instâncias da instância total, tratadas como instâncias independentes ( $Mos_{112 \times 82}$  e  $Mos_{242 \times 166}$ ), de modo que todos os métodos foram aplicados às três.

### 5.2 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

#### 5.2.1 Método exato

Para fins de estudo do PLSE+, foram realizados teste comparativos com o PLSE original usando o CPLEX. Para o exemplo anterior citado, a instância  $Mos_{27 \times 20}$ , que foi criada para tornar didática a explanação do problema. O resultado do PLSE+ pode ser visto na figura 13. Pode-se notar que, apesar de utilizar o parâmetro de preferência, o número de locais foi reduzido para o mesmo número que o PLSE, quatro locais de votação. No entanto, os locais escolhidos foram diferentes.

A solução gerada para o PLSE+ foi baseada no menor custo para a escolha de locais que já são utilizados pelo TRE. O fator de preferência não garante o melhor

<sup>1</sup> O CPLEX é uma ferramenta de suporte à decisão, baseada em técnicas de otimização, para solução de problemas



Figura 13 – Solução da instância  $Mos_{27 \times 20}$  pelo PLSE+ (esquerda) e PLSE (direita).

Fonte: Autoria própria

resultado global (menor função objetivo quando comparada ao PLSE), mas permite a busca por uma solução que cause impacto mínimo na estrutura vigente.

O fato de ter coincido, para esse caso, o número igual de locais de votação (4 locais) para ambos os modelos, não o torna uma regra a ser buscada. Pode acontecer que, para ambos os modelos sob as mesmas instâncias, o número de locais sejam diferentes nas soluções finais, uma vez que o custo de abertura de uma instalação para o PLSE é uniforme e para o PLSE+ é diferenciado segundo preferências as serem determinadas.

### Comparação com a situação real

Os experimentos foram realizado com as duas sub instâncias -  $Mos_{112 \times 82}$ ,  $Mos_{242 \times 166}$  e a instância total  $Mos_{287 \times 198}$ , através do modelo matemático proposto neste trabalho e o estabelecido por Oliveira (2013). Este modelo foi processado através do CPLEX. O que se busca com esse método de solução é uma solução ótima para o problema.

Para tanto, as instâncias foram executadas e tabuladas para análise de dados e delineamento de estratégias de solução. O CPLEX não conseguiu obter a solução ótima para as maiores instâncias mesmo quando rodando mais que 24h. Por isso, foi delimitado o tempo de execução máximo de 1 h para as instâncias trabalhadas. Foram anotados (1) os *gaps* apresentados e o tempo que o software levou para cada instância chegar até sua melhor solução.

A primeira coluna da tabela 1 apresenta os dados referente às instâncias, seguido pelo número de locais encontrado pelo método para aquele tamanho de problema, o valor da função objetivo, o tempo de processamento e o *gap* para se chegar à solução

Tabela 1 – Resultados obtidos para as instâncias  $Mos_{112x82}$ ,  $Mos_{242x166}$  e  $Mos_{287x198}$ 

Dados		CPLEX PLSE			CPLEX PLSE+			
Instâncias	Locais	Objetivo	Tempo (s)	Gap	Locais	Objetivo	Tempo (s)	Gap
$Mos_{112x82}$	15	11063553916	2849	0,00%	15	11832100638	1186	0,00%
$Mos_{242x166}$	37	93113714205	86400	2,80%	37	101300812245	3600	3,04%
$Mos_{287x198}$	34	489532076040	86400	1,18%	38	547030663069	3600	3,28%

ótima para o PLSE e o PLSE+. A coluna *Gap* representa o fato do otimizador ter ou não encontrado uma solução ótima, de modo que, quando maior do que zero ( $gap > 0,00\%$ ), isso significa que "ainda é possível" haver uma diferença entre a melhor solução encontrada pelo CPLEX e uma solução ótima.

Sendo o PLSE+ um problema real, foi realizada uma comparação do resultado obtido com ele com a situação atual existente no município de Mossoró em termos de localização das seções eleitorais e com os resultados gerados por Oliveira (2013), usando o PLSE original. A tabela 2 apresenta os resultados dessa análise.

Tabela 2 – Resultados obtidos para as instâncias  $Mos_{112x82}$ ,  $Mos_{242x166}$  e  $Mos_{287x198}$ 

Instâncias	Dados		CPLEX PLSE		CPLEX PLSE +	
	Real	Locais	Redução (%)	Locais	Redução (%)	
$Mos_{112x82}$	28	15	46	15	46	
$Mos_{242x166}$	52	37	29	37	29	
$Mos_{287x198}$	66	34	48	38	42	

Observa-se que, para todas as instâncias consideradas, o modelo gerou soluções com o número de locais de votação bem abaixo do que o número existente na situação real, variando a redução do número de locais de votação entre 29% e 48%. Entre os modelos PLSE e PLSE+ houve uma sutil diferença nessa redução, mostrando assim a coerência e validade a de que a proposta do parâmetro de preferência traz ao problema de alocação de eleitores e locais de votação.

Na tabela 3 é possível visualizar o impacto das escolhas do PLSE+ e PLSE. Para a instância  $Mos_{112x82}$ , o PLSE+ apresentou 93,33% dos locais já utilizados pelo TRE, enquanto que o PLSE original utilizou apenas 60% desses locais. Para a instância  $Mos_{242x166}$ , o PLSE+ utilizou 56,49% e o PLSE 45,71. Já paraa  $Mos_{287x198}$ , foram utilizados 87,50% e 71,43%, respectivamente.

