



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA  
COMPUTAÇÃO**



**VICTOR HUGO RÉGIS DE FREITAS**

**ANÁLISE COMPUTACIONAL DE OTIMIZAÇÃO EM REDES  
DE FLUXO SATURADAS PELA METODOLOGIA DO  
ALGORITMO DE FORD E FULKERSON**

**MOSSORÓ - RN  
2014**

**VICTOR HUGO RÉGIS DE FREITAS**

**ANÁLISE COMPUTACIONAL DE OTIMIZAÇÃO EM REDES  
DE FLUXO SATURADAS PELA METODOLOGIA DO  
ALGORITMO DE FORD E FULKERSON**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação – associação ampla entre a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte e a Universidade Federal Rural do Semi-Árido, para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Orientadora: Profa. Dra. Angélica Félix de Castro – UFERSA.

Co-orientador: Prof. Dr. Danniell Cavalcante Lopes – UFERSA.

**MOSSORÓ - RN  
2014**

**VICTOR HUGO RÉGIS DE FREITAS**

**ANÁLISE COMPUTACIONAL DE OTIMIZAÇÃO EM REDES  
DE FLUXO SATURADAS PELA METODOLOGIA DO  
ALGORITMO DE FORD E FULKERSON**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

APROVADA EM: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Profa. Dra. Angélica Félix de Castro – UFERSA  
Presidente

---

Prof. Dr. Dannel Cavalcante Lopes – UFERSA  
Primeiro Membro

---

Prof. Dr. Judson Santos Santiago – UFERSA  
Segundo Membro

---

Prof. Dr. Marco Antonio de Oliveira Domingues – IFPE  
Membro Externo

À minha mãe Audivete, minha primeira e mais importante educadora.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha professora orientadora Angélica Félix de Castro e ao professor Judson Santos Santiago. Foi a confiança que me depositaram durante a seleção para o curso de mestrado que tornou a realização deste trabalho possível. Ambos contribuíram positivamente para minhas conquistas acadêmicas mais importantes, razão pela qual lhes reservo um sentimento de gratidão vitalício. À minha orientadora e amiga Angélica, em especial, sou grato também pela cumplicidade, compreensão e liberdade confiadas ao meu trabalho.

Agradeço também ao professor Danniell Cavalcante Lopes por aceitar o desafio de engajar-se no projeto e contribuir com sua experiência. Pelas ideias, cobranças e direcionamentos; pela presteza e compromisso com as atividades da co-orientação, e pela paciência com os numerosos imprevistos que surgiram ao longo da pesquisa.

A toda minha família; pais e irmã, tios e primos, cuja saudade neste momento específico evidencia ainda mais sua importância em minha vida. Destaco aqui minha mãe Audivete Pereira Régis de Freitas, minha irmã Amanda Gabrielly Régis de Freitas e meu pai Valdemir Nunes de Freitas.

Agradeço também aos meus quatro melhores amigos do sistema solar que, em verdade, também são meus professores:

Angélica de Freitas Alves, pela amizade e exemplos de vida, coragem e determinação.

Esaú Castro de Albuquerque Melo, pela amizade e exemplos de altruísmo, tolerância e simplicidade.

Paulo Ricardo Fernandes de Lima, pela amizade e exemplos de carisma, resiliência e respeito.

Raisça Mairaiz Marques da Silva Maia (a.k.a. BL), pela amizade e exemplos de confiança, lealdade e sinceridade.

Seria necessário bem mais que uma página deste trabalho para ser verdadeiramente fiel às virtudes destes quatro amigos, e ainda mais páginas para expressar minha admiração por eles, então deixo registrado meu orgulho e gratidão nesta breve homenagem.

Destaco também meu agradecimento aos amigos Francisco Paulo de Freitas Neto e Sairo Raoni dos Santos pela inspiração e contribuição direta e indireta com este trabalho de dissertação. E um agradecimento especial ao Mauricio Cirilo da Costa Neto, pelo carinho e grande apoio durante a etapa final.

Agradeço, finalmente, a todos os meus professores da educação básica, de nível médio, graduação e mestrado. Minha formação é mérito indiscutível de cada um deles.

*“Um processo não pode ser compreendido parando-o. O entendimento precisa se mover com seu fluxo; precisa juntar-se a ele e fluir com ele.”*

(Dune, primeira lei de Mentat - Frank Herbert)

## RESUMO

Redes de fluxo são estruturas de dados frequentemente utilizadas para modelar problemas de transporte de materiais e informações em aplicações computacionais. O algoritmo definido por Lester Randolph Ford Junior e Delbert Ray Fulkerson, amplamente abordado na literatura matemática, foi elaborado para determinar o fluxo máximo transitável de um ponto a outro nestas estruturas. O referido algoritmo não só permite descobrir o fluxo máximo entre dois pontos, mas também expõe a vulnerabilidade física da rede de fluxo modelada. Essa vulnerabilidade, por sua vez, pode ser computacionalmente analisada e devidamente solucionada de modo a tirar proveito máximo da estrutura residual da rede uma vez que ela atinge seu limite de fluxo. Este trabalho propõe e implementa uma solução automatizada para a avaliação dos resultados obtidos com a execução do algoritmo de Ford e Fulkerson sobre uma rede de fluxo genérica. Com esta solução é possível determinar a melhor alternativa de investimento para seguir com a exploração da rede, otimizando o aproveitamento dos recursos. O trabalho também levanta uma discussão sobre uma abordagem de avaliação completa da rede residual.

**Palavras-Chave:** Ford e Fulkerson, Redes de fluxo, Algoritmo de expansão, Maximização.

## ABSTRACT

Flow networks are data structures often used to model problems of materials and information transport in computer applications. The algorithm defined by Lester Randolph Ford Junior and Delbert Ray Fulkerson, widely discussed in the mathematical and computational literature, was designed to determine the maximum flow from one point to another on these structures. The said augmentation algorithm allows not only to find the maximum flow between two points, but also exposes the logic vulnerability of the modeled flow network. This vulnerability, in turn, can be computationally analyzed and properly solved in order to take full advantage of the residual structure on the network once it reaches its limit flow. This work proposes and implements an automated solution to evaluate the results obtained with the execution of the Ford and Fulkerson algorithm upon an generic flow network. Then it is possible to determine the best investment alternative to keep with the operation of the residual network optimizing its efficiency. This work also proposes an discussion about an complete evaluation approach of the residual network.

**Keywords:** Ford e Fulkerson, Flow networks, Expansion algorithm, Maximization.

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Algoritmos de fluxo máximo e complexidades. ....	26
Quadro 2 - Comparação de algoritmos em restauração de imagens. ....	44
Quadro 3 - Relatório dos caminhos encontrados pelo algoritmo de Ford e Fulkerson. ....	62
Quadro 4 - Síntese da avaliação automática pela aplicação desenvolvida. ....	69

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação de um grafo. ....	15
Figura 2 - Representação de um grafo direcionado.....	16
Figura 3 - Relações de adjacências entre vértices e arestas.....	16
Figura 4 - Esquema hierárquico de diretórios e arquivos para usuários A, B e C.....	17
Figura 5 - Modelagem de grafo em sensoriamento remoto.....	17
Figura 6 - Representação de uma rede de fluxo simples (Exemplo 1).....	18
Figura 7 - 1º aumento na rede de fluxo Exemplo 1.....	19
Figura 8 - 2º aumento na rede de fluxo Exemplo 1.....	20
Figura 9 - (a) 3º aumento na rede de fluxo Exemplo 1. (b) Rede de fluxo com a retirada de C.....	20
Figura 10 - Exemplos de cortes e corte mínimo em redes de fluxo. ....	21
Figura 11 - Rede de fluxo com múltiplas estações fonte e sorvedouros. ....	22
Figura 12 - Unificação de múltiplas estações fonte e sorvedouros da Figura 11. ....	22
Figura 13 - Exemplo de rede de fluxo com mau desempenho do algoritmo de Ford e Fulkerson.....	25
Figura 14 - Exemplo de rede em que o algoritmo de Ford e Fulkerson pode falhar em terminar.....	25
Figura 15 - Rede de fluxo Exemplo 2. ....	28
Figura 16 - Exemplo 2 após o 1º caminho de aumento.....	28
Figura 17 - Exemplo 2 após o 2º caminho de aumento.....	29
Figura 18 - Exemplo 2 após o 3º caminho de aumento.....	29
Figura 19 - Exemplo 2 após o 4º caminho de aumento com o arco de retorno.....	30
Figura 20 - Fluxo máximo e corte mínimo da rede de fluxo Exemplo 2. ....	31
Figura 21 - Padrão de entrada para a aplicação desenvolvida.....	31
Figura 22 - Matriz de adjacência da rede de fluxo Exemplo 1.....	32
Figura 23 - Saída principal da aplicação para a rede de fluxo Exemplo 1. ....	32
Figura 24 - (a) Texto do arquivo de entrada, (b) matriz de adjacência e (c) caminhos de aumento encontrados pela aplicação.....	33
Figura 25 - Capacidades residuais da rede Exemplo 1.....	34
Figura 26 - (a) Aumento pelo do incremento no arco $D \rightarrow T$ . (b) Aumento pelo do incremento no arco $E \rightarrow T$ .....	35
Figura 27 - Capacidades residuais da rede Exemplo 2.....	35
Figura 28 - Incrementos das capacidades nos arcos (a) $D \rightarrow T$ , (b) $B \rightarrow C$ e (c) $S \rightarrow C$ . ....	36
Figura 29 - Pixels de uma imagem (a) e sua respectiva representação (b).....	40
Figura 30 - Árvores de busca no algoritmo de Boykov e Kolmogorov. ....	42
Figura 31 - Restauração de uma imagem no formato de diamantes concêntricos. (b) Imagem de uma praça de sinos com ruído. (c) Imagem da praça de sinos restaurada.....	44
Figura 32 - Esquema de representação de terminais distribuídos aleatoriamente e o raio de comunicação R coberto por cada um deles. ....	46
Figura 33 - Substituição dos arcos bidirecionados para aplicação do algoritmo de aumento de fluxo definido por Ford e Fulkerson. Adaptação de Zhang e Fan. ....	48
Figura 34 - Conflito de fluxo de informação com diferentes destinos. ....	49
Figura 35 - Um vértice que precisa de codificação. ....	49
Figura 36 - Rede de fluxo antes (a) e após (b) a saturação.....	51
Figura 37 - Aumento de capacidade (+20) nos arcos $A \rightarrow C$ (a) e $B \rightarrow D$ (b). ....	52
Figura 38 - Rede de fluxo saturada. Exemplo 3. ....	53

Figura 39 - Arquitetura da metodologia de avaliação com aumento definido. ....	54
Figura 40 - Análise com aumento definido do arco $A \rightarrow D$ . ....	54
Figura 41 - Análise com aumento definido do arco $B \rightarrow F$ . ....	55
Figura 42 - Análise com aumento definido do arco $C \rightarrow F$ . ....	55
Figura 43 - Análise bilateral do arco $A \rightarrow D$ . ....	57
Figura 44 - Análise bilateral do arco $B \rightarrow F$ . ....	58
Figura 45 - Análise bilateral do arco $C \rightarrow F$ . ....	59
Figura 46 - Arquitetura da metodologia de avaliação por análise bilateral. ....	60
Figura 47 - Rede de fluxo utilizada na validação de resultados e sua respectiva matriz de adjacência. ....	62
Figura 48 - Saída da aplicação para a rede de fluxo de teste. ....	63
Figura 49 - Rede de teste saturada pelo algoritmo de aumento de fluxo. ....	63
Figura 50 - Identificação dos arcos no corte mínimo da rede de teste. ....	64
Figura 51 - Avaliação do arco $C \rightarrow F$ na aplicação. ....	64
Figura 52 - Esquema de expansão do arco $C \rightarrow F$ e impacto no fluxo final. ....	65
Figura 53 - Avaliação do arco $C \rightarrow H$ na aplicação. ....	65
Figura 54 - Expansão do arco $C \rightarrow H$ - 1º caminho de aumento encontrado e impacto parcial. ....	66
Figura 55 - Expansão do arco $C \rightarrow H$ - 2º caminho de aumento encontrado e impacto no fluxo final. ....	66
Figura 56 - Avaliação do arco $I \rightarrow H$ na aplicação. ....	67
Figura 57 - Esquema de expansão do arco $I \rightarrow H$ e impacto no fluxo final. ....	67
Figura 58 - Avaliação do arco $I \rightarrow K$ na aplicação. ....	68
Figura 59 - Esquema de expansão do arco $I \rightarrow K$ e impacto no fluxo final. ....	68
Figura 60 - Saída final da aplicação de avaliação com aumento definido. ....	69
Figura 61 - Análise bilateral do caminho de aumento descoberto pela expansão de $C \rightarrow H$ . ....	70

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	10
1.1	O PROBLEMA DO TRANSPORTE URBANO	10
1.2	SOLUÇÕES COMPUTACIONAIS	12
1.3	OBJETIVOS	14
1.4	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	14
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	15
2.1	GRAFOS E DÍGRAFOS	15
2.2	DEFINIÇÕES FORMAIS	16
2.3	REDES DE FLUXO	18
2.4	FLUXO MÁXIMO E CORTE MÍNIMO	19
2.5	O ALGORITMO DE FORD E FULKERSON	23
2.5.1	Apresentação	23
2.5.2	Evolução e complexidade	24
2.5.3	Metodologia	27
2.5.4	Implementação do algoritmo em C/C++	31
2.5.5	Inferências sobre a rede saturada	34
<b>3</b>	<b>TRABALHOS RELACIONADOS</b>	38
3.1	ENERGIA UTILIZADA EM VISÃO	39
3.1.1	O algoritmo de Boykov e Kolmogorov	41
3.2	CODIFICAÇÃO EM REDES SEM FIO AD-HOC	45
3.2.1	O algoritmo de Zhang e Fan	47
<b>4</b>	<b>ASPECTOS METODOLÓGICOS</b>	51
4.1	HETEROGENEIDADE E BALANCEAMENTO	51
4.2	ANÁLISE COM AUMENTO DEFINIDO	53
4.2.1	Características	56
4.3	ANÁLISE BILATERAL	56
4.3.1	Características	60
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	62
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	71
	REFERÊNCIAS	73
	ANEXOS	Erro! Indicador não definido.

---

# 1 INTRODUÇÃO

Existe um conhecimento amplo na comunidade profissional administrativa que um efetivo planejamento organizacional deve objetivar a otimização do uso de recursos limitados. Esta atividade, por sua vez, muitas vezes se encontra associada a níveis de complexidade bastante elevados devido à quantidade de informações que precisam ser analisadas para prover o melhor resultado.

Apesar da complexidade envolvida, planejar uma logística eficiente de remanejamento é um exemplo recorrente desse tipo de atividade administrativa que se apresenta indissociável do aproveitamento máximo não somente dos recursos transportados, mas também das estruturas de comunicação envolvidas. Estas estruturas possuem características e limitações diversificadas, não incomum associadas à inflexibilidade e custo elevado, fazendo do seu bom aproveitamento um fator determinante para a eficiência do sistema como um todo.

Problemas com essa característica são objeto de estudo frequente na programação matemática, que pesquisa formas de minimizar ou maximizar uma função objetivo através da escolha sistemática dos valores de variáveis inseridas no domínio do problema.

## 1.1 O PROBLEMA DO TRANSPORTE URBANO

Os grandes aglomerados urbanos brasileiros enfrentam congestionamentos cada vez maiores. Em 2012, de acordo com dados do Departamento Nacional de Trânsito (DENATRAN), circularam pelas ruas e estradas do país cerca de 45 milhões de veículos, entre eles automóveis, caminhões, motocicletas, tratores e ônibus. A região Sudeste do país concentrava 24 milhões de veículos, e desses, 6 milhões transitavam nos 17.000 quilômetros de vias da cidade de São Paulo.

Além da capital paulista, Rio de Janeiro, Brasília e Recife são alguns exemplos de cidades brasileiras também acometidas de engarrafamentos frequentes. O trânsito excessivo nestas regiões gera consequências muito mais graves do que os atrasos e transtornos enfrentados diariamente pelos motoristas. Os congestionamentos custam muito dinheiro com desperdício de combustíveis e prejuízo no processo de abastecimento urbano, prejudicam a saúde da população com a emissão de poluentes e atrapalham o crescimento do país no processo de desenvolvimento econômico. Resolver ou minimizar o problema, portanto, não é

---

apenas uma questão de conforto e bem estar social, mas também um importante incentivo ao desenvolvimento econômico.

A Secretaria de Estado dos Transportes Metropolitanos da cidade de São Paulo estima que as perdas financeiras com acidentes de trânsito, poluição e engarrafamentos sejam de 4,1 bilhões de reais por ano. O Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo (USP) calcula perdas diárias no Estado de 11 milhões de reais com tempo e combustível nos congestionamentos. O estudo considera a média de 80 quilômetros de lentidão por dia, com picos de 200 quilômetros. No total, os custos anuais chegariam a 3,3 bilhões. A soma do tempo perdido pelas pessoas no trânsito atinge a média de 240.000 horas. São desperdiçados cerca de 200 milhões de litros de gasolina e álcool e 4 milhões de litros de diesel por ano nos engarrafamentos da cidade.

Segundo a secretaria de transportes paulista, a paralisia do trânsito tem impacto negativo na economia como um todo:

**Custos logísticos:** Os caminhões retidos nos engarrafamentos têm custo maior, uma vez que gastam mais, deslocam-se menos e fazem, conseqüentemente, menos entregas. Como esses caminhões cumprem menos ciclos de entrega, as transportadoras precisam aumentar a frota ou subcontratar serviços de entrega adicionais para atender seus clientes. Com isso, colocam ainda mais veículos nas ruas.

**Gastos com combustíveis:** O aumento no consumo dos combustíveis provoca aumento de preços, tendo em vista que os principais representantes destes recursos são de origem fóssil e, portanto, limitados na natureza. Os renováveis, como o álcool, precisam de insumos, área de plantio e sofrem com a entressafra.

**Custos de produção:** Dependendo do tipo de produto transportado, o tempo parado pode fazer com que a carga estrague ou tenha sua validade encurtada. Além disso, as empresas são forçadas a montar estoques maiores por causa do temor de desabastecimento e interrupção da produção, por causa de atrasos na entrega da matéria-prima, por exemplo.

**Poluição:** A poluição do ar nas cidades é hoje uma das mais graves ameaças à qualidade de vida. Os gases que saem do escapamento contêm monóxido de carbono, óxidos de nitrogênio, hidrocarbonetos, óxidos de enxofre e material particulado. A quantidade desses gases depende da qualidade do combustível e da regulação do motor.

Essa discussão reforça a importância de se obter eficiência no tráfego de veículos automotores em vias urbanas, como defendido por Iemini (1994) e Saidane (2002), e explica porque o uso de tecnologias com esta finalidade tem se tornado cada vez mais popular. A exemplo disso, em março de 2013, a revista INFO EXAME publicou em seu sítio uma matéria listando 8 aplicativos para smartphones destinados a instruir seus usuários sobre os locais dos engarrafamentos caóticos.

Em verdade, a utilização do poder computacional para amenizar o problema do transporte urbano pode ser expandida para qualquer infraestrutura de comunicação, visando maximizar o fluxo suportado.

## 1.2 SOLUÇÕES COMPUTACIONAIS

A construção de um sistema de informação tem como principal objetivo a adição de valor à empresa ou organização na qual o sistema será utilizado (Bezerra, 2006). Um dos fatores que agregam valor a estas empresas é a redução dos custos inerente ao seu processo produtivo. Seres humanos estão invariavelmente sujeitos a cometerem erros, e a probabilidade destas ocorrências cresce de forma proporcional à complexidade das atividades envolvidas. Neste contexto, soluções computacionais para otimização de recursos apresentam-se como ferramentas poderosas no gerenciamento desta complexidade.

Em problemas de engenharia, administração, logística, transporte, economia, biologia e muitas outras ciências, quando se consegue construir modelos matemáticos suficientemente representativos dos sistemas dinâmicos em estudo, é possível aplicar técnicas matemáticas de otimização para maximizar ou minimizar uma função previamente definida como índice de desempenho ou performance, visando encontrar uma solução ótima do problema, isto é, que resulte no melhor desempenho possível do sistema segundo critérios previamente definidos, como o racionamento ou aproveitamento máximo dos recursos, por exemplo.

A modelagem computacional de dados, por sua vez, é uma atividade de fundamental importância para o processo de desenvolvimento de aplicações destinadas a resolver problemas complexos do mundo contemporâneo. Da representação de conhecimento na inteligência artificial, passando pelo armazenamento em massa de informações de grandes empresas até a resolução de problemas de otimização, nos deparamos com variações simples e complexas de estruturas de dados, modeladas para se adequarem ao domínio de uma diversidade de problemas.

---

Representar um problema real de forma tangível ao computador é uma etapa importante no processo de modelagem computacional, sobretudo quando se pretende otimizar resultados. A fidelidade dessa representação está intrinsecamente relacionada com o sucesso da aplicação.

Grafos são abstrações matemáticas particularmente convenientes quando se pretende expressar não somente os dados, mas também seu relacionamento característico. Estradas ligando facilidades (parques industriais, lojas, estações de abastecimento), estruturas interconectando transmissão de materiais, redes de computadores escoando informações e infraestrutura elétrica são alguns exemplos de estruturas materiais comumente representados na forma de grafos para computação de problemas. As redes de fluxo, por sua vez, são uma particular especialização de grafos, cujo relacionamento entre os componentes se dá em apenas um sentido. São comumente utilizadas para representar capacidade de escoamento de informação, materiais ou tráfego na modelagem de problemas.

Existe uma grande variedade de algoritmos para se trabalhar com redes de fluxo, com metodologias e propósitos diversificados. Em particular, este trabalho analisa o algoritmo de Ford e Fulkerson (1962), que se baseia no grafo de aumento de fluxo para determinar o escoamento máximo neste tipo de estrutura de dados (Netto, 2012). O algoritmo simula o preenchimento do fluxo no grafo, até que o mesmo não possa ser aumentado devido à sobrecarga das capacidades. O resultado é uma rede de fluxo saturada, com sua capacidade máxima de transporte.

O algoritmo de Ford e Fulkerson é um método exato e a despeito disso possui complexidade computacional relativamente baixa quando comparado com outras abordagens para resolução de problemas com domínio real. As informações obtidas com sua execução são relevantes não só para a manutenção do fluxo na rede, mas também para projetos de otimização e escalabilidade deste tipo de estrutura.

Apesar de sua notável utilidade na descoberta das capacidades máximas das redes de fluxo, a abordagem original proposta por Ford e Fulkerson não apresenta nenhuma inferência sobre possibilidades de aumento ou expansão do fluxo considerando possíveis alterações na rede saturada. Neste cenário, é possível efetuar adaptações que envolvam avaliação computacional das estruturas, tomando como base as capacidades residuais de cada elemento encontradas pelo algoritmo.

### 1.3 OBJETIVOS

Diante deste contexto, este trabalho visa explorar a metodologia do algoritmo de Ford e Fulkerson, para que funcionalidades como a avaliação de capacidades residuais e possibilidades de aumento do fluxo possam ser implementadas, agregando valor de decisão e evidenciando possíveis modificações de melhor desempenho na rede saturada que o procedimento original do algoritmo retorna. O trabalho também visa propor uma abordagem de avaliação completa da rede de fluxo saturada.

Como objetivo específico deste trabalho, destaca-se a implementação da metodologia apresentada em uma aplicação de computador, bem como a elucidação de seu funcionamento mediante casos de teste, automatizando a avaliação do potencial residual em termos de capacidade remanescente da rede e inferindo sobre as melhores alternativas para explorá-la ainda mais.

### 1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação está organizada da seguinte maneira: o capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica acerca dos temas abordados no documento, juntamente com sua fundamentação teórica; o capítulo 3 apresenta autores e trabalhos relacionados à utilização do algoritmo de Ford e Fulkerson em algumas das diversas aplicações existentes na literatura; no capítulo 4 são introduzidos os aspectos metodológicos utilizados para abordar e resolver o problema de otimização do fluxo máximo por meio da exploração da rede residual; o capítulo 5 apresenta resultados do trabalho, bem como discussões acerca dos mesmos, por meio da apresentação da aplicação desenvolvida; e a seção 6 conclui o trabalho com a apresentação das considerações finais e as propostas de trabalhos futuros.

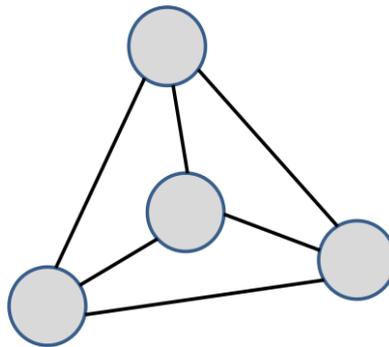
## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo discorre sobre os principais fundamentos teóricos necessários para a apresentação do problema do fluxo máximo e sua modelagem computacional. Nele se encontra uma revisão sobre grafos e redes de fluxo, bem como a apresentação do algoritmo objeto de estudo deste trabalho; suas características e aplicações.

