SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

Lista de Símbolos

Lista de Siglas

DMC :	Canal discreto sem memória - *Discret Memoryless Channel*
IS :	Sistema Integrado
QAM :	Modulação por amplitude e quadratura - *Quadrature Amplitude Modulatios*
PSK :	Chave de mudança de fase - *Phase Shift Kee*
$AWGN$:	Ruido guassiano branco aditivo - *Aditive White Gaussian Noise*
$QAMS$:	Modulação por amplitude e quadratura sobre superfície - *Quadrature Amplitude Modulatios on Surface*
$e.s.g.u.$:	Espaço de sinais geometricamente uniforme

CAPÍTULO 1

Introdução

O propósito do texto apresentado a seguir é fornecer uma precisa descrição dos problemas mais importantes tratados neste trabalho, situar a proposta dentro do contexto atual do desenvolvimento tecnológico no qual o problema esta inserido, justificar a sua importância no âmbito da Tecnologia da Informação, enfatizando as contribuições para o desenvolvimento e melhoria do processo de transmissão digital de sinais, descrever a metodologia do trabalho, enumerar os resultados esperados e apresentar o modo de organização deste trabalho.

1.1 Contextualização

Sabe-se que em todo sistema de transmissão ou de armazenagem de dados, ruídos são introduzidos no processo e cabe ao projetista do sistema introduzir dispositivos que busquem lidar com a informação de maneira que seja possível recuperar os dados transmitidos ou armazenado de maneira eficiente. Ocorre que a grande circulação de informação na esfera pública e privada cresce a todo instante, exigindo sistemas de comunicações cada vez mais robustos e eficientes, o que leva a uma busca contínua, por parte dos pesquisadores, por aperfeiçoamento dos sistemas usuais ou desenvolvimento de novos sistemas, no sentido de superar desempenhos dos componentes de um sistema de transmissão e armazenagem de dados, tais como, os projetos de codificação, modulação, canal, filtro e quantizador.

Foi pensando neste objetivo que Lima e Palazzo [21] lançaram a idéia inicial de um sistema de transmissão de dados, no qual os principais blocos, codificação, modulação e canal, eram projetados de forma dependentes, visando, em princípio, evitar dispositivos adicionais para correções de distorções, ou escolhas inadequadas de alguns destes componentes. Como consequência foi lançada, por Lima e Palazzo, a proposta de um sistema de transmissão de dados, na qual a modulação e o sistema de codificação eram projetados a partir de uma canal discreto sem memória: o projeto da modulação é realizado sobre um espaço métrico (Ω, δ), onde Ω era uma variedade riemanniana e δ, uma métrica sobre Ω, e código corretor de erro vem de uma estrutura algébrica intrínseca da variedade, o grupo de homologia de Ω. Mais especificamente, o projeto de modulação proposto por Lima e Palazzo vinha de uma partição sobre uma variedade riemanniana, proveniente do mergulho de um grafo associado a um canal discreto sem memória, cujas regiões de decisões de cada sinal da constelação correspondiam as regiões da partição do mergulho.

A proposta de Lima e Palazzo [21] continha uma variedade muito grande de exemplos e propriedades sobre construções e identificações de projetos topológicos de modulações e de estruturas algébricas geradores de códigos corretores de erros associados a canais discretos sem memória. Apesar do avanço na solução do problema da identificação e construções das estruturas compatíveis do sistema de transmissão de dados, faltava, como era de se esperar um trabalho inicial de resolução de um problema de grande porte da Teoria da Comunicação, centralizar as ações sobre famílias de determinados grafos, a fim de colher mais informações e formalizar os conceitos matemáticos das relações fundamentais entre os principais componentes do sistema de transmissão tratados na proposta.

O primeiro problema que chamou a atenção, pela sua peculiaridade, dificuldade, característica matemática e geométrica, caráter inesplorado, certeza de encontrar modulações mais eficientes e adaptado às nossas habilidades, foi sem dúvida, o projeto de modulação. Veio então o trabalho de Lima e Luana [24], que concentrou todas as suas ações em desenvolver um projeto de modulação compatível com o canal discreto sem memória vindo do grafo completo. A idéia da proposta surgiu de uma intuição de Lima, de que era possível desenvolver um projeto de modulação, nos moldes propostos por Lima e Palazzo, usando o grafo completo, em vez do grafo completo biparticionado utilizado por Lima e Palazzo. Foi confirmada em [24] que a intuição de Lima era possível de ser realizada, onde constatou-se que o projeto de modulação associada ao canal discreto sem memória poderia ser construída a partir de um grafo qualquer, e dependendo da quantidade dos elementos do grafo, é possível identificar, classificar e construir todas as classes de modulações distintas, vindas de um mergulho do grafo completo K_n. Além disso, foi provado em [24], que existe uma transformação geométrica do grafo completo K_n em um canal discreto sem memória $C_{n,n}$, que permite associar um sistema de probabilidades às transições de $C_{n,n}$, fornecendo valiosas informações sobre o desempenho deste.

1.2 Proposta da Pesquisa

Com o trabalho de Lima e Luana [24], a proposta do sistema de transmissão de dados de Lima e Palazzo, começou a tomar dimensões maiores, as relações entre seus componentes tornaram-se mais claras, adquirindo personalidade própria que nos levou a denominá-lo de sistema integrado (S.I.) de transmissão de dados, para diferenciar dos demais sistemas conhecidos. Foi então que surgiu uma grande curiosidade de como se comportaria o projeto de S.I. quando o grafo utilizado para gerar o projeto de modulação, fosse o grafo completo bipartido $K_{m,n}$. Primeiro, porque foi o primeiro grafo a ser utilizado no projeto de modulação em [21], e segundo, porque já prevíamos que as modulações vindas de $K_{m,n}$ teriam propriedades bem diferentes do grafo completo K_n, algumas de grandes interesse. Além do mais, poderíamos comparar os resultados de $K_{m,n}$ e K_n para avaliar os prós e contras em decidir, ora por uma modulação vinda de K_n, ora por uma vinda de $K_{m,n}$.

1.2.1 Definição da proposta

Em vista do exposto acima, a proposta incial deste trabalho consiste do desenvolvimento e análise do seguinte

Problema 1.2.1 *Desenvolver um projeto de modulação sobre uma variedade riemanniana, associada a um canal discreto sem memória, vinda de um mergulho do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$, no contexto das modulações* QAMS *estabelecidas por Lima e Luana [24].*

A estratégia para resolver o Problema 1.2.1 é seguir, sempre que possível, o mesmo roteiro do trabalho de monografia de Lima e Luana [24]. Primeiro faremos uma a-daptação do Aloritmo 2.8.1 utilizado no processo de identificação dos mergulhos do grafo completo K_n, para que o mesmo nos forneça todos os mergulho de um grafo completo bipartido $K_{m,n}$. Neste sentido, a primeira dificuldade a ser enfrentada será identificar o conjunto das rotações de um grafo completo bipartido. O método utilizado para obter os sistemas de rotações do grafo completo não funcionam para o caso do grafo completo bipartido, teremos então que resolver este problema de uma outra maneira, mas não deverá ser muito diferente.

A preocupação seguinte é identificar propriedades elementares dos mergulhos do grafo completo bipartido, principalmente aquelas que são específicas destes, tais como propriedade relativas aos tipos de regiões, sequências orbitais, emaranhados e topologia das regiões, mergulhos mínimos e máximos e mergulhos regulares.

Conhecidas as propriedades elementares, passamos então ao problema da classificão dos mergulhos do grafo completo bipartido, concentrando as nossas ações nos mergulhos dos grafos da forma $K_{n,n}$. Em cada caso identificado, constarão as famílias de superfícies, a descrição das classes de mergulhos, alguns exemplos de construções, identificação de emaranhados, análise quantitativa dos elementos das classes, mergulhos sem bordos, todos seguidos de resultados particulares e gerais contendo as demonstrações matemáticas, de construções de figuras ilustrando os componentes do sistema e de gráficos resumindo e amostras de dados. Além disso, a identificação dos mergulhos regulares está sempre presente durante todo o trabalho devido a importância deste tipo de mergulho como projetos de modulações em espaços de sinais do tipo geometricamente uniformes.

Concluído a descrição dos mergulhos, estes serão usados em seguida para definir precisamente uma modulação sobre uma variedade riemaniana. Nesta etapa serão tratados todas as categorias de modulações vindas dos mergulhos de famílias distintas de superfícies, onde serão apresentadas análises quantitativas dos elementos envolvidos, construções geométricas, algorítmos, medidas de desempenhos e gráficos de resultados. Finalmente, será estabelecido o processo de associação entre canal discreto sem memória e modulação sobre variedade riemanniana, estabelecendo definitivamente o conceito de modulação compativel com um canal discreto sem memória, e com isso, formalizando o conceito definitivo de modulação com padrões de um sistema integrado de transmissão de dados, como era o objetivo inicial de Lima e Palazzo [21].

Vale ressaltar ainda que as modulações regulares serão sempre destacadas e sempre que possível, o desenvolvimento da teoria culmina com resultados matemáticos seguidos de demonstrações.

Uma preocupação ainda deste trabalho é identificar os problemas que são consequências imediatas dos objetivos atingidos, e estabelecer estes resultado na forma de propostas para futuros trabalhos, sempre que surgir uma afirmação que não foi provada e que poderia ser realizada naturalmente neste trabalho, seguida da justificativa porque ela não foi feita.

1.3 Contribuições da Proposta

O que esperamos inicialmente é desenvolver métodos que identifiquem todos os mergulhos do grafo completo bipartido, descobrir propriedades que nos permitam avançar no problema da identificação e construir algoritmos que possibilitem implementações dos componentes no sentido de resolver o problema da identificação, como também realizar os projetos de simulações dos componentes do sistema integrado de transmissão de dados.

Quanto as modulações, esperamos melhorar a definição de modulação compatível com um canal discreto sem memória introduzida em [24], definição muito importante para formalização matemática dos conceitos que irão estabelecer de uma vez por toda o sistema integrado de transmissão de dados proposto por Lima e Palazzo [21]. Além do mais, esperamos obter uma fórmula matemática que forneça uma medida da eficiência de uma modulação QAMS, no sentido de mostrar numericamente quando duas modulações possuem desempenhos distintos. Esperamos obter uma medida da eficiência de uma modulação que seja coerente no sentido de fornecer valores numéricos que representem o desempenho da modulação, levando em consideração características particulares, tais como, tipos de partição, regiões, regularidades da partição, tipo de grafo associado ao canal, componente de bordos e a superfície em que se encontra.

Contamos neste trabalho com a descoberta de um número maior de modulações regulares do que as encontrada no grafo completo em [24].

A nossa maior expectativa é descobrir propriedades que permitam avançar no problema da identificação de mergulhos de grandes grafos e de algoritmos que possibilitem desenvolver projetos de modulações dos sistemas componentes. Uma das nossas buscas é procurar meios de diminuir a complexidade do processo de identificação de todas as classes de mergulhos.

1.4 Organização da Proposta

Durante todo o trabalho há uma preocupação em apresentar o processo evolutivo do problema de forma didática para que a leitura seja mais agradável e conhecida. Para isso foi introduzido o maior número de figuras possíveis com o intuito de ilustrar, de forma mais compreensivel, as idéias por trás do problema geométrico, ora típico de mergulho de grafo e, às vezes, ilustrando o problema da construção dos componentes da modulação, com o grafo dual, o canal associado e canal equiprovável.

O problema de identificação de mergulhos de grafos envolve quatro tipos de superfície e dois tipos de mergulhos. A identificação de modulações, além de estar submetida a esta classificação, contêm ainda subclasses de mergulhos provenientes da existência dos emaranhados distintos e das classes de isomorfismos dos grafos correspondentes aos canais equiprováveis. Além disso, foram dados destaques aos mergulhos regulares e as modulações sobre espaços de sinais do tipo geometricamente uniformes. O modo encontrado de apresentar todas as categorias de mergulhos e de modulações foi através de tabelas de classificação, discriminando cada categoria de mergulho e de modulação e ilustrando os resumos através de gráficos comparativos de resultados.

O trabalho proposto acima foi desenvolvido através dos seguintes tópicos relacionados a seguir.

O Capítulo 1 consiste da introdução deste trabalho.

O Capítulo 2 contém as principais definições, resultados sobre os sistema de transmissão de dados, modulações, códigos corretores de erros, a teoria dos mergulhos de grafos, mergulhos com bordos, grafos duais, superfícies, propriedades das partições homogêneas, propriedades dos mergulhos do grafo completo K_n, propriedades dos emaranhados e o algoritmo identificador do mergulho utilizado na identificação dos meruglhos de $K_{m,n}$.

O Capítulo 3 apresenta os métodos de identificação do sistema de rotações e dos mergulhos do grafo completo bipartido $K_{m,n}$, propriedades elementares, teoremas e resultados, análises quantitativa dos elementos das classes de mergulhos de $K_{m,n}$, gráficos exibindos resultados quantitativos e identificação de problemas que dão continuidade ao processo de identificação dos mergulhos de grafos. Além do mais, este capítulo introduz o processo de identificação algébrica dos mergulhos não orientáveis do grafo completo $K_{m,n}$.

Os mergulhos em superfícies com bordos são tratados no Capítulo 4. Neste, são apresentados todo o processo de identificação dos mergulhos com bordos do grafo completo bipartido $K_{n,n}$, $n = 1, 2, 3, 4$, seguido de análise quantitativa, gráficos, construções geométricas, propriedades, teoremas e identificação de mergulhos regulares.

As modulações em superfícies com e sem bordos são apresentadas no Capítulo 5. Neste, são analisadas, quanto ao desempenho, os projetos topológicos de modulações, definido o processo de associação entre modulação e canal discreto sem memória, são construídos os principais elementos que representam uma modulação, apresentadas propriedades e teoremas referentes as modulações, descrito o processo de identificação das classes de modulações distintas e identificados os problemas que devem ser resolvidos para que o processo de identificação de modulações evolua de forma mais precisa.

As conclusões e propostas para futuros trabalhos são estabelecidos no Capítulo 6.

Após as Referências Bibliográficas foram incluídos os quatro seguintes apêndices: no Apêndice A consta o final da Prova do Lema 3.9.1; no Apêndice B, o final da Prova do Teorema 3.9.2 e; no Apêndice C, são apresentadas três modulações distintas com duas componentes de bordos, provenientes do mergulho $K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T \equiv 5R_4R_{12}$, que não constam na Subseção 5.7.3.

No final, incluímos um Índice Remessivo para auxiliar na leitura da tese.

CAPÍTULO 2

Preliminares

As modulações consideradas neste trabalho são definidas através de mergulhos de grafos sobre variedades riemannianas. Neste capítulo, relacionaremos os principais conceitos, definições e resultados utilizados neste trabalho, sobre sistema de comunicações, grafos, superfícies, mergulhos de grafos e modulações.

2.1 Sistema de Comunicação

As principais definições dos componetes de um sistema de transmissão de dados, apresentadas a seguir podem ser encontradas em [8].

Um *sistema de transmissão de dados* conecta uma *fonte discreta*, a qual pode ser uma pessoa ou uma máquina, a um destinatário por meio de um canal, por exemplo, uma fibra óptica, um fita, um disco magnético, um cabo coaxial, ou o próprio espaço. Visto que este é formado por uma sequência $u = (u_1, u_2, ..., u_N)$ de símbolos da fonte s, de forma que u_i é escolhido aleatóriamente dentre os possíveis elementos do conjunto s.

Um modelo de um sistema de transmissão de dados é formado pelos seguintes blocos: fonte de dados, o codificador de fonte e canal, modulador e demodulador, o decodificador de fonte e canal e o receptor de dados.

A *fonte de dados* pode ser contínua ou discreta, no nosso caso a fonte é discreta, ou seja, uma fonte digital, composta por informações ou dados, cuja a saída é uma sequência de símbolos digitais discretos.

Os dados emitidos por este sistema de comunicação a partir da fonte são, a princípio, processados pelo *bloco codificador de fonte*, que tem a função de representá-las de forma mais compacta, excluindo a redundância, transformando-a em uma sequência de símbolos chamada de sequência de informação u. A seqüência u é enviada para o *codificador de canal* o qual introduz redundância, transformando-a em uma sequência de número de *bits* denominado *palavra-código* v. O símbolo v é exibido através de dígitos binários, quando há uma sinalização binária e por dígitos do alfabeto q-ário, quando há mais de dois sinais.

O bloco *modulador* tem a função de selecionar, para cada símbolo da palavra-código, uma forma de onda de duração T-segundos, ou seja, transformar cada símbolo em um sinal analógico. Quando o código é binário, o modulador gera sinais codificados.