Tabela 3 – Percentual dos locais escolhidos já utilizados pelo TRE

Instância	PLSE	PLSE+
$Mos_{112x82}$	60%	93,33%
$Mos_{242x166}$	45,71%	56,49%
$Mos_{287x198}$	71,43%	87,50%

A modelagem para o PLSE+ ou PLSE modificado trouxe um resultado satisfatório para a significância do parâmetro de preferência proposto. Porém, o tempo de resposta gerado pelo método exato, o CPLEX, justifica a necessidade do desenvolvimento das meta-heurísticas para instâncias grandes do problema.

### 5.2.2 Resultados do algoritmo genético e BRKGA

Foram realizados experimentos para calibragem dos parâmetros envolvidos na execução do algoritmo genético e do BRKGA. Para ambos algoritmos, por apresentar características semelhantes, os parâmetros considerados foram: a tendência envolvida no processo de escolha do percentual da população elite e não elite para o cruzamento, o tamanho da população, o tamanho da população elite, e o tamanho da população imigrante.

As tendências testadas foram 50-50%, 60-40% e 70-30%, elite e não elite respectivamente. Para o AG, a disposição de 70% para população elite (30% para a população não elite, conseqüentemente) se mostrou mais eficiente e essa foi a configuração utilizada. Para o BRKGA, 60% foi a tendência utilizada.

O tamanho da população variou segundo o tamanho das demandas, através de um fator multiplicador (1, 2 ou 4 vezes esse valor). O tamanho escolhido foi de quatro vezes o número de demandas a serem alocadas para ambos algoritmos. Em relação a geração da população: para o AG - ficou dividida em 10% para população elite e 10% para população imigrante; para o BRKGA, 10% para a população elite e 30% para população imigrante. Esses valores também foram obtidos através de testes com alguns valores de 10, 20, 30 e 40% para população elite e 0, 10, 20 e 30% para população imigrante. A configuração de execução do algoritmo genético após a realização dos experimentos de calibração, podem ser vistos na tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetros de configuração escolhidos para o AG e BRKGA

Parâmetros	AG	BRKGA
Tamanho da População	4x	4x
Percentual População elite	10%	10%
Percentual População imigrante	10%	30%
Tendência	70%	60%

Para a configuração apresentada (4), foram realizados 100 testes para ambos algoritmos com um total de 300 iterações cada (a solução estagnava em média na iteração 150). Para o algoritmo genético, três versões são apresentadas e modificam-se entre si no que diz respeito a operação de cruzamento (por 1 ponto, por dois pontos e parametrização), onde é apresentado a melhor solução encontrada, a média da função objetivo das 100 melhores soluções, o desvio padrão, o tempo médio em segundos (tempo de estagnação em cada execução) e o *gap* (valor da aproximação encontrada

pela melhor solução em relação a solução ótima conhecida Os resultados podem ser visualizados nas tabelas 5,6 7 ).

Tabela 5 – Resultados do algoritmo genético para as instâncias do PLSE+

Instância	Melhor Solução	Média	$\sigma$	T(s)	Iterações	Gap
$Mos_{112 \times 82}$	12677238784	13044128394	2,96%	10,18	290	7,14%
$Mos_{242 \times 166}$	104202723328	106655042780	0,33%	77,42	154	2,86%
$Mos_{287 \times 198}$	576191791104	582147371827	1,21%	107,04	180	5,33%

Conforme pode ser visto na tabela 5 foi possível encontrar um valor muito próximo do ótimo conhecido, em tempo viável. Para a instância  $Mos_{112 \times 82}$ , apesar do *gap* mais elevado (7,14%), este representa a distância para o ótimo propriamente dito, já que tal ótimo é conhecido (ver tabela 5.1). Para as demais, *gaps* próximos ou menores que 5%, representam a boa qualidade da solução encontrada. Pode-se observar também o desvio padrão em relação as soluções obtidas, onde o maior foi 2,96%. Isso, junto com o *gap*, demonstra que, na maioria das vezes, tais soluções são de boa qualidade.

Na tabela 6 é apresentado as soluções encontradas para o algoritmo genético utilizando o cruzamento por 1 ponto. Essa operação sorteia um número, entre 1 e o tamanhoDoCromossomo - 1, pega os genes do progenitor 1 até aquele ponto e do progenitor 2 a partir daquele ponto. Apresentou *gaps* superiores quando comparados ao anterior, embora tenha apresentado uma suave redução no tempo de execução. Quanto ao desvio padrão, significativas reduções foram encontradas.

Tabela 6 – Resultados do AG (cruzamento 1p) para as instâncias do PLSE+

Instância	Melhor Solução	Média	$\sigma$	T(s)	Iterações	Gap
$Mos_{112 \times 82}$	13473961984	13496273075	0,05%	6,32	139	13,88%
$Mos_{242 \times 166}$	106778992640	107906299684	1,18%	63,67	155	5,41%
$Mos_{287 \times 198}$	576302088192	588996515478	0,79%	102,19	154	5,35%

A tabela 7, para o AG com cruzamento através de dois dois pontos, apresenta excelentes resultados com relação a *gaps* e desvio padrão, mas com a penalidade da elevação do tempo de processamento. Para a instância  $Mos_{242 \times 166}$  o *gap* chegou a 0,25%, sendo o melhor valor encontrado nos experimentos. É possível ainda explorar essa configuração de modo a obter resultados ainda melhores. Para critérios de comparação entre os três operados, foi utilizado o mesmo número de iterações, mas para esse último é possível explorara mais iterações antes de chegar a estagnação do algoritmo.