### 2.1 GRAFOS E DÍGRAFOS

Grafos são modelos matemáticos abstratos tipicamente representados por um conjunto de elementos denominados vértices interligados por retas, conhecidas como arestas. Na computação, os vértices são utilizados para representar variáveis centrais no domínio de um problema. As arestas, por sua vez, ilustram os relacionamentos entre estas variáveis. A Figura 1 apresenta um esquema de um grafo com quatro vértices e seis arestas.

Figura 1 - Representação de um grafo.

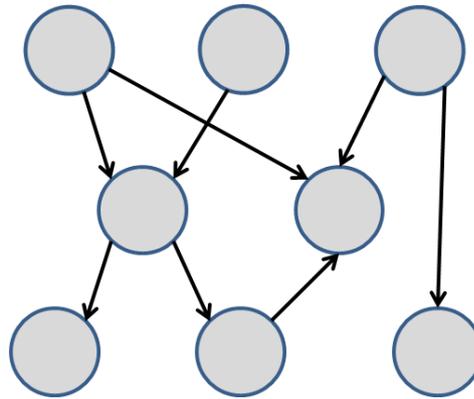


Fonte: Autoria própria.

As arestas também exprimem características específicas dos relacionamentos entre os vértices. Dependendo do problema objeto de estudo, elas podem representar uma possível limitação na comunicação, tempo necessário para completar um percurso, capacidade de escoamento de materiais e até mesmo o sentido de uma comunicação. Neste último caso, as retas são substituídas por setas e o grafo é dito orientado.

Os grafos orientados, ou dígrafos, são mais específicos ao representar as relações entre seus elementos. Neles as arestas são modeladas estabelecendo um sentido na comunicação; evidenciando seu fluxo. A Figura 2 ilustra a modelagem de um grafo orientado com 8 vértices e 8 arestas direcionadas. Este tipo de grafo é utilizado em diversas áreas do conhecimento, abrangendo a construção de fluxogramas, mapas de automação, representação relacional de informação, entre outros.

Figura 2 - Representação de um grafo direcionado.

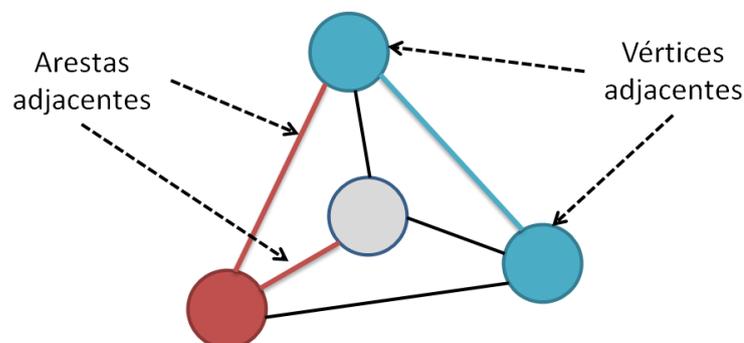


Fonte: Autoria própria.

## 2.2 DEFINIÇÕES FORMAIS

Netto (2012) apresenta um grafo como uma estrutura  $G = (V, E)$  onde  $V$  é um conjunto discreto de elementos e  $E$  uma família de elementos definidos em função de  $V$ . Os elementos de  $V$  são chamados de vértices, nós ou ponto, sendo o valor  $n = |V|$  a ordem do grafo. Uma família  $E$ , por sua vez, pode ser entendida como uma relação, ou conjunto de relações de adjacência, cujos elementos são chamados em geral de ligações. Nas estruturas não orientadas, os  $e \in E$  são conhecidos como arestas e, nas orientadas em particular, como arcos. O valor  $m = |E|$  é chamado por alguns autores de tamanho do grafo. Dois vértices que compartilham uma ligação são ditos adjacentes, termo que também é empregado para definir duas ligações envolvendo um vértice comum. Estas relações de adjacência se encontram ilustrada na Figura 3.

Figura 3 - Relações de adjacências entre vértices e arestas.



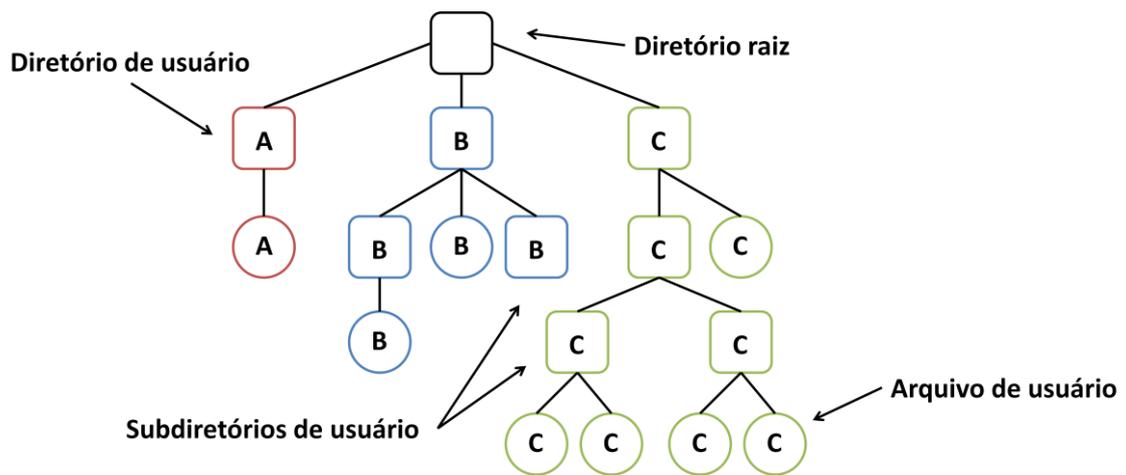
Fonte: Autoria própria.

Tanto a ordem quanto o tamanho de um grafo estão associados diretamente com sua complexidade computacional. Em muitas aplicações reais, é comum um aumento substancial

de suas instâncias elevar o processamento necessário para resolução do problema a níveis não aceitáveis em termos de tempo e espaço de armazenamento. Apesar disso, inúmeros problemas encontram suas soluções com a modelagem do domínio sob a forma de grafos.

Árvores de dados são exemplos comuns de estruturas embasadas nesta abordagem, como ilustrado pela Figura 4, que representa um sistema de arquivos em diretórios hierárquicos.

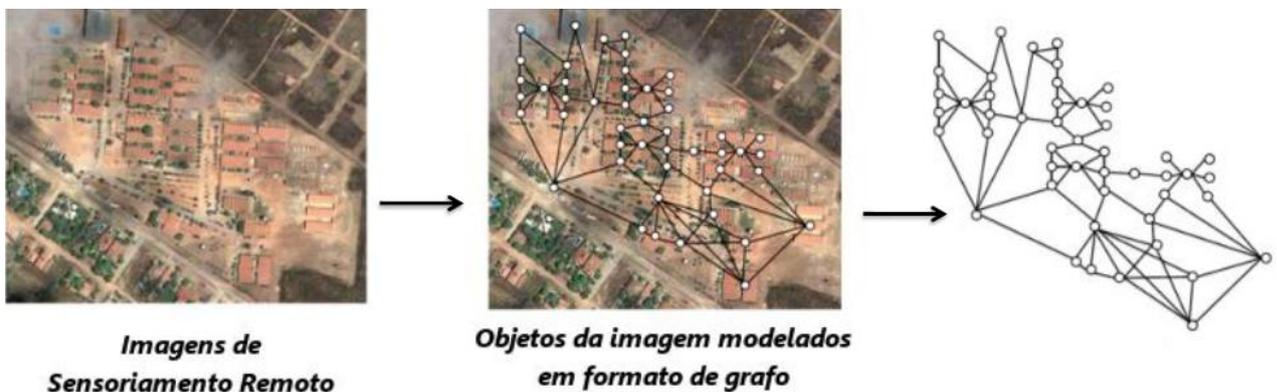
Figura 4 - Esquema hierárquico de diretórios e arquivos para usuários A, B e C.



Fonte: Autoria própria.

A utilidade dos grafos está presente não somente na organização conveniente dos dados, mas também no processamento das informações relacionadas a estes. A Figura 5 ilustra uma etapa do processo de mineração de informações coletadas via sensoriamento remoto. A partir da construção do grafo pelo processamento da imagem, é possível extrair informações úteis, como padrões que se repetem na estrutura, por exemplo.

Figura 5 - Modelagem de grafo em sensoriamento remoto.



Fonte: MACIEL (2012).

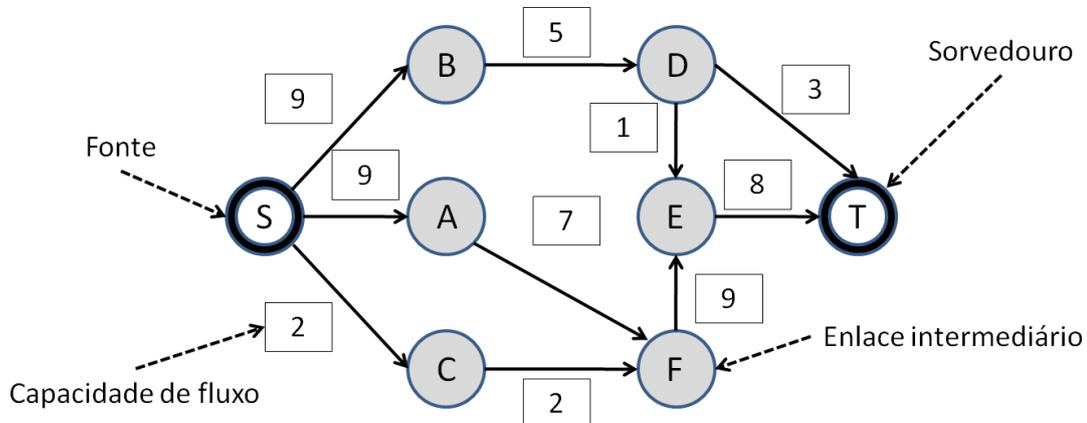
## 2.3 REDES DE FLUXO

Uma representação particular de grafos, objeto de estudo central neste trabalho, são as redes de fluxo.

Redes de fluxo são grafos orientados usados para modelar a capacidade de escoamento de materiais, informações ou tráfego entre dois pontos distintos. Em uma representação simples, observamos a presença de dois vértices especiais denominados raiz e antirraiz (Netto, 2012), que encontram-se referenciados neste trabalho como a estação fonte ou provedora e o sorvedouro da rede, respectivamente. Os arcos da rede de fluxo, por sua vez, estão associados à capacidade de tráfego entre um vértice e outro. A ausência de um arco entre vértices demonstra intuitivamente que não há comunicação entre eles.

A Figura 6 apresenta um esquema básico de uma rede de fluxo. Nela é possível verificar a perspectiva heterogênea da qual a abordagem das redes de fluxo trata, uma vez que as capacidades nas arestas podem ser diferentes umas das outras.

Figura 6 - Representação de uma rede de fluxo simples (Exemplo 1).



Fonte: Autoria própria.

É possível associar este grafo ao tráfego de veículos onde nem todas as estradas possuem a mesma largura ou comprimento, ou a uma instalação hidráulica com encanações de diâmetros diferentes.

Ainda observando a Figura 6; considerando somente o caminho  $S \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ , com capacidades 9 de S para B, 5 de B para D e 3 de D para T. Pode-se perceber que, apesar da capacidade do fluxo entre S e B ser de 9 unidades, B só consegue escoar 5 para D, portanto o fluxo dos dois primeiros caminhos não pode exceder este limite, do contrário B

eventualmente será sobrecarregado. De maneira indutiva, é possível inferir que um fluxo contínuo partindo de S até T, escoando através do caminho  $S \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ , está sujeito à capacidade de sua comunicação mais restrita, que é 3 na aresta de D para T. Esta aresta é, portanto, o elemento limitante da comunicação quando consideramos somente este caminho entre S e T.

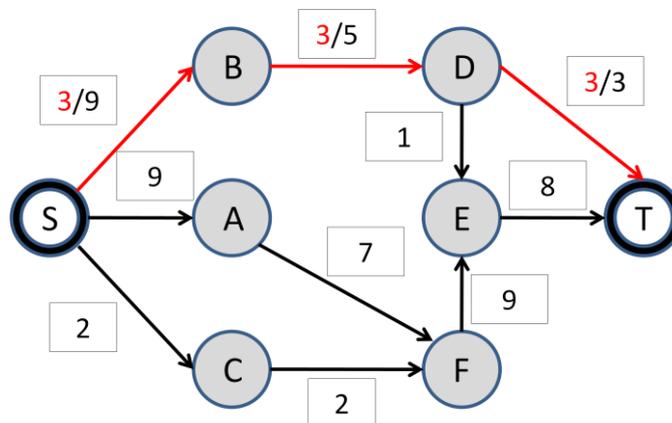
Não incomum, problemas derivados da sobrecarga em redes de fluxo incluem consequências sérias: tubulações de gases e líquidos voláteis podem causar acidentes, substâncias tóxicas podem agredir o meio ambiente, recursos limitados podem ser desperdiçados; informações digitais podem ser perdidas e engarrafamentos quilométricos podem se formar, para citar alguns exemplos.

Diante deste contexto, faz-se necessário obter o conhecimento sobre o limite seguro de transmissão por parte da fonte mantendo-se o aproveitamento máximo da capacidade de transporte da rede. Para isso, é importante conhecer o seu **fluxo máximo**, isto é, a capacidade máxima de transmissão em face de todas as comunicações entre seus nós de capacidades heterogêneas.

## 2.4 FLUXO MÁXIMO E CORTE MÍNIMO

Considerando o efetivo aumento de fluxo descrito na seção anterior sobre o caminho  $S \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ , obteremos uma configuração da rede de fluxo semelhante à ilustrada na Figura 7. Nela é possível perceber que a rede não está transportando sua capacidade máxima.

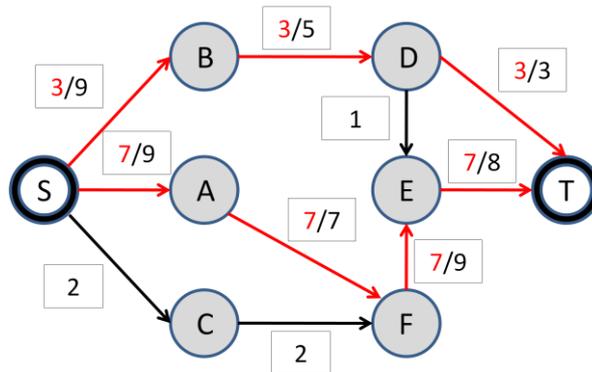
Figura 7 - 1º aumento na rede de fluxo Exemplo 1.



Fonte: Autoria própria.

Seguido o mesmo procedimento, pode-se continuar aumentando o fluxo da rede por outros caminhos, como o  $S \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow T$  em 7 unidades, por exemplo, obtendo a configuração ilustrada pela Figura 8 a seguir.

Figura 8 - 2º aumento na rede de fluxo Exemplo 1.

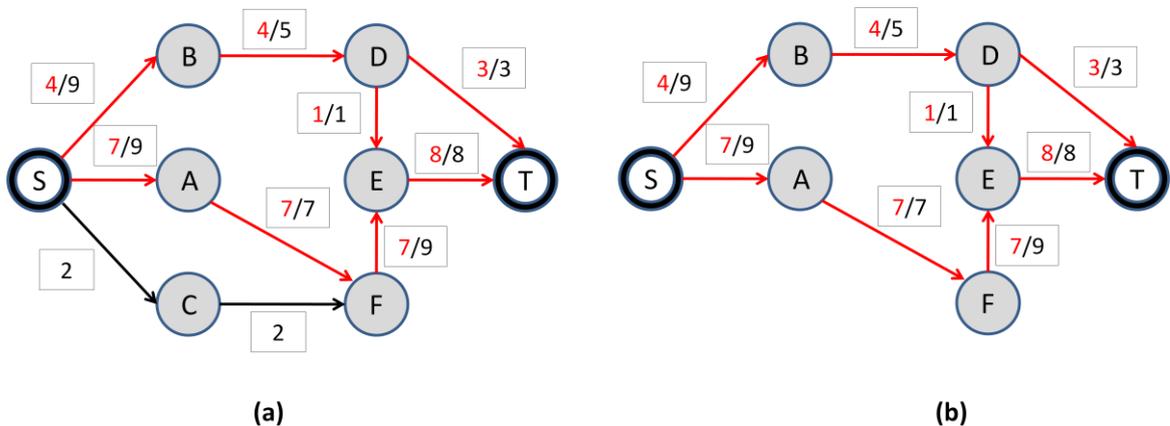


Fonte: Autoria própria.

O fluxo total passa a ser o fluxo anterior da rede atualizado com a soma do aumento recém obtido, isto é, 10 unidades.

Diante da nova configuração, dois possíveis caminhos permitem aumentar o fluxo na rede ainda mais, são eles o  $S \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow T$  ou  $S \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow T$ , ambos em 1 unidade. Tomando-se arbitrariamente o primeiro caminho como escolhido para efetivar o aumento, obteremos a configuração final da rede (Figura 9 (a)).

Figura 9 - (a) 3º aumento na rede de fluxo Exemplo 1. (b) Rede de fluxo com a retirada de C.



Fonte: Autoria própria.

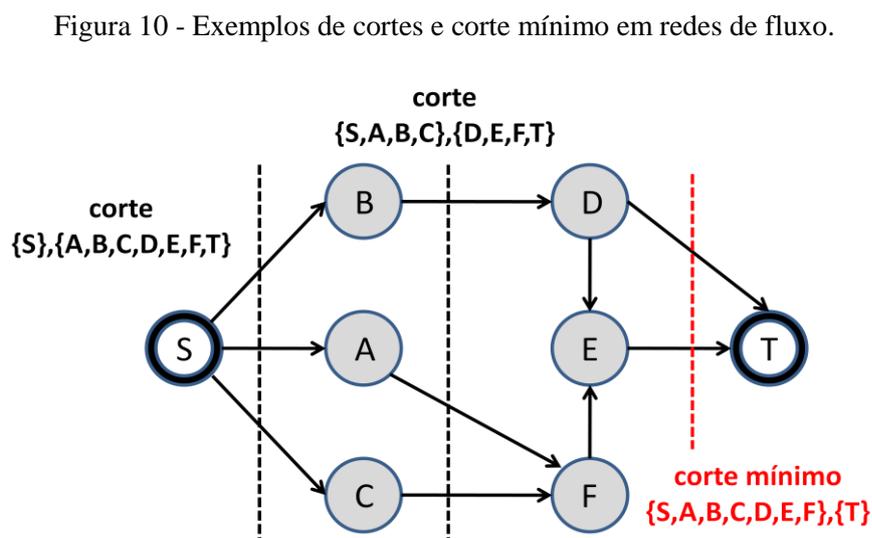
Pode-se perceber que não é mais possível aumentar o fluxo da rede utilizando outro caminho, uma vez que o sorvedouro T já está absorvendo sua capacidade máxima de 11

unidades através de seus vértices emissores D e E. Após esta descoberta, fica evidente também que as estruturas representadas pelo vértice C e as arestas  $S \rightarrow C$  e  $C \rightarrow F$  podem ser dispensadas sem nenhum prejuízo para o fluxo máximo. Esta simplificação da rede é demonstrada pela Figura 9 (b) e, apesar de ser uma justificativa razoável para a aplicação de um algoritmo otimizador de recursos, é importante ressaltar que o objetivo pretendido neste trabalho é aproveitar os recursos ao máximo, não racioná-los.

Na configuração final do exemplo ilustrada em Figura 9(a), B ainda consegue transmitir 1 unidade de fluxo para D, assim como F continua capaz de escoar 2 unidades para E, entretanto qualquer unidade de fluxo extra que chegar em D e E sobrecarregará estes nós. Esta impossibilidade de transmitir fluxo de um conjunto de vértices contendo a fonte para outro conjunto contendo o sorvedouro caracteriza o **corte mínimo**, e é através dele que tomamos conhecimento do fluxo máximo da rede. À luz deste conceito, faz-se necessário entender primeiro a definição formal de corte.

Seja  $V$  o conjunto de vértices de um grafo de fluxo  $G$ , e  $A$  um subconjunto de  $V$ , tal que a estação fonte  $s \in A$  e o sorvedouro  $t \notin A$ . Então um corte  $(A, V-A)$  em  $G$  é o conjunto de arcos com um dos vértices em  $A$  e outro em  $V-A$  (complemento de  $A$  em relação a  $V$ ).

O corte mínimo é um corte de arestas saturadas por onde escoar o fluxo máximo de um grafo orientado. A Figura 10 a seguir ilustra alguns cortes  $(A, V-A)$  e o corte mínimo do exemplo discutido no início deste capítulo ( $\{S,A,B,C,D,E,F\}, \{T\}$ ).

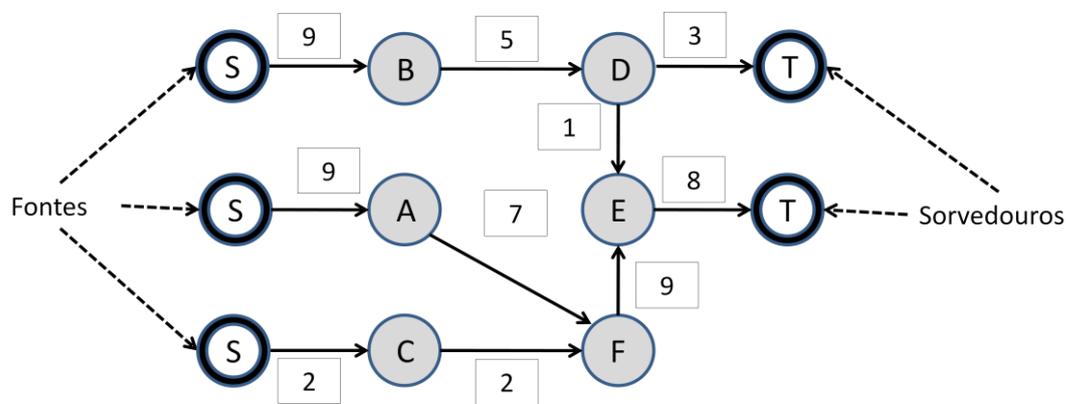


Fonte: Autoria própria.

É no corte mínimo de uma rede de fluxo onde se verifica sua limitação máxima, informalmente conhecida como gargalo da rede de fluxo. Qualquer tentativa de estender o fluxo máximo da rede deve levar em consideração a possível extensão das capacidades dos arcos envolvidos neste corte.

É importante ressaltar também que uma rede de fluxo não está sujeita apenas a uma estação fonte, nem a apenas uma estação sorvedora. A Figura 11 mostra uma rede com múltiplas estações fonte e múltiplos sorvedouros.

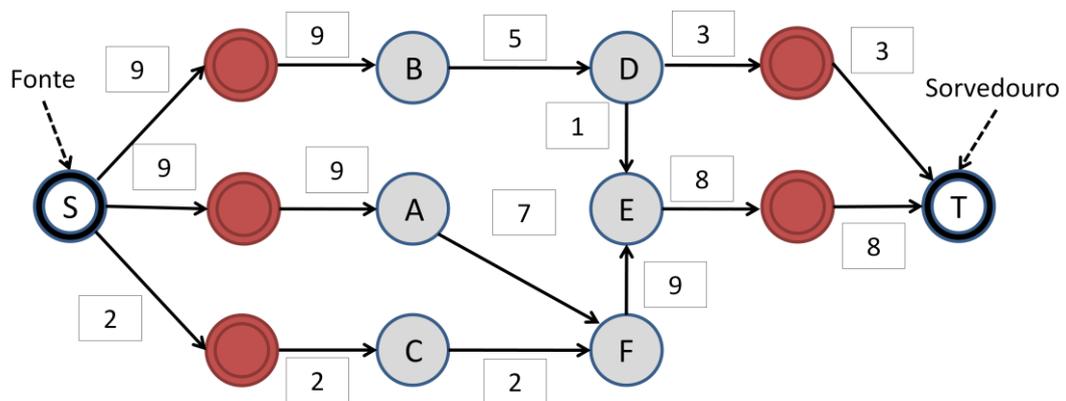
Figura 11 - Rede de fluxo com múltiplas estações fonte e sorvedouro.



Fonte: Autoria própria.