No *canal* é introduzido ruído, sendo que o gaussiano aditivo branco (AWGN) é a forma mais comum de ruído.

O bloco *demodulador* deve produzir a melhor estimativa na saída correspondente ao sinal recebido, e este deve ser um dos números reais ou símbolos digitais discretos anteriormente selecionados. Para otimizar a função do demodulador faz-se necessário a introdução de um *filtro* ou *detector de correlação,* acompanhado por um despositivo que auxilia a tomada de decisão.

Na saída do demodulador existe um *quantizador* que tem a função de transformar um sinal analógico em um sinal digital, de modo que este procedimento melhore o desempenho do sistema de transmissão de dados.

O *decodificador* é composto pelo *decodificador de canal*, tem o objetivo de transformar a sequência recebida r em uma sequência binária $\hat{u}$, chamada de sequência estimada, uma vez que $\hat{u}$ é a cópia da sequência de informação de u. E composto ainda pelo *decodificador de fonte*, cuja função é transformar a sequência $\hat{u}$ em uma sequência estimada do mesmo tipo da saída da fonte, e por fim, enviar a informação ao seu receptor de dados, ou seja, ao seu destinatário.

Há dois modos de transmissão de dados através do sistema: cada dígito da fonte de saída é enviando um após o outro, ou N-dígitos na saída da fonte são agrupados formando uma sequência de u para ser enviada, de maneira que nenhum dígito enviando dependa de outro enviando anteriormente. Estes dois modos, juntamente com os sistema de filtro e o quantizador de Q-níveis constituem o DMC.

2.2 Grafos

Esta seção contém um breve resumo da teoria dos grafo contendo as principais definições e resultados utilizadas neste trabalho.

De um modo geral, um grafo $G(V, E)$ é uma estrutura formada por um conjunto de pontos $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$, do plano, chamados de *vértices* e um conjunto de segmentos E denominado de *lados* (ou *arco*) sendo que cada lado está ligado por dois vértices. Um lado de E é denotado por $e = (v_i, v_j)$ e os vértices v_i e v_j são chamados *adjacentes* a e. O *grau* (ou *valência*) de um vértice v é igual ao seu número de lados incidentes. O grau de v é k será denotado por $\deg v = k$.

Uma *orientação* de um arco $e = (v, w)$ é o par (v, w), onde v é o vértice inicial e w o final. Um grafo G diz-se *orientado* quando cada um de seus lados contém uma orientação. A orientação de $e = (v, w)$ é indicada com uma seta sobre o arco no sentido de v para w e, obrigatoriamente, o lado oposto de e é considerado como $e^{-1} = (w, v)$. Um *dígrafo* é um grafo orientado.

Um *caminho* sobre um grafo G de origem v_1 e extremidade v_{n+1} é um dígrafo da forma

$$v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 \cdots v_n e_n v_{n+1}$$

onde $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_3)$ e $e_n = (v_n, v_{n+1})$.

Um *grafo completo biparticionado* com m e n vértices, denotado por $K_{m,n}$, é composto por dois conjuntos de vértices A e B, com m e n elementos, respectivamente, de modo que cada vértice de A está conectado por um lado a todos os vértices de B.

Se G é um grafo conexo planar, então um mergulho de 2-células de G encontra-se em uma superfície não-orientada de gênero v, se G possui v lados quebrados.

2.3 Mergulho de grafos

Diz-se que um grafo G está *mergulhado* em uma superfície Ω, se os seus lados encontram-se sobre Ω e satisfazem as condições: dois lados de G nunca se interceptam e quando o fazem, a interseção ocorre em um único vértice ou totalmente. A identificação de um mergulho de um grafo G é realizado através do *sistema de rotações*. Dois mergulhos de um grafo G são ditos *idênticos* quando existe uma bijeção entre suas regiões tal que as fronteiras orientadas de regiões correspondentes são idênticas como caminhos *direcionados*. Um sistema de rotação de um grafo G é a descrição, para cada vértice de v, da ordem dos vértices de G que estão conectados a v. Para isto, basta percorrer um pequeno círculo que contém apenas v, e anotar ordenadamente os vértices de G que estão conectados a v de G. A retirada dos lados de G divide Ω em partes denominadas de *regiões*. Se toda região do mergulho pode ser contraída em um ponto (ou é homotópica a um ponto) então diz-se que é um *mergulho de 2-células* (ou, simplesmente, um *2-células*). O mergulho de G sobre Ω é indicado por $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$, onde R_{α_i} é um α_i*-lados* (ou região de α_i lados).

As regiões R_t^1 e R_t^2 de um mergulho de G são ditas *regiões iguais* se, e somente se, as suas respectivas seqüências orbitais γ_1 e γ_2, são tais que $\gamma_2 = \gamma_1^{(i)}$.

Os mergulhos $G(\Theta_1) \hookrightarrow \Omega$ e $G(\Theta_2) \hookrightarrow \Omega$ são ditos *mergulhos iguais* se, e somente se, possuem regiões iguais, isto é, se $\Gamma_1 = \{\gamma_1^1, \cdots, \gamma_k^1\}$ e $\Gamma_2 = \{\gamma_1^2, \cdots, \gamma_h^2\}$ são os respectivos conjuntos de seqüencias orbitais de $G(\Theta_1) \hookrightarrow \Omega$ e $G(\Theta_2) \hookrightarrow \Omega$, então $k = h$ e $\gamma_r^2 = (\gamma_r^1)^{(i_r)}$ para todo $r \in \{1, \cdots, k\}$.

Seja $P = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ o conjunto dos vértices do grafo $G(P, Q)$, chamamos de *sistema de rotações* de G, e o indicamos por

$$\Theta = \left\{0\,(i_{00}, \cdots, i_{0j_0}), 1\,(i_{10}, \cdots, i_{1j_1}), \cdots k\,(i_{k0}, i_{k1}, \cdots, i_{kj_k}), \cdots, p\left(i_{p0}, \cdots, i_{pj_p}\right)\right\}, \quad (2.1)$$

o conjunto dos sistemas de rotações dos vértices de G, no qual $k\,(i_{10}, i_{11}, \cdots, i_{1j_k})$ indica os índices dos vértices adjacentes a v_k interceptados ordenadamente quando percorremos, no sentido horário, um pequeno círculo contendo v_k em seu interior.

Indicaremos o sistema de rotações do vértice v_k por θ_k, ou seja,

$$\theta_k = (i_{k0}, i_{k1}, \cdots, i_{kj_k}). \quad (2.2)$$

Definição 2.3.1 *Seja Θ o sistema de rotações de G definido em* (2.1)*. Chamamos de* inverso *de Θ o sistema de rotações de G formado pelos cíclos inversos dos sistemas de Θ. Mais exatamente, o inverso de Θ é definido por*

$$\Theta^{-1} = \left\{0\,(i_{0j_0}, \cdots, i_{01}, i_{00}), \cdots k\,(i_{kj_k}, \cdots, i_{k1}, i_{k0}), \cdots, p\left(i_{pj_p}, \cdots, i_{p1}, i_{p0}\right)\right\}. \quad (1.3)$$

Seja G um grafo com p vértices e deg(v) o grau (ou valência) do vértice v $\in$ G. Então o número de sistemas de rotações de G é dado por

$$\#\left(\Theta\left(G\right)\right) = \Pi_{v\in V(G)}\left(\deg\ v-1\right)!. \tag{1.4}$$

Proposição 2.3.2 *Seja $G(\Theta)$ o grafo G munido do sistema de rotações Θ, então os mergulhos de $G(\Theta)$ e $G(\Theta^{-1})$ são idênticos.*

Definição 2.3.3 *Seja $G(P,Q)$ um grafo com vértices em $P=\{v_0,v_1,\cdots,v_p\}$, lados no conjunto $Q=\{e_0,e_1,\cdots,e_q\}$ e sistema de rotações Θ. Se $G(\Theta)\hookrightarrow\Omega$ está orientado no sentido anti-horário e $R_t=\left(v_{\gamma_0},v_{\gamma_1},\cdots,v_{t-1},v_{\gamma_0}\right)$ é uma região de $G(\Theta)\hookrightarrow\Omega$, chamamos de* seqüência orbital *associada a R_t a seqüência $\gamma=\left(\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{t-1},\gamma_0\right)$.*

Seja $G(P,Q)$ um grafo com vértices em $P=\{v_0,v_1,\cdots,v_p\}$, lados no conjunto $Q=\{e_0,e_1,\cdots,e_q\}$ e sistema de rotações Θ. Se $G(\Theta)\hookrightarrow\Omega$ esta orientado no sentido anti-horário e $R_t=\left(v_{\gamma_0},v_{\gamma_1},\cdots,v_{t-1},v_{\gamma_0}\right)$ é uma região de $G(\Theta)\hookrightarrow\Omega$, chamamos de *seqüência orbital* associada a R_t a seqüência $\gamma=\left(\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{t-1},\gamma_0\right)$.

Em um mergulho $G\hookrightarrow\Omega$ os números de vértices, lados e regiões serão denominados por v, e e f, respectivamente.

A *característica de Eüler-Poincaré* de uma superfície Ω é dada por

$$\chi\left(\Omega\right) = v-e+f \tag{2.4}$$

Se G possui um mergulho numa superfície orientada de gênero m, isto é, $G\hookrightarrow mT$, então

$$\chi\left(mT\right) = 2-2m. \tag{2.5}$$

Conhecer os gêneros mínimo e máximo das superfícies nas quais se encontram mergulhados o grafo $K_{m,n}$ é fundamental para identificar os mergulhos de 2-células de $K_{m,n}$.

O gênero γ da superfície orientada Ω para o mergulho mínimo do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ é dado por [38]

$$\gamma\left(K_{m,n}\right) = \left\{\frac{1}{4}\left(m-2\right)\left(n-2\right)\right\},\ m,n\geq 2; \tag{2.6}$$

onde $\{x\}$ é igual ao menor inteiro maior ou igual ao número real x.

O gênero máximo γ_M da superfície orientada Ω para o mergulho máximo do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$ é dado por [36]

$$\gamma_M\left(K_{m,n}\right) = \left[\frac{1}{2}\left(m-1\right)\left(n-1\right)\right],\ m,n\geq 2; \tag{2.7}$$

onde $[x]$ é o maior inteiro menor ou igual ao número real x. Outro resultado imprescindível na solução do problema da identificação dos mergulhos de K_n, deve-se a Duke [10], o qual será enunciado na forma do seguinte teorema.

Teorema 2.3.4 *Se $m\leq k\leq n$ e G tem um mergulho de 2-células nas superfície mT e nT, então G tem um mergulho de 2-células em kT.*

2.4 Mergulhos com Bordos

Nos casos dos mergulhos de $K_{n,n}$ identificados neste trabalho, existiriam mergulhos regulares, além daqueles citados acima? A resposta é sim. Só que os mesmos não se encontram em superfícies compactas orietadas sem bordo, e sim, em superfícies com bordos, conforme a definição desses tipos de modulações introduzidas por Lima e Palazzo [22]. Como exemplo, temos o mergulho sobre o toro com um componente de bordo definido por $K_{4,4} \hookrightarrow T_1 \equiv 7R_4$, correspondente a eliminação da região de 4-lados do mergulho $K_{4,4} \hookrightarrow T \equiv 8R_4$.

O termo exérese[1] foi introduzido em [24] no sentido de indicar a operação geométrica de retirada do interior de uma região de um mergulho, culminando com a seguinte definição de mergulho com bordo.

Definição 2.4.1 *Seja $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ um mergulho de um grafo G. Chamaremos de* mergulho com β componentes de bordos**,** *a todo mergulho obtido de $G \hookrightarrow \Omega$ pela exérese de β regiões de $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$, e o denotaremos por*

$$G \hookrightarrow \Omega_\beta \equiv \cup_{i=1}^{k-\beta} R_{\alpha_i}.$$

2.5 Isometrias

Uma constelação de sinais $\chi = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ é um conjunto de pontos x_i cujas coordenadas consistem dos elementos do alfabeto de entrada do canal e a constelação de sinais $\chi = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ é geometricamente uniforme se, dados quaisquer dois pontos xi e xj em χ, existe uma isometria u_{x_j,x_i} levando x_i em x_j , mantendo χ invariante, isto é,

$$u_{x_i;x_j}(x_i) = x_j \quad e \quad u_{x_i;x_j}(\chi) = \chi.$$

Uma isometria em um espaço métrico é uma transformação que preserva distância. No caso particular do espaço euclidiano n-dimensional, R^n, uma isometria u é uma transformação $u : R^n \to R^n$ que preserva a distância euclidiana,

$$|u(x) - u(y)| = |x - y|, x, y \in R^n.$$

Uma isometria u que mantém a constelação χ invariante, $u(\chi) = \chi$, é uma simetria de χ. Para $\chi \in \mathbb{R}^n$ as simetrias de X formam um grupo cuja operação é a composição de translações, rotações e reflexões, o grupo de simetrias $\Gamma(\chi)$ de χ. Uma constelação de sinais χ é dita geometricamente uniforme se a ação do grupo de simetrias $\Gamma(\chi)$ em χ é transitiva, ou, se a órbita de algum ponto $x_i \in \chi$ sob a ação de $\Gamma(\chi)$ for χ.

2.6 Geometria de Riemann

A geometria Riemanniana surgiu com a necessidade de se estender os métodos da geometria diferencial a espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$.

[1] Exérese, do grego *exaíresis,* significa extirparção cirúrgica de parte de um órgão ou membro.

Modulação é um termo frequentemente usado para designar o processo de transmissão do espectro de um sinal. Além de várias técnicas usadas neste processo, o modo de distribuição dos sinais nos espaços de modulações e a escolha apropriada deste, são fatores preponderantes na performance do sistema de transmissão de dados. Pesquisas apontam as variedades riemannianas bidimensionais (ou superfícies) como os espaços sobre os quais é possível projetar modulações com desempenho superior aos sistemas de modulações equivalentes em uso atualmente [3].

2.6.1 Modulações

Além das modulações, as variedades riemanianas bidimensionais também possuem estruturas algébricas intrínsecas que podem ser usadas para gerar sistemas de codificação que atuam de forma integrada com as modulações, eliminando possíveis dispositivos e rotinas de programação adicionais, no sistema de transmissão, para correção de distorções proporcionadas pela escolha inadequada destes dois elementos [22].

Uma *constelação de sinais* é um conjunto de m símbolos $\{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$ chamado de *alfabeto m-ário*. É usada para transmitir dados através de um *canal* de comunicação, o qual pode ser, uma fibra ótica, uma rede elétrica ou ondas eletromagnéticas. Os dados transmitidos são chamados de *mensagens*, as quais são constituídas por sequências dos elementos do alfabeto. No processo de transmissão da mensagem, conhecido como modulação, cada símbolo s_i é associado a um *ponto* ou *vetor* de um *espaço* Ω, definindo uma região R_i de Ω sobre a qual s_i é alocado no seu centro chamada de *região de decisão* do sinal s_i, ou ainda de *região de Voronoi* do sinal s_i associado ao ponto p_i de Ω [8].

Uma *região de Voronoi* do sinal s_i é a região R_i do espaço Ω formada pelos pontos de Ω que se encontram a uma distância s_i menor ou igual a distância fixa d_i, isto é,

$$R_i = \{p \in \Omega : \text{dist}\,(p, p_i) \leq d_i\}\,. \tag{2.10}$$

Quando $d_1 = d_2 = \cdots = d_m$, as regiões de Voronoy são todas congruentes, e Ω é chamado de *espaço de sinais geometricamente uniforme* (e.s.g.u.) e $\{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$ é uma constelação de sinais geometricamente uniforme [12].

Na Topologia Algébrica, modelos planar e espacial de um superfície, apesar de distintos, representam a mesma classe de superfície [29]. A forma espacial do toro é obtida aplicando-se a tranformação geométrica na forma planar do toro. Por sua vez, o modelo planar também pode ser obtido pela transformação geométrica inversa. Sobre o modelo planar, tem-se uma modulação QAM (*quadrature amplitude modulation*) com 128 sinais denotada por 128-QAM, consequentemente, sobre o toro, também a modulação é do tipo 128-QAM [51]. Deduzimos, portanto, que o modelo espacial do mergulho de um grafo G sobre uma superfície Ω, cuja partição é composta por m regiões, define um modelo de uma modulação m-QAM sobre Ω, onde cada sinal s_i está associado a um ponto p_i no interior da região R_i de $G \hookrightarrow \Omega$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Aqui as regiões não são necessariamente do mesmo tipo, embora existam modelos de mergulhos com esta característica.