O BRKGA (ver tabela 8) apresentou bons resultados para as instâncias testadas, mas inferiores ao AG tradicional em termos de valor de melhor solução. O *gap* fica abaixo do AG com cruzamento de 2 pontos e parametrização. Os desvios padrões apresentaram-se compatível com as demais soluções, considerados baixos para todas

Tabela 7 – Resultados do AG (cruzamento 2p) para as instâncias do PLSE+

Instância	Melhor Solução	Média	$\sigma$	T(s)	Iterações	Gap
<i>Mos</i> <sub>112x82</sub>	12637679616	12811082234	2,46%	13,22	294	6,81%
<i>Mos</i> <sub>242x166</sub>	101552693248	105071930604	1,24%	121,26	289	0,25%
<i>Mos</i> <sub>287x198</sub>	561806639104	569475881369	1,26%	194,05	294	2,70%

as instâncias, o que demonstra baixa dispersão do conjunto de soluções encontrados, estando bastante próximas da média.

Tabela 8 – Resultados do BRKGA para as instâncias do PLSE+

Instância	Melhor Solução	Média	$\sigma$	T(s)	Iterações	Gap
<i>Mos</i> <sub>112x82</sub>	12714963968	13198882664	1,76%	10,48	187	7,46%
<i>Mos</i> <sub>242x166</sub>	104186331136	106777946440	1,08%	79,987	166	2,85%
<i>Mos</i> <sub>287x198</sub>	576285900800	580979863472	0,91%	137,08	154	5,35%

### 5.2.3 Resultados do Recozimento Simulado

A execução do Recozimento Simulado requer os seguintes parâmetros de configuração: número de iterações, a temperatura inicial a constante k, repetições R e força da perturbação mínima. Foram executados 1.000.000 de iterações, a temperatura inicial foi fixada em 1.000.000, 10 repetições e força das perturbações mínima igual a 1. A tabela 9 apresenta os resultados para os testes realizados.

Tabela 9 – Resultados do recozimento simulado para as instâncias do PLSE+

Instância	Melhor Solução	Média	$\sigma$	T(s)	Iterações	Gap
<i>Mos</i> <sub>112x82</sub>	12721822720	13442633209	1,42%	5,29	4640	7,52%
<i>Mos</i> <sub>242x166</sub>	106789036032	106939682893	0,51%	26,31	4627	5,42%
<i>Mos</i> <sub>287x198</sub>	576296517632	588089037292	0,94%	29,56	5557	5,35%

Os resultados mostram a qualidade da solução apresentada por este algoritmo. O desvio padrão apresenta-se abaixo de 1%, o que demonstra a pequena variação nas soluções encontradas. É possível observar a proximidade da função objetivo média da melhor solução encontrada. O *gap* da melhor solução encontrada pelo algoritmo em relação ao ótimo conhecido pelo CPLEX apresentou-se abaixo de 5% para as instancias maiores e 7,34% para a *Mos*<sub>112x82</sub>. O tempo de execução pode ser considerado viável para o número de iterações configuradas, porém as soluções encontradas convergiram em média em 500.000 iterações. Os resultados mostram a qualidade da solução apresentada por este algoritmo. O desvio padrão apresenta-se em torno de 1%, o que demonstra a pequena variação nas soluções encontradas. É possível observar a proximidade da

função objetivo média da melhor solução encontrada. O tempo de execução pode ser considerado viável para o número de iterações configuradas, porém as soluções encontradas convergiram em média em 500.000 iterações.

#### 5.2.4 Resultados do algoritmo híbrido - Algoritmo genético + Recozimento simulado

Os parâmetros utilizados para configuração do algoritmo híbrido se deram pela calibração dos algoritmos anteriores. Para o algoritmo genético, foram utilizados os mesmos parâmetros do AG puro (tamanho da população, população elite, população imigrante e tendência, ver tabela 4). Para recozimento simulado, a temperatura inicial continuou em 1.000.000, 10 repetições e força das perturbações mínima igual a 1. O número de iterações do RS será determinado pelo número de rodadas do AG, ou seja, o número de vezes que o AG permite a execução do RS. Para a hibridização foi utilizado dois parâmetros: o intervalo de uso e número de rodadas. O intervalo de uso determina quantas iterações do AG acontecerá para a entrada do RS. O número de rodadas determina o número de iterações que o RS executará. As configurações de testes de calibração utilizadas podem ser visualizadas na tabela 10. Os testes limitaram-se a utilização das combinações apresentadas, ou seja, não houve combinações dos valores das duas colunas.

Tabela 10 – Parâmetros de calibração do AG+RS

Número de rodadas	Intervalo de uso
500.000	320
250.000	160
125.000	80
62.500	40
31250	20

Para o RS, por sua solução inicial vir do grupo da população elite do AG, sendo de boa qualidade, o número de iterações partiu da metade da utilizada pelo RS puro, 500.000, reduzida seguindo múltiplos de 2. Para o intervalo de uso, partiu de 320 e seguiu reduzida na mesma proporção. Após os testes de calibração, as configurações escolhidas, aquelas que apresentaram uma melhor solução, foram as que se encontram em destaque. As soluções podem ser visualizadas na tabela 10.

Tabela 11 – Resultados do AG+RS para as instâncias do PLSE+

Instância	Melhor Solução	Média	$\sigma$	T(s)	Iterações	Gap
<i>Mos</i> <sub>112x82</sub>	12699040768	13411235640	1,42%	13,06	113	7,33%
<i>Mos</i> <sub>242x166</sub>	106758168576	107536991273	0,51%	105,7	136	5,39%
<i>Mos</i> <sub>287x198</sub>	576261652480	588259614559	0,94%	139,55	155	5,34%

Para todas as instâncias testadas, foi possível observar *gaps* elevados quando comparados a outras soluções apresentadas, o que implica em uma piora significativa para a qualidade das soluções encontradas. Embora o desvio padrão seja baixo, próximo dos métodos já citados, em relação as soluções obtidas, onde o maior foi 1,42%, a qualidade das soluções não pode ser considerada tão boas devido aos *gaps* encontrados e o tempo computacional pode ser considerado elevado, sendo o segundo maior tempo.