Uma abordagem para tratar redes de fluxo com esta configuração se dá pela unificação destes vértices especiais através da criação de nós intermediários capazes de reproduzir a transmissão de fluxo das múltiplas estações fonte e absorver o fluxo dos múltiplos sorvedouros, como ilustrado na Figura 12 a seguir. Desta forma, o procedimento para descobrir do fluxo máximo pode seguir o mesmo padrão apresentado no início desta seção.

Figura 12 - Unificação de múltiplas estações fonte e sorvedouros da Figura 11.



Fonte: Autoria própria.

Estes conceitos são necessários para o entendimento da proposta deste trabalho, que visa explorar as capacidades residuais dos arcos da rede de fluxo após a execução do algoritmo de Ford e Fulkerson.

## 2.5 O ALGORITMO DE FORD E FULKERSON

Determinar o fluxo máximo de uma rede contendo poucos vértices e arcos, como apresentado na seção anterior, é uma tarefa que envolve pouca complexidade e frequentemente dispensa o poder de uma ferramenta computacional. Problemas com domínio real, todavia, raramente possuem tal configuração. A instalação de dutos em um prédio de vários andares ou o trânsito de uma metrópole são alguns exemplos de redes de fluxo que tornam ineficiente, dispendiosa e muitas vezes impraticável a tarefa de determinar o fluxo máximo de forma não automatizada.

Na computação, o algoritmo de aumento de fluxo proposto inicialmente por Ford e Fulkerson é uma das soluções para o problema de encontrar o fluxo máximo e o corte mínimo de uma rede.

### 2.5.1 Apresentação

Ford e Fulkerson definiram em 1962 uma notação simplificada que facilita a expressão de fluxos envolvendo conjuntos de vértices. Esta notação considera dois conjuntos disjuntos **A** e **B** contidos em **V** (vértices do grafo), chamando-se de **K** o conjunto dos índices dos arcos que possuem extremidade inicial em **A** e final em **B**. **A** e **B** contém a estação fonte e o sorvedouro, respectivamente. O fluxo é então definido como a soma dos elementos de **K**. Fundamentalmente, o algoritmo está sujeito às seguintes regras:

- Sejam **u** e **v**, dois vértices da rede, qualquer fluxo passando pela aresta **(u,v)** não pode exceder sua capacidade, isto é,  $f(u,v) \leq c(u,v)$ .
- O fluxo de **u** para **v** deve ser o oposto de **v** para **u**. Isso porque se considera o sentido no qual o fluxo caminha entre os conjuntos **A** e **B**. Se **f(u,v)** for **w**, **f(v,u)** será  $-w$ .

A divisão do grafo em dois subconjuntos complementares proporciona a realização de uma **busca** partindo da estação fonte até o sorvedouro. O artefato resultante desta busca é um caminho de aumento por onde pode ser escoado fluxo. O algoritmo obedece a capacidade inicial e residual de cada aresta percorrida, determinando o aumento máximo permitido para aquele caminho encontrado.

A interface do procedimento de Ford e Fulkerson, apresenta a seguinte configuração:

**Entrada:** Um grafo  $G$ , com capacidade de fluxo  $c$ , um vértice fonte  $s$  e um sorvedouro  $t$ .

**Saída:** Um fluxo  $f$  de  $s$  para  $t$  que representa o máximo da rede de fluxo.

### O algoritmo de Ford e Fulkerson

1. Para todas as arestas  $(u,v) \in G$ , faça  $f(u,v) \leftarrow 0$  e  $f = 0$
2. Enquanto existir um caminho  $p$  de  $s$  para  $t$  em  $G$ , tal que  $c_f(u,v) > 0$  para todas as arestas  $(u,v) \in p$
3. Encontre a capacidade de aumento de fluxo ( $c_f$ ) em  $p$  dada por  $c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \in p\}$
4.  $f \leftarrow f + c_f(p)$
5. Para todas os arcos  $(u,v) \in p$
6.  $f(u,v) \leftarrow f(u,v) + c_f(p)$

A metodologia usada para encontrar os caminhos de aumento  $p$  pode variar em termos de busca em profundidade, largura e escolha gulosa nos enlaces intermediários entre a fonte e o sorvedouro. Quando a busca é realizada em largura, o algoritmo é associado à autoria de Edmonds e Karp (1972). Uma discussão mais aprofundada sobre esta diferença será apresentada na próxima seção.

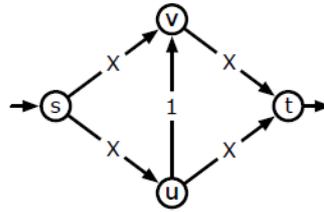
## 2.5.2 Evolução e complexidade

Encontrar caminhos por onde o fluxo possa ser escoado é a principal rotina de execução no algoritmo de aumento de fluxo em redes. A forma como este caminho é descoberto é o fator determinante de sua complexidade computacional.

O procedimento de Ford e Fulkerson publicado originalmente em 1962 implementa uma **busca em profundidade** da estação fonte até o sorvedouro da rede. Este procedimento, entretanto, apresenta duas grandes deficiências posteriormente apontadas por Edmonds e Karp.

O primeiro problema diz respeito à complexidade instável para instâncias de redes de fluxo distintas, identificada por alguns autores como pseudo-polinomial. Em verdade, para a maioria dos casos práticos, o algoritmo de aumento de fluxo original apresenta um comportamento satisfatório, similar a algoritmos polinomiais. Algumas instâncias, contudo, levam o algoritmo a executar em tempo exponencial. O exemplo ilustrado pela Figura 13 a seguir apresenta uma situação ruim de busca em profundidade para um valor de  $X$  suficientemente grande.

Figura 13 - Exemplo de rede de fluxo com mau desempenho do algoritmo de Ford e Fulkerson.

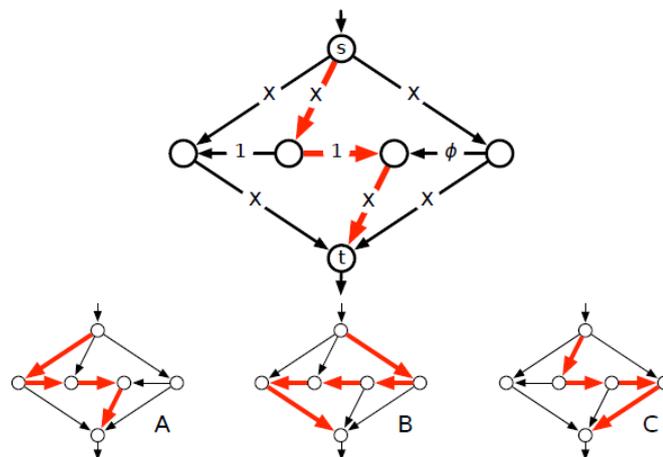


Fonte: ERICKSON (2014).

Nesta situação, o que poderia ser resolvido em duas iterações através de  $s \rightarrow v \rightarrow t$  e  $s \rightarrow u \rightarrow t$  acaba sendo resolvido em  $2X$ . O algoritmo alterna fluxo entre  $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow t$  e  $s \rightarrow v \leftarrow u \rightarrow t$  até atingir o limite de capacidade, prejudicando assim o desempenho global, sobretudo para valores de  $X$  excepcionalmente elevados. Este problema é discutido em detalhes por Even (1975) e Lovász e Plummer (1986), onde também se encontra uma tabela indicativa da complexidade dos algoritmos disponíveis até 1983.

O segundo problema está associado com a intolerância do algoritmo à algumas capacidades irracionais de arcos. Em alguns casos, o algoritmo segue encontrando caminhos de aumento com capacidades residuais cada vez menores. E ainda pior, a sequência infinita de caminhos de aumento pode nem mesmo convergir para o que seria o fluxo máximo da rede; ou mesmo para uma fração do mesmo. Uri Zwick publicou em 1995 um artigo apresentando o menor exemplo de rede de fluxo na qual o algoritmo de Ford e Fulkerson pode falhar em terminar. O esquema da rede apresentada em seu trabalho se encontra ilustrado na Figura 14.

Figura 14 - Exemplo de rede em que o algoritmo de Ford e Fulkerson pode falhar em terminar.



Fonte: ERICKSON (2014).

No exemplo apresentado, o valor de  $\emptyset$  é um número irracional. O algoritmo segue alternando a sequência de caminhos de aumento ilustrados em A, B e C, aumentando o fluxo com incrementos mais inexpressivos a cada nova iteração. O algoritmo não termina e não há garantia de convergência do resultado.

O algoritmo de aumento de fluxo foi aprimorado com o tempo por diversos autores, incluindo seus autores originais, Ford e Fulkerson. Jack Edmonds, Richard Karp e Dinit/Dinic (Even, 1975) foram alguns destes autores que propuseram modificações significativas.

Em 1972, Edmonds e Karp publicaram um estudo com duas heurísticas naturais para escolher o caminho de aumento. A primeira heurística implementava a escolha prioritária dos arcos de maior capacidade até o sorvedouro, caracterizando uma **busca gulosa**. A segunda abordagem, também discutida por Dinic por volta de 1970, considerava a escolha do caminho mais curto entre a fonte e o sorvedouro, isto é, uma **busca em largura**. Esta segunda heurística garante a convergência do algoritmo e o seu término com complexidade assintótica (na notação Bachmann–Landau) estável verdadeiramente polinomial  $O(EV^2)$ .

Os algoritmos de fluxo máximo em redes seguiram com sua evolução. Décadas de pesquisa conduziram a algoritmos ainda mais rápidos. Alguns deles se encontram sumarizados no Quadro 1 a seguir. Em algumas abordagens, é possível verificar que o uso de árvores dinâmicas tem um impacto positivo na redução da complexidade.

Quadro 1 - Algoritmos de fluxo máximo e complexidades.

Algoritmo	Complexidade	Uso de árvores dinâmicas
Blocking flow	$O(V^3)$	$O(VE \log V)$
Network simplex	$O(V^2E)$	$O(VE \log V)$
Push-relabel (generic)	$O(V^2E)$	-
Push-relabel (FIFO)	$O(V^3)$	$O(V^2 \log(V^2/E))$
Push-relabel (highest label)	$O(V^2\sqrt{E})$	-
Pseudoflow	$O(V^3)$	$O(VE \log V)$
Compact abundance graphs	-	$O(VE)$

Fonte: ERICKSON (2014).

O mais rápido algoritmo de fluxo máximo conhecido foi anunciado por James Orlin em 2012 e publicado em 2013. Os detalhes do algoritmo de Orlin vão além do objetivo deste trabalho; além disso, segundo Ericksson (2013), ele utiliza algoritmos e estruturas de dados existentes como caixas pretas, dificultando sua compreensão. Uma notória contribuição de seu trabalho, todavia, reside na redução da complexidade computacional de tempo para  $O(VE)$ .

### 2.5.3 Metodologia

O algoritmo objeto de estudo neste trabalho, proposto originalmente por Ford e Fulkerson, revisado e aprimorado por Edmonds e Karp, utiliza a busca em largura num procedimento similar ao descrito na seção 2.4. Inicialmente, todo o fluxo entre os arcos é inicializado com zero para que, gradualmente, possa ser aumentado até o limite da rede. O fluxo máximo  $f$  é, naturalmente, inicializado em zero também.

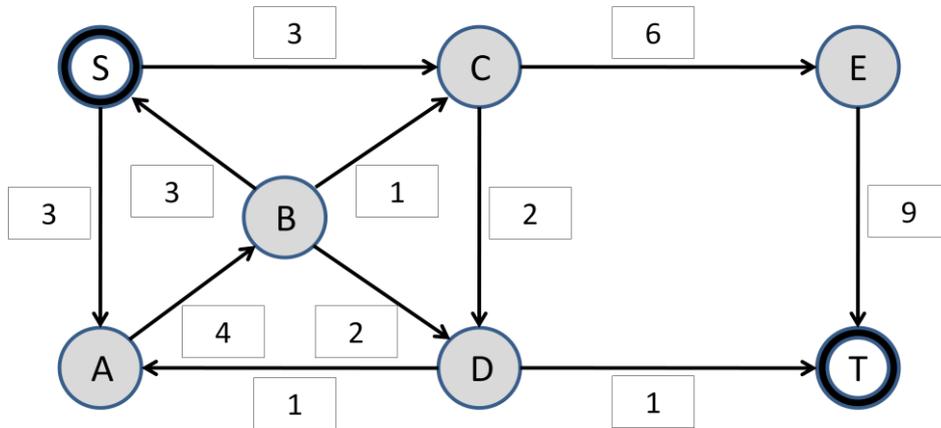
O segundo passo consiste na descoberta de caminhos de aumento por onde possa escoar fluxo entre a fonte  $s$  e o sorvedouro  $t$ , com a subsequente atualização do fluxo global parcial. Esta descoberta deve desconsiderar arestas saturadas – onde o fluxo é igual à sua capacidade máxima – uma vez que não há como escoar mais fluxo entre elas. Esta etapa deve se repetir até que não haja mais caminhos de aumento, indicando a impossibilidade de aumentar o fluxo da rede e, conseqüentemente, o fim do algoritmo.

Uma vez encontrado um caminho de aumento  $p$ , faz-se necessário calcular a sua capacidade máxima de aumento de fluxo, que é dada pela capacidade residual mínima entre as arestas que o compõe. A aresta portadora desta capacidade mínima é o elemento limitante no caminho de aumento.

Com a capacidade máxima de aumento pelo caminho  $p$ , deve-se então atualizar o fluxo máximo  $f$  da rede, bem como o fluxo nas arestas que compõe este caminho de aumento. Para os arcos no sentido de  $s$  para  $t$ , o valor deve ser incrementado; já entre os arcos com sentido inverso, este valor deve ser subtraído, indicando que o fluxo foi remanejado para outro arco. Quando não houver mais caminhos de aumento,  $f$  terá acumulado os valores de todos os aumentos intermediários possíveis durante a execução do algoritmo, representando assim o fluxo máximo da rede. Com a finalização do algoritmo, a rede se encontra saturada.

Retomando o exemplo de aumento de fluxo apresentado no início deste capítulo, é possível perceber, pela sua simplicidade, que não foram considerados arcos de retorno durante a execução do procedimento. É importante ressaltar, entretanto, que a metodologia do algoritmo leva em consideração o remanejamento de fluxos através deste tipo de arco. Para exemplificar como funciona esta abordagem, pode-se tomar a rede de fluxo representada pela Figura 15, doravante referenciada como Exemplo 2.

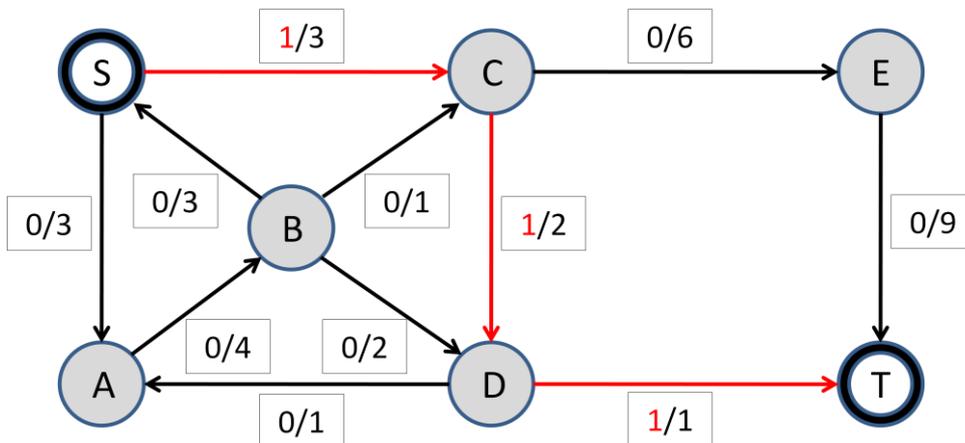
Figura 15 - Rede de fluxo Exemplo 2.



Fonte: Autoria própria.

Após a descoberta do primeiro caminho de aumento, a rede apresentará a configuração ilustrada na Figura 16. O fluxo passará a ser de uma unidade através de  $S \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow T$ . Este caminho é composto exclusivamente por arcos que escoam o fluxo no sentido da fonte para o sorvedouro, considerando os subgrupos de vértices (cortes) que são identificados ao longo do caminho.

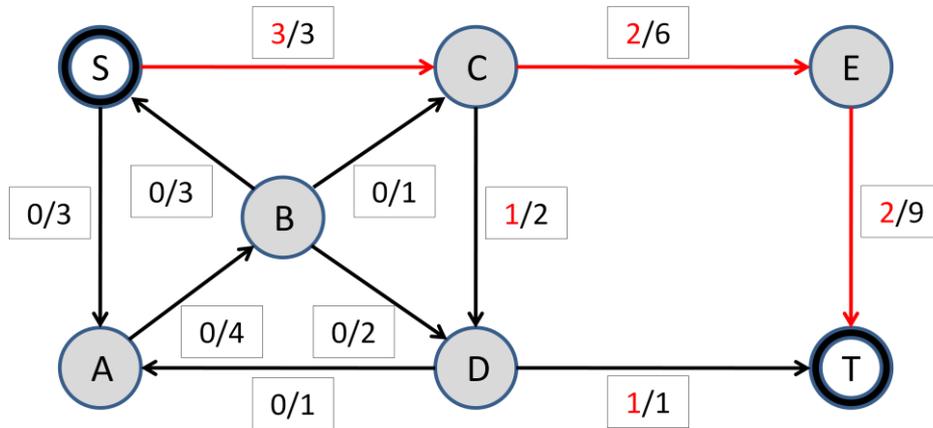
Figura 16 - Exemplo 2 após o 1º caminho de aumento.



Fonte: Autoria própria.

Observando a metodologia do algoritmo, descobrimos o segundo caminho de aumento, apresentado a seguir pela Figura 17. O incremento de 2 unidades se dá através do caminho  $S \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$ , atualizando o fluxo máximo da rede para 3 unidades.

Figura 17 - Exemplo 2 após o 2º caminho de aumento.

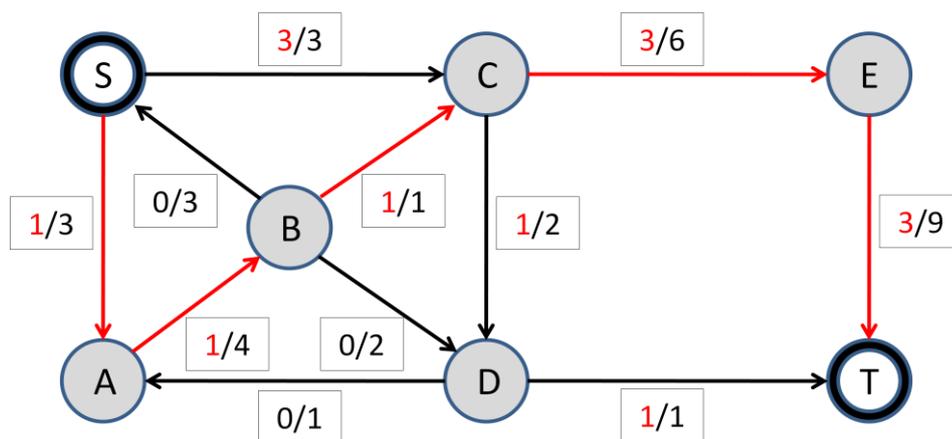


Fonte: Autoria própria.

Assim como o primeiro caminho de aumento, o segundo caminho  $S \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$  é composto exclusivamente por arcos de avanço que escoam o fluxo sempre no sentido de S para T.

O terceiro aumento de fluxo pode se dar através do caminho  $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$ , que apresenta a mesma característica referente aos arcos de avanço dos caminhos anteriores. O aumento de fluxo de 1 unidade atualiza o fluxo total para 4. A representação da rede após a descoberta deste terceiro caminho é ilustrada na figura 18.

Figura 18 - Exemplo 2 após o 3º caminho de aumento.



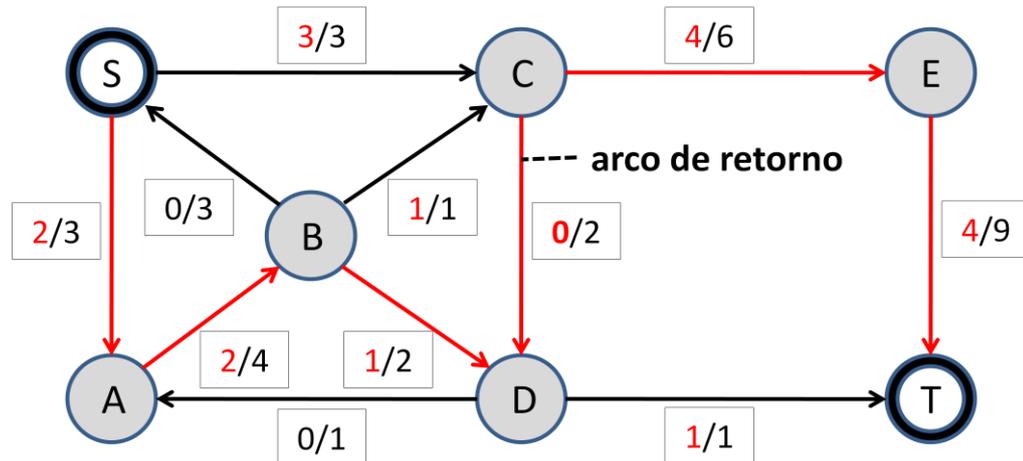
Fonte: Autoria própria.

Neste ponto, uma observação não aprofundada da rede poderia levar à dedução de que não há como seguir aumentando seu fluxo. O caminho  $C \rightarrow E \rightarrow T$  é o único que ainda possui

capacidade residual para escoar fluxo até o sorvedouro T, mas os dois arcos que transportam fluxo até o vértice C, a saber,  $S \rightarrow C$  e  $B \rightarrow C$ , já estão sobrecarregados.

Ocorre que um quarto caminho de aumento ainda é possível através de  $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \leftarrow C \rightarrow E \rightarrow T$ , como ilustrado pela Figura 19.

Figura 19 - Exemplo 2 após o 4º caminho de aumento com o arco de retorno.



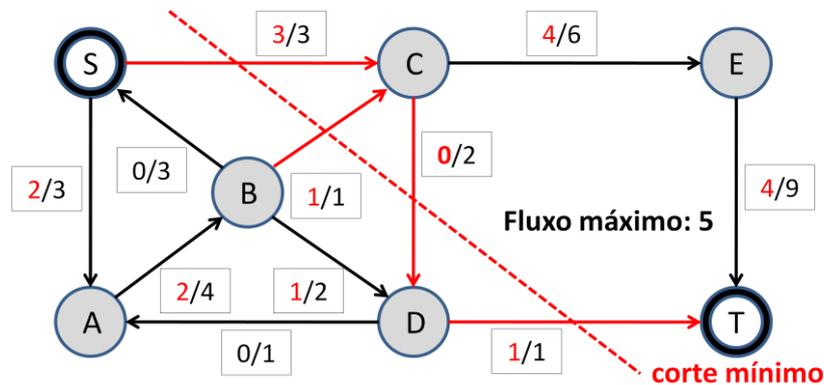
Fonte: Autoria própria.

Este caminho se dá por meio do remanejamento do fluxo de 1 unidade no arco de retorno  $D \leftarrow C$  para o arco  $C \rightarrow E$ . O fluxo de 1 unidade escoando através de  $D \rightarrow T$  é mantido pela distribuição das 2 unidades do fluxo que chega em B entre C e D.

É possível perceber que o aumento de fluxo no caminho  $p$  descoberto não é mais determinado somente pela capacidade residual dos arcos de avanço, mas também pelo fluxo corrente no arco de retorno. Observando novamente a Figura 18, percebe-se que embora todos os arcos de avanço no quarto caminho de aumento possam escoar até 2 unidades de fluxo, o arco de retorno  $D \leftarrow C$  só permite o remanejamento de 1 unidade, tendo esta sido atribuída durante a descoberta do primeiro caminho de aumento. Esta mudança no fluxo do quarto caminho de aumento expressa no algoritmo por  $c_f(p)$  deve ser incrementada nos arcos de avanço e deduzida nos arcos de retrocesso.

O fluxo máximo de 5 unidades é então obtido e o corte mínimo da rede  $(\{S, A, B, D\}, \{C, E, T\})$  descoberto, como exposto pela Figura 20.

Figura 20 - Fluxo máximo e corte mínimo da rede de fluxo Exemplo 2.



Fonte: Autoria própria.

Os arcos  $S \rightarrow C$ ,  $B \rightarrow C$ ,  $D \leftarrow C$  e  $D \rightarrow T$  são responsáveis pela comunicação do corte mínimo e, conseqüentemente, por escoar o fluxo máximo entre a fonte e o sorvedouro. Assim como no exemplo do capítulo 2, qualquer tentativa de aumentar o fluxo maximizado da rede deve, necessariamente, levar em consideração o aumento da capacidade de fluxo nesta região.