Definição 2.6.1 *Seja $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{m} R_{\alpha_i}$ um mergulho de 2-células do grafo G sobre uma superfície orientada Ω. Chamaremos de* modulação QAM sobre a superfície Ω

para um projeto de m-sinais $s_1, s_2, \cdots, s_m$, e denotaremos por m-QAMS (quadrature amplictude modulation on surface)*, a modulação que associa cada sinal s_i ao vértice v_i de G e que tem por região de decisão, a região R_{α_i} de Ω. Com essa estrutura Ω será chamado de espaço de sinais sobre uma superfície e o conjunto de sinais $\{s_1, \cdots, s_m\}$, será chamado de constelação de sinais sobre uma superfície. Se todas as regiões R_{α_i}'s forem do mesmo tipo diremos que Ω é um espaço de sinais geometricamente uniforme* (e.s.g.u.)*, e que $\{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$ é um conjunto de sinais geometricamente uniformes.*

Definição 2.6.2 *Chamaremos de* classe de canais *o conjunto C_m de todos os canais que estão associados a uma classe de modulação. Chamaremos de* subclasse *da classe de canais C_m o conjunto $\overline{C}_m$ de todos os canais de C_m que possuem grafos isomorfos.*

Em geral, uma superfície é um conjunto de pontos sobre o espaço euclidiando tri-dimensional, se for orientável, no espaco euclidiano de dimensão 3, se for não-orientável, pode está contida num espaço de dimensão superior a 4. Como os sinais de uma modulação QAMS encontram-se sobre uma superfície, e esta é um subconjunto de um espaço euclidiano de dimensão n, no caso particular deste trabalho, o espaço tri-dimensional, a constelação de sinais sobre uma superfície é denominada de constelação multidimensional de sinais [51].

Observamos que o conceito de modulação m-QAMS introduzido na Definição 2.6.1, é sobre um projeto de constelação de m sinais $s_1, \cdots, s_m$, os quais estão associados a m pontos $v_1, \cdots, v_m$ de Ω, de tal maneira que a região de decisão de s_i corresponde a região R_i do mergulho $G \hookrightarrow \Omega$. Sendo assim, todo modelo de um mergulho de um grafo G obtido corresponde a um projeto de modulação m-QAMS sobre Ω, onde m é o número de região de $G \hookrightarrow \Omega$. É claro que os m sinais da modulação m-QAMS não tem nenhuma relação com os vértices de G. Uma modulação em que o conjunto de sinais está associado aos vértices de G também é possível de ser construída a partir do mergulho de G, usando o conceito de dual.

Definição 2.6.3 *Seja $G\,(p,q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{m} R_{\alpha_i}$ um mergulho orientado de G, Chama-se* mergulho dual *de G, o mergulho $G'(p',q') \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{j=1}^{m\prime} R_{a_j}$, tal que, cada região R_{a_i} de G contém um único vértice v_i' de G' em seu interior e, para cada lado $l_k = (v_k, v_h)$ de G com $R_{a_k} \cap R_{a_h} = (v_k, v_h)$, existe um único lado $l_k' = (v_k', v_h')$ de G' tal que $v_k' \in R_{a_k}$, $v_h' \in R_{a_h}$, $l_k \cap l_k' = \{p_k\}$ com $p_k \neq v_k$ e $p_k \neq v_h$.*

Proposição 2.6.4 *Seja $G\,(p,q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{m} R_{\alpha_i}$ um mergulho orientado. Se $G'(p',q') \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{j=1}^{m\prime} R_{\alpha_j'}$ é o dual de G, então o mergulho dual G' satisfaz as condições:*

(i) *Se $G \hookrightarrow \Omega$ é um complexo, então $G' \hookrightarrow \Omega$ também o será;*

(ii) $p' = m$;

(iii) $q' = q$;

(iv) $m' = p$;

(v) $\deg v_j = \alpha_j'$ *para todo* $j \in \{1, \cdots, m'\}$ *e* $\deg v_i' = \alpha_i$ *para todo* $i \in \{1, \cdots, m\}$ *e ;*

(vi) *é uma modulação* p-QAMS *para a constelação de sinais* $s_1, \cdots, s_p$ *associada aos vértices* $v_1, \cdots, v_p$ *de* G;

(vii) *é uma tesselação regular se, e somente se,* $G \hookrightarrow \Omega$ *também o for e* $\deg v_i = k$ *para todo* $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.

Definição 2.6.5 *Diremos que* $G \hookrightarrow \Omega$ *é um* mergulho emaranhado *se este possui pelo menos uma região com interseções entre pares de vértices ou entre pares de lados de sua fronteira. Se* $G \hookrightarrow \Omega$ *é emaranhado, diremos que é um* emaranhado pontual, *se as interseções é somente entre pares de vértices e, que é um* emaranhado linear, *se a interseções é somente entre pares de lados.*

Proposição 2.6.6 R_i *é uma região emaranhada de um mergulho* $G \hookrightarrow \Omega$, *então* $R_i \cup \partial(R_i)$ *tem classe de homotopia diferente de zero.*

Uma modulação QAMS deve ter um único sinal em cada região emaranhada R_i e, consequentemente, a unicidade de vértice por região de $G \hookrightarrow \Omega$ é preservada. Mantendo a unicidade de interseção entre lados de G e G', concluímos, então, que a Definição 2.6.3 também aplica-se ao caso de um mergulho emaranhado.

Proposição 2.6.7 *A fronteira* $\partial(R_\alpha)$ *da região* R_α *em* $G \hookrightarrow \Omega$ *intercepta-se em um único vertice* $v_k \in G$ *se, e somente se,* R'_k *de* $G' \hookrightarrow \Omega$ *está na mesma classse de homotopia de* R_a.

Proposição 2.6.8 *Sejam* $R_{e_1}, \cdots R_{e_\beta}$, $\beta \leq k$ *as regiões emaranhadas do emaranhado linear* $G \longrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$, *então:*

i) *Se duas regiões vizinhas* R_{e_i} *e* R_α *de* $G \longrightarrow \Omega$ *possuem* t *lados em comuns, então o lado* (v_{e_i}, v_α) *de* G' *tem* t *múltiplas ligações, onde* $v_{e_i} \in R_{e_i}$ *e* $v_\alpha \in R_\alpha$;

ii) *Se para cada* $j \in \{1, \cdots, \beta\}$, l_j *é o número de lados duplos de* R_{e_j}, *Então* G' *contém* $\sum_{i=1}^{\beta} l_j$ *laços e* $l_j \leq [e_j/2]$, *onde* $[x]$ *é o maior inteiro menor ou igual ao número real* x.

Definição 2.6.9 *Seja* $R_{a_i} = (v_1, v_2, \cdots, v_{\alpha_i})$ *uma região de* α_i *lados de um mergulho* $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{m} R_{\alpha_i}$. *Se existem dois pares de elementos consecutivos em* R_{a_i}, (v_i, v_{i+1}) *e* (v_j, v_{j+1}), *tais que* $v_i = v_{j+1}$ *e* $v_j = v_{i+1}$, *diremos que* R_{a_i} *tem um* lado duplo (v_i, v_{i+1}).

A existênica de lados duplos em uma região R_{a_i} de um mergulho significa que R_{a_i} é um emaranhado linear.

Definição 2.6.10 *Seja* $R_{a_i} = (v_1, v_2, \cdots, v_{\alpha_i})$ *uma região de* α_i *lados de um emaranhado* $G(p, q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{m} R_{\alpha_i}$. *Se existem* s *vértices* $v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{is}$ *de* $\{v_1, v_2, \cdots, v_{\alpha_i}\}$ *tais que* $v_{i1} = v_{i2} = \cdots = v_{is} = k$ $(k \in \{0, 1, \cdots, p-1\})$ *e* v_{ij} *não é adjacente a nenhum lado duplo de* R_{a_i}, *para todo* $j = 1, \cdots s$, *diremos que o grau de emaranhado pontual do vértice* v_k *é igual a* s, *e escrevemos,* $\varpi(v_k) = s$.

Definição 2.6.11 *Seja R_α um emaranhado pontual de um mergulho de um grafo $G(p,q)$. Denominaremos de* grau de emaranhado pontual *de R_α, o total de vértices v_i's de R_α que têm graus de emaranhados maiores ou iguais a dois, isto é,*

$$\varpi(R_\alpha) = \Sigma_{i=1}^{h} \varpi(v_i) \ \text{ e } \varpi(v_i) \geq 2, \tag{2.11}$$

e de grau de emaranhado pontual *de $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$, a soma dos graus dos emaranhados de todas as regiões de $G \hookrightarrow \Omega$, isto é,*

$$\varpi(G \hookrightarrow \Omega) = \Sigma_{i=1}^{k} \varpi(R_{\alpha_i}) = \Sigma_{i=1}^{k} \Sigma_{i=1}^{h} \varpi(v_i) \ \text{ e } \varpi(v_i) \geq 2. \tag{2.12}$$

Definição 2.6.12 *Seja R_{a_i} uma região de α_i lados de um emaranhado $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{m} R_{\alpha_i}$. Se existem d_i lados duplos em R_{a_i} diremos que o* grau de emaranhados linear *de R_{a_i} é d_i, e escrevemos $\sigma(R_{\alpha_i}) = d_i$. Diremos ainda que o* grau de emaranhados linear *de $G \hookrightarrow \Omega$ é a soma dos graus de emaranhados de linhas das regiões, isto é,*

$$\sigma(G \hookrightarrow \Omega) = \Sigma_{i=1}^{m} \sigma(R_{\alpha_i}) = \Sigma_{i=1}^{m} d_i. \tag{2.13}$$

Proposição 2.6.13 *Seja $G \hookrightarrow \Omega$ um mergulho de G. Então:*

i) A região R_α de $G \hookrightarrow \Omega$ é simples (não emaranhada) se, e somente se, $\varpi(R_\alpha) = 0$ e $\sigma(R_\alpha) = 0$.

ii) R_α é um emaranhado pontual se e somente se, $\varpi(R_\alpha) > 0$ e $\sigma(R_\alpha) = 0$;

iii) R_α é um emaranhado linear se e somente se, $\varpi(R_\alpha) = 0$ e $\sigma(R_\alpha) > 0$;

iv) $G \hookrightarrow \Omega$ é simples se e somente se, $\varpi(G \hookrightarrow \Omega) = \sigma(G \hookrightarrow \Omega) = 0$.

v) $G \hookrightarrow \Omega$ é um emaranhado pontual se, e somente se, $\varpi(G \hookrightarrow \Omega) > 0$ e $\sigma(G \hookrightarrow \Omega) = 0$.

vi) $G \hookrightarrow \Omega$ é um emaranhado linear se, e somente se, $\varpi(G \hookrightarrow \Omega) = 0$ e $\sigma(G \hookrightarrow \Omega) > 0$.

Definição 2.6.14 *Seja G um grafo. Denominaremos de* grafo planar mergulhado *do dual G', o grafo que contém todas as ligações G' e que se encontra na forma mergulhado sobre o plano.*

Proposição 2.6.15 *O dual G' de $G \hookrightarrow \Omega$ tem um grafo planar mergulhado se, e somente se, Ω tem gênero γ_M ou $\gamma_M - 1$.*

As modulações QAMS's assumem os mais variados tipos de formas e encontram-se em superfícies distintas. Escolher uma modulação entre duas parecidas requer o conhecimento preciso em termos de parâmetros de eficiência. Quando duas modulações com o mesmo número de sinais encontram-se em superfícies de gêneros diferentes, a escolha não é problema, o projeto na superfície de maior gênero é o mais eficiente [21]. Mas quando se trata de modulações distintas em superfícies iguais a identificação da mais eficiente requer critérios mais precisos.

Definição 2.6.16 *Seja G/Ω o conjunto de classes de modulações m-*QAMS *vindas dos mergulhos $G \hookrightarrow \Omega$. Denominaremos de modelo de* regularidade máxima *da família G/Ω o modelo de modulação dado pela fórmula*

$$m\text{-}\,\mathrm{QAMS} = \begin{cases} mR_{2e/m} \equiv \Omega, \text{ se } \Omega \text{ é uma superfície sem bordo} \\ mR_k \equiv \Omega, \text{ se } \Omega \text{ é uma superfície com bordo} \end{cases},$$

onde mR_k é o modelo regular com m regiões com maior número de lados (m é o número de regiões do meruglho G/Ω).

Definição 2.6.17 *Seja $\overline{R}_j$ uma classe de modulações de G/Ω. Chamaremos de* fator de desempenho *de $\overline{R}_j$ o número real positivo $\xi_{\overline{R}_j}$ definido pela igualdade*

$$\xi_{\overline{R}_t} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} \eta\left(\alpha_i R_{\beta i}\right) A_i}}{\sum_{i=1}^{k} A_i} \tag{2.14}$$

onde $\eta_i\left(\alpha_i R_{\beta_i}\right)$ é o coeficiente de regularidade *associado ao número α_i de regiões do tipo R_i existente na classe $\overline{R}_t \in K_5/T$.*

Duas superfícies orientadas sem bordos diferenciam-se através do número de gêneros. Se duas modulações são equivalentes em relação ao mesmo número de sinais e energia média, a que tem um melhor desempenho será a que se encontra na superfície de gênero maior [21]. Quando se trata da eficiência de classes de modulações QAMS's, mostraremos seus desempenhos para cada família de classes de modulações em superfícies orientadas sem bordos do conjunto $\Psi\left(K_n\right)$, associadas aos mergulhos.

Observamos que todas as definições e resultados acima foram obtidos por Lima e Luana em [24].

2.7 Partição no Conjunto dos Mergulhos de K_4

É possível caracterizar os mergulhos de K_4 através do tipo de composição de suas regiões. A classificação dos mergulhos de K_4 em relação ao tipo de composição será denominada por *partição* de K_n e um conjunto de mergulhos com o mesmo tipo de composição será chamado de *classe* da partição de K_n. Mais precisamente, temos:

Definição 2.7.1 *Seja $\Lambda_G = \{\lambda : \lambda = G\left(\Theta_\lambda\right) \hookrightarrow \Omega\}$ o conjunto de todos os mergulhos orientados de G, onde Θ_λ é o sistema de rotações de G associado ao mergulho λ. Dizemos que dois mergulho λ_1 e λ_2 de Λ_G são* semelhantes*, e indicamos esta relação por $\lambda_1 \sim \lambda_2$ se, e somente se, possuem o mesmo tipo de composição de regiões, e escrevemos*

$$\lambda_1 \sim \lambda_2 \Leftrightarrow \mathrm{Part}\left(G\left(\Theta_{\lambda_1}\right) \hookrightarrow \Omega\right) = \mathrm{Part}\left(G\left(\Theta_{\lambda_2}\right) \hookrightarrow \Omega\right) \tag{4.14}$$

onde $\mathrm{Part}\left(G_{\lambda_i} \hookrightarrow \Omega\right)$ *é a partição do mergulho λ_i. O conjunto de todos mergulhos $\lambda_i \in \Lambda_G$ que estão relaciondos com λ será denominado de* classe *de λ, a qual será indicado por*

$$\overline{\lambda} = \{\lambda_i \in \Lambda_G : \lambda \sim \lambda_i\}. \tag{4.15}$$

E o conjunto de todas as classes de mergulho de K_n *será denominado de* conjunto quociente *de* K_n *pela relação de semelhança* $\sim$ *e será denotado por*

$$\Lambda_G/\sim = \left\{\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \cdots, \overline{\lambda}_k\right\}.$$

2.8 Algoritmo Identificador de Mergulhos Orientados

Os comentários e a versão do Algoritmo identificador de mergulhos de grafos foi estabelecido por Lima em [24]. A implementação do Algoritmo deve-se a Wilken Charles Dantas de Melo, bolsista PIBIC do curso de Computação da UERN.

O uso contínuo do esquema de engrenagem na identificação do conjunto de seqüências orbitais de um mergulho orientado do grafo completo K_n, nos convenceu que o procedimento poderia ser traduzido na forma de um algorítmo estruturado.

A partir de uma rotação de K_n, propomos o seguinte algoritmo que determina o conjunto de sequências orbitais, o tipo de partição e o gênero da superfície orientada na qual K_n está mergulhado.