### 5.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

As conclusões referentes aos experimentos desenvolvidos e relatados podem ser visualizadas na tabela 12, a qual apresenta um cenário comparativo entre os *gaps* das soluções encontradas através dos métodos aplicados para cada uma das instâncias de teste.

Tabela 12 – Comparativo entre os métodos de soluções propostos

Meta-heurísticas		$Mos_{112 \times 82}$	$Mos_{242 \times 166}$	$Mos_{287 \times 198}$
BRKGA	Gap	7,46%	2,85%	5,35%
	Gap-m	11,55%	5,41%	6,21%
AG-p	Gap	7,14%	2,86%	5,33%
	Gap-m	10,24%	5,29%	6,42%
AG-1p	Gap	13,88%	5,41%	5,35%
	Gap-m	14,06%	6,52%	7,67%
AG-2p	Gap	6,81%	0,25%	2,70%
	Gap-m	8,27%	3,72%	4,10%
RS	Gap	7,52%	5,42%	5,35%
	Gap-m	13,61%	5,57%	7,51%
AG+RS	Gap	7,33%	5,39%	5,34%
	Gap-m	13,35%	6,16%	7,54%

Os gráficos 14, 15 e 16 plotam esses resultados de maneira visual para as instâncias  $Mos_{112 \times 82}$ ,  $Mos_{242 \times 166}$  e  $Mos_{287 \times 198}$ , respectivamente

Para a instância  $Mos_{112 \times 82}$ , o CPLEX foi capaz de encontrar o ótimo da função. Os *gaps* para cada uma das estratégias testadas correspondem às distâncias dos resultados obtidos para o ótimo conhecido. Em ordem decrescente de qualidade da melhor solução, estão os métodos AG (2 pontos) (6,82%), AG parametrizado (7,14%), abordagem híbrida (7,33%), BRKGA (7,46%), e recozimento simulado (7,52%). Sendo assim, o método heurístico vencedor nesse critério é o algoritmo genético, inclusive, se considerar o *gap*-médio (Ag 2 pontos 8,27%).

Para a instância  $Mos_{242 \times 166}$  (ver figura 15), o CPLEX foi interrompido após 1h e alcançou um *gap* de 3,04% do ótimo. As meta-heurísticas apresentaram resultados muito próximos, ganhando destaque o AG (o cruzamento por 2 pontos, parametrizado e BRKGA). O AG com cruzamento por 2 pontos chegou a excelentes patamares (0,25%).

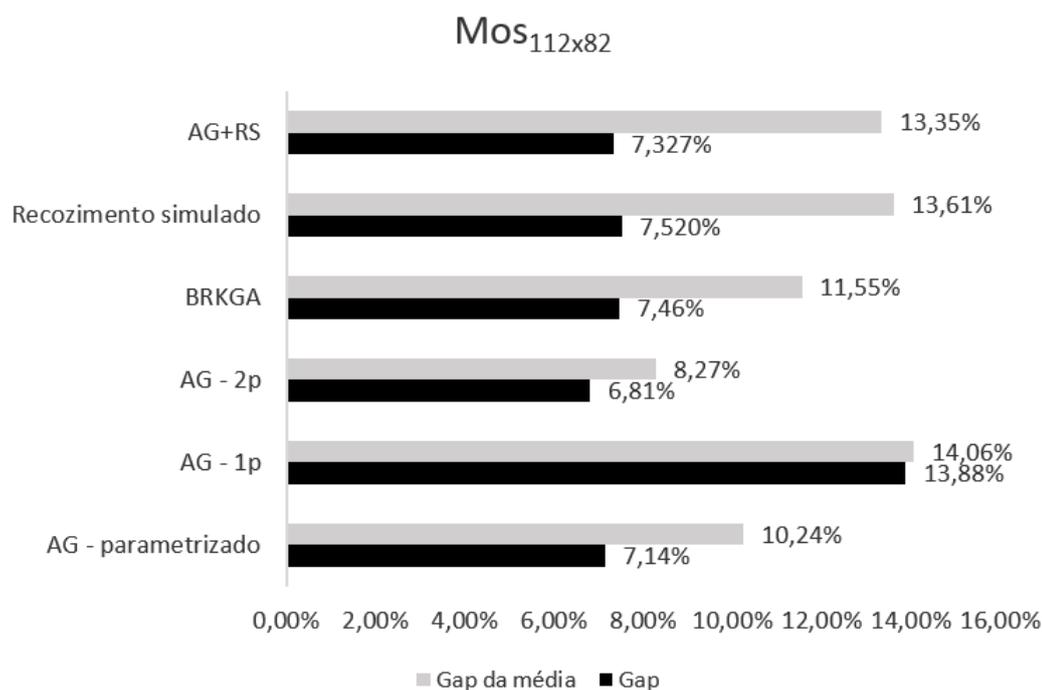


Figura 14 – Resultados dos métodos de solução x Gap da solução encontrada para instância  $Mos_{112x82}$

Fonte: Autoria própria

A proposta híbrida e Ag cruzamento por 1 ponto apresentaram os piores *gaps* e *gap* médio, um desempenho inferior quando comparada com as demais abordagens.