#### 2.5.4 Implementação do algoritmo em C/C++

Durante a formalização desse projeto, foi implementada uma aplicação em linguagem C/C++ do algoritmo de Ford e Fulkerson utilizando a metodologia de Edmonds e Karp na descoberta de caminhos de aumento por meio de busca em largura. A aplicação efetua a leitura de uma rede de fluxo inicial descrita por uma matriz de adjacência em um arquivo de texto para em seguida executar o algoritmo sobre esta rede. A estrutura do arquivo é ilustrada pela Figura 21 a seguir, que representa a entrada para a rede de fluxo Exemplo 1 apresentada no capítulo 2.

Figura 21 - Padrão de entrada da rede Exemplo 1 para a aplicação desenvolvida.

```

Nome da rede ← exe1
               sabcdeft → Vértices
09920000
00000070
00005000
Matriz de     ← 00000020
adjacência   ← 00000103
               00000008
               00000900
               00000000
  
```

Fonte: Autoria própria.

A matriz de adjacência apresenta a incidência de arcos e suas respectivas capacidades entre os vértices da rede de fluxo. Embora esteja omissa a primeira coluna com os vértices de partida dos arcos na representação do arquivo de texto, a saída da aplicação exhibe a matriz completa, como é mostrado na Figura 22.

Figura 22 - Matriz de adjacência da rede de fluxo Exemplo 1.

```
Informe o nome do arquivo: exe1
GRAFO: exe1
- Matriz de Adjacência -
      s  a  b  c  d  e  f  t
s    0  9  9  2  0  0  0  0
a    0  0  0  0  0  0  7  0
b    0  0  0  0  5  0  0  0
c    0  0  0  0  0  0  2  0
d    0  0  0  0  0  1  0  3
e    0  0  0  0  0  0  0  8
f    0  0  0  0  0  9  0  0
t    0  0  0  0  0  0  0  0
```

Fonte: Autoria própria.

A saída da aplicação segue apresentando o fluxo inicial da rede inicializado em zero, seguido pelos sucessivos caminhos de aumento de fluxo encontrados e suas respectivas capacidades de aumento. Quando não há mais caminhos de aumento possíveis, a aplicação se encerra exibindo o fluxo máximo, o corte mínimo e a configuração final da rede saturada no console. A Figura 23 apresenta este esquema.

Figura 23 - Saída principal da aplicação para a rede de fluxo Exemplo 1.

```
FLUXO INICIAL
1º Arco de (s) para (a) C/F = 9/0
2º Arco de (s) para (b) C/F = 9/0
3º Arco de (s) para (c) C/F = 2/0
4º Arco de (a) para (f) C/F = 7/0
5º Arco de (b) para (d) C/F = 5/0
6º Arco de (c) para (f) C/F = 2/0
7º Arco de (d) para (e) C/F = 1/0
8º Arco de (d) para (t) C/F = 3/0
9º Arco de (e) para (t) C/F = 8/0
10º Arco de (f) para (e) C/F = 9/0
-----
1º CAMINHO F-AUMENTANTE: s b d t
Maior Mudanca de fluxo em F (▲Q): 3
-----
2º CAMINHO F-AUMENTANTE: s a f e t
Maior Mudanca de fluxo em F (▲Q): 7
-----
3º CAMINHO F-AUMENTANTE: s b d e t
Maior Mudanca de fluxo em F (▲Q): 1
-----

FLUXO MAXIMO: 11
CORTE MINIMO: << s a b c d f e >, < t >>
-----
FLUXO FINAL
1º Arco de (s) para (a) C/F = 9/7
2º Arco de (s) para (b) C/F = 9/4
3º Arco de (s) para (c) C/F = 2/0
4º Arco de (a) para (f) C/F = 7/7
5º Arco de (b) para (d) C/F = 5/4
6º Arco de (c) para (f) C/F = 2/0
7º Arco de (d) para (e) C/F = 1/1
8º Arco de (d) para (t) C/F = 3/3
9º Arco de (e) para (t) C/F = 8/8
10º Arco de (f) para (e) C/F = 9/7
-----
Fim do Programa._
```

Fonte: Autoria própria.

A aplicação foi igualmente testada sobre a rede de fluxo envolvendo arcos de retorno. A Figura 24 apresenta o formato do arquivo de entrada (a), a matriz de adjacências (b) e a resposta do algoritmo sobre a rede de fluxo Exemplo 2 (c).

Figura 24 - (a) Texto do arquivo de entrada, (b) matriz de adjacência e (c) caminhos de aumento encontrados pela aplicação.

```

exe2
sabcdet
0303000
0040000
3001200
0000260
0100001
0000009
0000000

```

(a)

```

Informe o nome do arquivo: exe2
GRAFO: exe2
- Matriz de Adjacência -
      s   a   b   c   d   e   t
s   0   3   0   3   0   0   0
a   0   0   4   0   0   0   0
b   3   0   0   1   2   0   0
c   0   0   0   0   2   6   0
d   0   1   0   0   0   0   1
e   0   0   0   0   0   0   9
t   0   0   0   0   0   0   0

```

(b)

```

FLUXO INICIAL
1º Arco | de (s) para (a) | C/F = 3/0
2º Arco | de (s) para (c) | C/F = 3/0
3º Arco | de (a) para (b) | C/F = 4/0
4º Arco | de (b) para (s) | C/F = 3/0
5º Arco | de (b) para (c) | C/F = 1/0
6º Arco | de (b) para (d) | C/F = 2/0
7º Arco | de (c) para (d) | C/F = 2/0
8º Arco | de (c) para (e) | C/F = 6/0
9º Arco | de (d) para (a) | C/F = 1/0
10º Arco | de (d) para (t) | C/F = 1/0
11º Arco | de (e) para (t) | C/F = 9/0
-----
1º CAMINHO F-AUMENTANTE: s c d t
Maior Mudanca de fluxo em F (ΔQ): 1
-----
2º CAMINHO F-AUMENTANTE: s c e t
Maior Mudanca de fluxo em F (ΔQ): 2
-----
3º CAMINHO F-AUMENTANTE: s a b c e t
Maior Mudanca de fluxo em F (ΔQ): 1
-----
4º CAMINHO F-AUMENTANTE: s a b d c e t
Maior Mudanca de fluxo em F (ΔQ): 1
-----
FLUXO MÁXIMO: 5
CORTE MÍNIMO: << s a b d >,< c e t >>
-----
FLUXO FINAL
1º Arco | de (s) para (a) | C/F = 3/2
2º Arco | de (s) para (c) | C/F = 3/3
3º Arco | de (a) para (b) | C/F = 4/2
4º Arco | de (b) para (s) | C/F = 3/0
5º Arco | de (b) para (c) | C/F = 1/1
6º Arco | de (b) para (d) | C/F = 2/1
7º Arco | de (c) para (d) | C/F = 2/0
8º Arco | de (c) para (e) | C/F = 6/4
9º Arco | de (d) para (a) | C/F = 1/0
10º Arco | de (d) para (t) | C/F = 1/1
11º Arco | de (e) para (t) | C/F = 9/4

```

(c)

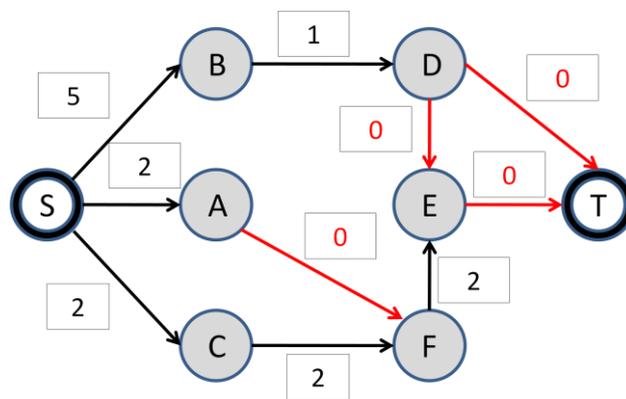
Fonte: Autoria própria.

O desenvolvimento desta aplicação ilustra o funcionamento do algoritmo de Ford e Fulkerson, evidenciando sua utilidade na resolução do problema do fluxo máximo e descoberta do corte mínimo da rede. Esta aplicação serviu de modelo para a implementação de novos componentes funcionais durante o desenvolvimento deste projeto.

### 2.5.5 Inferências sobre a rede saturada

Uma vez saturada, é comum a rede de fluxo apresentar uma configuração residual subutilizada que pode servir para expandir seu fluxo máximo ainda mais. Naturalmente, isso só é possível com a expansão das capacidades de fluxo nos arcos do corte mínimo. Retomando como exemplo a rede de fluxo Exemplo 1 discutida na seção 2.3, pode-se constatar após sua saturação a existência de capacidades residuais em 60% de suas arestas, de acordo com a Figura 25.

Figura 25 - Capacidades residuais da rede Exemplo 1.



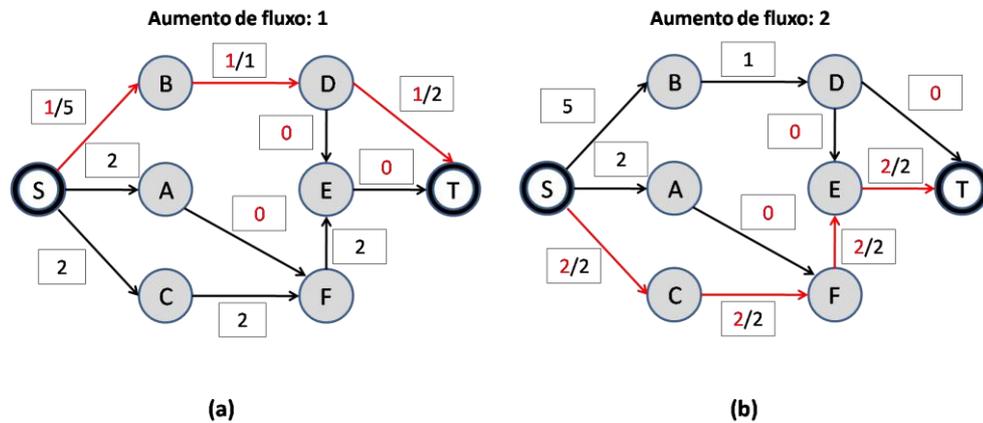
Fonte: Autoria própria.

Considerando a possibilidade de expansão de capacidades nos arcos da rede, é importante verificar que embora os arcos com capacidade esgotada estejam espalhados, de nada adiantaria aumentá-los aleatoriamente sem levar em consideração que a origem do problema está localizada no corte mínimo. Sendo assim, se tomamos como objetivo o aumento do fluxo no do grafo ainda mais, deveremos escolher um entre os arcos  $D \rightarrow T$  e  $E \rightarrow T$  para aplicar o incremento.

Considerando um possível incremento de apenas 1 unidade, não se observa nenhuma diferença entre escolher  $D \rightarrow T$  e  $E \rightarrow T$ , visto que o impacto de ambas escolhas no fluxo máximo da rede será igualmente de 1 unidade. Entretanto, para valores superiores a 1 unidade, verifica-se a existência de uma diferença no aumento global do fluxo.

Para exemplificar, tomando-se o possível incremento como sendo de 2 unidades, é possível observar a diferença que se dá através do caminho escolhido. Na Figura 26 (a), o caminho  $S \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$  só permite o aumento de 1 unidade, já através de  $S \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow T$  (Figura 26 (b)), o aumento no fluxo máximo apresenta-se como sendo de 2 unidades.

Figura 26 - (a) Aumento pelo do incremento no arco  $D \rightarrow T$ . (b) Aumento pelo do incremento no arco  $E \rightarrow T$ .

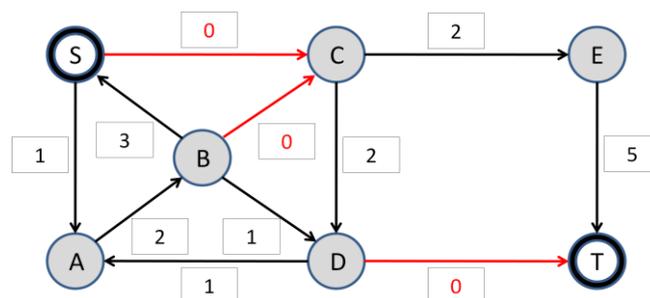


Fonte: Autoria própria.

Conclui-se que  $E \rightarrow T$  é um arco mais promissor que  $D \rightarrow T$ . Esta diferença no aumento de fluxo provém do desequilíbrio nas capacidades residuais dos arcos associados a estes terminais na rede saturada após a execução do algoritmo. Como explicado no capítulo 2, os recursos de transporte associados ao vértice C e às arestas  $S \rightarrow C$  e  $C \rightarrow F$  estavam subutilizados, de forma que poderiam ser removidos sem nenhum prejuízo para o fluxo máximo obtido. Entretanto, quando consideramos o incremento adicional no arco  $E \rightarrow T$ , estes recursos outrora inutilizados ganham importância, permitindo o escoamento de mais fluxo através da rede.

Um raciocínio similar pode ser utilizado para a análise das capacidades residuais da rede Exemplo 2 discutida na seção 2.5.3. O esquema da rede saturada com seus arcos de avanço no corte mínimo destacados pode ser observado na Figura 27.

Figura 27 - Capacidades residuais da rede Exemplo 2.

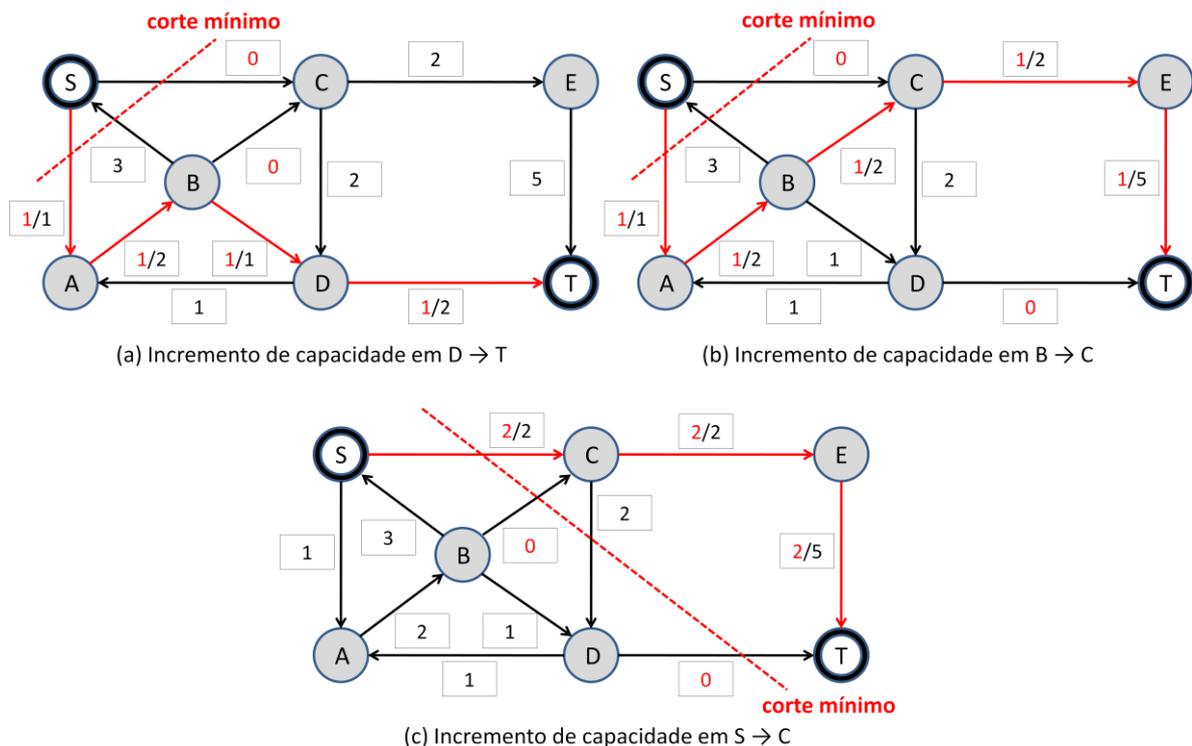


Fonte: Autoria própria.

A partir da ilustração, verifica-se a possibilidade de incremento nas capacidades de três arcos de avanço no corte mínimo. São eles  $S \rightarrow C$ ,  $B \rightarrow C$  e  $D \rightarrow T$ . É importante destacar que se está desconsiderando o arco de retorno  $D \leftarrow C$ , mesmo este pertencendo ao corte mínimo, uma vez que sua capacidade inicial sequer foi utilizada. De maneira similar à rede Exemplo 1, observa-se que o incremento de 1 unidade nas capacidades dos arcos selecionados são igualmente eficazes em aumentar o fluxo máximo da rede na mesma proporção. Neste caso, a diferença também se apresenta quando o incremento nas capacidades é superior a 1 unidade.

Uma análise da Figura 27 evidencia a existência de dois vértices determinantes no escoamento de fluxo até o sorvedouro, são estes C e D; resta, portanto, identificar qual destes vértices está associado aos arcos com as melhores capacidades residuais da rede saturada. Considerando novamente um incremento de 2 unidades em um dos arcos selecionados, obteremos as configurações ilustradas na Figura 28 a seguir.

Figura 28 - Incrementos das capacidades nos arcos (a)  $D \rightarrow T$ , (b)  $B \rightarrow C$  e (c)  $S \rightarrow C$ .



Fonte: Autoria própria.

Se efetivarmos o incremento de capacidade no arco  $D \rightarrow T$  (Figura 28 (a)), o aumento do fluxo será de apenas 1 unidade, tendo em vista que B só consegue escoar este valor até D.

---

C ainda pode escoar 2 unidades para D, mas todos os arcos que transportam para C já estão saturados. De maneira similar, se o incremento for aplicado ao arco  $B \rightarrow C$  (Figura 28 (b)), obteremos uma configuração onde o vértice A será o único responsável por transportar fluxo até B. O vértice A, por sua vez, será alimentado exclusivamente pela fonte S através do arco  $S \rightarrow A$ , cuja capacidade residual é de apenas 1 unidade. Desta forma, o aumento final do fluxo máximo será de apenas 1 unidade também. Por último, expandindo em 2 unidades a capacidade do arco  $S \rightarrow C$  (Figura 28 (c)), aproveita-se ao máximo o incremento, já que  $C \rightarrow E \rightarrow T$  está apto a transmitir este fluxo adicional.

O objetivo desta discussão foi expor o potencial residual das redes de fluxo, no sentido de proporcionar sua exploração posterior. A técnica de Edmonds e Karp (1972) é eficaz ao resolver o problema do fluxo máximo de maneira estável e com complexidade polinomial, denunciando também o corte mínimo da rede de fluxo no processo. Esta abordagem pode ser expandida para permitir a avaliação do potencial latente de cada arco pertencente ao corte mínimo. As redes Exemplo 1 e Exemplo 2 são exemplos didáticos potencialmente simplificados de problemas reais significativamente maiores que também demandam soluções computacionais eficientes.

Diante deste cenário, pode-se inferir que o projeto e resolução de uma rede de fluxo complexa podem envolver computação não somente na descoberta de seu fluxo máximo, mas também na avaliação da rede saturada no sentido de expor suas fragilidades e propor uma melhor exploração de seus recursos.

### 3 TRABALHOS RELACIONADOS

Diversos algoritmos relevantes podem ser destacados da literatura sobre o algoritmo de aumento de fluxo em redes. A partir de Ford e Fulkerson (1958), outros trabalhos como o de Wilkinson (1969), Minieka (1973 e 1974) e Halpern (1979) foram publicados adaptando o procedimento para tratar características específicas. O algoritmo de Ford e Fulkerson para  $\theta$ -fluxos, por exemplo, é uma extensão do caso estático, utilizando rotulações e percursos de aumento de fluxo em  $\mathbf{T}$  períodos de tempo. Não garante, porém, que o fluxo obtido até uma certa etapa seja máximo. Gale (1959) sugeriu um aperfeiçoamento que permitisse a obtenção do que chamou fluxo máximo universal, isto é, um fluxo tal que para todo tempo  $t < \mathbf{T}$  a quantidade já enviada seja máxima. Wilkinson e Minieka (1973) implementaram essa modificação em seus algoritmos. A dissertação de Iemini (1994) é um exemplo dos trabalhos que empregam a modelagem do fluxo dinâmico aplicado no tráfego urbano.

Minieka (1974) também apresentou um segundo algoritmo que permite a aplicação da abordagem proposta por Gale a grafos com arcos temporários, ou seja, grafos que podem ser modificados durante o período no qual estão sendo estudados, permitindo, por exemplo, o estudo de efeito de trocas de sentido de tráfego ou de abertura e fechamento de passagens pela rede. Esta ideia foi estendida por Halpern em seu algoritmo, que considera a capacidade de cada arco como uma função do tempo.

De acordo com Netto (2012), nos algoritmos de Minieka e Halpern, o uso de uma rede expandida em função do tempo pode ser conveniente se o número de arcos sujeitos a alteração não for grande, caso contrário, a resolução computacional do problema se tornará proporcionalmente mais lenta. Não havendo problemas de troca de arcos ou de capacidades, o algoritmo de Wilkinson pode ser considerado o de mais simples aplicação para tratar arcos temporários.

Trabalhos modernos como o de Rus e Dobrota (2012) frequentemente agregam a metodologia do algoritmo de Ford e Fulkerson para descoberta de “caminhos” em problemas de roteamento. A metodologia do algoritmo, entretanto, é alterada significativamente para garantir qualidade de serviço. Trabalhos como o de Boykov e Kolmogorov (2004), por sua vez, comparam algoritmos de descoberta de fluxo máximo e corte mínimo visando obter maior economia de recursos, como a energia gasta no processamento de visão computacional, por exemplo.

Tsiaka (2008) demonstra em seu trabalho a utilidade do algoritmo de Ford e Fulkerson no processo de balanceamento de carga em redes. Peijun *et al.* (2011) retomam a discussão iniciada por Minieka sobre roteamento dinâmico em seu trabalho. Assim como Tsiaka, eles utilizam a teoria do fluxo máximo para balancear a carga e evitar o congestionamento no tráfego, desta vez levando em consideração a característica dinâmica das redes de fluxo.

Similar à dissertação de Iemini (1994), pode-se destacar o trabalho de Saidane *et al.* Moudni (2002), que também trata de otimização para problemas de congestionamento urbano, procurando evitar desperdício de recursos como combustível e tempo, além de diminuir a poluição emitida por veículos automotores.

Algoritmos de fluxo máximo híbridos, combinando mais de uma técnica, também podem ser encontrados, como o discutido por Hernandez *et al.* (2007). Em seu trabalho, Hernandez *et al.* consideram as incertezas de uma rede de fluxo sobre as capacidades de seus arcos. Eles propõem o uso de um grafo incremental de fluxo, e resolvem estas incertezas por meio da utilização do conjunto de teorias fuzzy.

O trabalho de Zhang e Fan (2005) se assemelha com a proposta deste trabalho quando utiliza o algoritmo de Ford e Fulkerson como um procedimento para descobrir o fluxo máximo em redes e codificar os nós, mas, para isso, faz uso de uma versão modificada, especializada para lidar com codificação em redes Ad-hoc. Já a proposta desta pesquisa considera a análise do corte mínimo para que seja estendido de forma a obter o melhor proveito da estrutura residual existente. Isso inclui a alteração de capacidade de alguns arcos, fazendo com que seja necessária a análise do problema de seu ponto de vista fundamental, utilizando a abordagem básica de caminhos de aumento proposta por Ford e Fulkerson sem levar em consideração as especializações ou adaptações propostas pela literatura aqui referenciada.

Este capítulo apresenta dois dos trabalhos publicados cujos objetivos ou metodologias se assemelham ou aproximam da proposta desta dissertação.

### 3.1 ENERGIA UTILIZADA EM VISÃO

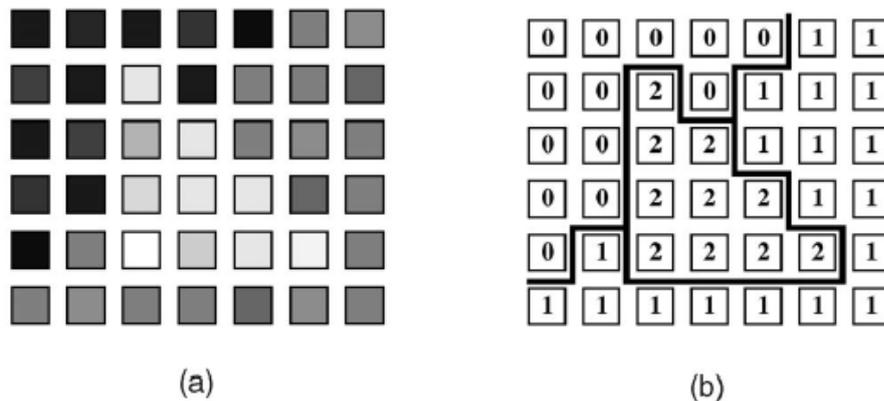
Em seu trabalho titulado *An Experimental Comparison of Min-Cut/Max-Flow Algorithms for Energy Minimization in Vision*, Boykov e Kolmogorov (2004) apresentaram comparações entre os algoritmos de fluxo máximo e corte mínimo formulados até então, objetivando minimizar a energia necessária na visão computacional.