Algorítmo 2.8.1 *Suponhamos que o sistema de rotação de* K_n *seja dado por*

$$\Theta = \{0(a_{01}, a_{02}, \cdots, a_{0(n-1)}), \cdots, n-1(a_{(n-1)1}, a_{(n-1)2}, \cdots, a_{(n-1)(n-1)})\}.$$

A sequência orbital de comprimento k*,* $c_1 = (c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1k})$*, do mergulho* $K_n \hookrightarrow \Omega$ *é dada por:* $c_{11} = a_{01}$*,* $c_{12} = 0$*,* c_{13} *é sucessor do* 0 *na rotação do vértice* a_{01}*, o elemento genérico* c_{1j} *é o sucessor de* $c_{1(j-2)}$ *na rotação do vértice* $c_{1(j-1)}$*, e o último elemento* c_{1k}*, é tal que* $(c_{1(k-1)}, c_{1k}) \neq (c_{1i}, c_{1(i+1)})$ *para todo* $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ *e* $c_{1(k+j)} = c_{1j}$*, para todo* $j \in \{k+1, k+2\}$*. A sequência orbital* $c_2 = (c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2k_2})$ *é determinada de forma análoga a* c_1*, de tal modo que* (c_{21}, c_{22}) *não está em* c_1*. De modo análogo são determinados as demais sequências orbitais do mergulho* $K_n \hookrightarrow \Omega$*.*

A implementação do Algoritmo fornece todos os mergulhos a partir do conjunto de sistemas de rotações do grafo completo $K_{m,n}$. Os mergulhos são descritos pela partição, o conjunto de sequências orbitais do mergulho, a rotação de entrada e a superfície na qual se encontra o mergulho.

Apesar do Algorítmo 2.8.1 ter sido enunciado para o caso particular do grafo completo K_n o mesmo poderá ser aplicado para todo e qualquer grafo conexo. O algoritmo foi testado nos casos dos grafos completos K_5 e K_6, no caso do grafo completo biparticionado $K_{4,4}$, mostrando-se eficiente em todos estes casos e exibindo corretamente os dados solicitados em todos os casos solicitados.

A idéia do Algoritmo 2.8.1 surgiu durante o uso do esquema de engrenagens, mas não foi usado para identificar nenhum dos mergulhos deste capítulo, nem sequer foi feita a sua implementação, este será o propósito do próximo capítulo.

CAPÍTULO 3

Classes de Mergulhos de $K_{m,n}$

3.1 Evolução e Histórico do Problema

Em todo processo de transmissão de dados há um tratamento todo especial do conjunto de sinais, no sentido de adequar a sua forma para o ambiente do canal de comunicação e possibilitar a recuperação da informação transmitida pelo sistema. Este processo é conhecido por *modulação* e consiste basicamente em duas etapas: dar um tratamento especial aos sinais para que os mesmos possam ser enviados pelo canal, processo chamado de *modulador,* e trata a questão de como receber os sinais transmitidos pelo canal a fim de recuperar a informação transmitida, etapa chamada de *demodulador*. Ao enviar um símbolo ao canal de comunicação, um modulador o converte em um sinal de onda s, o qual é corrompido pelo ruido r durante o processo de transição do canal, chegando ao receptor um sinal s', totalmente diferente do sinal enviado s. No caso de um ruído aditivo o sinal recebido é representado por $s' = s + r$. O demodulador tem por função decidir, aplicando regras matemáticas e estocásticas, qual o sinal enviado, dado que s' foi transmitido, e sem conhecimento prévio do símbolo enviado. Devido o carater de aleatoriedade, o problema de recuperar a informação transmitida em um canal de comunicação é probabilístico e envolve processos estocásticos. O procedimento usual para tratar desse problema consiste em associar, aos sinais de transmissão, pontos de um espaço métrico, dividi-lo em regiões denominadas de *regiões de decisão* (ou *regiões de Voronoi*), cada uma das quais contendo um único sinal (ou ponto) em seu interior, preferencialmente em seu centro. O demodulador utiliza as regiões de decisão para criar regras matemáticas e estatísticas, bem definidas neste espaço, de decisão do sinal mais provavelmente transmitido.

O sistema de modulação é, portanto, parte essencial do processo de transmissão de dados. A Figura 3.1.1 mostra a evolução natural dos projetos da modulação ao longo do tempo. No princípio, uma constelação de m sinais tinha por espaço de sinais a reta real, as chamadas modulações m-PSK (*Phase Shift Key* - Chave de Mudança de Phase), como mostra o exemplo da figura a). Em seguida, esse conceito de modulação evoluiu para plano euclidiano bi-dimensional, onde a constelação de sinais passou a ser distribuida de forma regular sobre uma circunferência do plano, expandiram-se depois para as esferas n-dimensionais, compondo então as conhecidas constelações de Slepian ilustrada na figura b). À medida que o projeto de modulação exigia um número maior de sinais, as distribuições assumiram formas de reticulados do plano, modulações conhecidas por m-QAM (*Qudrature Amplitude Modulation* - Modulação por Amplitude e Quadratura), e também tiveram o seu processo evolutivo, graças a utilização de tópicos avançados da Matemática Pura, como as Teoria do Números e dos Corpos Algébricos.

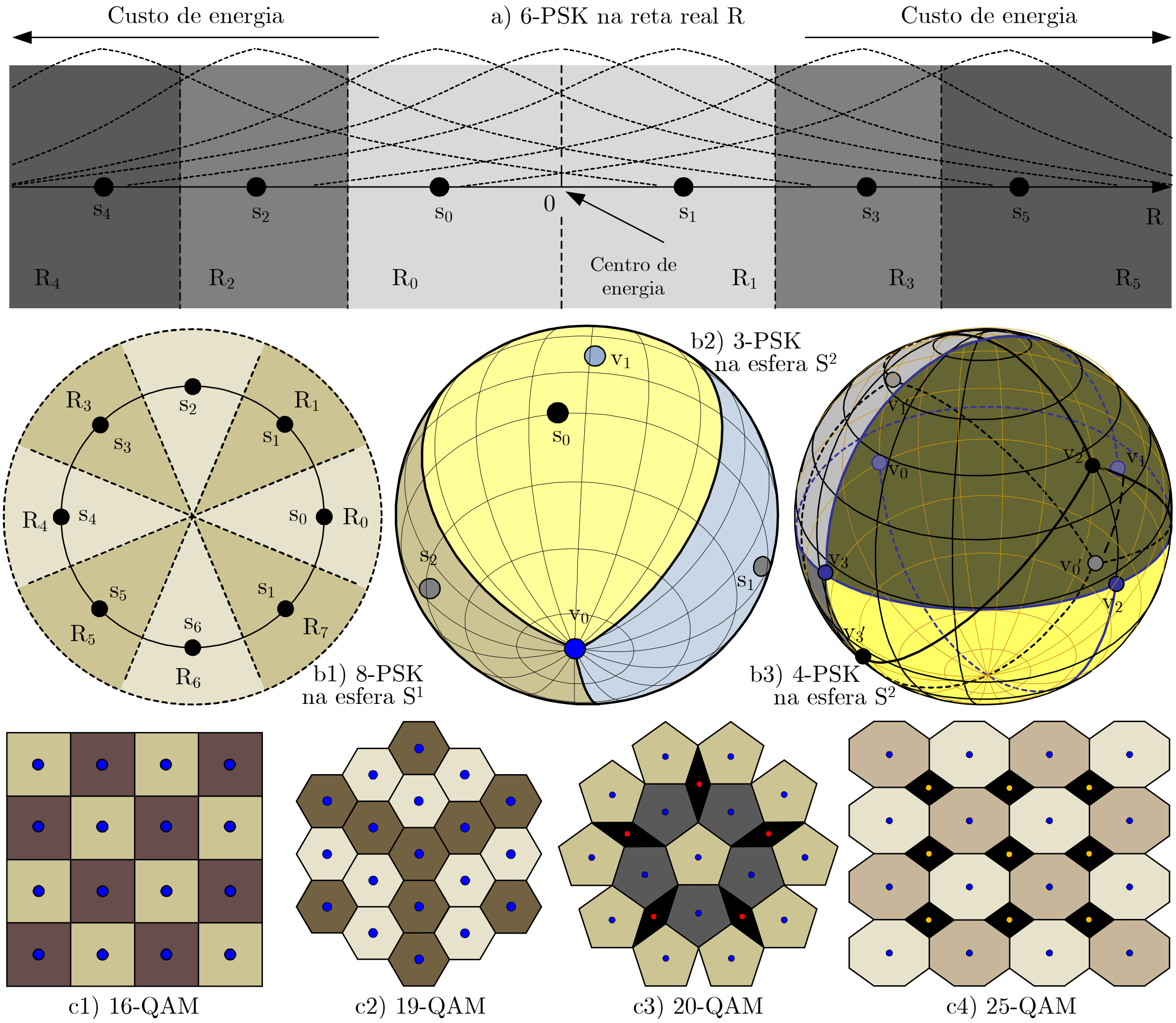


Figura 3.1.1: Evolução nos projetos de modulações

Tem-se observado e comprovado matematicamente (veja, por exemplos [21] e [4]) que, no processo evolutivo das modulações, o aumento da eficiência está sempre presente. Era de se esperar, porque os sistemas de transmissões de dados operam sempre com taxas mais elevadas e requerem modulações mais eficientes. Mas os sistemas de transmissões de dados continuam evoluindo e a busca por sistemas mais eficientes não para. Chega-se então a questionar, quais os próximos espaços métricos a serem explorados no sentido de fornecerem modulações mais eficientes do que as atuais? Analisando esta questão, Lima e Palazzo [21] chegaram a conclusão que os espaços mais naturais nesse processo evolutivo seriam os espaços métricos (Ω, d), onde Ω é uma variedade riemanniana e d uma métrica sobre Ω. Foi proposto então um projeto de Sistema Integrado (SI) de transmissões de dados no qual os sistemas de modulação, codificação e canal são projetados de forma dependentes sobre espaços métricos nas condições acima. O objetivo de SI é obter um sistema mais eficiente do que os tradicionais sistemas de transmissão de dados. O objetivo deste trabalho é identificar as modulações sobre variedades riemnianas topológicas (superfícies topológicas), vindas de mergulhos de grafos completos biparticionados. Estes foram os primeiros a serem associados a canais discretos sem memória, são grafos simétricos e apresentam importantes propriedades de interesse.

3.2 Considerações sobre o Mergulho de $K_{m,n}$

Um dos objetivos principais desse trabalho é identificar os projetos de modulações distintas vindas de mergulhos do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$. No sentido de possibilitar este processo de identificação serão necessárias a utilização de algumas propriedades básicas de $K_{m,n}$, as quais serão relacionadas a seguir.

De um modo geral, os elementos de um mergulho de um grafo G satisfazem as propriedades enumeradas na proposição que segue.

Proposição 3.2.1 *[24] Seja $\gamma = \left(\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{t-1}\right)$ uma sequência orbital de uma região R_t de um mergulho orientado de um grafo G. Então valem as seguintes afirmações:*

i) as sequências orbitais γ e $\acute{\gamma}$ em $G \hookrightarrow \Omega$ passam por um lado e_i de G se, e somente se, percorrem e_i em sentidos opostos;

ii) o conjunto $\Gamma(G)$ é uma partição do dígrafo G;

iii) a menos de deslocamentos cíclicos, γ está definido de forma única.

Em particular, para o grafo completo $K_{m,n}$, valem as seguintes propriedades.

Lema 3.2.2 *Não existe região com um número ímpar de lados em mergulhos de $K_{m,n}$.*

Demonstração. *Seja $A = \{v_1, \cdots, v_m\}$ e $B = \{w_1, \cdots, w_n\}$ os conjuntos de vértices de $K_{m,n}$. Suponhamos que $R_a = (u_1, \cdots, u_\alpha)$ é uma região de $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$, tal que α é ímpar. Suponhamos que $u_1 = v_i$. Como toda região é um caminho fechado sobre $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$, é fácil ver que $(u_{a-1}, u_a) = (v_j, v_i)$, o que é um absurdo, pois $K_{m,n}$ não forma lados com vértices de A. Por outro lado, se considerarmos que $u_1 = w_j$ concluímos que $(u_{a-1}, u_a) = (w_k, w_j)$. Novamente temos uma contradição, pois $K_{m,n}$ teria um lado em B.* ∎

Proposição 3.2.3 *Se $R_\alpha = (\cdots, u_i, u_j, u_h, u_k, \cdots)$ é uma região de $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$ então i, j, h e k são dois a dois distintos.*

Demonstração. *Suponha, por absurdo, que existam dois elementos iguais: se $i = j$, $K_{m,n}$ tem um laço; se $i = h$, $K_{m,n}$ tem um duplo lado; e se $i = k$, então $K_{m,n}[A, B]$*

teria um lado (v_i, v_h) unindo os vértices de A ou B, conforme $v_i \in A$ ou $v_i \in B$. Em todos estes casos, $K_{m,n}$ não poderia ser o grafo completo bipartido. Esta constradição mostram a afirmação. ■

Proposição 3.2.4 *Se R_α é uma região de $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$, então $\alpha = 4 + 2t$, $t = 0, 1, 2, \cdots$.*

Demonstração. *Sejam $A = \{v_1, \cdots, v_m\}$ e $B = \{w_1, \cdots, w_n\}$ os conjuntos de vértices de $K_{m,n}$ e que $R_a = (u_1, \cdots, u_\alpha)$ é uma região de $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$. Suponhamos que $u_1 = v_0$. Como $K_{m,n}$ é um grafo $(u_1, u_2) \neq (v_1, v_1)$, isto é, um grafo que não tem laços e, portanto, $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$ não tem regiões de um lado, assim, $u_2 = w_{i_1}$. Como se trata do grafo completo bipartido, $(u_2, u_3) = (w_{i_1}, v_{j_1})$, e $v_{j_1} \neq v_1$, pela Proposição 3.2.3; consequentemente $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$ não tem regiões de dois lados. Por outro lado, $u_4 \neq v_i$, o que resulta na não existência de regiões de três lados. Desse modo, $(u_3, u_4) = (v_{j_1}, w_{i_2})$. Seguindo o processo, não há nenhuma proibição de que $u_5 = v_1$ e assim R_α seria um 4-lados. Dando continuidade ao processo, e usando o Lema 3.2.2, concluimos, indutivamente, que as regiões só podem ter um número par de lados ≥ 4.* ■

Para o processo de identificação dos mergulhos de grafo é extremamente importante conhecer os números de elementos do grafo. No caso particular dos grafos completos bipartidos $K_{m,n}$ e do grafo completo $K_{n,n}$, os números de vértices e lados são dados por

$$v = m + n \quad \text{e} \quad e = mn \tag{3.1}$$

e quando $m = n$, temos que:

$$v = 2n \quad \text{e} \quad e = n^2. \tag{3.2}$$

Observação 3.2.5 *Um dado importante que devemos saber e que será muito utilizado neste trabalho, é que, ao considerarmos o grafo completo bipartido $K_{m,n}$ como um mergulho, este será visto como um dígrafo, e como tal, cada lado é contado duas vezes, pois eles podem pertencer a uma mesma região ou a regiões distintas. Quando conveniente, consideraremos $K_{m,n}$ como sendo um grafo de $2mn$ lados e $K_{n,n}$ como um grafo de $2n^2$ lados.*

Outro dado importante é o número de sistemas de rotações do grafo. Pela fórmula (1.4), o número de rotações do grafo $K_{m,n}$ e $K_{n,n}$ são respectivamente dados por

$$\# (\Theta (K_{m,n})) = \Pi_{v \in V(G)} (\deg v - 1)! = ((m-1)!)^n ((n-1)!)^m \tag{3.3}$$

e

$$\# (\Theta (K_{n,n})) = ((n-1)!)^{2n}. \tag{3.4}$$

A igualdade (3.3) é a fórmula geral para o número de sistemas de rotações de $K_{m,n}$, mas a igualdade (3.4) será mais utilizada porque o estudo estará focado nos grafos completos bipartidos da forma $K_{m,n}$.

3.3 Emaranhados de um Mergulho

Uma classificação de bastante interesse neste trabalho é em relação aos tipos de emaranhados das classes de mergulhos. Lembramos que os emaranhados nos deram informações da performance do canal e, consequentemente, do desempenho da modulação definida pelo mergulho. O conceito de emaranhado foi introduzido em [24] e tem como objetivo medir o grau de auto-interseções da fronteira de uma região. Esta informação é muito importante ainda porque ajuda a determinar a mergulho dual e o canal associado.

Verificamos, em [24], que nas fronteiras de regiões de um mergulho de 2-células, pode haver ou não interseção de vértices e de lados. Este tipo de auto-interseção nos chamou a atenção e já gerou informações valiosíssimas com relação ao tipo de canal associado e ao mergulho dual. Mas esperamos que as informações fornecidas pelos emaranhados não parem por aí, forneçam ainda informações importantes, em termos de invariantes topológicos, para o comportamento das classes de mergulhos.