Para a instância  $Mos_{287x198}$  (ver figura 16), o CPLEX foi interrompido com um *gap* de 2,38% do ótimo. As meta-heurísticas apresentaram resultados semelhantes, exceto pelo AG cruzamento por dois pontos que apresentou resultados superiores (*gap* 2,70%). Quando analisado o *gap* da média, as abordagens apresentam também *gaps* próximos, sendo mais uma vez o destaque para o AG dois pontos. Para tanto, podemos concluir que em termos de qualidade de solução, o AG apresentou as melhores soluções.

Após visto o desempenho em termos de função objetivo, ou seja, o custo de instalação dos locais de votação encontrados, é importante analisar o desempenho dos métodos de solução com relação ao tempo de resposta encontrado. Na tabela 13 é possível ver esses resultados.

O CPLEX apresenta um custo computacional elevado, ocasionando em mais tempo de processamento para se obter uma solução viável, conforme já discutido. As meta-heurísticas apresentam-se como métodos de solução de problemas, onde a busca se dá pela conquista do ótimo ou um resultado aproximado, satisfatório e em tempo computacional viável. Para tanto, podemos analisar os resultados em termos de tempo de solução no gráfico 17.

Em termos de tempo de execução, é possível concluir que o recozimento simulado

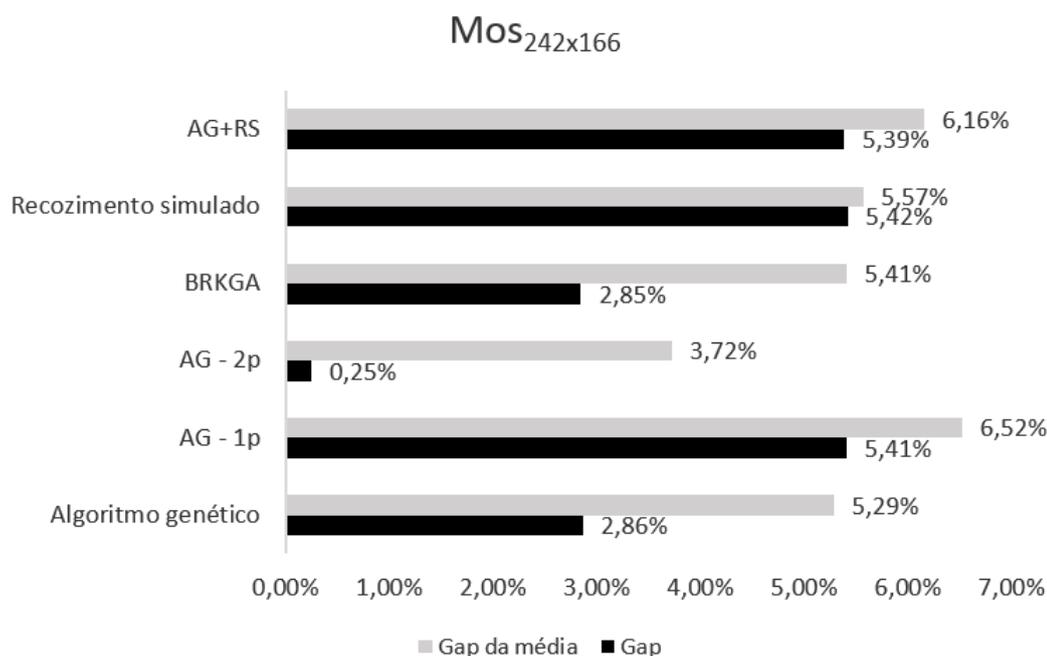


Figura 15 – Resultados dos métodos de solução x Gap da solução encontrada para instância *Mos*<sub>242x166</sub>

Fonte: Autoria própria

Tabela 13 – Comparativo entre os tempos de processamentos dos algoritmos no processo de busca de uma solução

Instâncias	Algoritmo Genético			BRKGA	RS	AG+RS
	1p	2p	Parametrizado			
<i>Mos</i> <sub>112x82</sub>	6,32	13,22	10,18	10,48	5,29	13,06
<i>Mos</i> <sub>242x166</sub>	63,67	121,26	77,42	79,987	26,31	105,7
<i>Mos</i> <sub>287x198</sub>	102,19	194,05	107,04	137,08	29,56	139,55

se comporta melhor em função do aumento do tamanho do problema. O demais métodos apresentam-se em patamares semelhantes. No entanto, o AG por dois pontos, embora apresente uma solução de qualidade, possui um tempo de resposta que aumenta significativamente com o tamanho do problema. No gráfico 18 é possível visualizar o crescimento do tempo em relação ao tamanho da instância.

A tabela 14 apresenta um comparativo entre o número de locais encontrados por cada um dos métodos desenvolvidos e a situação real do TRE. Embora, em termos de função objetivo tenha apresentado distinções em relação aos métodos, quando se comparado com o número de locais, resultados encontraram-se muito próximos. E, para todos os métodos, houve uma redução significativa no número de locais quando comparados com a situação real.