Creig *et al.* (1989) foi o primeiro trabalho a revelar que algoritmos robustos de fluxo máximo e corte mínimo utilizados na otimização combinatória poderiam ser aproveitados para minimizar funções de energia na visão computacional. A energia referida por Creig *et al.* e outros autores posteriores é representada por (1).

$$E(L) = \sum_{p \in P} D_p(L_p) + \sum_{(p,q) \in N} V_{p,q}(L_p, L_q) \quad (1)$$

Onde  $L = \{L_p \mid p \in P\}$  é um rótulo para uma imagem  $P$  e  $D_p(\cdot)$  é uma função de penalização de dados,  $V_{p,q}$  é o potencial de uma iteração e  $N$  é um conjunto com todos os pares de pixels vizinhos. Este esquema de representação pode ser observado na Figura 29.

Figura 29 – Pixels de uma imagem (a) e sua respectiva representação (b).



Fonte: Boykov, Y. e Kolmogorov, V. (2004).

Nesta abordagem, quanto maior for a variação de valores utilizados para representar os pixels, maior será o consumo de energia. Considerando o contexto, Creig *et al.* construíram um grafo de dois terminais no qual o custo de seu corte mínimo apresenta um ótimo global para a representação binária do rótulo  $L$  descrito em (1). Previamente, a minimização desta energia era obtida com métodos aproximativos, como o *simulated annealing*. Em verdade, Creig *et al.* utilizaram seus resultados para mostrar que, na prática, o recozimento simulado provê soluções muito distantes do mínimo global, mesmo em exemplos simples de restauração binária de imagens.

De acordo com Boykov e Kolmogorov, durante os anos 90, houve o surgimento de um grande número de algoritmos em grafos para resolver problemas não binários. Roy e Cox

(1998), por exemplo, foram os primeiros a utilizarem estes algoritmos para computar o stereo de multicâmeras.

Trabalhos posteriores estudaram as propriedades teóricas da construção de grafos na computação da visão. Um destes trabalhos, apresentado por Kolmogorov e R. Zabih (2004), investigou quais das funções de energia poderiam ser minimizadas por meio de cortes em grafos. Este estudo em particular, contudo, só se aplica a grafos com funções de energia de variáveis binárias com cliques duplos ou triplos. Kolmogorov ressalta ainda que o potencial de técnicas de cortes em grafos nos casos com múltiplos rótulos ainda não é inteiramente entendido.

Como foi discutido na seção 2.4.2, os algoritmos de aumento de fluxo passaram a utilizar uma abordagem de busca em largura na descoberta dos caminhos de aumento. No contexto da visão computacional, entretanto, construir uma árvore de busca em largura tipicamente envolve iterar sobre a maioria dos pixels da imagem. Em termos práticos, esta operação se mostra muito onerosa, tendo em vista que é executada com frequência. De fato, os dados reais usados nos experimentos de Boykov e Kolmogorov confirmaram que a construção repetitiva de árvores de busca em grafos prejudica consideravelmente o desempenho da técnica de caminhos de aumento.

Diante deste problema, Boykov e Kolmogorov desenvolveram várias ideias que aperfeiçoaram o desempenho empírico das técnicas de caminhos de aumento na visão computacional. Em seu trabalho, os autores apresentaram uma nova abordagem para a descoberta do fluxo máximo e corte mínimo também pertencente ao grupo de algoritmos baseados nas técnicas de caminhos de aumento.

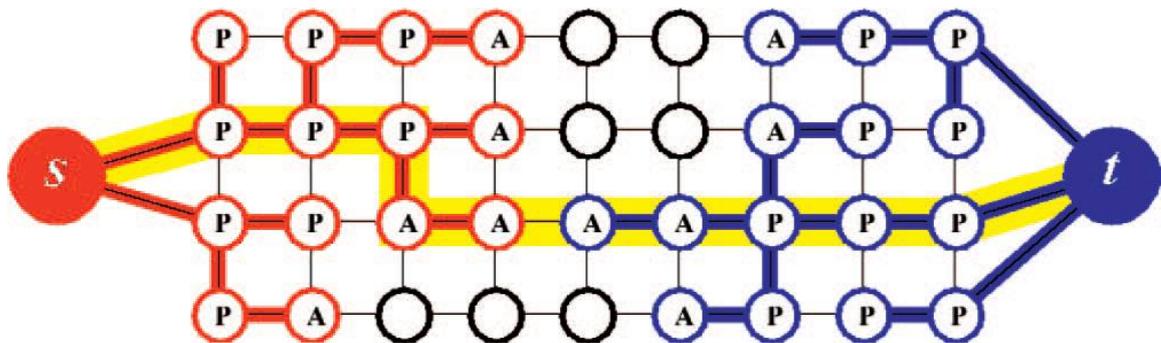
### **3.1.1 O algoritmo de Boykov e Kolmogorov**

Similar ao algoritmo de Dinic, a implementação de Boykov e Kolmogorov constrói uma árvore de busca para a detecção dos caminhos. De fato, a abordagem constrói duas árvores de busca, uma a partir da estação fonte e outra a partir do sorvedouro. Outra diferença nesta implementação para o procedimento de aumento tradicional é o reuso destas estruturas, nunca as reconstruindo do início. A desvantagem desta abordagem é que os caminhos de aumento encontrados não são, necessariamente, os mais curtos; desta forma, a complexidade de tempo do caminho mais curto não é mais válida.

Boykov e Kolmogorov apresentam como um arredondamento superficial para o número de aumentos de seu algoritmo. Nesta aproximação, a complexidade é medida como o custo do corte mínimo  $|C|$ , que resulta na complexidade global de  $O(EV^2|C|)$  no pior caso, sendo  $E$  o número de arestas e  $V$  o número de vértices. Teoricamente, esta medida é pior que outros algoritmos de fluxo máximo, entretanto, as comparações experimentais obtidas com a execução da metodologia sobre instâncias típicas de problemas na visão computacional mostraram que o algoritmo de Boykov e Kolmogorov sobrepuja significativamente estes algoritmos tidos como padrão.

O esquema de árvores de busca utilizadas pelo algoritmo de Boykov e Kolmogorov pode ser observado na Figura 30.

Figura 30 - Árvores de busca no algoritmo de Boykov e Kolmogorov.



Fonte: Boykov, Y. e Kolmogorov, V. (2004).

As duas árvores de busca não sobrepostas possuem como raízes a estação fonte e o sorvedouro da rede de fluxo. Na árvore com raiz “S”, os arcos do nó pai para os filhos não se encontram saturados, enquanto na árvore gerada a partir de “T”, são os arcos dos filhos para o pai que possuem capacidade residual.

Terminologia:

- Os nós localizados na borda externa da árvore são denominados **nós ativos**.
- Os nós compreendidos entre a raiz e a borda externa são denominados **nós passivos**.
- Os nós que não pertencem a nenhuma das duas árvores são denominados **nós livres**.

Os nós ativos permitem que as árvores cresçam assimilando nós livres por meio de arcos não saturados. Os nós passivos não podem crescer, pois se encontram completamente bloqueados por outros nós da mesma árvore. Nós ativos de uma árvore irão, eventualmente, encontrar os nós ativos da outra, ocasião na qual o caminho de aumento é descoberto.

O algoritmo repete iterativamente 3 fases:

- Fase de crescimento: as árvores de busca S e T crescem até se tocarem, formando um caminho  $S \rightarrow T$ .
- Fase de aumento: O caminho de aumento é incrementado em seu valor limite e as árvores de busca são separadas em florestas.
- Fase de adoção: As árvores de busca S e T são restauradas.

Na fase de crescimento, as árvores de busca se expandem. Os nós ativos exploram arestas adjacentes não saturadas e adquirem novos filhos a partir de um conjunto de nós livres. O nó recém adquirido se torna um nó ativo da respectiva árvore que o acolheu. Quando todos os vizinhos de um nó ativo já foram explorados, este nó se torna passivo. A fase de crescimento termina quando um nó ativo encontra um nó vizinho pertencente à outra árvore de busca. Neste caso é detectado um novo caminho de aumento  $S \rightarrow T$ , como ilustrado pela Figura 30.

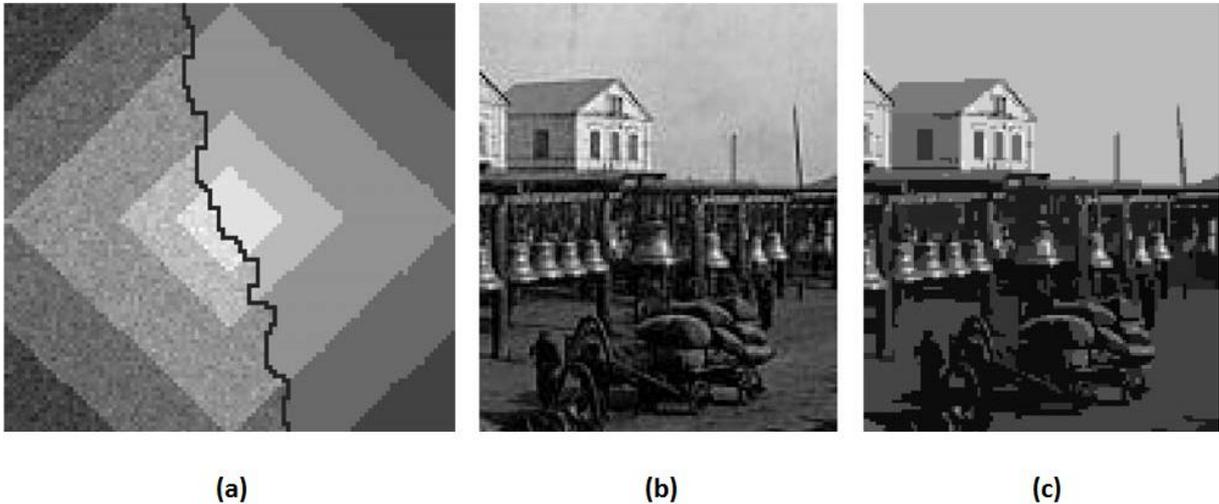
Na fase de aumento, o caminho descoberto na fase de crescimento é preenchido. Este preenchimento é feito com o maior fluxo possível, deixando alguns dos arcos envolvidos saturados. Quando isso acontece, alguns nós das árvores podem se tornar “órfãos”; isso porque os arcos que ligavam o nó à árvore deixaram de ser válidos. De fato, a fase de aumento pode dividir as árvores de busca S e T em florestas. A estação fonte e o sorvedouro t continuam constituindo as raízes das árvores de busca, enquanto os nós órfãos formam raízes para todas as outras árvores.

O objetivo da fase de adoção, por sua vez, é restaurar a estrutura das árvores S e T. Nesta fase, tenta-se encontrar um novo pai válido para cada nó órfão. O pai deve se conectar a este órfão por meio de um arco não saturado. Se não houverem pais qualificados, o órfão é removido das árvores de busca e transformado em nó livre. Indutivamente, seus antigos filhos também são declarados órfãos. Como alguns órfãos das árvores S e T podem se tornar livres, a fase de adoção frequentemente resulta na contração destas estruturas.

Boykov e Kolmogorov apresentam, entre outros resultados, uma comparação de desempenho entre seu algoritmo com o algoritmo de Dinic e outras duas variações do algoritmo de Goldberg e Tarjan (1998): o algoritmo H\_PRF (Push Relabel Algorithm, com a regra de seleção de nível mais alto) e o algoritmo Q\_PRF (Push Relabel Algorithm, com a regra de seleção por fila).

A comparação foi utilizada no procedimento de restauração das imagens ilustradas na Figura 31 em diferentes dimensões.

Figura 31 - Restauração de uma imagem no formato de diamantes concêntricos. (b) Imagem de uma praça de sinos com ruído. (c) Imagem da praça de sinos restaurada.



Fonte: Boykov, Y. e Kolmogorov, V. (2004).

Os resultados da comparação podem ser observados no Quadro 2 a seguir, que lista o tempo (em segundos) necessário para concluir o procedimento de restauração.

Quadro 2 - Comparação de algoritmos em restauração de imagens.

Método	Diamantes, 210 rótulos							Praça de sinos, 244 rótulos					
	$35^2$	$50^2$	$70^2$	$100^2$	$141^2$	$200^2$	$282^2$	$44^2$	$62^2$	$87^2$	$125^2$	$176^2$	$250^2$
DINIC	0.39	0.77	3.42	4.19	13.85	43.00	136.76	1.32	4.97	13.49	37.81	101.39	259.19
H_PRF	0.17	0.34	1.16	1.68	4.69	12.97	32.74	0.31	0.72	1.72	3.85	8.24	18.69
Q_PRF	0.16	0.35	1.24	1.70	5.14	14.09	40.83	0.20	1.00	1.70	4.31	10.65	25.04
B & K	0.16	0.20	0.71	0.74	2.21	4.49	12.14	0.19	0.48	0.98	2.11	4.84	10.47

Fonte: Adaptado de Boykov, Y. e Kolmogorov, V. (2004).

Os testes de Boykov, Y. e Kolmogorov foram aplicados sobre tipos de grafos razoavelmente comuns em visão computacional. O algoritmo dos autores se mostrou entre 2 a 5 vezes mais rápido que qualquer um dos outros métodos. Em alguns casos, a metodologia empregada se aproximou da performance em tempo real da aplicação de restauração.

### 3.2 CODIFICAÇÃO EM REDES SEM FIO AD-HOC

A codificação de redes tem provado ser um meio efetivo de se alcançar o fluxo máximo de capacidade em redes *multicast*. O teorema de fluxo máximo e corte mínimo é especialmente adequado para alguns dos novos tipos de redes, como as redes ad-hoc e as redes de sensores, por exemplo.

Para reduzir o custo e complexidade da codificação em redes, ao invés de realizar a codificação em todos os nós ao longo das rotas de tráfego de fluxo, é mais eficiente descobrir quais destes nós precisam de codificação e executá-la somente neles. Desta forma, o número de nós a serem codificados será o menor possível. Fragouli *et al.* (2004) apresentaram um método para identificar os nós a serem codificados através da decomposição de subárvores.

Neste cenário Zhang e Fan (2005) apresentaram uma versão modificada do algoritmo de Ford e Fulkerson para atingir o fluxo máximo e revelar os nós para codificação em um grafo aleatório que represente as redes sem fio ad-hoc; foram feitas simulações em diferentes condições para se obter resultados significativos, além de uma investigação das propriedades estatísticas da codificação de nós.

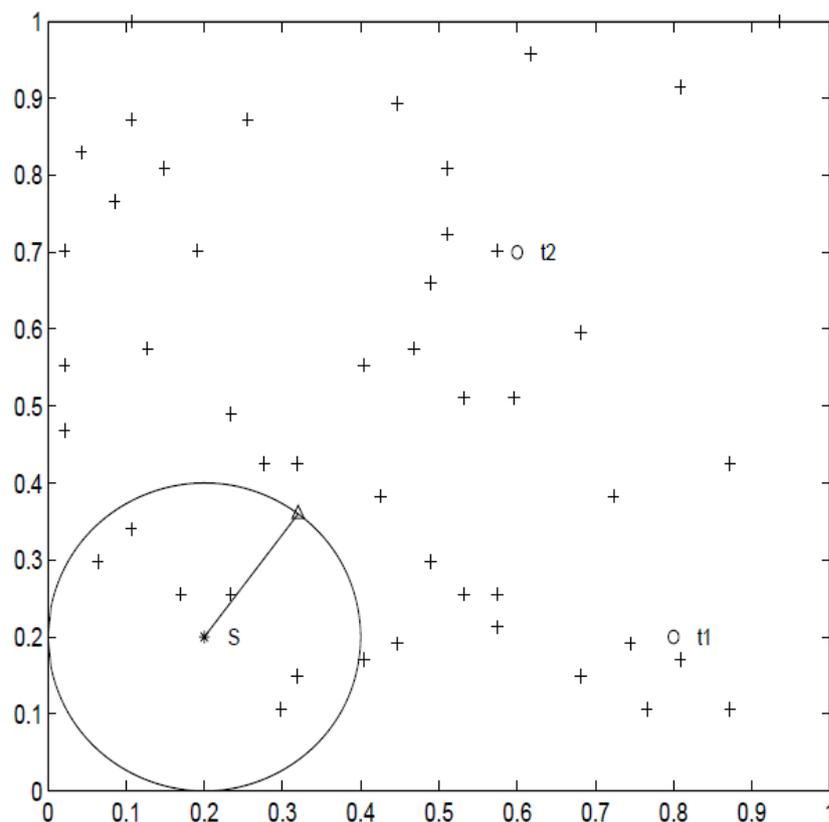
O conceito da codificação de nós foi proposto inicialmente por Ahlswede *et al.* (2000) para o serviço multicast em redes. Desde então, um grande número de abordagens sobre esta nova tecnologia tem sido levadas adiante, determinísticas e aleatórias, centralizadas e distribuídas. Koetter e Medard (2003) apresentaram uma abordagem algébrica para codificação em redes e mostraram como calcular uma solução linear. O trabalho de Jaggi *et al.* (2003) é um exemplo das abordagens que apresentaram solução em tempo polinomial para a codificação em redes multicast.

Infelizmente, algoritmos de codificação determinísticos são geralmente acompanhados de complexidade elevada. Além disso, estes algoritmos requerem uma informação completa sobre a topologia da rede e, conseqüentemente, dificultam sua implementação de modo distribuído. Por estas razões, alguns pesquisadores se voltaram para métodos aleatórios ou não determinísticos. Ho e Medard (2003), por exemplo, investigaram a codificação randomizada para operações multicast. Todas as abordagens, entretanto, requeriam o conhecimento de todos os nós envolvidos no caminho pelo qual o fluxo seria passado, fazendo com que a complexidade continuasse muito elevada, degradando a performance em termos de tempo de resposta, vazão e custos da rede.

Zhang e Fan (2005) discorrem sobre as características das redes ad-hoc em seu trabalho, como a temporalidade e flexibilidade. Modelos aleatórios de grafos são comumente usados para caracterizar este tipo de rede. Segundo eles, em uma dada região, presume-se que alguns terminais estão localizados aleatoriamente. Cada um deles possuem ligações diretas com outros terminais. Devido à mudança de circunstâncias ou outras razões, a distribuição e relações de ligação entre os terminais podem mudar de tempos em tempos. Tal rede pode ser interpretada como um grafo aleatório.

No caso simétrico, assume-se que todos os nós possuem o mesmo poder de transmissão, cobrindo uma área de raio  $R$ . Este esquema se encontra ilustrado na Figura 32, em uma área mensurada em  $1 \times 1$ .

Figura 32 – Esquema de representação de terminais distribuídos aleatoriamente e o raio de comunicação  $R$  coberto por cada um deles.



Fonte: Zhang, J. e Fan, P. (2005).

Na Figura 32, o terminal  $S$  denota a estação fonte, enquanto  $t1$  e  $t2$  denotam dois diferentes nós destinatários. Se um remetente quiser enviar mensagens da fonte  $S$  até  $t1$ , por exemplo, será necessário requisitar nós intermediários para servir como transmissores.

Zhang e Fan propõem um método de busca pelos nós que precisam ser codificados em duas etapas. A primeira consiste em encontrar o fluxo máximo e os correspondentes caminhos de aumento baseando-se na topologia da rede. A segunda etapa consiste na busca pelos nós de codificação entre as rotas selecionadas.

### 3.2.1 O algoritmo de Zhang e Fan

Como discutido na fundamentação teórica, o conceito de “fluxo” se aplica a redes com a topologia subjacente de um grafo direcionado. A seção 2.5.2 apresentou uma série de algoritmos que surgiram para computar este fluxo, como Ford e Fulkerson, Edmonds e Karp e Dinic. Contudo, em redes multicast ad-hoc, os nós intermediários não sabem quais de suas arestas associadas será usada para receber ou enviar mensagens antes do início das seções de multicast. Por esta razão, os autores assumem que os arcos do terminal fonte são cessantes, isto é, transmitem fluxo para os outros terminais. Esta prescrição parece óbvia, uma vez que a abordagem inversa em nada aumentaria a vazão final. Para os outros nós, as arestas não são orientadas ou bidirecionadas. Contudo, em redes sem fio ad-hoc, cada aresta dos nós intermediários permite apenas a passagem de fluxo de informação em uma direção.

Baseados nesta explicação, Zhang e Fan adotaram o algoritmo de Ford e Fulkerson para encontrar o fluxo máximo em um grafo genérico  $G=(V,E)$ . Como  $G$ , no domínio das redes ad-hoc, precisa ser bidirecionado, os autores adaptaram o procedimento original ressaltando que a forma de encontrar o valor do fluxo máximo neste grafo  $G$ , incluindo seus arcos bidirecionados, utiliza uma abordagem similar a do cálculo da conectividade de arestas entre a fonte e o destino em um grafo não direcionado (Wang, 2004).

#### O algoritmo de Zhang e Fan

**Passo 0:** Inicialização.

Inicie o fluxo para set 0 em todas as arestas. Marque S.

**Passo 1:** Procure por caminhos de aumento.

Verifique cada aresta associada  $(i,k)$  de um vértice marcado  $i$

Se  $k$  não foi marcada, então

- (1) Se  $f(i,k)=0$  e  $f(k,i)=0$ , marque  $k$  com  $i$ , vá para (4);
- (2) Se  $f(k,i)=1$ , marque  $k$  com  $-i$ , vá para (4);
- (3) Senão vá para (4).
- (4) Marque  $i$  como checado.

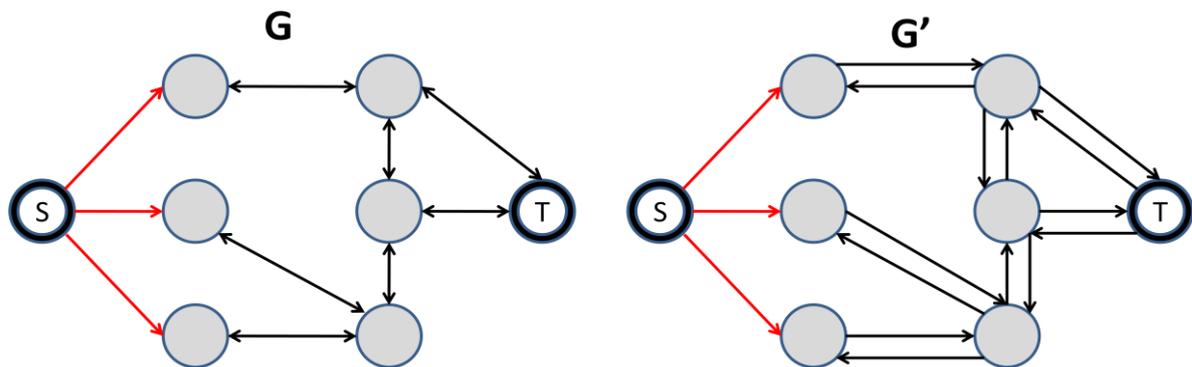
**Passo 2:** Verificar o destino sendo marcado

- (1) Se o nó destino  $t$  foi marcado, isso indica que um caminho de aumento foi encontrado. Então alguém deve aumentar ou diminuir o fluxo por este caminho em 1. Isto equivale a dizer, para cada aresta  $(i,j)$  no caminho,

- (1.1) Se a marcação de  $j$  é  $i$ , então incremente  $f(i,j)$  em 1 e pare.
- (1.2) Se a marcação de  $j$  é  $-i$ , então decmente  $f(i,j)$  em 1 e pare.
- (2) Se  $t$  não foi marcado, então existe algum vértice não verificado, vá para o Passo 1.
- (3) Senão, pare.

O algoritmo conta com a substituição de cada um dos arcos bidirecionados em  $G$  por dois arcos direcionados com sentidos inversos, obtendo assim  $G'$ . A Figura 33 ilustra este esquema.

Figura 33 - Substituição dos arcos bidirecionados para aplicação do algoritmo de aumento de fluxo definido por Ford e Fulkerson. Adaptação de Zhang e Fan.



Fonte: Autoria própria.