São três os tipos de emaranhados introduzidos em [24], o *não-emaranhado*, o *emaranhado pontual* e o *emaranhado linear*. O não emaranhado diz respeito a uma região R_α cuja fronteira ∂R_a não possui auto-interseções. O emaranhado pontual mede a quantidade de vezes em que ∂R_a autointercepta-se em pontos isolados, medida indicada por $\varpi(\partial_a)$. E o emaranhado linear representa o número de autointerseções de lados de ∂R_a, medida indicada por $\sigma(\partial_a)$. Em uma região não emaranhada, é claro que se tem $\varpi(\partial_a) = \sigma(\partial_\alpha) = 0$. Por esta observação faz sentido denominar um não emaranhado como sendo um *emaranhado mínimo*.

Em [24] foram considerados somente os emaranhados pontuais cujas interseções de vértices ocorriam somente aos pares. Mas observando-se melhor os emaranhados pontuais em mergulhos de $K_{m,n}$, percebemos que existem emaranhados pontuais cujas interseções ocorrem em mais de dois vértices. As identificações desses são bem mais laboriosas e não devem ser desconsiderados nos processos de classificação.

A afirmação na observação seguinte foi demonstrada em [24] e é muito útil para o estudo de mergulhos de grafos.

Observação 3.3.1 *Se R_a tem um emaranhado linear sobre o lado (v_i, v_j) de G é porque R_a é uma região da forma $R_\alpha = (\cdots, i, j, \cdots, j, i, \ldots)$. Além disso, foi provado em [24] que só pode haver interseções de até dois lados de uma mesma região, uma vez que cada lado do mergulho é composto por dois lados de regiões distintas ou não.*

Em mergulhos de um grafo G podemos encontrar os dois tipos de emaranhados. Dada uma região R_α de $G \hookrightarrow \Omega$, esta pode ser um não emaranhado (emaranhado mínimo), um emaranhado pontual (ou emaranhado pontual puro), um emaranhado linear (emaranhado linear puro) ou conter todos os tipos de emaranhados (emaranhados mistos). Podemos então definir o *grau de emaranhado de uma região R_α* como sendo a soma dos emaranhados pontuais e lineares de R_α, ou seja,

$$\epsilon(R_\alpha) = \varpi(\partial(R_a)) + \sigma(\partial(R_a)). \tag{3.5}$$

Seguindo esta linha de raciocínio podemos definir ainda o *grau de emaranhado de um mergulho $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$* como sendo a soma dos graus dos emarandos de suas regiões, ou seja,

$$\epsilon\left(G \hookrightarrow \Omega\right) = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \epsilon\left(R_{\alpha_i}\right). \qquad (3.6)$$

Se toda região R_α de um mergulho $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ é não emaranhada, então diremos que $G \hookrightarrow \Omega$ é um *mergulho não emaranhado* ou *simples*. Neste tipo de mergulho, têm-se que $\epsilon\left(R_\alpha\right) = 0$, para toda R_α em $G \hookrightarrow \Omega$; logo $\epsilon\left(G \hookrightarrow \Omega\right) = 0$, ou seja, todo mergulho não emaranhado é um mergulho mínimo.

Mergulhos não-emaranhados ou simples ocorrem, portanto, somente em mergulhos mínimos e, à medida que o mergulho converge para o mergulho máximo, os graus de emaranhados das regiões tendem a aumentarem e atingem o seu máximo. O maximo total, obviamente ocorre nos mergulhos máximos. Logo faz sentido também falar de *emaranhado máximo***.** Pode ser um *emaranhado máximo local***,** quando R_α e a região de maior grau dentre todas as regiões de um determinado mergulho de G; ou um *emaranhado máximo absoluto*, ou *maximal***,** quando R_α é a região tal que $\epsilon\left(R_\alpha\right)$ assume o valor máximo dentre todas as regiões do todos os mergulhos de G. Isto significa que um emaranhado máximo absoluto encontram-se em mergulhos máximos, mas não implica que mergulhos máximos não possuam emaranhados mínimos. Pode acontecer de um mergulho máximo possuir emaranhado mínimo e um máximo absoluto, condição necessária para atingir o grau de maximidade.

Na verdade, o emaranhado existe, quando o grau do emaranhado pontual, ou do linear é maior do que zero, ou quando ambos são maiores do que zero. Só faz sentido então falar de emaranhado R_α, quando há interseções na fronteira $\partial\left(R_\alpha\right)$. Um emaranhado de grau zero ou emaranhado mínimo não é de fato um emaranhado. É uma região simples. Em regiões simples as construções dos duais e canais associados são bem mais fáceis. Já nos emaranhados, as construções passam a ter um grau de dificuldade maior. Caso não sejam levadas em conta estas dificuldades e se conheça exatamente os emaranhados lineares, fica impossíves obter essas construções.

Em mergulhos de grafos, os emaranhados estão quase sempre presentes, e por serem muito comuns nos mergulhos maximais e próximos a estes, podemos afirmar que os emaranhados são maioria nas regiões dos mergulhos de um grafo, uma vez que o número de mergulhos são maiores à medida que o gênero da superfície aumenta. Consequentemente, é impossível descartar a sua existência e desprezar a importância de suas propriedades, no estudo dos fenômenos provenientes dos mergulhos de grafos.

Na proposição seguinte provaremos, para o caso particular do grafo completo bipartido, as principais propriedades dos emaranhados maximais, importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Proposição 3.3.2 *Seja R_a uma região do mergulho orientado $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$. Então, são válidas as seguintes afirmações:*

i) *R_α é um emaranhado mínimo se, e somente se, $\alpha = 4$ ou $a = 6$;*

ii) *Nem todo emaranhado mínimo é um mergulho mínimo;*

iii) *Se R_8 é um emaranhado de $K_{m,n}$ então é um emaranhado pontual;*

iv) *R_α é um emaranhado linear se $\alpha > 8$;*

Demonstração. Seja $R_4 = (i, j, k, h)$. Pela Proposição 3.2.3, os elementos i, j, k, h são todos distintos, logo $\epsilon(R_4) = 0$, e portanto R_4 é um emaranhado mínimo. Seja agora $R_6 = (i, j, h, k, l, m)$. Se R_6 é um emaranhado pontual, então dois elementos seus seria iguais e isto contradiz a Proposição 3.2.3. Logo, todos os elementos de R_6 são distintos dois a dois, ou seja, $\epsilon(R_6) = 0$, e portanto R_4 é um emaranhado mínimo. Por outro lado, um emaranhado octogonal de $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$ só pode ser da forma $R_8 = (i, j, h, k, i, l, m, n)$. Isto é a prova *iii*). Observe que R_8 atende a condição da Proposição 3.2.3 e sua fronteira $\partial(R_8)$ possui um auto-interseção no vértice v_i, logo $\varpi(R_4) = 1 = \epsilon(R_4)$ e R_8 não seria um emaranhado mínimo. Portanto vale a afirmação *i*).

Pela igualdade (2.6) o mergulho mínimo de $K_{4,4}$ encontra-se sobre um superfície de gênero

$$\gamma(K_{4,4}) = \left\{\frac{1}{4}(4-2)(4-2)\right\} = 1,$$

isto é, sobre o toro. Contudo, pela parte *i*) da proposição, $K_{4,4} \hookrightarrow 2T \equiv 4R_6 2R_3$ (este mergulho será identificado na Subseção 3.7.1) é um emaranhado mínimo que não é um mergulho mínimo, o que mostra *ii*).

Observe que a fronteira de $R_{10} = (i, j, k, l, j, i, m, n, o, p)$ satisfaz a condição da Proposição 3.2.3 e possui uma auto-interseção no lado (v_i, v_j) de R_{10}, logo $\sigma(R_{10}) = 1$ e assim, R_{10} é um emaranhado linear de grau 1. Por outra parte, pelas afirmações anteriores, nenhum R_α, $\alpha < 10$, pode ser um emaranhado linear, o que prova a afirmação *iv*). ■

É importante destacar aqui que os resultados da Proposição 3.3.2 são válidos somente para grafos completos bipartidos e não se aplicam em outras famílias de grafos, como os grafos completos, tripartidos e assim por diante.

Os dois tipos de emaranhados têm características bem distintas. Nos pontuais a interseções ocorrem em vértices, e nos lineares, em lados completos. Já que a fronteira da região $\partial(R_\alpha)$ é um caminho fechado sobre a superfície, podemos fazer uma analogia de $\partial(R_\alpha)$ com a teoria dos nós e considerar um emaranhado como sendo um nó sobre a superfície. Neste caso, os emaranhados pontuais seriam classificados como os *nós no sentido fraco* da superfície, uma vez que o contato teria menos resistência ou aderência do que o contato de uma emaranhado linear, e os emaranhados lineares, como os *nós no sentido forte* sobre a superfície. Devido a esta analogia podemos introduzir os termos *emaranhado fraco* (ou emaranhado pontual) e *emaranhado forte* (ou emaranhado linear).

Com relação a aderência ou capacidade de atar uma superfície, é óbvio que um emaranhado forte tem um peso bem maior do que ao de um emaranhado fraco. Então os emaranhados maximais são aqueles que apresentam o graus maiores de emaranhamento. Ao afirmamos portanto que um emaranhado é máximo (máximo absoluto), é porque o mesmo possui o maior grau de emaranhamento linear dentre todos os emaranhados de um mergulho de um grafo. Pode até existir em outro grafo um emaranhado cuja soma dos emaranhmentos pontuais e lineares supere ao do emaranhado máximo. Em termos de capacidade de aderência ou capacidade de emaranhamento do nó, nenhum seria mais eficiente do que o emaranhado de maior grau de emaranhamento linear. No sentido de identificar os emaranhados maximais de $K_{m,n}$, temos a seguinte afirmação.

Lema 3.3.3 *Se $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ é um mergulho máximo, então*

$$k = \begin{cases} 1, & \text{se } m \text{ ou } n \text{ é impar } \geq 2 \\ 2, & \text{se } m \text{ e } n \text{ são pares.} \end{cases}$$

Demonstração. O grafo completo $K_{m,n}$ têm $m+n$ vértices e mn lados. Como Ω é orientável, $\chi(\Omega)$ é sempre par, isto é, $\chi(\Omega) = 2\tau$, $\tau \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, pelo Teorema (2.3.4), podemos deduzir que os mergulhos de um grafo ocorrem no conjunto de superfícies

$$\mathbb{S}_{K_{m,n}} = \{\gamma T, (\gamma-2)\,T, (\gamma-4)\,T, \cdots, \gamma_M T\},$$

cujas partições são compostas pelos seguintes números de regiões

$$f_0, f_0-2, f_0-4, \cdots, f_0-t, \tag{3.7}$$

onde $f_0 - t$ é o número de regiões do mergulho $K_{m,n} \hookrightarrow (\gamma-t)\,T$. O último termo da sequência (3.7) é o menor inteiro positivo, isto é, $f_0 - t = 1$ ou $f_0 - t = 2$, pois um mergulho maximal orientável particiona a superfície em um número mínimo de regiões. Como o último termo depende de f_0 e t é um número par, então $f_0 - t$ é par, se f_0 o for, e $f_0 - t$ é ímpar, se f_0 também o for. Mas pela fórmula de Eüler (2.4), segue que

$$f_0 = \chi(\gamma T) - v + e = 2\tau - m - n + mn. \tag{3.8}$$

Como 2τ é par, em termos de paridade de f_0, devemos analisar em (3.8), os seguintes casos:

a) Se $m = 2p+1$ e $n = 2q+1$, $p, q \in \mathbb{Z}$, então, por (3.8), temos que:

$$f_0 = 2\tau - 2p - 1 - 2q - 1 + (2p+1)(2q+1) = 2(\tau + 2pq) - 1,$$

logo, f_0 é ímpar, e portanto, $f_0 - t = 1$,

b) Se $m = 2p+1$ e $n = 2q$, temos que:

$$f_0 = 2\tau - 2p - 1 - 2q + (2p+1)(2q) = 2(\tau - p + 2pq) - 1,$$

logo, f_0 é ímpar, e portanto, $f_0 - t = 1$. O caso $m = 2p$ e $n = 2q+1$ dão resultados análogos;

c) Se $m = 2p$ e $n = 2q$, temos que:

$$f_0 = 2\tau - 2p - 2q + (2p)(2q) = 2(\tau - p - q + 2pq),$$

logo, f_0 é par, e portanto, $f_0 - t = 2$. De *a*), *b*) e *c*) segue a afirmação do lema. ∎

O Lema 3.3.3 caracteriza os mergulhos maximais, em termos do número de suas regiões, e como estes contêm as regiões de maiores comprimentos, os emaranhados máximos são identificados quando se determinam as regiões com os maiores graus de emaranhados para estes dois casos de mergulhos maximais. Se o mergulho maximal possui somente uma região, caso *c*) da demontração do Lema 3.3.3, este já é o emaranhado máximo. Se esse possui duas regiões veremos a seguir quais as características do emaranhado maximal.

Teorema 3.3.4 *Seja R_α um emaranhado de $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$. A região R_α é um emaranhado máximal se, e somente se, $K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$ é um mergulho maximo e, quando $k = 2$, necessariamente devemos ter $\alpha = 2mn - 4$ e*

$$\alpha = \begin{cases} 2mn \text{ e } \sigma(R_a) = mn, & \text{se } m \text{ ou } n \text{ é ímpar}, \\ 2mn - 4 \text{ e } \sigma(R_a) = mn - 4, & \text{se } m \text{ e } n \text{ são pares }. \end{cases}$$

Demonstração. Um emaranhado R_α é maximal se, e somente se, encontra-se na região de maior comprimento, isto é, sobre uma região de um mergulho máximo de K_{mn}. Se m ou n é ímpar, pelo Lema 3.3.3, o mergulho máximo de $K_{m,n}$ possui apenas uma única região, sendo assim o número de lados de R_α, pela Observação 3.2.5, é igual ao dobro do número de lados de $K_{m,n}$, ou seja $\alpha = 2mn$. Mas $K_{m,n}$ só possui mn lados e pela Observação 3.3.1, os lados do mergulho são compostos por dois lados de regiões distintas ou não, como só ha uma região, é porque existem exatamente mn pares de interseções dentre os $2mn$ lados de R_a. Portanto, R_α é um emaranhado linear de grau mn, isto é, $\sigma(R_a) = mn$.

Se m e n são pares, pelo Lema 3.3.3, o mergulho máximo de $K_{m,n}$ é composto por duas regiões. Como a partição neste caso não é unica, o emaranhado maximal deve ser a região de maior comprimento. Pela Proposição 3.2.4, a partição que tem a região com o maior número de lados é $R_4 R_{2mn-4}$ e esta região é, então, R_{2mn-4}. Logo $a = 2mn-4$. Por outro lado, pela Proposição 3.3.2 $i)$, R_4 é um emaranhado mínimo, e portanto, existem 4 lados de R_{2mn-4} que estão em contatos com os 4 lados de R_4. Como o mergulho de K_{mn} tem mn pares de lados, existem $mn - 4$ pares de lados com autointerseções entre si em R_{2mn-4}, ou seja, $\sigma(R_\alpha) = mn - 4$, o que prova o teorema. ∎

Corolário 3.3.5 *Seja R_α um emaranhado de $K_{n,n} \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$. A região R_α é um emaranhado máximal se, e somente se, é um mergulho máximo e, quando $k = 2$, necessariamente devemos ter $\alpha = 2mn - 4$*

$$\alpha = \begin{cases} 2n^2 \text{ e } \sigma(R_a) = n^2, & \text{se } n \text{ e ímpar}, \\ 2n^2 - 4 \text{ e } \sigma(R_a) = n^2 - 4, & \text{se } n \text{ é par}. \end{cases}$$

Demonstração. Caso particular do Teorema 3.3.4. ∎

Os resultados apresentados no Teorema 3.3.4 e Corolário 3.3.5, tornam os emaranhado maximais como sendo os mais fáceis de serem identificados. A identificação de um emaranhado é sempre árdua mas bastante útil na definição de duais, canais associados e desempenho da modulação.