Considerando o número de locais, é possível visualizar na tabela 14 o desempenho

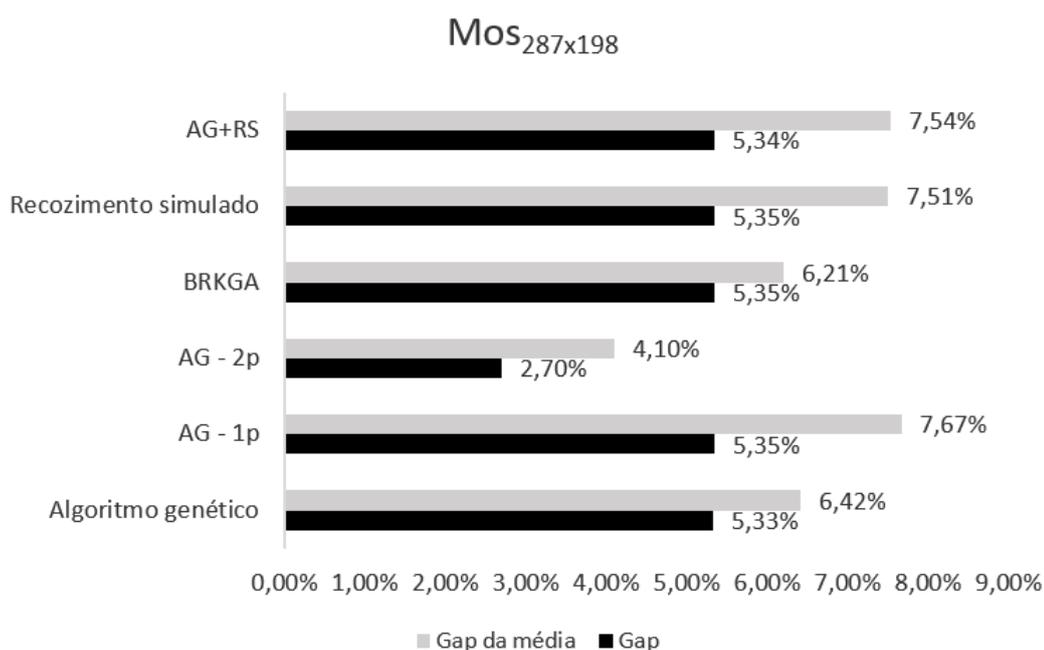


Figura 16 – Resultados dos métodos de solução x *Gap* da solução encontrada para instância  $Mos_{287 \times 198}$

Fonte: Autoria própria

Tabela 14 – Comparativo entre o número de locais encontrados pelos métodos propostos e a situação real

	$Mos_{112 \times 82}$	$Mos_{242 \times 166}$	$Mos_{287 \times 198}$
Situação real	28	52	66
BRKGA	16	40	40
AG-p	16	40	39
AG-p1	17	41	40
AG-2p	16	39	39
RS	16	40	39
AG+RS	16	41	40
CPLEX PLSE+	15	37	38
CPLEX PLSE	15	37	38

superior do AG por dois pontos, estando a 1 local do ótimo em duas instâncias. O RS apresenta um resultado bastante significativo, principalmente se for considerado, além da qualidade da solução, o tempo de execução. Em termos de potenciais, o AG por dois pontos apresentou-se como um excelente método a ser explorado em pesquisas futuras, pois sua capacidade de melhoria da solução é bem superior em relação aos que foram expostos neste trabalho (mesmo possuindo a penalidade do tempo mais elevado quando comparado ao RS).