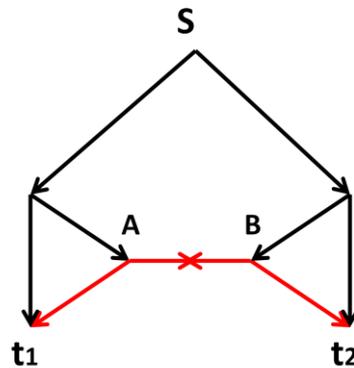
O valor do fluxo máximo em  $G$  é o mesmo que em  $G'$ . É importante salientar, entretanto, que como o algoritmo de busca proposto executa sobre o grafo  $G$ , os valores do fluxo de informação precisam ser registrados. Desta maneira, se o valor do fluxo máximo é  $F$ , um dos terminais pode obter até  $F$  disjunções de caminhos da fonte até o destino.

Para um grafo bidirecionado, a direção do fluxo de informação em uma aresta não é pré-definida, então os caminhos para diferentes destinos podem entrar em conflito. Um exemplo desta situação se encontra diagramado na Figura 34.

Na Figura 34, é possível atestar que o valor do fluxo máximo de  $S$  até  $t_1$  e de  $S$  até  $t_2$  é expansível por 2 caminhos. Contudo,  $S$  não pode enviar duas mensagens para ambos os destinos simultaneamente em nenhum tipo de codificação de rede. Isso porque a transmissão de informação entre  $S$  e  $t_1$  e  $S$  e  $t_2$  no fluxo máximo demanda o uso da aresta  $AB$ , mas a direção do fluxo de informação até  $t_1$  sobre a aresta  $AB$  é oposto ao sentido do fluxo de

informação até  $t_2$ . Zhang e Fan nomearam esta ocorrência como o fenômeno de conflito de fluxo de informação com diferentes destinos.

Figura 34 - Conflito de fluxo de informação com diferentes destinos.

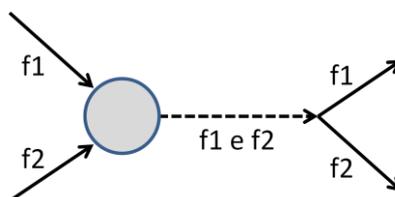


Fonte: Adaptado de Zhang, J. e Fan, P. (2005).

Para aliviar este efeito negativo na capacidade da codificação de redes, o algoritmo de Zhang e Fan seleciona o primeiro destino com o menor valor de fluxo máximo como o primeiro, salvando todas as disjunções de caminhos encontradas e orientando seus arcos no sentido do primeiro destino e aplicando um alto custo nestes arcos quando forem usados no sentido reverso. Após isso, o algoritmo segue aplicando o procedimento de caminhos de aumento para obter as disjunções das arestas nos caminhos para outros destinos. Este método pode reduzir a probabilidade de conflitos de fluxo.

A etapa de busca dos nós que precisam de codificação é regida pela seguinte assertiva: um vértice precisa de codificação se, e somente se, existem dois diferentes fluxos de informação vindo de diferentes arestas e compartilhando uma aresta de vazão para diferentes destinos. O exemplo de um vértice com estas características pode ser observado na Figura 35 a seguir.

Figura 35 - Um vértice que precisa de codificação.



Fonte: Adaptado de Zhang, J. e Fan, P. (2005).

A identificação destes nós permite que a codificação seja realizada somente neles, que realmente precisam para distinguir os fluxos. Zhang e Fan concluíram que na topologia de alguns grafos, até mesmo o menor dos cortes mínimos entre todos os terminais fonte e destinos é relativamente grande (maior que um caminho), mas nenhum método de codificação podia alcançar esta capacidade até então. Os autores também concluem que o fluxo máximo médio entre cada par fonte  $\rightarrow$  sorvedouro é aproximadamente uma distribuição de Poisson, sendo o número de nós codificados proporcional à sua distribuição geométrica.

Os algoritmos apresentados neste capítulo propõem a aplicação do procedimento de aumento de fluxo para características específicas no domínio de diversos problemas. Nenhum deles, todavia, discorre sobre a exploração do potencial residual das redes de fluxo saturadas. Essa lacuna conduziu à pesquisa deste trabalho, que propõe uma expansão para o algoritmo de Ford e Fulkerson com este objetivo.

## 4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

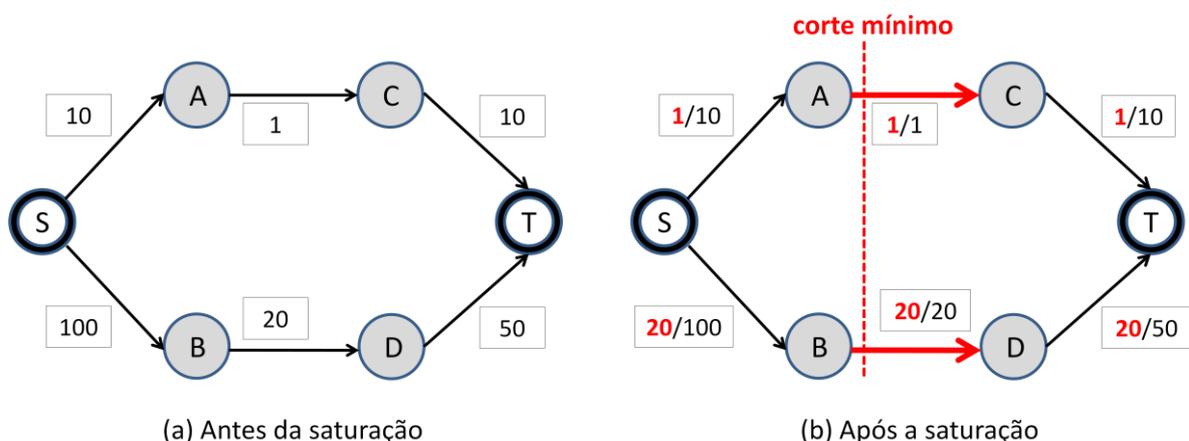
Este capítulo disserta sobre a metodologia da expansão de fluxo proposta por este trabalho para as redes saturadas pelo algoritmo de Ford e Fulkerson. Inicia-se com uma discussão sobre as características da rede pós-execução, seguindo com a apresentação de duas abordagens desenvolvidas para expandi-la.

### 4.1 HETEROGENEIDADE E BALANCEAMENTO

O aproveitamento ineficiente dos recursos em uma rede de fluxo genérica provém, entre outras razões, da heterogeneidade das capacidades de seus arcos. Esta heterogeneidade pode estar associada à ausência de um planejamento que preveja o crescimento da rede, ou mesmo à incapacidade característica desta suportar uma expansão descontrolada, como é o caso de alguns centros urbanos.

Os arcos do corte mínimo apresentam-se como os elementos limitantes da comunicação entre a estação fonte e o sorvedouro da rede. Neles o aproveitamento de capacidade é máximo, fazendo com que sua expansão para um melhor aproveitamento dos outros arcos envolvidos na comunicação seja fundamental. Entretanto, é importante destacar que um aumento aleatório de arcos do corte mínimo não garante o melhor retorno, como discutido na seção 2.5.5. Da mesma maneira, algumas heurísticas simplistas como a de escolher o arco com menor capacidade para ser expandido podem se mostrar ineficientes. A Figura 36 apresenta uma rede de fluxo didática antes e após a saturação que explica este comportamento.

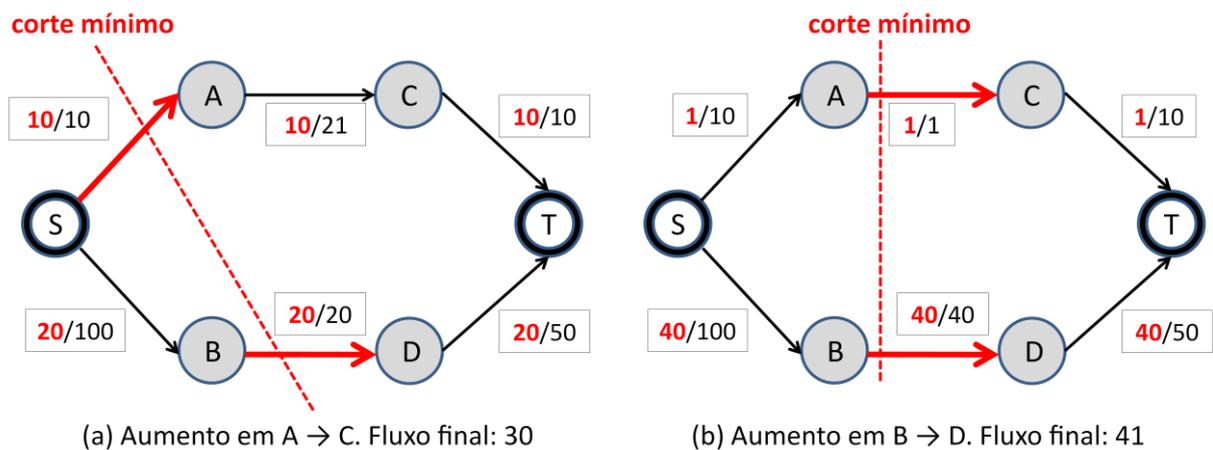
Figura 36 - Rede de fluxo antes (a) e após (b) a saturação.



Fonte: Autoria própria.

Nesta rede de fluxo saturada, um possível aumento de 20 unidades na capacidade deverá ser aplicado no arco  $B \rightarrow D$  para que se obtenha o maior proveito. Isso porque o referido incremento na capacidade de  $A \rightarrow C$  só aumentaria o fluxo final efetivo em 9 unidades, já que as capacidades residuais de  $S \rightarrow A$  e  $C \rightarrow T$  suportam somente este valor. Os arcos  $S \rightarrow B$  e  $D \rightarrow T$ , todavia, possuem capacidades residuais de 80 e 30 unidades, respectivamente, estando ambos habilitados a transmitir o aumento em sua totalidade desde a estação fonte ao sorvedouro. O esquema de aproveitamento de um aumento de 20 unidades se encontra ilustrado na Figura 37 a seguir.

Figura 37 - Aumento de capacidade (+20) nos arcos  $A \rightarrow C$  (a) e  $B \rightarrow D$  (b).



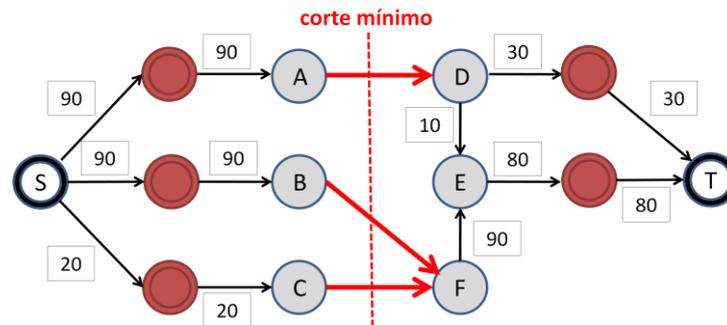
Fonte: Autoria própria.

É possível inferir que os arcos mais promissores em termos de investimento independem de suas características individuais, mas sim da associação que estes possuem com os arcos de maior capacidade residual. Isso é decorrente do fato de que a expansão na capacidade dos arcos do corte mínimo, embora uniforme, pode não ser suportada pelas capacidades residuais dos arcos associados a eles.

Diante deste contexto, se faz necessária uma investigação de cada um dos arcos associados ao corte mínimo para determinar qual deles é o mais promissor em termos de investimento no aumento de capacidade.

Este trabalho de dissertação apresenta duas abordagens que implementam esta investigação. Ambas as metodologias serão aplicadas sobre a rede de fluxo saturada apresentada na Figura 38.

Figura 38 - Rede de fluxo saturada. Exemplo 3.



Fonte: Autoria própria.

Para as duas abordagens, deve-se considerar que todos os arcos do corte mínimo se encontram com fluxo igual à sua capacidade máxima. Como a investigação se dará apenas em função do aumento efetivo, podemos desconsiderar o fluxo corrente no restante dos arcos. A Figura 38 exibe tão somente a capacidade residual das arestas. Intuitivamente, os arcos do corte mínimo possuem capacidade residual nula. Os vértices sem rótulo também podem ser interpretados como uma abstração para sub-redes sem nenhum prejuízo na lógica das metodologias apresentadas a seguir.

## 4.2 ANÁLISE COM AUMENTO DEFINIDO

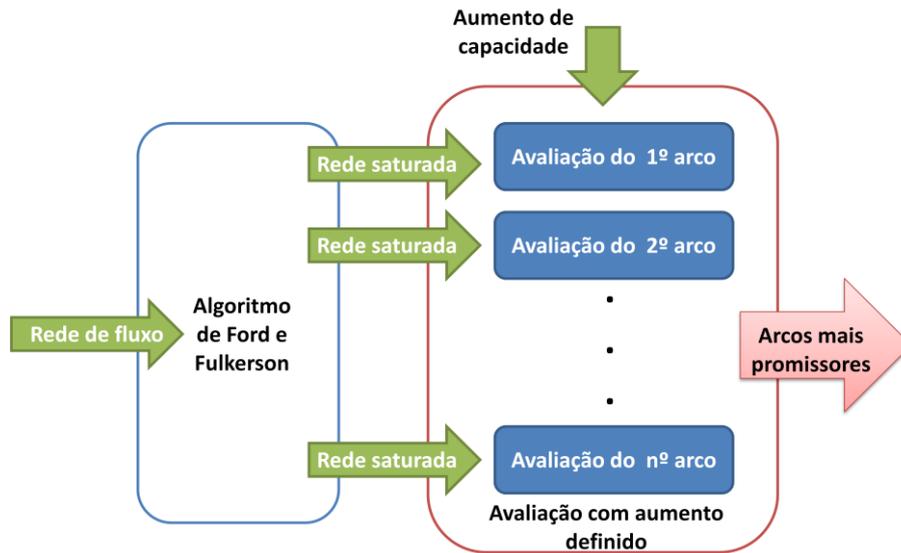
Após ter atingido sua capacidade máxima de escoamento pela execução do algoritmo de aumento de fluxo, a rede expõe o mau aproveitamento de recursos nos arcos onde o fluxo corrente é inferior à sua capacidade natural.

O algoritmo de aumento de fluxo não assegura um aproveitamento integral em nenhum dos arcos, salvo aqueles pertencentes ao corte mínimo da rede, que precisam ser expandidos para que mais fluxo possa escoar através da rede.

Esta primeira abordagem para determinar o arco de aumento de fluxo mais promissor pressupõe que a expansão a ser aplicada em um dos arcos do corte mínimo é conhecida.

A implementação dessa metodologia dá sequência à exploração da rede a partir do aumento da capacidade em cada um dos arcos do corte mínimo de maneira individual. Naturalmente, o contexto da rede saturada é salvo para que cada aumento nos arcos seja avaliado separadamente. A arquitetura desta abordagem se encontra ilustrada na Figura 39.

Figura 39 - Arquitetura da metodologia de avaliação com aumento definido.



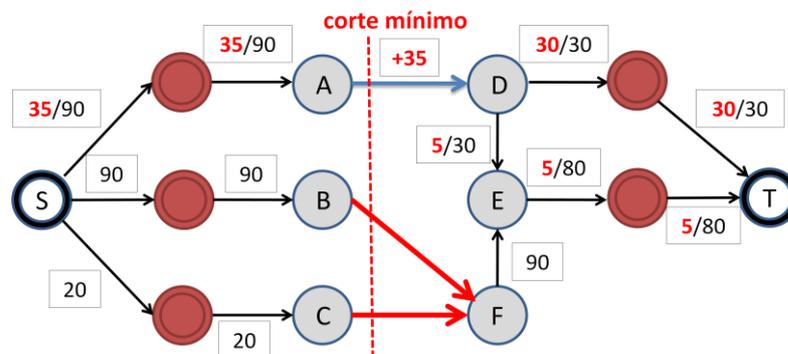
Fonte: Autoria própria.

Ao término do algoritmo original proposto por Ford e Fulkerson, é possível identificar os arcos que compõem o corte mínimo. De posse deste conjunto, pode-se aplicar o aumento de fluxo fornecido em cada um de seus elementos, observando-se o impacto no aumento de fluxo final.

Para efeito de exemplo, um aumento de 35 unidades na rede de fluxo apresentada na Figura 31 levará à análise dos arcos  $A \rightarrow D$ ,  $B \rightarrow F$  e  $C \rightarrow F$ .

Analisando o aumento de fluxo provocado pelo incremento em  $A \rightarrow D$ , obteremos uma configuração semelhante à ilustrada na Figura 40.

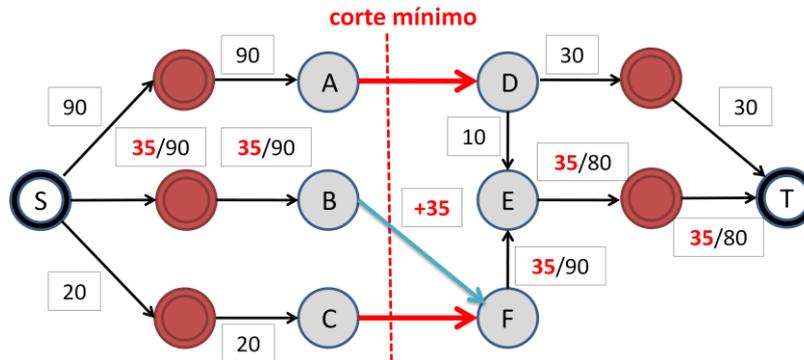
Figura 40 - Análise com aumento definido do arco  $A \rightarrow D$ .



Fonte: Autoria própria.

O aumento, quando aplicado em  $A \rightarrow D$  gera um impacto máximo no aumento global.  $A \rightarrow D$  é, portanto um dos arcos onde o aumento de 35 unidades pode ser aplicado com melhor proveito. A abordagem segue com a avaliação do arco  $B \rightarrow F$ , ilustrada na Figura 41.

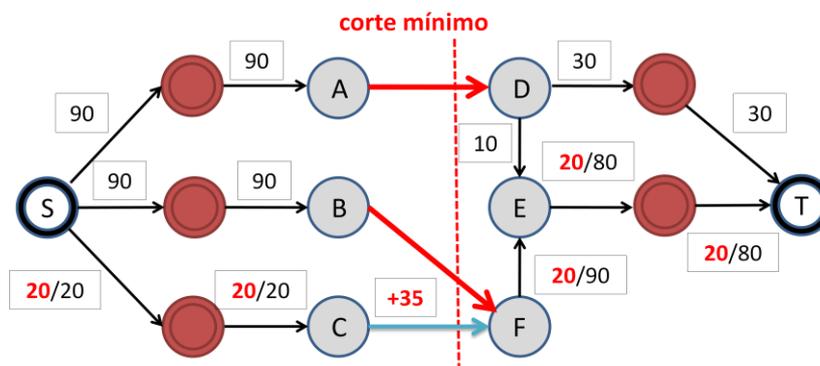
Figura 41 - Análise com aumento definido do arco  $B \rightarrow F$ .



Fonte: Autoria própria.

A investigação revela que  $B \rightarrow F$  é igualmente promissor em relação a  $A \rightarrow D$ , ambos aproveitam o aumento integral. A avaliação do último arco do corte mínimo,  $C \rightarrow F$  se encontra ilustrada na Figura 42.

Figura 42 - Análise com aumento definido do arco  $C \rightarrow F$ .



Fonte: Autoria própria.

Nesta última avaliação, é possível atestar que embora o aumento tenha sido de 35 unidades, o impacto efetivo no fluxo máximo final será de apenas 20 unidades. Isso porque o caminho de aumento que incide em  $C \rightarrow F$  está limitado à capacidade residual de 20 unidades.  $C \rightarrow F$  é, portanto, o arco menos indicado para se aplicar o aumento de 35 unidades.

O empate entre os arcos  $A \rightarrow D$  e  $B \rightarrow F$  pode ser decidido por meio de outras características dos vértices ou arcos envolvidos. Logística, balanceamento da carga,

---

confiabilidade das estruturas são alguns dos quesitos que podem ser levados em consideração dependendo da modelagem e do tipo de rede de fluxo tratada.

### 4.2.1 Características

O algoritmo de análise com aumento definido é uma extensão objetiva da metodologia de encontrar caminhos de aumento, mas possui um caráter de tomada de decisão sobre os resultados obtidos. Não se trata apenas de obter o impacto final por meio de cada um dos arcos do corte mínimo, mas sim sintetizar seus resultados na exibição das melhores escolhas para se aplicar investimentos.

Como pode ser observado na arquitetura desta abordagem, o procedimento de expansão não se sobrepõe ao algoritmo original (embora sejam relativamente similares), mantendo, no pior caso, a complexidade de tempo global na classe polinomial  $O(EV^2)$ .

Uma limitação desta abordagem é que ela se baseia no prévio conhecimento do investimento para poder executar a avaliação, porém muitas situações reais exigem relatórios sobre o local da aplicação dos recursos antes mesmo destes serem liberados.

Uma solução inicial estudada seria simular aumentos gradativos nas capacidades dos arcos, desqualificando aqueles em que o aumento global observado se verificasse inferior ao aumento aplicado. Contudo, o impacto que esta atividade pode causar no tempo necessário para a avaliação ainda é difícil de prever e, dependendo da instância de rede de fluxo fornecida como entrada, pode tornar a complexidade de tempo uma característica proibitiva.

Neste cenário introduz-se o estudo da abordagem de análise bilateral da rede de fluxo.

## 4.3 ANÁLISE BILATERAL

A abordagem de análise bilateral, assim como a análise com aumento definido, avalia os arcos do corte mínimo de maneira individual. Entretanto esta abordagem executa uma avaliação completa, levando em consideração que a característica que define o arco (ou conjunto de arcos) mais promissor independe do aumento a ser aplicado, estando associada tão somente à posição que ocupa na rede de fluxo. Em outras palavras, o arco mais promissor será aquele que estiver associado a outros caminhos de maior capacidade residual.

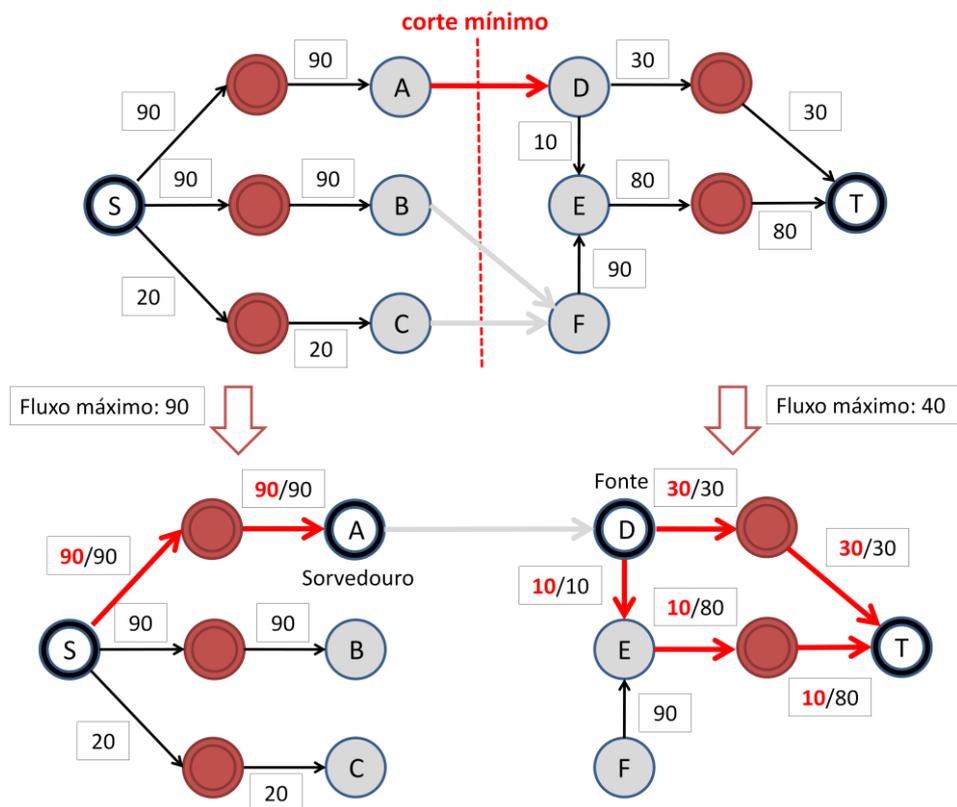
O procedimento isola cada um dos arcos candidatos à investimento e avalia tanto o fluxo que pode chegar até eles a partir da estação fonte quanto o fluxo que pode ser escoado a

partir deles até o sorvedouro. Esta avaliação é efetuada seccionando a rede de fluxo em duas sub redes e executando o procedimento de Ford e Fulkerson separadamente em ambas. O menor fluxo observado nas duas representará o potencial latente de cada arco.

O potencial latente ( $\Delta$ ) de um arco saturado é o valor máximo de fluxo que poderá ser escoado após uma expansão  $\alpha$  em sua capacidade. Intuitivamente, se  $\alpha \leq \Delta$ , então o arco aproveitará o incremento em sua totalidade. Para valores de  $\alpha$  superiores a  $\Delta$ , a diferença  $\alpha - \Delta$  será desperdiçada. O arco com o maior potencial latente é, portanto, o melhor candidato a ser expandido.