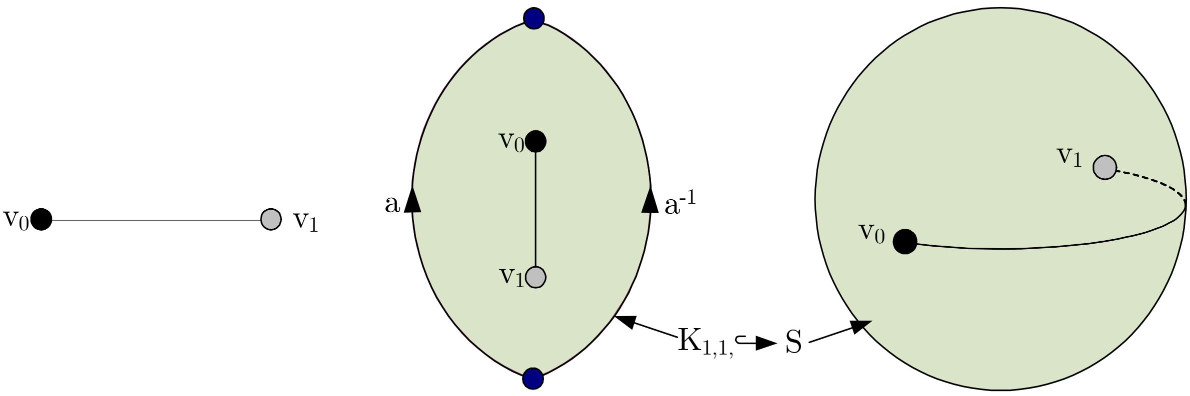
Lembramos que nosso objetivo é identificar os tipos de mergulhos distintos de um grafo completo $K_{n.n}$. Pela Definição 2.7.1, os mergulhos que possuem o mesmo tipo de partição formam uma classe de mergulhos de $K_{n,n}$. Os grafos $K_{1,1}$ e $K_{2,2}$ possuem mergulhos simples e serão identificados em seguida, mas não possibilita descrever o processo de identificação de mergulhos. Deixaremos esta tarefa para ser realizada nos mergulhos dos grafos $K_{3,3}$ e $K_{4,4}$.

3.3.1 Mergulho de $K_{1,1}$

Este é o mergulho trivial. O grafo completo biparticionado $K_{1,1}$ possui um único sistema de rotações. É fácil ver, no grafo (a) da Figura 3.3.1, que este sistema de rotação é dado por

$$\Theta\left(K_{1,1}\right) = \{0\,(1)\,, 1\,(0)\}\,.$$

Na Figura 3.3.1 representamos um mergulho de $K_{1,1}$ sobre a esfera, mergulho descrito acima.



(a) Canal $C_1 \longleftrightarrow K_{1,1}$ (b) Modelo planar $K_{1,1} \hookrightarrow S$ (c) Modelo espacial $K_{1,1} \hookrightarrow S$

Figura 3.3.1: Mergulhos planar e espacial de $K_{1,1}$

Observamos, no modelo espacial (c) da Figura 3.3.1, que o mergulho de $K_{1,1}$ particiona a esfera em duas partes, o próprio $K_{1,1}$ e $S \backslash K_{1,1}$ (a esfera S menos $K_{1,1}$). Como o $K_{1,1}$ não é homotópico a um ponto de S, e $S \backslash K_{1,1}$ é homotópico ao próprio $K_{1,1}$, então, as duas partes da partição de $K_{1,1} \hookrightarrow S$ não são homotópicas a zero, logo nenhuma das partes é um 2-células. Consequentemente, as partes $K_{1,1}$ e $S \backslash K_{1,1}$ do mergulho $K_{1,1} \hookrightarrow S$ não são do tipo 2-células, portanto, não ocorre uma decomposição em regiões em todo mergulho de $K_{1,1}$, neste caso, não faz sentido aplicar a característica de Eüler-Poincaré em um mergulho de $K_{1,1}$. Se considerássemos as duas partes como sendo região, teríamos

$$\chi\left(\Omega\right) = v - e + f = 2 - 1 + 2 = 3,$$

porém, não existe superfície com $\chi\left(\Omega\right) = 3$, pois o máximo é 2, a característica da esfera S. Caso contrário, não teríamos regiões, e portanto $\chi\left(\Omega\right) = 1$, o que implica que $K_{1,1} \hookrightarrow \mathit{Plano}$. Porém, estamos vindo de um mergulho da esfera. Em ambos os casos não faz sentido a relação de Eüler-Poicaré (2.4).

Veremos a seguir, nas análises dos demais casos, que $K_{1,1}$ é o único grafo da família $K_{n,n}$ que não possui mergulho de 2-células.

3.3.2 Mergulho de $K_{2,2}$

O grafo completo biparticionado $K_{2,2}$ é um dos mais importantes para a teoria da comunicação porque está associados ao canal binário simétrico C_2. Sabemos, de [49], que os mergulhos distintos de um grafo correspondem aos sistemas de rotações do mesmo. Como $K_{2,2}$ possui apenas o sistema de rotações

$$\Theta\left(K_{2,2}\right)=\left\{0\left(1,3\right),1\left(0,2\right),2\left(1,3\right),3\left(0,2\right)\right\},$$

então $K_{2,2}$ tem um único mergulho de 2-células sobre a esfera S. Observe que na rotação $\theta\left(v_i\right)=\left(j,k\right)$, de um vértice v_i de $K_{2,2}$, tem-se: $\theta^{-1}\left(v_i\right)=\left(j,k\right)=\theta\left(v_i\right)$. Daí a unicidade da rotação $\Theta\left(K_{2,2}\right)$.

Na Figura 3.3.2 o grafo associado ao canal $K_{2,2}$ é representado em (a), as figuras (b) e (c) correspondem aos modelos planar e espacial do mergulho de $K_{2,2}$ sobre a esfera S.

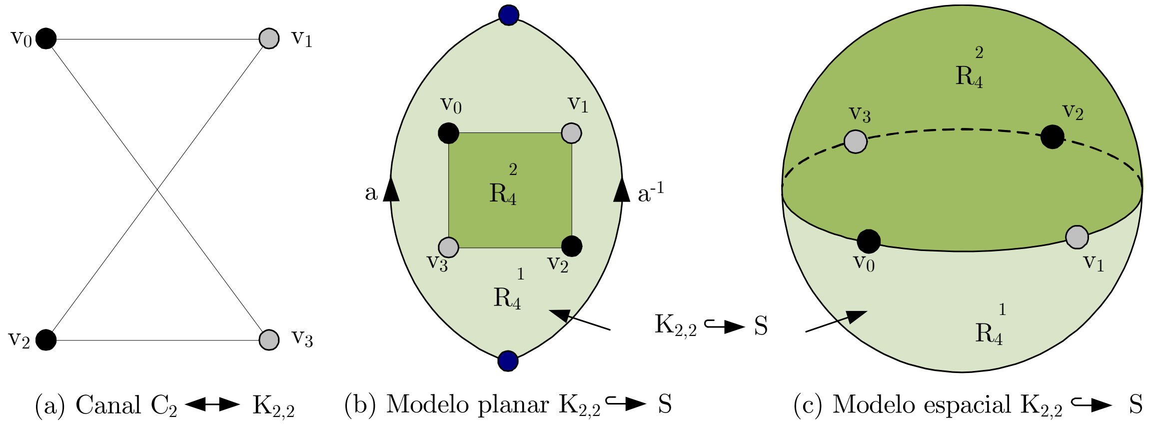


Figura 3.3.2: Canal $C_{2,2}$ e mergulhos do seu grafo associado

Note que o mergulho da Figura 3.3.2 particiona a esfera em duas regiões de quatro lados

$$R_4^1=\left(0,3,2,1\right)\ \text{e}\ R_4^2=\left(0,1,2,3\right),$$

ou seja, uma partição regular da forma

$$K_{2,2}\hookrightarrow S\equiv 2R_4.$$

Além disso, cada região é homotópica a um ponto, portanto, um mergulho de 2-células, sendo assim, temos um mergulho de 2-células, diferentemente do mergulho de $K_{1,1}$. O $K_{2,2}$ é, então, o grafo da família $K_{n.n}$ que possui um único mergulho de 2-células, como será comprovado posteriormente.

Obsevamos ainda que os grafos $K_{1,1}$ e $K_{2,2}$ não possuem emaranhados, e são os únicos das famílias dos grafos completos de $K_{n,n}$ que não possuem emaranhados.

3.4 Mergulhos de $K_{3,3}$ e Processo de Identificação

O grafo $K_{3,3}$ contém um número razoável de mergulhos, cuja identificação revela as principais dificuldades, propriedades e métodos que devemos usar no processo geral de identificação de mergulhos de grafos. Apesar do objetivo ser a identificação do mergulho, cada um deste será tratado como uma modulação, portanto, é indispensável que as relações de mergulhos, modulação e canais, já sejam entendidas neste capítulo, no sentido de facilitar a compreensão dos novos conceitos que serão introduzidos. Além disso, o objetivo é relacionar os processos metodológicos que serão aplicados *a posteriori,* destacando a importância das propriedades, resultados, dados relacionados, análises e construções geométricas introduzidos neste capítulo. O estudo do grafo $K_{3,3}$ já dá uma idéia inicial das propriedades, dificuldades e contribuições que iremos dispor na resolução de problemas futuros.

3.4.1 Os mergulhos de $K_{3,3}$

Com o objetivo de identificar os mergulhos do grafo completo bipartido $K_{3,3}$ será adotado o rotulamento de vértice fixado através da Figura 3.4.1.

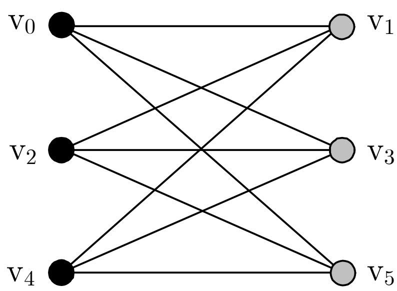


Figura 3.4.1: Grafo completo bipartido $K_{3,3}$

O grafo $K_{3,3}$ possui um número relativamente pequeno de mergulhos de 2-células. Mais precisamente, pela equação (1.4), o número de sistemas de rotações de $K_{3,3}$ é dado por

$$\#\left(\Theta\left(K_{3,3}\right)\right) = \left((3-1)!\right)^6 = 64,$$

e, portanto, $K_{3,3}$ possui 64 mergulhos distintos. No entanto, pela propriedade da rotação inversa estabelecida na Proposição 2.3.2, é necessário identificar somente 32 mergulhos, uma vez que cada rotação de $K_{3,3}$ possui a inversa e a partição de um sistema de rotação, difere do seu inverso, somente pelas inversões de suas respectivas seqüências orbitais.

O primeiro passo do processo de identificação é relacionar as rotações distintas dos vértices de $K_{3,3}$. Observe, na Figura 3.4.1, que os vértices pares de $K_{3,3}$ têm rotações $a = (1,3,5)$ ou $A = (5,3,1)$ e as rotações dos de vértices ímpares são $b = (0,2,4)$ ou $B = (4,2,0)$. Devemos, então, encontrar todas as permutações possíveis das rotações a, A, b e B para compor os sistemas de rotações distintos de $K_{3,3}$ de tal maneira que nenhuma dessas rotações seja a inversa de uma outra, rotações relacionadas nas 2^a e 3^a colunas da Tabela 3.4.1.

n	Rotação	Sistemas de rotações	Sequencias orbitais	Partição	Ω
1	$ababab$	0(135),1(024),2(135),3(024),4(135),5(024)	(103254) , (305214) , (501234)	$3R_6$	T
2	$aBaBaB$	0(135),1(420),2(135),3(420),4(135),5(420)	(103452) , (305412) , (501432)	$3R_6$	T
3	$AbAbAb$	0(153),1(024),2(531),3(024),4(153),5(024)	(105234) , (301254) , (503214)	$3R_6$	T
4	$ababAB$	0(135),1(024),2(135),3(024),4(153),5(420)	(1032501234) , (3054) , (2145)	$2R_4R_{10}$	T
5	$abAbaB$	0(135),1(024),2(531),3(024),4(135),5(420)	(1032143054) , (3054) , (2143)	$2R_4R_{10}$	T
6	$AbabaB$	0(153),1(024),2(135),3(024),4(135),5(420)	(3012345214) , (1054) , (5032)	$2R_4R_{10}$	T
7	$abaBAb$	0(135),1(024),2(135),3(420),4(531),5(024)	(3052145012) , (1034) , (4103)	$2R_4R_{10}$	T
8	$abABab$	0(135),1(024),2(531),3(420),4(135),5(024)	(1034501254), (3052) , (2143)	$2R_4R_{10}$	T
9	$AbaBab$	0(153),1(024),2(135),3(420),4(135),5(024)	(1052143254), (3012) , (5034)	$2R_4R_{10}$	T
10	$aBabAb$	0(135),1(420),2(135),3(024),4(531),5(024)	(1052143254), (3012) , (5034)	$2R_4R_{10}$	T
11	$aBAbab$	0(135),1(420),2(531),3(024),4(135),5(024)	(3052345014) , (1032), (4125)	$2R_4R_{10}$	T
12	$ABabab$	0(531),1(420),2(135),3(024),4(135),5(024)	(5032541234), (1052), (3014)	$2R_4R_{10}$	T
13	$AbAbaB$	0(531),1(024),2(531),3(024),4(135),5(420)	(3012503214) , (1054), (5234)	$2R_4R_{10}$	T
14	$AbabAB$	0(531),1(024),2(135),3(024),4(531),5(420)	(1054301234), (5032) , (2145)	$2R_4R_{10}$	T
15	$abAbAB$	0(135),1(024),2(531),3(024),4(531),5(420)	(1032145234), (3054) , (5012)	$2R_4R_{10}$	T
16	$AbABab$	0(531),1(024),2(531),3(420),4(135),5(024)	(1052301254), (5034) , (2143)	$2R_4R_{10}$	T
17	$AbaBAb$	0(531),1(024),2(135),3(420),4(531),5(024)	(1052145034), (3012) , (5034)	$2R_4R_{10}$	T
18	$abABAb$	0(135),1(024),2(531),3(420),4(531),5(024)	(5012543214), (1034), (30523)	$2R_4R_{10}$	T
19	$ABAbab$	0(531),1(420),2(531),3(024),4(135),5(024)	(1052345032), (3014) , (4125)	$2R_4R_{10}$	T
20	$ABabAb$	0(531),1(420),2(135),3(024),4(531),5(024)	(3014503254) , (1052), (4123)	$2R_4R_{10}$	T
21	$ababaB$	0(135),1(024),2(135),3(024),4(135),5(420)	(103250123452143054)	R_{18}	$2T$
22	$abaBab$	0(135),1(024),2(135),3(420),4(135),5(024)	(103450123052143254)	R_{18}	$2T$
23	$aBabab$	0(135),1(420),2(135),3(024),4(135),5(024)	(103254123450143052)	R_{18}	$2T$
24	$abaBaB$	0(135),1(024),2(135),3(420),4(135),5(420)	(103452143250123054)	R_{18}	$2T$
25	$aBabaB$	0(135),1(420),2(135),3(024),4(135),5(420)	(103250143054123452)	R_{18}	$2T$
26	$aBaBab$	0(135),1(420),2(135),3(420),4(135),5(024)	(103450143254123052)	R_{18}	$2T$
27	$ababAb$	0(135),1(024),2(135),3(024),4(531),5(024)	(103254305214501234)	R_{18}	$2T$
28	$abAbab$	0(135),1(024),2(531),3(024),4(135),5(024)	(103214305234501254)	R_{18}	$2T$
29	$Ababab$	0(531),1(024),2(135),3(024),4(135),5(024)	(105214301234503254)	R_{18}	$2T$
30	$AbAbab$	0(531),1(024),2(531),3(024),4(135),5(024)	(105234503214301254)	R_{18}	$2T$
31	$abAbAb$	0(135),1(024),2(531),3(024),4(531),5(024)	(103214501254305234)	R_{18}	$2T$
32	$AbabAb$	0(531),1(024),2(135),3(024),4(531),5(024)	(105214503254301234)	R_{18}	$2T$

Tabela 3.4.1: Classes dos mergulhos de $K_{m,n}$

O passo seguinte no processo de identificação é determinar os mergulhos mínimo de máximo de $K_{3,3}$. Estes são dados pelas iguadades (2.6) e (2.7), ou seja,

$$\gamma\left(K_{3,3}\right)=1 \text{ } e \text{ } \gamma_M\left(K_{3,3}\right)=2,$$

consequentemente, o conjunto de superfícies para o mergulho de $\gamma\left(K_{3,3}\right)$ é dado por

$$\mathbb{S}\left(K_{3,3}\right)=\{T,2T\}.$$

A identificação completa de um mergulho é feita tomando-se uma rotação na Tabela 3.4.1, por exemplo, a 1^a rotação $\Theta_1 = ababab$ (1^a coluna), correspondente ao seguinte sistema de rotações $0\,(135), 1\,(024), 2\,(135), 3\,(024)\,, 4\,(135)\,, 5\,(024)$ (2^a coluna). As seqüências orbitais $\Gamma_1 = \{(103254)\,, (305214)\,, (501234)\}$ (3^a coluna) correspondente ao mergulho de $K_{3,3}\,(\Theta_1)$ são identificadas pelo Algoritmo 2.8.1, algorítmo identificador de mergulho orientado de grafo estabelecido por Lima [20]. Como o conjunto Γ_1 é formado por três regiões hexagonais a partição é da forma $3R_6$ (4^a coluna). Finalmente, a superfície na qual se encontra o mergulho é identificada através da característica de Eüler-Poincaré (2.4) e a fórmula do gênero do mergulho orientado (2.5). Veja que o grafo $K_{3,3}$ é tal que: $v = 6$, $e = 9$ e $f = 3$ (estamos considerando a partição $3R_6$), então pela característica de Eüler, temos que

$$\chi\,(\Omega) = v - e + f = 6 - 9 + 3 = 0.$$

Por outro lado, pela fórmula $(2.5)\,$, temos que

$$\chi\,(\Omega) = 2 - 2m \Rightarrow m = 1,$$

segue então que o mergulho de $K_{3,3}\,(\Theta_1)$ encontra-se sobre uma superfície de gênero 1, ou seja, o toro. Neste caso dizemos que o mergulho de $K_{3,3}$, munido do sistema de rotações Θ_1, encontra-se sobre o toro e o decompõe em uma partição da forma $3R_6$, e escrevemos, em termos de notação simplificada,

$$K_{3,3}\,(\Theta_1) \hookrightarrow T \equiv 3R_6.$$

A Tabela 3.4.1 foi construída com os procedimentos descritos acima.