Para uma análise mais profunda acerca dos algoritmos, faz-se necessário a

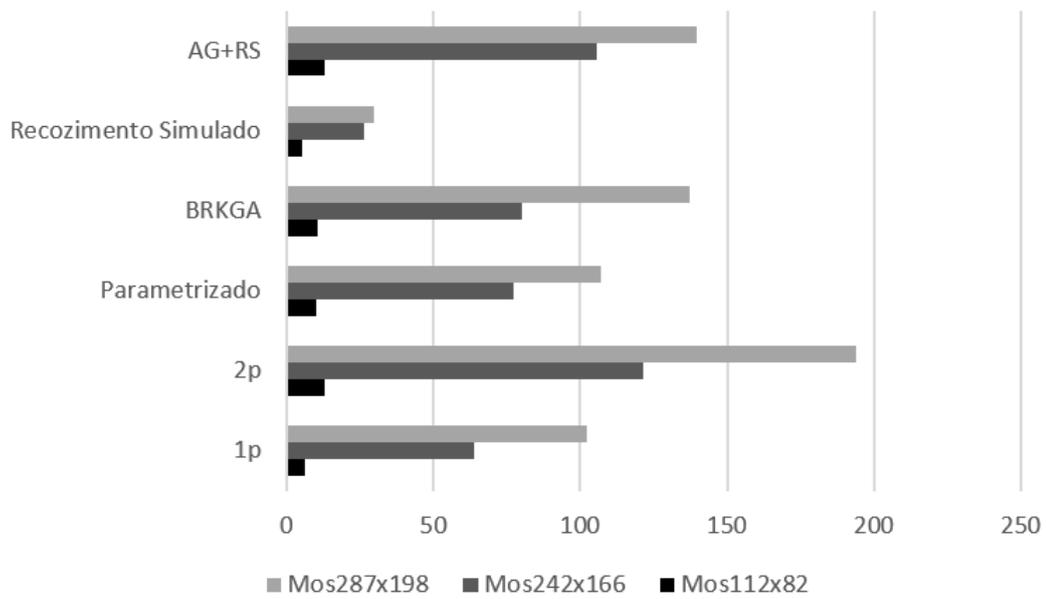


Figura 17 – Comparativo entre os tempos de resposta dos algoritmos propostos

Fonte: Autoria própria

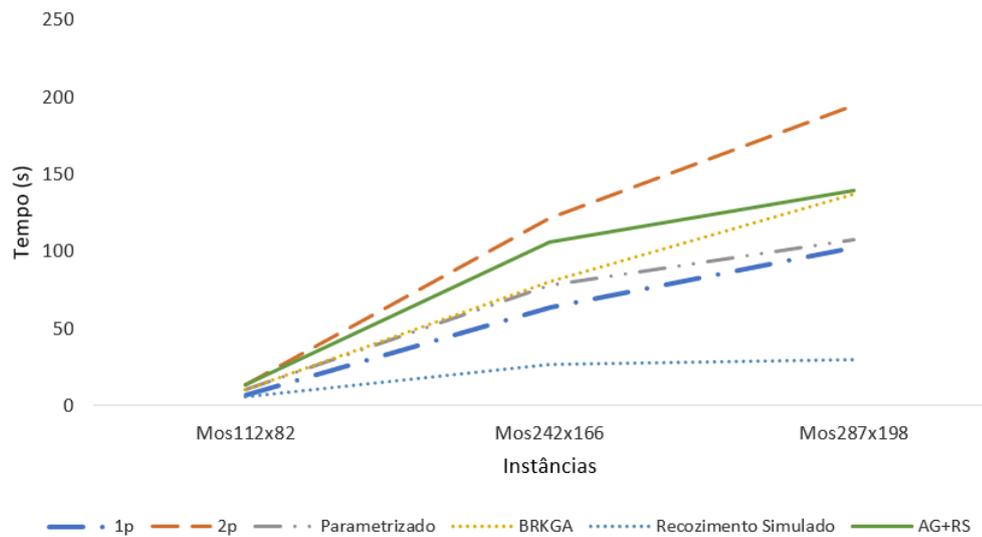


Figura 18 – Crescimento do tempo de execução dos algoritmos x tamanho da instância.

Fonte: Autoria própria

ampliação dos grupos de instâncias de testes para o problema real, com a construção de instâncias para outras cidades, a fim de validar aspectos de desempenhos dos métodos apresentados.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre o Problema de Localização de Seções Eleitorais (PLSE), no qual buscou-se desenvolver um método de solução para tal problema que considerasse aspectos importantes para a realidade prática, ainda não tratados. Foi estabelecido um parâmetro de preferência para a instalação desses locais de votação que, para esse caso, considerou que um prédio já utilizado como local de votação tivesse uma propensão em relação aos prédios nunca utilizados, passando o problema a ser chamado de PLSE+. Esse parâmetro torna pertinente a discussão acerca de outros aspectos importantes e contemplados pela legislação que estabelece preferência por prédios com acessibilidade, de situação pública, dentre outras questões, no momento da escolha desses locais.

A modelagem para o PLSE+ ou PLSE modificado trouxe resultado satisfatório, no que diz respeito à preferência, uma vez que para a instância  $Mos_{287 \times 198}$ , por exemplo, o PLSE escolheria 71,43% dos prédios já utilizados pelo TRE, enquanto o PLSE+ escolheria 87%. Em termos da função objetivo, houve uma penalidade, já que o modelo força essa preferência, mesmo que os locais escolhidos não sejam a melhor escolha em termos de deslocamento e capacidade de atendimento.

Portanto, uma proposta de otimização para o Problema de Localização de Seções Eleitorais produzindo um impacto mínimo na estrutura atualmente existente no mundo real foi desenvolvido e um modelo matemático apresentado. Para se processar as instâncias, um método exato torna-se bastante custoso computacionalmente, já que o problema é classificado como NP-Difícil. Foram desenvolvidos métodos de resoluções meta-heurísticas, um algoritmo genético, um recozimento simulado e uma abordagem híbrida que combina ambos os algoritmos citados. Para o problema, essas meta-heurísticas apresentaram boas respostas em tempo computacional viável.

O recozimento simulado, embora tenha *gaps* próximos aos demais, apresentou um melhor tempo de resposta conforme o crescimento do tamanho da instância, ganhando assim das demais propostas em termos de desempenho. A abordagem híbrida não apresentou os resultados esperados em função do tempo de convergência da solução, resultando no segundo algoritmo mais custoso computacionalmente. Para diversos problemas da literatura, como relatado em Mohammadi et. al (2017), tem sido uma abordagem viável a combinação de algoritmos genéticos com estratégias de busca local. Testar outras estratégias de combinação do AG+RS ou realizar combinação com outros algoritmos de busca local é uma opção que talvez melhorasse os resultados futuramente. Assim, como proposta de trabalhos futuros, podemos considerar:

- testar diferentes abordagens de estratégias heurísticas combinadas;

- 
- construir um banco de instâncias de *benchmarks* para permitir avaliar novas abordagens de resolução do PLSE e PLSE+, já que estes são problemas para os quais ainda não há tais bancos;
  - desenvolver uma plataforma que auxilie o processo de tomada de decisão do TRE;
  - ampliar os conceitos estudados de forma a possibilitar o tratamento do PLSE+