Retomando a rede Exemplo 3 ilustrada na Figura 31, temos os mesmos arcos do corte mínimo candidatos à expansão. São eles  $A \rightarrow D$ ,  $B \rightarrow F$  e  $C \rightarrow F$ . O esquema de análise individual do arco  $A \rightarrow D$  se encontra detalhado na Figura 43.

Figura 43 - Análise bilateral do arco  $A \rightarrow D$ .

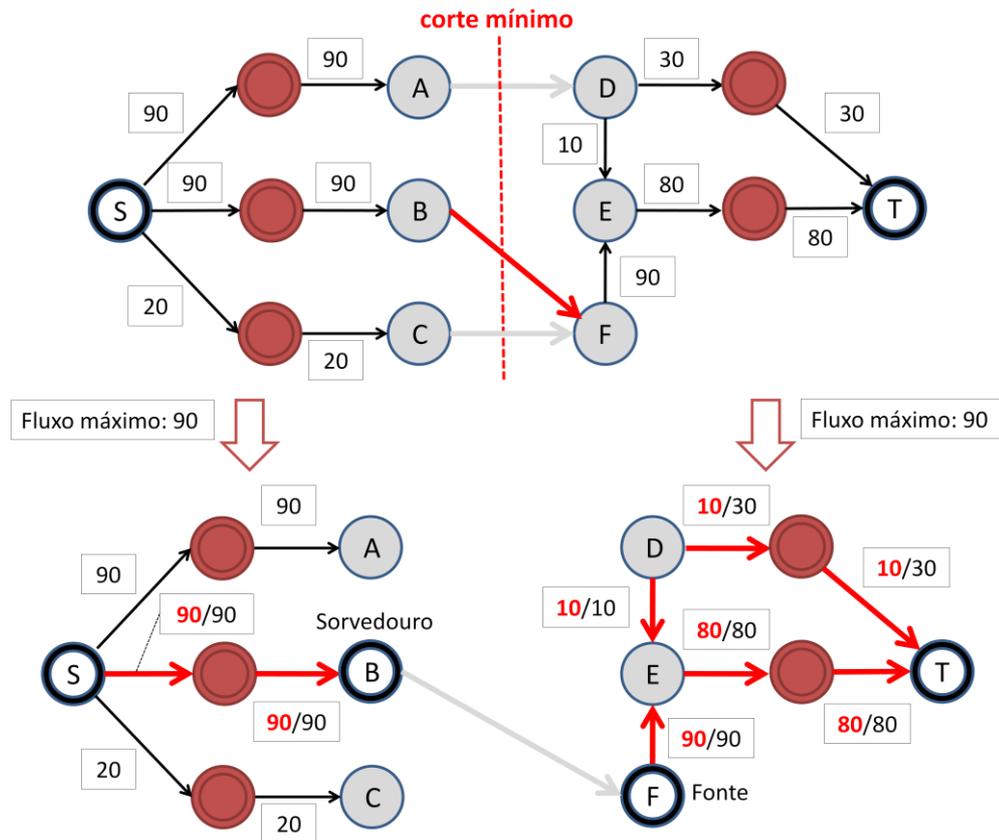


Fonte: Autoria própria.

O máximo de fluxo que pode ser escoado da estação fonte até o vértice A é 90 unidades, porém, a extremidade D só poderá escoar 40 unidades até o sorvedouro, sendo este valor o potencial latente do arco  $A \rightarrow D$ .

A abordagem segue com a análise do arco  $B \rightarrow F$ , obtendo o resultado apresentado na Figura 44.

Figura 44 - Análise bilateral do arco  $B \rightarrow F$ .



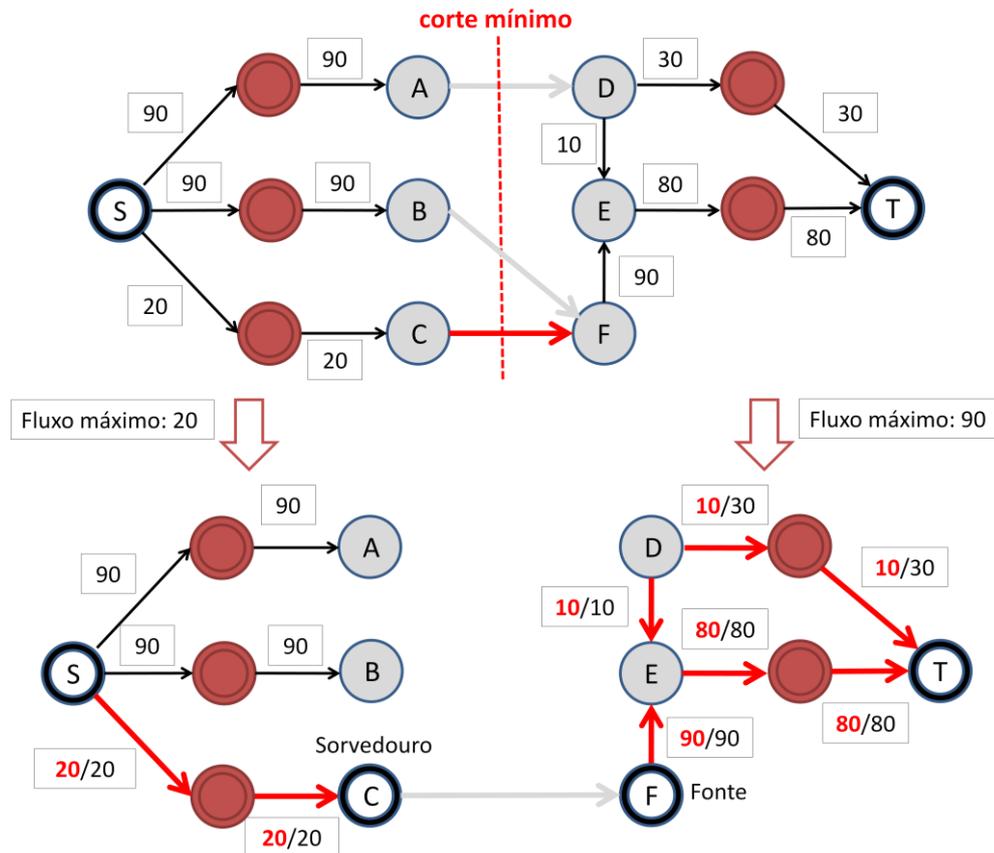
Fonte: Autoria própria.

A análise do arco  $B \rightarrow F$  revela uma particularidade em relação ao  $A \rightarrow D$ , que se apresenta no arco de retorno  $E \leftarrow D$  da sub rede gerada a partir de  $F$ . É importante ressaltar que neste exemplo se está assumindo a existência de um fluxo prévio passando por este arco, para que 10 unidades fossem remanejadas pelo caminho  $D \rightarrow \dots \rightarrow T$ . Indutivamente, para todos os efeitos, o remanejamento está limitado às 30 unidades residuais passíveis de escoamento a partir de  $D$ .

Considerando o fato de que  $F \rightarrow E$  só escoar 90 unidades e que 80 delas podem trafegar por  $E \rightarrow \dots \rightarrow T$ , é possível concluir que o exemplo da Figura 44 ilustra o melhor caso para a sub rede de  $F$  ao sorvedouro  $T$ , onde o fluxo máximo é de 90 unidades; a mesma capacidade da sub rede de  $S$  ao vértice  $B$ . O potencial latente do arco  $B \rightarrow F$  é, portanto, 90 unidades.

O último arco do corte mínimo a ser avaliado é  $C \rightarrow F$ , cuja análise bilateral irá revelar uma configuração semelhante à ilustrada na Figura 45.

Figura 45 - Análise bilateral do arco  $C \rightarrow F$ .



Fonte: Autoria própria.

A sub rede gerada a partir da extremidade F apresenta o mesmo comportamento descrito na análise de  $B \rightarrow F$ , com fluxo máximo de 90 unidades. Por outro lado, a sub rede da estação fonte até o vértice C se encontra limitada em 20 unidades de fluxo máximo, sendo este o potencial latente do arco  $C \rightarrow F$ .

A análise bilateral revela que os arcos  $A \rightarrow D$ ,  $B \rightarrow F$  e  $C \rightarrow F$  possuem potencial latente ( $\Delta$ ) de 40, 90 e 20 unidades, respectivamente, induzindo às seguintes assertivas:

1 – Para expansões de capacidade ( $\alpha$ ) de até 20 unidades, qualquer um dos três arcos pode ser escolhido assegurando seu aproveitamento integral no fluxo final. Os critérios de desempate, introduzidos na discussão da primeira abordagem, podem depender do tipo, propósito e outras características específicas de cada problema modelado.

2 – Para expansões de capacidade na faixa de 21 a 40 unidades,  $A \rightarrow D$  e  $B \rightarrow F$  apresentam o mesmo aproveitamento integral, mas  $C \rightarrow F$  irá desperdiçar  $\alpha - 20$  unidades, sendo o arco menos indicado para se aplicar o aumento.

3 – Para expansões de capacidade na faixa de 41 a 90 unidades, somente  $B \rightarrow F$  terá aproveitamento integral.  $C \rightarrow F$  e  $A \rightarrow D$  irão desperdiçar  $\alpha - 20$  e  $\alpha - 40$  unidades, respectivamente, caso venham a ser escolhidos.

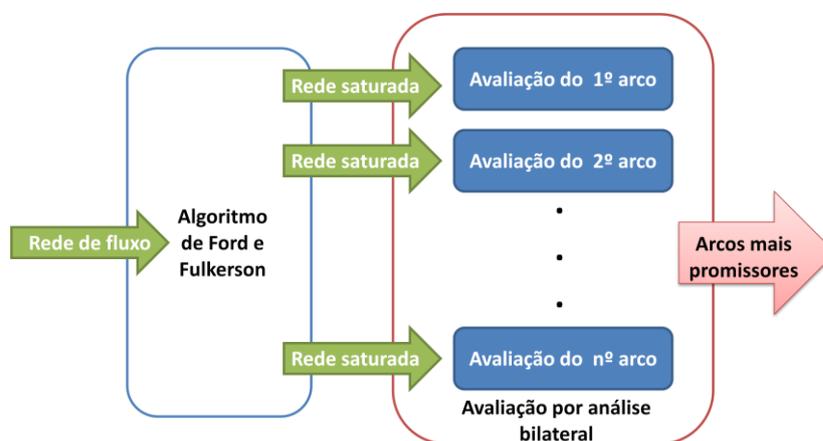
4 – Para valores de expansão superiores a 90 unidades,  $B \rightarrow F$  continuará sendo o candidato mais indicado para se aplicar o investimento, ainda que desperdiçando a diferença de  $\alpha - 90$  unidades.

Pode-se concluir que  $B \rightarrow F$  é o arco mais promissor do corte mínimo nesta rede de fluxo, independente de qual expansão de capacidade será aplicada. Se os investimentos são desconhecidos e deseja-se obter um aproveitamento máximo, ele é a escolha segura que deve ser priorizada.

### 4.3.1 Características

A abordagem de avaliação pela análise bilateral do corte mínimo provê um relatório completo sobre o potencial da rede de fluxo saturada e elimina a dependência de se conhecer o incremento de capacidade aplicado, característica da avaliação com aumento definido. A arquitetura de expansão desta abordagem é similar a da avaliação com aumento definido, salvo a necessidade de se fornecer o aumento como entrada. Este esquema se encontra diagramado na Figura 46.

Figura 46 - Arquitetura da metodologia de avaliação por análise bilateral.



Fonte: Autoria própria.

As vantagens da análise bilateral, contudo, vem associadas com o custo do aumento significativo na complexidade inerente à avaliação das sub redes geradas em cada procedimento individual realizado sobre os arcos do corte mínimo. Em verdade, a metodologia desta abordagem ainda se encontra em processo de desenvolvimento e validação para que se mantenha a característica de complexidade polinomial do algoritmo proposto por Ford e Fulkerson, ainda que com um grau maior.

As demonstrações dos algoritmos apresentados neste capítulo não se limitam à representação do comportamento sobre um caso específico. Em vez disso, apresentam uma proposta de exploração das estruturas que representam uma verdadeira diversidade de problemas. Modelar a representação de uma rede de fluxo com dimensões reais - como um grande conjunto de vias urbanas, por exemplo - foge aos objetivos do trabalho.

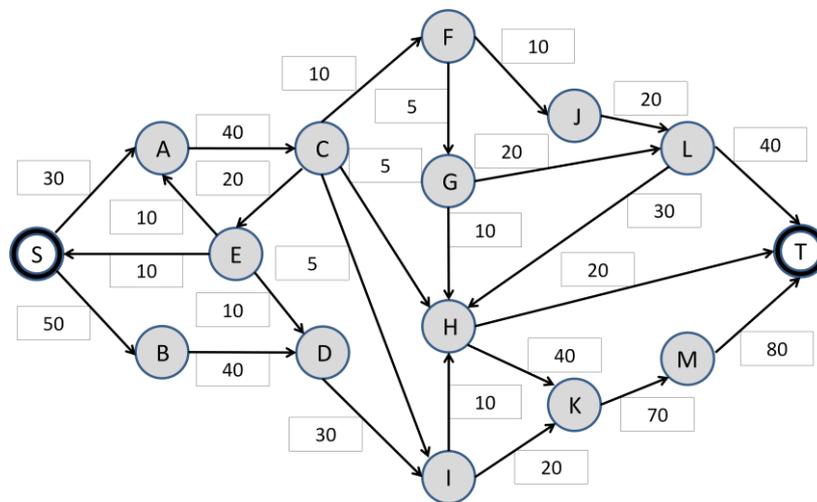
As duas abordagens servem para identificar o arco do corte mínimo que deve ter a capacidade expandida para melhor aproveitar o potencial residual da rede de fluxo saturada. Os resultados da metodologia de expansão podem ser observados na aplicação de exemplo discutida no próximo capítulo.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Objetivando validar a proposta deste trabalho, a aplicação desenvolvida apresentada na seção 2.5.4 foi expandida para que executasse o procedimento de avaliação com aumento definido sobre uma rede de fluxo fornecida como entrada. As informações obtidas das avaliações de teste se mostraram eficazes para todas as entradas fornecidas.

Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos com a execução do procedimento completo (original e expansão) sobre a rede de fluxo ilustrada na Figura 47.

Figura 47 - Rede de fluxo utilizada na validação de resultados e sua respectiva matriz de adjacência.



Fonte: Autoria própria.

A etapa inicial consiste na aplicação do algoritmo de Ford e Fulkerson sobre a rede de fluxo. Os resultados desta etapa encontram-se sintetizados no Quadro 3.

Quadro 3 - Relatório dos caminhos encontrados pelo algoritmo de Ford e Fulkerson.

Ordem	Caminho de aumento	Aumento fornecido	Arco limitante	Fluxo global atualizado
1º	S→A→C→H→T	+5	C→H	5
2º	S→A→C→I→H→T	+5	C→I	10
3º	S→B→D→I→H→T	+5	I→H	15
4º	S→A→C→F→G→H→T	+5	F→G	20
5º	S→A→C→F→J→L→T	+5	C→F	25
6º	S→B→D→I→K→M→T	+20	I→K	45

Fonte: Autoria própria.

Este quadro de resultados foi construído com base nos resultados obtidos pela saída inicial da aplicação, que se encontra ilustrada na Figura 48 a seguir.

Figura 48 - Saída da aplicação para a rede de fluxo de teste.

```

Informe o nome do arquivo: exe5
-----
1º CAMINHO F-AUMENTANTE: s → a → c → h → t
Maior mudança de fluxo em F: 5
-----
2º CAMINHO F-AUMENTANTE: s → a → c → i → h → t
Maior mudança de fluxo em F: 5
-----
3º CAMINHO F-AUMENTANTE: s → b → d → i → h → t
Maior mudança de fluxo em F: 5
-----
4º CAMINHO F-AUMENTANTE: s → a → c → f → g → h → t
Maior mudança de fluxo em F: 5
-----
5º CAMINHO F-AUMENTANTE: s → a → c → f → j → l → t
Maior mudança de fluxo em F: 5
-----
6º CAMINHO F-AUMENTANTE: s → b → d → i → k → m → t
Maior mudança de fluxo em F: 20
FLUXO MÁXIMO: 45
CORTE MÍNIMO: << s a b c d e i >>.< f g h j k l m t >>
-----

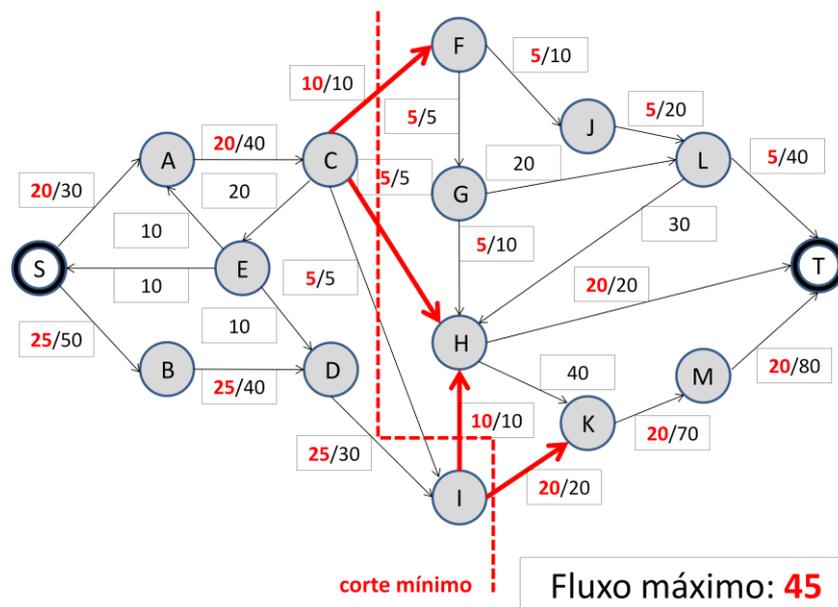
```

FLUXO FINAL		
1º	Arco	de (s) para (a)   C/F = 30/20
2º	Arco	de (s) para (b)   C/F = 50/25
3º	Arco	de (a) para (c)   C/F = 40/20
4º	Arco	de (b) para (d)   C/F = 40/25
5º	Arco	de (c) para (e)   C/F = 20/0
6º	Arco	de (c) para (f)   C/F = 10/10
7º	Arco	de (c) para (h)   C/F = 5/5
8º	Arco	de (c) para (i)   C/F = 5/5
9º	Arco	de (d) para (i)   C/F = 30/25
10º	Arco	de (e) para (s)   C/F = 10/0
11º	Arco	de (e) para (a)   C/F = 10/0
12º	Arco	de (e) para (d)   C/F = 10/0
13º	Arco	de (f) para (g)   C/F = 5/5
14º	Arco	de (f) para (j)   C/F = 10/5
15º	Arco	de (g) para (h)   C/F = 10/5
16º	Arco	de (g) para (l)   C/F = 20/0
17º	Arco	de (h) para (k)   C/F = 40/0
18º	Arco	de (h) para (t)   C/F = 20/20
19º	Arco	de (i) para (h)   C/F = 10/10
20º	Arco	de (i) para (k)   C/F = 20/20
21º	Arco	de (j) para (l)   C/F = 20/5
22º	Arco	de (k) para (m)   C/F = 70/20
23º	Arco	de (l) para (h)   C/F = 30/0
24º	Arco	de (l) para (t)   C/F = 40/5
25º	Arco	de (m) para (t)   C/F = 80/20

Fonte: Autoria própria.

A execução da busca em largura pode ser observada na descoberta de caminhos de aumento com mais saltos entre a estação fonte e o sorvedouro, isto é, com mais enlaces evolucionados. A rede pós-execução apresentar a configuração diagramada na Figura 49.

Figura 49 - Rede de teste saturada pelo algoritmo de aumento de fluxo.



Fonte: Autoria própria.

A segunda etapa consiste na identificação dos arcos do corte mínimo e avaliação individual de cada um destes com base em um aumento fornecido. A aplicação efetua esta identificação de forma automática, tão logo a primeira etapa é concluída. A Figura 50 ilustra a saída fornecida imediatamente após a listagem do fluxo final nos arcos da rede.

Figura 50 - Identificação dos arcos no corte mínimo da rede de teste.

```

ARCOS DO CORTE MINIMO:
1 - Arco | de <c> para <f> | C/F = 10/10
2 - Arco | de <c> para <h> | C/F = 5/5
3 - Arco | de <i> para <h> | C/F = 10/10
4 - Arco | de <i> para <k> | C/F = 20/20
Forneca o aumento a ser efetuado: 9_

```

Fonte: Autoria própria.

De posse dos arcos candidatos  $C \rightarrow F$ ,  $C \rightarrow H$ ,  $I \rightarrow H$  e  $I \rightarrow K$ , a aplicação inicia o procedimento de avaliação individual. Para efeito de exemplo, considera-se a expansão de capacidade  $\alpha = 9$  unidades, obtendo como resposta as avaliações listadas a seguir.

- **Avaliação do arco  $C \rightarrow F$ :**

O arco  $C \rightarrow F$  possui fluxo saturado de 10 unidades. Ao ter sua capacidade aumentada para 19, levará o procedimento de expansão a encontrar novos caminhos de aumento de fluxo para aproveitar o recurso.

O caminho  $S \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow J \rightarrow L \rightarrow T$  é então descoberto, estando limitado agora ao arco  $F \rightarrow J$ , com capacidade residual de 5 unidades. Esta limitação reduz em 4 unidades o aproveitamento da expansão aplicada, servindo também para revelar o potencial latente do arco  $C \rightarrow F$  (5 unidades), apesar de não ser este o propósito da abordagem de avaliação com aumento definido. A saída da aplicação desenvolvida para a avaliação do referido arco pode ser observada na Figura 51.

Figura 51 - Avaliação do arco  $C \rightarrow F$  na aplicação.

```

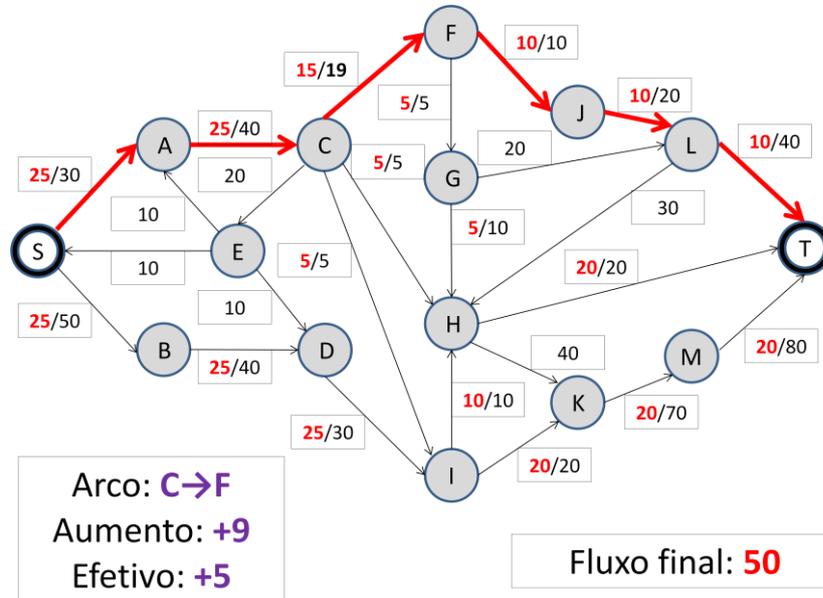
1º Arco | de <c> para <f> | C/F = 10/10
-----
NOVO CAMINHO F-AUMENTANTE: s → a → c → f → j → l → t
Maior mudança de fluxo em F: 5
FLUXO MAXIMO: 50
CORTE MINIMO: << s a b c d e f i >, < g h j k l m t >>
-----

```

Fonte: Autoria própria.

O esquema gráfico da expansão do arco e aumento aplicado encontra-se ilustrado na Figura 52 a seguir. Com um aproveitamento pouco superior à metade do investimento, seria precipitado tomar o arco candidato  $C \rightarrow F$  como escolha sem investigar os outros arcos do corte mínimo.

Figura 52 - Esquema de expansão do arco  $C \rightarrow F$  e impacto no fluxo final.



Fonte: Autoria própria.

- **Avaliação do arco  $C \rightarrow H$ :**

O arco  $C \rightarrow H$  possui fluxo saturado de 5 unidades. Assim como  $C \rightarrow F$ , ao ter sua capacidade aumentada para 14 unidades, levará o procedimento de expansão a encontrar novos caminhos de aumento de fluxo, mas com particularidades em relação à primeira análise que podem ser observadas na saída da aplicação ilustrada na Figura 53.