Concluímos então que os mergulhos de $K_{3,3}$ são compostos por três classes de mergulhos distintas: sendo duas classes de mergulho mínimo sobre o toro, definidas pelas partições distintas $2R_4R_{10}$ e $3R_6$ e compostas por 6 e 34 mergulhos, respectivamete, e uma classe de mergulhos maximais sobre o bi-toro definida pela partição R_{18}, composta por 24 mergulhos. Observe que são, ao todo, 64 mergulhos, identificando assim, todos os mergulhos e classes de $K_{3,3}$.

Uma vez que toda rotação de um grafo G possuem uma única rotação inversa, o número de elementos do conjunto de rotações distintas de G, denotado por $D\,(G)\,$, que não contém elementos inversos, é igual à metade do número de rotações de G. Em particular, para o grafo $K_{3,3}$, temos que $D\,(G) = 32$. Este conjunto composto por 32 elementos é representado nas 2^a e 3^a colunas da Tabela 3.4.1. As 4^a e 5^a colunas indicam respectivamente as partições na forma de seqüências orbitais e na forma algébrica.

As informações contidas na Tabela 3.4.1 são estremamente importantes para identificação de propriedades intrínsecas dos mergulhos de grafos e revelam ainda propriedades relacionadas aos desempenhos e processos de construções de modulação e canal.

Os dados fornecidos na Tabela 3.4.1 são usados para fornecer e identificar importantes elementos os quais possuem implicações diretas com outros componentes essenciais dos processos geométricos de construções da modulação e do canal associado, e analíticos em relação à eficiência do projeto. Para sermos mais precisos, a partir das informações da Tabela 3.4.1 podemos obter os seguintes componentes:

1. Os tipos de emaranhados são identificados diretamente das sequências orbitais.

2. Os emaranhados contêm as informações necessárias para definir o grafo dual.
3. O grafo dual, além de definir precisamente o canal associado à modulação, contêm informações exatas sobre probabilidade *a priori* de cada transição do canal.
4. O conjunto de sequências orbitais contém ainda informações que identificam o tipo de superfície, e podem ser usadas para obter o modelo planar ou espacial do mergulho (veja Figura 3.4.2).
5. O modelo planar ou espacial do mergulho revelam os tipos de topologias das regiões e de suas respectivas fronteiras.
6. As sequências orbitais são aliados imprescindíveis nas construções topológicas de mergulhos dos modelos planar e espacial.
7. A topologia das fronteiras são importantes aliados na construção topológica dos modelos planas e espacial de mergulhos.
8. A partição pode ser usada para obter uma medida da eficiência da modulação.
9. A partição contém dados suficientes para identificar os mergulhos com bordos provenientes dos mergulhos em superfícies sem bordo.
10. Conhecido os mergulhos com bordo, os seus canais associados com suas respectivas probabilidade *a priori,* são obtidas diretamente do grafo dual do mergulho sem bordo.

Os ítens 1. a 10. relacionam os elementos que podem ser obtidos diretamente dos dados da Tabela 3.4.1, os quais podem ser entendidos como a lista de processos metodológicos que serão aplicados ao longo deste trabalho.

3.4.2 Mergulhos topológicos de $K_{3,3}$

Em um projeto de modulação vindo de um mergulho de grafo, é essencial obter os modelos planar e espacial do mergulho, para que a modulação seja realizada a nível de Geometria Diferencial ou de Riemann ([51], [4]). Em termos de mergulhos diretos de $K_{3,3}$, não considerando o mergulho dual, podemos comprovar diretamente da Tabela 3.4.1, que só existem três tipos de partições: $2R_4R_{10}$, $3R_6$ e R_{18}. Escolhendo-se um representante de cada classe, a Figura 3.4.2, mostra os respectivos mergulhos topológicos construídos sobre os modelos planar e espacial de T e $2T$. São os representantes das classes de mergulhos de $K_{3,3}$ dados pelas seguintes relações

$$K(\Theta_2) \hookrightarrow T \equiv 3R_6, \quad K(\Theta_4) \hookrightarrow T \equiv 2R_4R_{10} \text{ e } K(\Theta_?) \hookrightarrow 2T \equiv R_{18}.$$

Essas construções garantem que é possível realizar os projetos de modulações sobre as superfícies, desde que existam formas de representá-las através de parametrizações ou outro tipo de aplicação. Sobre o toro, essas parametrizações são conhecidas. Fica aqui proposto o desafio de como conduzir os modelos planares sobre a superfície do bitoro através de uma aplicação do plano em $2T$. Este é um problema típico de Geometria Diferencial e como neste trabalho a abordagem e topológica, lançamos a proposta como um futuro trabalho de monografia ou tese.

Qualquer um dos dois modelos do toro podem ser usados para projetos de modulações, porém, no primeiro caso temos um mergulho regular, modulação correspondente a um projeto para uma constelação de três sinais do tipo geometricamente uniforme, propriedade bastante requisitada em projetos de modulações [12].

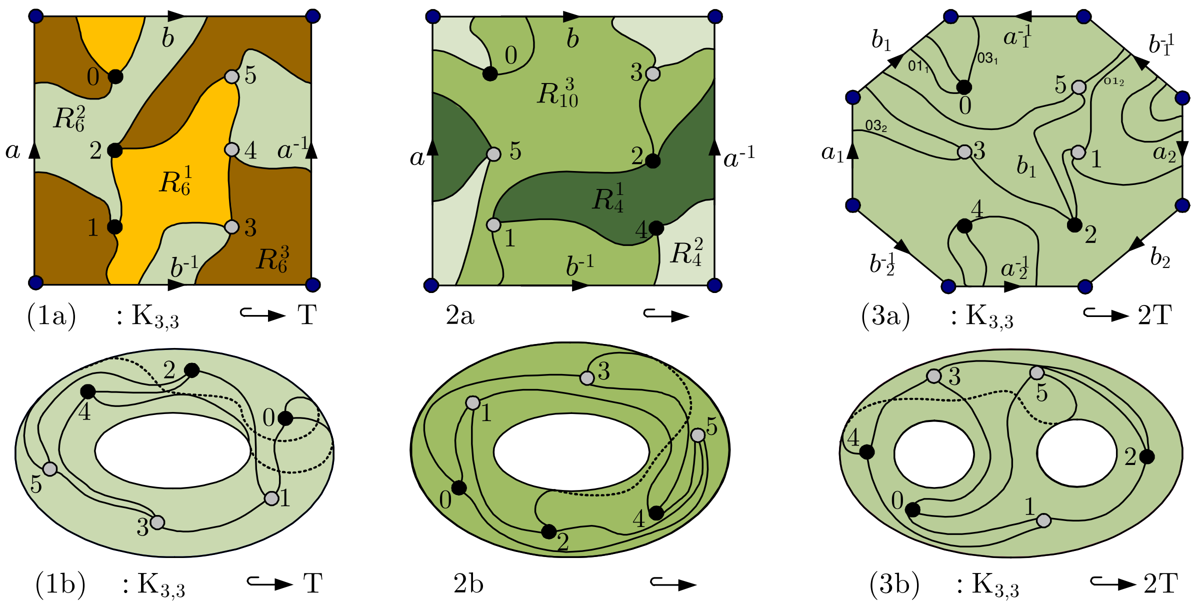


Figura 3.4.2: Modelos topológicos das classes de mergulhos de $K_{3,3}$

Obter todos os mergulhos topológicos, é privilégio de poucos grafos. Com o $K_{3,3}$ foi possível. O próximo membro da família, o grafo $K_{4,4}$, seria um trabalho que levaria bastante tempo. Cremos realmente que é possível realizá-lo. Além do caso $K_{4,4}$, o qual será tratado neste trabalho, nada pode nos garantir que existam ferramentas, equipamentos e métodos disponíveis para identificar e construir todos os seus mergulhos de um grafo, quando o número de vértices e lados são relativamente grandes.

3.4.3 Os emaranhados de mergulhos de $K_{3,3}$

Analisando as sequências orbitais dos mergulhos de $K_{3,3}$ relacionadadas na Tabela 3.4.1, constatamos que o grafo $K_{3,3}$ é o primeiro da família de $K_{n,n}$ a apresentar emaranhados. Com relação ao tipo de emaranhados, a próxima afirmação caracteriza os mergulhos de $K_{3,3}$ em termos desta propriedade.

Proposição 3.4.1 *Seja R_a uma região do mergulho de 2-células $K_{3,3} \hookrightarrow \Omega$. Então R_α é um:*

i) emaranhado mínimo se R_α está na classe de mergulhos mínimos $3R_6$ ou R_α é uma região R_4 da classe de mergulhos mínimos $2R_4R_{10}$;

ii) *emaranhado linear de grau* 2 ($\varpi(R_\alpha) = 2$), *se* $R_\alpha = R_{10}$, *e* R_{10} *está na classe de mergulhos mínimos* $2R_4R_{10}$; *ou um*

iii) *emaranhado linear de grau 9* ($\varpi(R_\alpha) = 9$), *se* $R_\alpha = R_{18}$, *e* R_{18} *está na classe de mergulhos máximos.*

Demonstração. Como a classe de mergulhos mínimos $3R_6$ é composta por regiões R_6 e a região menor de $2R_4R_{10}$ é quadrangular, pela Proposição 3.3.2 *i*), R_α é um emaranhado mínimo ($\tau(R_a) = 0$), portanto R_α satisfaz a condição *i*), provando assim esta afirmação.

Verificamos, diretamente nas sequências orbitais da Tabela 3.4.1, que valem as igualdades $\tau(R_{10}) = \sigma(R_{10}) = 2$, para toda R_{10} de mergulhos da classe $2R_4R_{10}$, portanto toda R_{10} é um emaranhado pontual, o que mostra *ii*);

A afirmação *iii*) segue do Corolário 3.3.5. De fato, como 3 é ímpar, então, $\tau(R_\alpha) = \sigma(R_\alpha) = 3^2 = 9$. ∎

Concluímos, então, que os mergulhos de $K_{3,3}$ não possuem emaranhados pontuais, ou estes são mínimos ou lineares. Um fato que não foi observado em [24], que nos chamou muito a atenção, é o comportamento da formação dos emaranhados de $K_{3,3}$. Uma análise minuciosa na formação das sequências orbitais mostra que todo reticulado R_{10} da classe $2R_4R_{10}$ é da forma

$$R_{10} = (a, b, c, d, e, b, a, d, c, f)$$

isto é, os dois pares de vertices (a, b) e (c, d) ((b, a) e (d, c)) que definem os dois emaranhados lineares são consecutivos e separados por um vértice cada (e e f). Note que os dois emaranhados encontram-se sobre os lados (v_a, v_b) e (v_c, v_d) de $K_{3,3}$. Essas informações podem ser utilizadas imediatamente para obter o mapeamento de R_{10} sobre o dígrafo de $K_{3,3}$. Podemos afirmar, portanto, que todo R_{10} de $K_{3,3}$ é um emaranhado do tipo ilustrado na Figura 3.4.3.

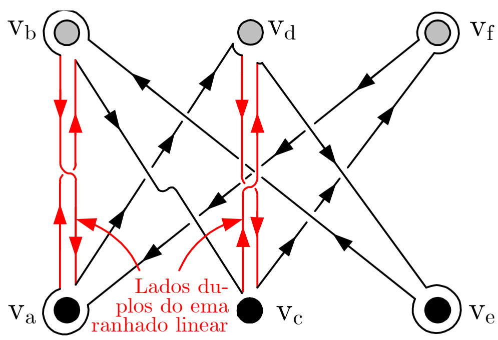


Figura 3.4.3: Mapeamento do emaranhado R_{10} de grau 2 de $K_{3,3} \hookrightarrow T \equiv 2R_4R_{10}$

Uma outra observação importante que passou despercebida em [24], e que pode ser de extrema importância para o problema da identificação das classes de mergulhos de um grafo, é a característica das distâncias, na sequência R_α, dos lados duplos que definem o emaranhado linear e dos vértices que pertencem aos emaranhados pontuais.

Este tipo de caracterização do emaranhado é de vital importância para a identificação das classes de isomorfismos de canais, uma subdivisão das classes de mergulhos que produzem modulções com características e eficiências bem distintas, como foi mostrado em [24].

Um *lado duplo* (i,j) de um emaranhado linear R_α é definido pela sobreposição dos lados (v_i,v_j) e (v_j,v_i) de R_α. Observe que um lado duplo (i,j) de R_α que contribui com uma unidade para o grau de emaranhamento linear de R_α, são subesequências (i,j) e (j,i) em R_α que devem ser identificadas, ou seja, devemos destacar a subsequência de R_α

$$R'_\alpha = (\cdots, i, j, \cdots, j, i, \cdots)$$

para que um emaranhado linear sobre o lado (i,j) de R_a seja identificado.

Se (v_i,v_j) é um lado duplo de um emaranhado linear R_α, chamaremos de *distância dupla* entre as subeseqüencias (i,j) e (j,i) de R_a, e a indicaremos por $\mathrm{dd}\,(i,j)$, a menor distância, em R_α, entre as subseqûencias (i,j) e (j,i). Por exemplo, se R_a é a região R_{10} do mergulho de $K_{3,3}(\Theta_4)$, então: $R_{10} = (1032501234)$ e $\mathrm{dd}\,(1,0) = \mathrm{dd}\,(2,3) = 4$. Observe que os pares $(1,0)$ e $(0,1)$ estão separados pelos vértices v_3, v_2 e v_5, e os pares $(3,2)$ e $(2,3)$ estão separados pelos vértices v_5, v_0 e v_1, isto é, ambos os pares estão isolados por 3 vértices, daí a distância ser 4, pois numa translação, por exemplo, $(1,0)$ teria que ser transladado 4 posições para ocupar as posições de $(0,1)$.

De modo análogo, um *vértice v_i de mutiplicidade k*, ou *vértice k-uplo*, $k \geq 2$, define um emaranhado pontual de grau k, quando v_i não é um vértice adjacente a um emaranhado linear (v_i,v_j) e a fronteira $\partial\,(R_\alpha)$ se intercepta k vezes em v_i. Por exemplo, um vértice v_i contribui com o grau 4 de emaranhado pontual se, e somente se, existe uma subsequência de R_α da forma

$$R''_\alpha = (\cdots, i, \cdots, i, \cdots, i, \cdots, i, \cdots)$$

tal que $\partial\,(R_\alpha)$ se intercepta exatamente, 4 vezes no vértice v_i.