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, I. I. de. *Metaheurística híbrida utilizando GRASP reativo e aprendizagem por reforço: Uma aplicação na segurança pública*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Do Estado do Rio Grande Do Norte, 2014. Citado na página 27.
- BLUM, C.; ROLI, A. Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison. *ACM Comput. Surv.*, ACM, New York, NY, USA, v. 35, n. 3, p. 268–308, set. 2003. ISSN 0360-0300. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/937503.937505>>. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 25 e 26.
- BRANDEAU, M. L.; CHIU, S. S. An overview of representative problems in location research. *Manage. Sci.*, INFORMS, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), Linthicum, Maryland, USA, v. 35, n. 6, p. 645–674, jun. 1989. ISSN 0025-1909. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.35.6.645>>. Citado na página 15.
- BRASIL. *Lei nº 4.737*. 1965. Código Eleitoral. In: Código Eleitoral Anotado e Legislação Complementar. Citado na página 11.
- CERVO, A.; BERVIAN, P.; SILVA, R. da. *Metodologia científica*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2006. ISBN 9788576050476. Citado na página 30.
- CUNHA, A. G.; TAKAHASHI, R.; ANTUNES, C. H. *Manual da Computação Evolutiva*. University of Chicago: Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 21, 24 e 25.
- DASKIN, M. *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*. Wiley, 1995. ISBN 9781118536964. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=L9I5n0Sym4cC>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- DASKIN, M. S. What you should know about location modeling. In: *Naval Research Logistics*. v.55. New York: Wiley Interscience, p. p.283–294, 2008. Citado 6 vezes nas páginas 11, 15, 16, 17, 18 e 19.
- DÍAZ, J. A. et al. Grasp and hybrid grasp-tabu heuristics to solve a maximal covering location problem with customer preference ordering. *Expert Systems with Applications*, v. 82, n. Supplement C, p. 67 – 76, 2017. ISSN 0957-4174. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417417302361>>. Citado na página 27.
- DORIGO, M.; CARO, G. D. New ideas in optimization. In: CORNE, D. et al. (Ed.). Maidenhead, UK, England: McGraw-Hill Ltd., UK, 1999. cap. The Ant Colony Optimization Meta-heuristic, p. 11–32. ISBN 0-07-709506-5. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=329055.329062>>. Citado na página 22.
- FEO, T. A.; RESENDE, M. G. C. Greedy Randomized Adaptive Search Procedures. *Journal of Global Optimization*, v. 6, p. 109–133, 1995. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.48.8667>>. Citado na página 22.

GEMAN, S.; GEMAN, D. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, v. 6, n. 6, p. 721–741, nov. 1984. ISSN 0162-8828. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/TPAMI.1984.4767596>>. Citado na página 25.

GIL, A. *Como elaborar projetos de pesquisa*. Atlas, 2010. ISBN 9788522458233. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=HSGHRAAACA AJ>>. Citado na página 30.

GLOVER, F. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers & Operations Research*, v. 13, n. 5, p. 533 – 549, 1986. ISSN 0305-0548. Applications of Integer Programming. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0305054886900481>>. Citado na página 22.

GONÇALVES, J. F.; RESENDE, M. G. Biased random-key genetic algorithms for combinatorial optimization. *Journal of Heuristics*, Kluwer Academic Publishers, Hingham, MA, USA, v. 17, n. 5, p. 487–525, out. 2011. ISSN 1381-1231. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10732-010-9143-1>>. Citado na página 24.

GUO, P.; CHENG, W.; WANG, Y. Hybrid evolutionary algorithm with extreme machine learning fitness function evaluation for two-stage capacitated facility location problems. *Expert Systems with Applications*, v. 71, n. Supplement C, p. 57 – 68, 2017. ISSN 0957-4174. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417416306601>>. Citado na página 27.

HAMACHER, H. W.; NICKEL, S.; SCHNEIDER, A. *Classification of Location Problems*. [S.l.], 1998. Citado na página 16.

HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control and Artificial Intelligence*. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1992. ISBN 0262082136. Citado na página 22.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. *SCIENCE*, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 25.

LOURENÇO, H. R.; MARTIN, O. C.; STÜTZLE, T. Iterated local search. In: *Handbook of Metaheuristics, volume 57 of International Series in Operations Research and Management Science*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 321–353. Citado na página 22.

LUGER, G. *Inteligência Artificial: Estruturas e estratégias para solução de problemas complexos*. Bookman, 2004. ISBN 9788536303963. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ruZNPgAACAAJ>>. Citado na página 23.

MASCARENHAS, S. *Metodologia científica*. [S.l.]: PEARSON BRASIL, 2012. ISBN 9788564574595. Citado na página 30.

OLIVEIRA, F. M. et al. Problema de localização de seções eleitorais e alocação de eleitores. In: *Anais do XLVSBPO*. Rio de Janeiro - Brasil: XLVSBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2013, Natal., 2013. v. 1, n. 2013, p. 1–12. Citado na página 44.

OLIVEIRA, F. M. de. *O problema de localização de seções eleitorais e alocação de eleitores: uma abordagem exata e metaheurística*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, 2013. Citado 11 vezes nas páginas 11, 12, 16, 18, 27, 29, 33, 34, 35, 36 e 45.

RAIDL, G. R. A unified view on hybrid metaheuristics. In: *Hybrid Metaheuristics, Third International Workshop, HM 2006, Gran Canaria, Spain, October 13-15, 2006, Proceedings*. [s.n.], 2006. p. 1–12. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/11890584\\_1](https://doi.org/10.1007/11890584_1)>. Citado na página 26.

RESENDE., M. G. C. Introdução aos algoritmos genéticos de chaves aleatórias viciadas. XLVSBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2013, Natal., Rio de Janeiro - Brasil, v. 1, n. 2013, p. 1–12, 2013. Citado na página 24.

REVELLE, C.; EISELT, H. Location analysis: A synthesis and survey. *European Journal of Operational Research*, v. 165, n. 1, p. 1 – 19, 2005. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221704002139>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 20.

SILVA, M. L. R. e. D. N. P. F. J. E. L. e. Problema de alocação de seções eleitorais em locais de votação no município de palmas-to. *Anais do XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO)*, 2015. Citado na página 29.

SIVANANDAM, S.; DEEPA, S. *Introduction to Genetic Algorithms*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2009. ISBN 9783540839811. Citado na página 23.

SPEARS, W. *On the Virtues of Parameterized Uniform Crossover*. 1991. Citado na página 24.

WEBER, A. *Über den Standort der Industrien*. [S.l.: s.n.], 1909. Traduzido como Alfred Weber's Theory of the Location of Industries, University of Chicago, 1929. Citado na página 15.