Figura 53 - Avaliação do arco  $C \rightarrow H$  na aplicação.

```

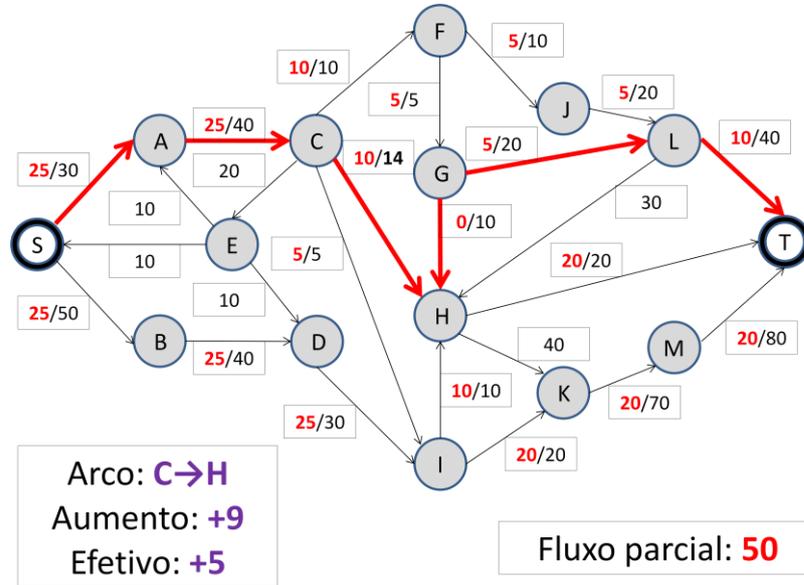
2º Arco | de <c> para <h> | C/F = 5/5
-----
NOVO CAMINHO F-AUMENTANTE: s -> a -> c -> h -> g -> l -> t
Maior mudança de fluxo em F: 5
-----
NOVO CAMINHO F-AUMENTANTE: s -> a -> c -> h -> k -> m -> t
Maior mudança de fluxo em F: 4
FLUXO MÁXIMO: 54
CORTE MÍNIMO: << s a b c d e i >, < f g h j k l m t >>

```

Fonte: Autoria própria.

Um aumento de 9 unidades em  $C \rightarrow H$  acarretará um remanejamento de 5 unidades de fluxo do arco de retorno  $H \leftarrow G$  para o arco  $G \rightarrow L$  pelo caminho  $S \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow H \leftarrow G \rightarrow L \rightarrow T$ . O esquema gráfico pode ser observado na Figura 54.

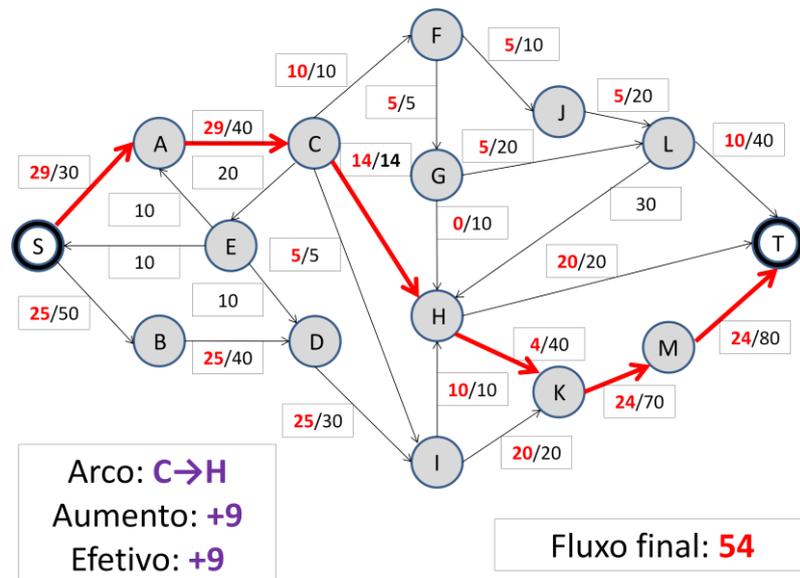
Figura 54 - Expansão do arco  $C \rightarrow H$  – 1º caminho de aumento encontrado e impacto parcial.



Fonte: Autoria própria.

Após o escoamento das 5 primeiras unidades de fluxo, capacidade residual de  $C \rightarrow H$  faz com que o caminho  $S \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow H \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow T$  possa ser utilizado, conforme ilustrado na Figura 55.

Figura 55 - Expansão do arco  $C \rightarrow H$  – 2º caminho de aumento encontrado e impacto no fluxo final.



Fonte: Autoria própria.

As 4 unidades de fluxo adicionais permitem o aproveitamento da expansão de capacidade de forma integral. O arco  $C \rightarrow H$  é, portanto, o candidato mais promissor até o momento. Em verdade, a existência de outros arcos com potencial residual semelhante ainda deverá levar aos critérios de desempate.

- **Avaliação do arco  $I \rightarrow H$ :**

A expansão do arco  $I \rightarrow H$  segue o mesmo padrão de comportamento do arco  $C \rightarrow F$ . A saída da aplicação se encontra diagramada na Figura 56.

Figura 56 - Avaliação do arco  $I \rightarrow H$  na aplicação.

**3º Arco | de <i> para <h> | C/F = 10/10**

---

**NOVO CAMINHO F-AUMENTANTE:**  $s \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow i \rightarrow h \rightarrow g \rightarrow l \rightarrow t$

**Maior mudança de fluxo em F:** 5

**FLUXO MÁXIMO:** 50

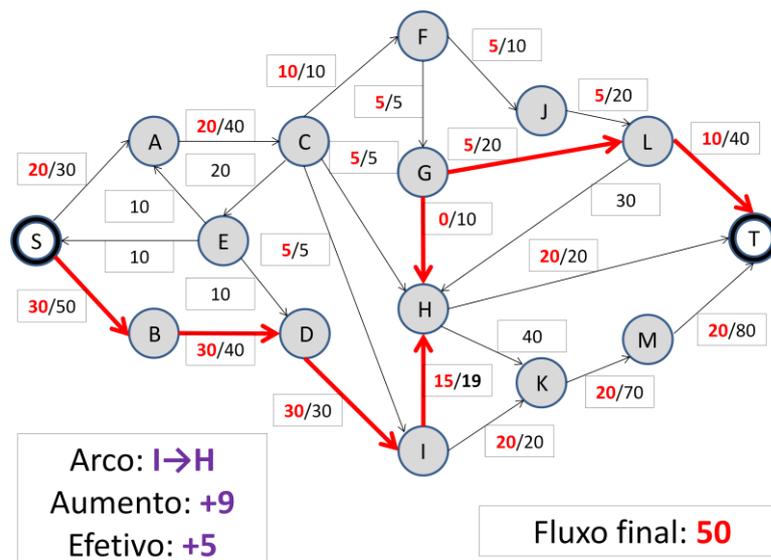
**CORTE MÍNIMO:**  $\langle\langle s a b c d e \rangle, \langle f g h i j k l m t \rangle\rangle$

---

Fonte: Autoria própria.

Em contraste à expansão de  $C \rightarrow H$ , o remanejamento do fluxo ocorrido na escolha do caminho  $S \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow I \rightarrow H \leftarrow G \rightarrow L \rightarrow T$  não pode ser aproveitado, conforme observado no esquema gráfico da Figura 57.

Figura 57 - Esquema de expansão do arco  $I \rightarrow H$  e impacto no fluxo final.



Fonte: Autoria própria.

Esta impossibilidade deriva da saturação do arco  $D \rightarrow I$  após 5 unidades de fluxo adicional, pertencendo este agora ao novo corte mínimo da rede; a saber ( $\{S, A, B, C, E, D\}, \{F, G, H, I, J, K, L, M, T\}$ ).

Com um aproveitamento semelhante ao arco  $C \rightarrow F$ ,  $I \rightarrow H$  não se apresenta como a melhor alternativa de investimento, conduzindo a aplicação à avaliação do último candidato.

- **Avaliação do arco  $I \rightarrow K$ :**

O último arco avaliado também apresenta um aumento efetivo de apenas 5 unidades sobre o incremento de 9 na capacidade pois, assim como na avaliação do arco anterior, também é limitado às 5 unidades suportadas por  $D \rightarrow I$ . A saída da aplicação para a avaliação do arco se encontra ilustrada na Figura 58. O esquema gráfico do aumento pelo caminho  $S \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow I \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow T$  está representado na Figura 59 logo a seguir.

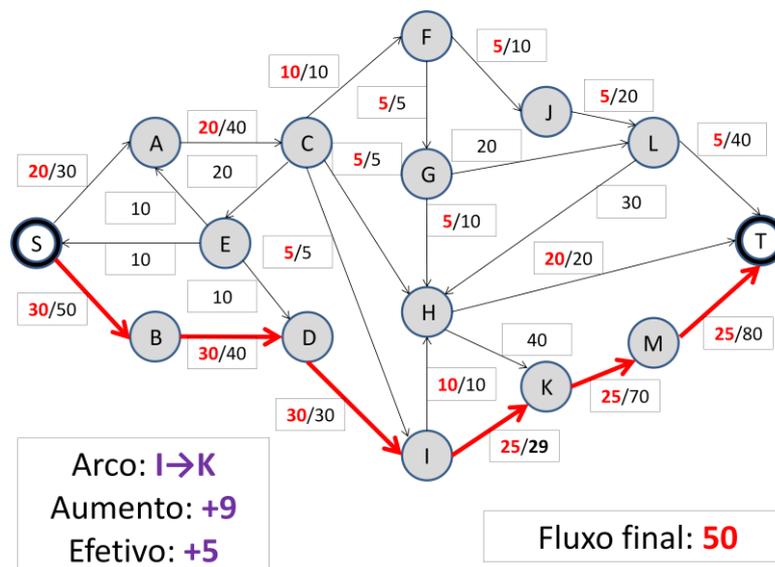
Figura 58 - Avaliação do arco  $I \rightarrow K$  na aplicação.

```

4º Arco | de <i> para <k> | C/F = 20/20
-----
NOVO CAMINHO F-AUMENTANTE: s → b → d → i → k → m → t
Maior mudança de fluxo em F: 5
FLUXO MÁXIMO: 50
CORTE MÍNIMO: << s a b c d e >>, < f g h i j k l m t >>
  
```

Fonte: Autoria própria.

Figura 59 - Esquema de expansão do arco  $I \rightarrow K$  e impacto no fluxo final.



Fonte: Autoria própria.

O Quadro 4 apresenta um quadro resumo das quatro avaliações executadas pela aplicação desenvolvida, validando a proposta deste trabalho na referida rede de exemplo.

Quadro 4 - Síntese da avaliação automática pela aplicação desenvolvida.

Arco avaliado	Caminhos descobertos	Arcos limitantes	Novo corte mínimo	Aumento efetivo	Fluxo final
C→F	S→A→C→F→J→L→T	F→J	{S, A, B, C, D, E, F, I}, {G, H, J, K, L, M, T}	+5	50
C→H	S→A→C→H←G→L→T S→A→C→H→K→M→T	H←G C→H	{S, A, B, C, D, E, I}, {F, G, H, J, K, L, M, T}	+9 (5+4)	54
I→H	S→B→D→I→H←G→L→T	D→I H←G	{S, A, B, C, D, E}, {F, G, H, I, J, K, L, M, T}	+5	50
I→K	S→B→D→I→K→M→T	D→I	{S, A, B, C, D, E}, {F, G, H, I, J, K, L, M, T}	+5	50

Fonte: Autoria própria.

Após realizar e exibir a avaliação individual detalhada, a aplicação de expansão se encerra com a apresentação do conjunto de arcos mais promissores. Para o exemplo abordado neste capítulo, a resposta obtida se encontra diagramada na Figura 60.

Figura 60 - Saída final da aplicação de avaliação com aumento definido.

```

O MAIOR FLUXO POSSIVEL COM O AUMENTO DE 9 E: 54
Arco(s) mais promissor(es):
Arco | de <c> para <h> | C/F = 5/5

Fin do Programa._

```

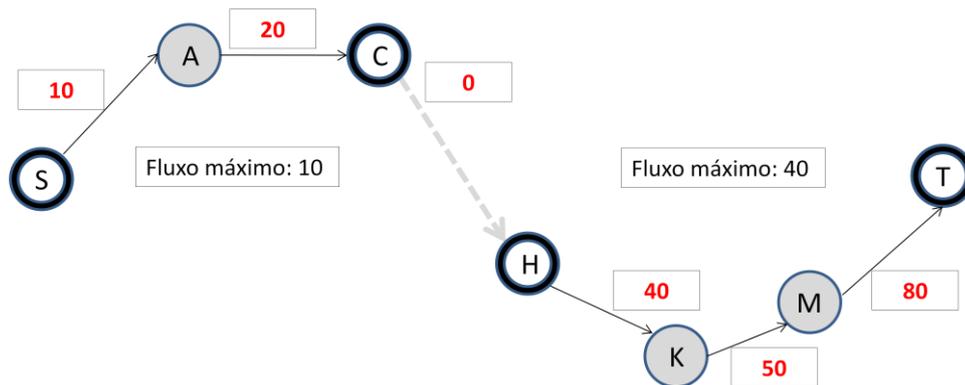
Fonte: Autoria própria.

Embora tenha alcançado êxito no que se propõe, o algoritmo de expansão apresentou comportamento indesejado em uma atividade neste caso de teste. Na avaliação do segundo arco (C→H), o aumento de fluxo executado em duas etapas poderia ter sido abreviado em apenas uma pelo caminho S→A→C→H→K→M→T, que estava plenamente apto a transferir, com folga, o aumento integral de 9 unidades de uma vez. Em verdade, se o algoritmo de rotulação utilizasse uma abordagem de busca gulosa ao invés de uma busca em largura, a descoberta de um novo caminho teria sido evitada pela utilização das dezoito unidades residuais do arco H→K em relação aos seus vizinhos.

Considerando este cenário experimental, o estudo de uma heurística eficiente pode parecer dispensável, mas é determinante para a qualidade e sucesso de uma aplicação executando sobre a complexidade de redes de fluxo com variáveis de domínios reais.

Vale ressaltar, ainda referente à avaliação de  $C \rightarrow H$ , que o potencial latente deste arco não é limitado às 9 unidades de expansão aplicadas. Um aumento de 10 unidades também seria suportado pelo caminho de aumento, estando limitado, neste caso, à capacidade residual do arco  $S \rightarrow A$ . A Figura 61 apresenta um isolamento do caminho em questão com as capacidades residuais dos arcos envolvidos.

Figura 61 - Análise bilateral do caminho de aumento descoberto pela expansão de  $C \rightarrow H$ .



Fonte: Autoria própria.

Nesta situação, a análise bilateral dos arcos do corte mínimo se verificaria mais completa, por determinar a quantidade de recurso que poderia ser aplicada, mantendo-se a garantia de seu aproveitamento máximo. Entretanto, para a problemática discutida no escopo deste trabalho, o algoritmo de expansão com aumento definido produz efeitos similares com implementação mais simples.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido objetivando expandir o algoritmo de aumento de fluxo de Ford e Fulkerson, utilizando seus resultados e provendo decisões de otimização para a exploração dos recursos não aproveitados representados pelas capacidades residuais dos arcos não saturados na rede de fluxo. Sua metodologia propõe duas abordagens para avaliação destes arcos no corte mínimo, apresentando a implementação e validação de uma delas como resultado.

A pesquisa enfatizou ainda a complexidade inerente ao processamento determinístico de informações em redes de fluxo devido à elevada variedade de permutações que precisam ser verificadas para validação do resultado. Não incomum, a intratabilidade de problemas com essa característica irrompe da abordagem de avaliação exaustiva. Este fato tem levado muitos pesquisadores a investir seus esforços em algoritmos não determinísticos, sacrificando a garantia de obtenção dos melhores resultados com metodologias de simplificação diversas. Outros autores, como os referenciados neste trabalho, dedicam suas pesquisas à melhoria e extensão dos algoritmos determinísticos existentes, como o algoritmo de aumento de fluxo de Ford e Fulkerson.

Assim como a maioria dos procedimentos de otimização estudados durante a realização deste trabalho, a abordagem de avaliação de redes de fluxo saturadas com aumento definido possui características passíveis de aperfeiçoamento e exploração, em boa parte associadas à técnicas adequadas de modelagem dos dados.

Crítérios de desempate para os arcos do corte mínimo e as heurísticas apropriadas para a descoberta dos caminhos de aumento de fluxo podem ser explorados para aumentar o desempenho subjetivo em cada problema ou reduzir a complexidade.

Tanto o algoritmo de expansão com aumento definido quanto a análise bilateral dos arcos do corte mínimo podem tirar proveito dos processadores multi núcleos modernos, uma vez que o procedimento de avaliação individual dos arcos é compatível com o paralelismo. O contexto salvo pode ser replicado e distribuído entre os núcleos de processadores, ou mesmo entre máquinas distintas, obtendo um impacto positivo no tratamento da complexidade envolvida.

Os resultados validaram a eficácia da avaliação com aumento definido, mantendo-se a complexidade  $O(EV^2)$  do algoritmo de Edmonds e Karp.

Este trabalho deixa como possibilidades de trabalhos futuros a implementação e comparação do algoritmo de análise bilateral dos arcos em uma rede de fluxo, além do processamento em paralelo das duas abordagens apresentadas junto com o estudo das vantagens obtidas.

## REFERÊNCIAS

- AHLISWEDE R., CAJ N., LI S.-Y. R., e YEUNG R. W. “**Network information flow**”. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 46, pp. 1024-1016, 2000.
- BEZERRA E., **Princípios de análise e projeto de sistemas UML: Um guia prático para modelagem de sistemas**. 1. ed. Rio de Janeiro : Campus, 2006.
- BOYKOV, Y. e KOLMOGOROV, V. (2004). **An Experimental Comparison of Min-Cut/Max-Flow Algorithms for Energy Minimization in Vision**. IEEE.
- CHERIYAN J. e MEHLHORN K. (1998), **An Analysis of the Highest-Level Selection Rule in the Preflow-Push Max-Flow Algorithm**.
- CORMEN T. H., LEISERS, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. (2001). "Section 26.2: The Ford–Fulkerson method". **Introduction to Algorithms** (Second ed.). MIT Press and McGraw–Hill. pp. 651–664. ISBN 0-262-03293-7.
- Departamento Nacional de Transito (DENATRAN), (2014) Disponível em <<http://www.denatran.gov.br/frota2013.htm>> Acesso em 01/08/2014.
- EDMONDS, J. e KARP, R.M. (1972), **Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems**, J. ACM 19, 2, 248-264.
- ERICKSON J. (2014), Enciclopédia Virtual Disponível em <<http://www.cs.uiuc.edu/~jeffe/teaching/algorithms/>> Acesso em 01/08/2014.
- EVEN S. e TARJAN R. E. (1975), "**Network Flow and Testing Graph Connectivity**", SIAM J. on Comp., Vol. 4, No. 4,, pp. 507-518.
- FORD, L. K. e FULKERSON, D. R. (1958) **Constructing maximal dynamic flows from static flows**, Operations Research 6, 419-433.
- FORD, L. K. e FULKERSON, D. R. (1962), **Flows in networks**, Princeton.
- FRAGOULI C. e SOLJANIN E. (2004), “**Information Flow Decomposition for Network Coding**” submitted to IEEE Trans. Inform. Theory.

- 
- GALE, D. (1959). **Transient flows in networks**, Mich. Math. J. 6, 59-63.
- GEORGE T. H., GARY P, e STANLEY S. (2008). "Chapter 8:Network Flow Algorithms". **Algorithms in a Nutshell**. Oreilly Media pp.226–250 ISBN 978-0-596-51624-6.
- GOLDBARG, M. C. e LUNA, H. P. (2000), **Otimização Combinatória e Programação Linear**, Ed. Campus, Capítulo 7.
- GOLDBERG A.V. e TARJAN R.E. (1998), “**A New Approach to the Maximum-Flow Problem**” J. ACM, vol. 35, no. 4, pp. 921-940.
- GOLDFARB D. e HAO J. (1990), **A primal simplex algorithm that solves the maximum flow problem in at most  $nm$  pivots and  $O(n^2m)$  time.**
- GREIG D., PORTEOUS B., e SEHEULT A. (1989), “**Exact Maximum A Posteriori Estimation for Binary Images**” J. Royal Statistical Soc., Series B, vol. 51, no. 2, pp. 271-279.
- HALPERN, J. (1979). **Generalized dynamic flows problem**, Networks 9, 133-167.
- HERNANDES, F. e LAMATA, M. T. e TAKAHASHI, M. T. e YAMAKAMI, A. e VERDEGAY, J. L. (2007). **An Algorithm for the Fuzzy Maximum Flow Problem**. IEEE.
- HOCHBAUM D. S. (2008), **The Pseudoflow algorithm: A new algorithm for the maximum flow problem**. Operations Research Vol 58(4) 992-1009.
- HO T., MEDARD M., EFFROS M., e KARGER D (2003). “**On randomized network coding**”. In Proc. 41st Allerton Annual Conference on Communication, Control and Computing.
- HO T., MEDARD M., EFFROS M., KARGER D., JUN SHI e LEONG B. (2003) “**Toward A Random Operation of Networks**”. submitted to IEEE Transactions on Information Theory.
- IEMINI, M. F. (1994), **Fluxo dinâmico em redes aplicado no tráfego urbano**. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ.
- INFO EXAME, (2013) Disponível em <<http://info.abril.com.br/noticias/downloads/fotonoticias/8-apps-para-ajudar-no-transito.shtml>> Acesso em 01/08/2014.

---

JAGGI S., SANDERS P., CHOU P. A., EFFROS M., EGNER S., JAIN K., e TOLHUIZEN L. (2003), “**Polynomial time algorithms for multicast network code construction**”, Submitted to IEEE Transactions on Information Theory.

KLEINBERG J., TARDOS E. (2006). "Chapter 7:Extensions to the Maximum-Flow Problem". **Algorithm Design**. Pearson Education. pp. 378–384. ISBN 0-321-29535-8.

KOETTER R. e MEDARD M. (2003) **An algebraic approach to network coding**. IEEE/ACM Transactions on Networking.

LOVÁSZ L. E PLUMMER M. D. (1986) **Matching Theory** Elsevier.

MACIEL, A. M. (2012), **Mineração de Grafos em Dados Espaciais de Desmatamento**. Dissertação de M.Sc., UERN/UFERSA.

MINIEKA, E. (1973). **Maximal lexicographic and dynamic network flows**, Operational Research 21, 2, 517-527.

MINIEKA, E. (1974). **Dynamic network flows with arc changes**, Networks 4, 255-265.

NETTO, P. O. B. (2012) **Grafos - Teoria, Modelos e Algoritmos**. 5. ed. São Paulo : Edgard Blucher.

ORLIN J. B. (2013), “**Max flows in  $O(nm)$  time or better.**” Proceedings of the 2013 Symposium on the Theory of Computing. 765-774.

PEIJUN, Y. e CHENG, C. e FENGHUA Z. (2011). **Dynamic Route Guidance using Maximum Flow Theory and its MapReduce Implementation**. 14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems. Washington, DC, USA.

ROY S. e COX I. (1998), “**A Maximum-Flow Formulation of the NCamera Stereo Correspondence Problem,**” IEEE Proc. Int’l Conf. Computer Vision, pp. 492-499.

RUS, A. B. e DOBROTA V. (2012). **Case Study of a Gearbox-Like Routing Algorithm Selection in Runtime**. IEEE.

SAIDANE, B. e MANIER, H. e MOUDNI, A. E. (2002). **Optimisation for urban congestion problems**. Universite de Technologie de Belfort-Montbeliard. France.

Secretaria dos Transportes Metropolitanos do Estado de São Paulo Disponível em <<http://www.stm.sp.gov.br/>> Acesso em 01/08/2014.

TSIAKAS, P. e DOR, A. e VOUDORIS, K. e HADJINICOLAOU, M. (2008). **Load Balancing in Limited Intra-Cell Interference (LICI) Networks Based on Maximum Graph-Flow Algorithms**. IEEE.

WANG S. (2004), “**Graph Theory**”, Beijing, Science Press.

WILKINSON, W. L. (1969). **An algorithm for universal maximum flows in a network**, Operations Research 19, 7, 1602-1612.

XIE Z., JIANPING L. (1995), “**Algorithm of Network and Theory of Complexity**”, Beijing, Science Press, May.

ZHANG, J. e FAN, P. (2005). **On Network Coding in Wireless Ad-hoc Networks**. IEEE.

ZWICK, U. (1995). “**The smallest networks on which the Ford-Fulkerson maximum flow procedure may fail to terminate**”. Theoretical Computer Science 148 (1): 165–170. doi:10.1016/0304-3975(95)00022-O.