Enquanto os emaranhado linerares só podem ocorrer aos pares, os pontuais podem se interceptarem muitas vezes. A descrição detalhadas desse processo é de grande utilidade para os nossos futuros propósitos. Com isso podemos caracterizar os emaranhados de $K_{3,3}$ através da seguintes afirmações:

Proposição 3.4.2 *Sejam K_{10} e K_{18} emaranhado lineares quaisquer, das classes $2R_4R_{10}$ e R_{18}, dos mergulhos orientados de 2-células de $K_{3,3}$. Então, estes emaranhados possuem as seguintes propriedades:*

i) $\tau\,(R_{10}) = 2$ *e* $\mathrm{dd}\,(i,j) = 4$, *para todo lado duplo* (v_i,v_j) *de* R_{10};

ii) $\tau\,(R_{18}) = 9$ *e* $\mathrm{dd}\,(i,j) = 4$ *ou* $\mathrm{dd}\,(i,j) = 6$, *para todo lado duplo* (v_i,v_j) *de* R_{18}.

Demonstração. As afirmações seguem da observação direta sobre as sequências orbitais relacionadas na Tabela 3.4.1. ■

Das análises, definições e resultados apresentados acima, podemos caracterizar os mergulhos orientados do grafo completo bipartido $K_{3,3}$, de forma simplificada, através do seguinte resultado.

Teorema 3.4.3 $K_{3,3} \hookrightarrow \Omega$ *é composto por 64 mergulhos distintos, divididos em três classes de mergulhos:*

i) duas classes de mergulhos mínimos sobre o toro:

a) o emaranhado mínimo regular $3R_6$*, sendo*

$$\#(3R_6) = 6 \ e \ \epsilon(3R_6) = 0;$$

b) o emarando linear regular de grau 2*,* $2R_4R_{10}$*, sendo*

$$\#(2R_4R_{10}) = 34, \ \tau(R_{10}) = 2 \ e \ \mathrm{dd}(i,j) = 4, \ \forall \ lado \ duplo \ (v_i, v_j) \ de \ R_{10};$$

ii) a classe de mergulhos máximos R_{18} *sobre o bitoro, de emaranhados maximais de graus 9, sendo*

$$\#(R_{18}) = 24, \ \tau(R_{10}) = 9 \ e \ \mathrm{dd}(i,j) = 4 \ ou \ 6, \ \forall (v_i, v_{i+1}) \ de \ R_{10}.$$

Demonstração. Todas as afirmações do teorema já foram demonstradas nos resultados precedentes. ∎

Apesar do processo de identificação deste capítulo conter muitas informações essenciais para o entendimento das relações com as modulações e canais que pretendemos estabelecer no Capítulo 5, as técnicas e métodos usados ainda não são suficientes para identificar mergulhos de grafos mais complexos. Além disso, o grafo $K_{3,3}$ possui um número muito reduzido de mergulhos e o nosso interesse é identificar um número significativo de modulações. Na verdade, queremos desenvolver porcessos e técnicas, através da matemática (Teoria dos Grafos, topologia Algébrica e Geometria de Riemann) e da computação (algorítmos) que permitam identificar e construir processo topológicos de modulações, e definir regras de associações com canais discretos sem memória. Desejamos ainda desenvolver processos que permitam estabelecer a eficiência de modulações e canais. Devido ao seu número reduzido de elementos, o $K_{3,3}$ não contém um amostra do espaço dessas modulações que permita um avanço desses objetivos, devemos então pesquisar estes métodos e técnicas em um tipo de grafo mais complexo, o grafo completo bipartido $K_{4,4}$.

3.5 Identificação das Classes de Mergulhos de $K_{4,4}$

Apesar de quatro ser um número relativamente pequeno, o problema da identificação dos mergulhos do grafo completo bipartido $K_{4,4}$ é de alta complexidade. É até possível identificar um mergulho de $K_{4,4}$ através do processo usado na Seção 3.4, aplicando os passos do Algoritmo 2.8.1, contudo, a grande quantidade de elementos inviabiliza a identificação através de cálculos ou procedimentos manuais. Então, o jeito é recorrer aos processos computacionais para identificar os elementos, através da implementação de um algorítmo gerador de mergulhos.

O grande entrave do problema da identificação através do Algoritmo 2.8.1, é a entrada, esta consiste de uma matriz retangular de ordem 8×4, $\Phi_{8\times 4}$, com elementos em $\mathbb{Z}_8$, cuja i-ésima linha é a rotação do i-ésimo vértice de $K_{4,4}$. Devemos portanto gerar um conjunto de matrizes

$$\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8] = \{\Phi_{8\times 4}[\mathbb{Z}_8] : \Phi_{8\times 4} \text{ é rotação de } K_{4,4}\}.$$

Pela igualdade (3.4), o número de elementos de $\mathbb{M}[\mathbb{Z}_4]$ é dado

$$\#(\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]) = ((4-1)!)^{2\cdot 4} = ((4-1)!)^8 = 1\,679\,616.$$

Consequentemente, apenas uma implementação, por exemplo, via Algoritmo 2.8.1, identifica todos os 1 679 616 mergulhos distintos de $K_{4,4}$, desde que haja um máquina robusta para realizar esta tarefa. É óbvio que existem máquinas e recursos computacionais com esta capacidade, mas a identificação do caso seguinte, dos mergulhos de $K_{5,5}$, não teria condições de ser realizado, devido a grande diferença da complexidade.

Um método de identificação de mergulho desenvolvido em [24], possibilitou a identificação dos mergulhos orientados do grafo completo K_5, fornecendo os seus 7 668 mergulhos distintos. As entradas eram matrizes do tipo $\Phi_{5\times 4}$ que compunha o conjunto de matrizes de rotações

$$\mathbb{M}_5[\mathbb{Z}_5] = \{\Phi_{5\times 4}[\mathbb{Z}_5] : \Phi_{5\times 5} \text{ é rotação de } K_{4,4}\}.$$

Basicamente, o método consistia em particionar o conjunto $\mathbb{M}[\mathbb{Z}_5]$ em sete famílias de matrizes ou rotações, que preservavam determinadas propriedades combinatorias, e que não continham rotações inversas, vizando facilitar a identificação das matrizes. Era uma partição não homogênea formada por conjuntos com 3, 75, 150, 600, 900, 1800 e 360 elementos. Determinada as matrizes de família, esta eram implementadas individualmente através do Algorítmo 2.8.1, inspecionava-se o conjunto das saídas, no sentido de identificar as classes de mergulhos distintos. O processo funcionou para o caso do grafo K_5, porém, no caso do grafo $K_{4,4}$, a partição, além de gerar muitas famílias, o número de elementos eram extremamente grandes e muito árduo era o processo de gerar os seus sistemas de rotações. Outra característica da partição não homogênea era a falta de uniformidade das rotações e ausência de relações existentes entre os mergulhos gerados por uma família, implicando na ausência de propriedades que viessem elucidar o problema da identificação. Chegamos então, a conclusão que deveríamos encontrar outra partição, caso desejássemos avançar no problema da identificação do mergulhos de grafos. Este será o objetivo das próximas seções.

3.6 Partição Homogênea

Analisando o problema de uma partição homogênea do conjunto $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_4]$ dos sistemas de rotações de grafo completo $K_{4,4}$, ou seja, uma partição em subconjuntos com o mesmo tipo de elementos, chegamos a conclusão que a maneira mais natural de obter esta partição é através da fixação da rotação de um ou mais vértices de $K_{4,4}$. Neste caso, a partição depende essencialmente do número de vértices escolhidos para serem fixados. Com o intuito de analisar os elementos dessa partição introduziremo o seguinte conceito.

Definição 3.6.1 *Chamaremos de* partição homogênea *do conjunto* $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]$, *o conjunto quociente* $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]/\theta_{i=1}^{k}$ *das classes de rotações fixas* $\left\{\overline{\theta}_i\right\}_{i=1}^{k}$, *onde* $\overline{\theta}_i$ *é o conjunto das rotações de* $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]$ *que fixam as rotações de* k *vértices de* $K_{4,4}$.

A definição de partição homogênea envolve naturalmente o conceito de relação. Seja $\sim$ a *relação* entre elementos de $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]$ definida por

$$\overline{\theta}_{i=1}^{k} = \{N \in \mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8] : M \sim N \Leftrightarrow M \text{ e } N \text{ fixam } \left\{\overline{\theta}_i\right\}_{i=1}^{k}\}.$$

Para melhor entender o conceito da relação $\sim$ definida acima, consideremos o grafo completo bipartido $K_{4,4}$ com o seguinte rotulamento de vértices fixados na Figura 3.6.1.

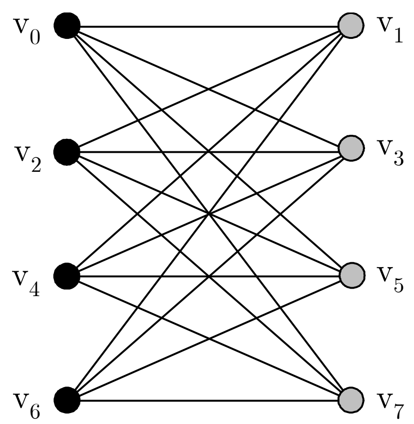


Figura 3.6.1: Grafo completo bipartido $K_{4,4}$

É fácil comprovar que as rotações distintas de um vértice de índice par de $K_{4,4}$ podem ser dadas por

$$A = (1,3,5,7), B = (1,3,7,5), C = (1,5,3,7), a = (7{,}5{,}3{,}1), b = (5{,}7{,}3{,}1), c = (7{,}3{,}5{,}1)$$

e as rotações distintas de um vértice de índice ímpar de $K_{4,4}$ são dadas por

$$D = (0,2,4,6), E = (0,2,6{,}4), F = (0{,}4{,}2{,}6), d = (6{,}4{,}2{,}0), e = (4,6{,}2{,}0), f = (6{,}2{,}4{,}0).$$

Observe que as rotações A e a, B e $b, \cdots, F$ e f, são inversas uma da outra.

Uma rotação de $K_{4,4}$ (ou sistema de rotações de $K_{4,4}$) é dada escolhendo-se, para cada vértice par, uma das rotações A, B, C, a, b ou c, e para cada vértice ímpar, escolhe-se uma das rotações D, E, F, d, e ou f. Por exemplos, sistemas de rotações de $K_{4,4}$ seriam das formas

$$\Theta_1 = ADADADAD, \ \Theta_2 = AEBdaeaf \ \text{ e } \ \Theta_3 = aFbdCEBe$$

cujas formas explicitas são dadas por

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \{0(1357), 1(0246), 2(1357), 3(0246), 4(1357), 5(0246), 6(1357), 7(0246)\}, \\
\Theta_2 &= \{0(1357), 1(0246), 2(1357), 3(6420), 4(7531), 5(6420), 6(7531), 7(6240)\}, \\
\Theta_3 &= \{0(7531), 1(0426), 2(5731), 3(6420), 4(1537), 5(0264), 6(1375), 7(6420)\},
\end{aligned}$$

e em termos de matrizes, temos,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nas matrizes acima, obervamos que $M_1 \sim M_2$ e $M_2 \sim M_3$, mas $M_1 \sim M_3$. Observe que M_1 e M_2 estão na classe $\overline{\theta}_0$, pois a rotacões do vértice v_0 em M_1 e M_2, são iguais. Por outro lado M_1 e M_2 estão na classe $\overline{\theta}_3$, uma vez que estas matrizes contêm a mesma rotação do vértice v_3. No entanto, M_1 e M_3 não possuem vértices com rotações iguais, logo, jamais podem pertencer a uma mesma classe.

A partição homogênea sobre $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]$ será analizada aqui em termos das partições que fixam rotações de k vértices de $K_{4,4}$. Quando a rotação do vértice v_0 é fixa, o conjunto $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]$ é particionado em 8 subconjuntos disjuntos, isto é,

$$\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]/\overline{\theta}_0 = \left\{\overline{\theta}_A, \overline{\theta}_B, \overline{\theta}_C, \overline{\theta}_a, \overline{\theta}_b, \overline{\theta}_c\right\} \tag{3.9}$$

onde $\overline{\theta}_A = \{N \in \mathbb{M}_{4,4} : N \sim M \text{ e } \theta_0 = A\}$. Obviamente que toda partição homogênea que fixa um vértice qualquer $K_{4,4}$ é composta por seis subconjuntos, e no caso da fixação incidir sobre um vértice ímpar v_3, então o conjunto quociente é da forma

$$\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]/\overline{\theta}_3 = \left\{\overline{\theta}_D, \overline{\theta}_E, \overline{\theta}_F, \overline{\theta}_d, \overline{\theta}_e, \overline{\theta}_f\right\}$$

onde $\overline{\theta}_F = \{N \in \mathbb{M}_{4,4} : N \sim M \text{ e } \theta_3 = F\}$.

Se dois elementos são fixados, por exemplo, as rotações dos vértices v_0 e v_1, então o conjunto quociente é da forma

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]/\overline{\theta}_{0,1} = \{&\overline{\theta}_{AD}, \overline{\theta}_{BD}, \overline{\theta}_{CD}, \overline{\theta}_{aD}, \overline{\theta}_{bD}, \overline{\theta}_{cD}, \overline{\theta}_{AE}, \overline{\theta}_{BE}, \overline{\theta}_{CE}, \overline{\theta}_{aE}, \overline{\theta}_{bE}, \overline{\theta}_{cE}, \\ &\overline{\theta}_{AF}, \overline{\theta}_{BF}, \overline{\theta}_{CF}, \overline{\theta}_{aF}, \overline{\theta}_{bF}, \overline{\theta}_{cF}, \cdots, \overline{\theta}_{Af}, \overline{\theta}_{Bf}, \overline{\theta}_{Cf}, \overline{\theta}_{af}, \overline{\theta}_{bf}, \overline{\theta}_{cf}\}.\end{aligned}$$

ou seja, um conjunto composto por $6^2 = 36$ elementos.

Observamos ainda que, no caso da partição (3.9), cada classe $\overline{\theta}_i$ de $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]/\overline{\theta}_0$ é composto por 279 936 matrizes, e cada classe $\overline{\theta}_{i,j}$ de $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]/\overline{\theta}_{0,1}$, é formada por 46 656.

O conceito de partição homogênea introduzido acima pode ser expandido para um grafo qualquer. A seguir, apresentaremos um estudo dos números de elementos envolvidos nesta definição para um grafo mais geral.

3.6.1 Cardinalidade da partição homogênea

Em um sentido mais amplo, o conceito de partição homogêna pode ser extendido para um grafo qualquer.

Definição 3.6.2 *Seja $\mathbb{M}[\mathbb{Z}_p]/\theta_{i=1}^k$ o conjunto de rotações do grafo $G(P,Q)$. Uma* partição homogênea *sobre G é o conjunto quociente $\mathbb{M}[\mathbb{Z}_p]/\theta_{i=1}^k$ das classes de rotações $\theta_{i=1}^k$ que fixam as rotações de k vértices de G.*

O número de elementos da partição homogênea de um grafo $G(P,Q)$ depende de vários fatores: 1) tipo de grafo; 2) quantidade de vértices p do grafo; 3) número k de rotações fixas; 4) número de rotações distintas ϱ de cada vértice $v \in G$ e; 5) grau $\deg v$ de cada vértice $v \in G$. A maioria desses elementos são obtidos diretamente dos componentes do grafo, porém, o número de rotações distintas ϱ depende do grau do vértice $\deg v$ o modo de determinar ϱ não é tão trivial.

Lema 3.6.3 *O número de rotações distintas $\varrho(v)$ de um vértice v de um grafo G é dado por*

$$\varrho = (\deg v - 1)!. \tag{3.10}$$

Demonstração. De fato, uma rotação de um vértice v de grau n define a ordem dos n lados adjacentes a v e é uma permutação de n elementos distintos. O número total de rotações é, portanto, igual a $n!$. Mas cada rotação de v é uma rotação cíclica de comprimento n. Como a rotação é invariante por rotação cíclica, e existem n rotações distintas, então o número de rotações distintas é igual ao número de permutações $P_n = n!$ dividido pelo número de ciclos de cada permutação, isto é,

$$\varrho = \frac{(\deg v)!}{\deg v} = \frac{\deg v\,(\deg v - 1)!}{\deg v} = (\deg v - 1)!.$$

Como $n = \deg v$, então $\varrho = (\deg v - 1)!$. ■

Não está muito claro se a partição introduzida na Definição 3.6.2 é uma partição homogênea quando os vértices de G possuem graus distintos. No sentido de comprovar que a Definição 3.6.2 define uma partição homogênea, independente do grafo, e de estabelecer as fórmulas gerais para os números de elementos da partição homogênea e de seus subconjuntos, consideremos o grafo $G(6,10)$ da Figura 3.6.2. Os vértices de graus $\deg v_1 = \deg v_2 = 3$, $\deg v_3 = \deg v_4 = 4$ e $\deg v_5 = \deg v_6 = 5$.

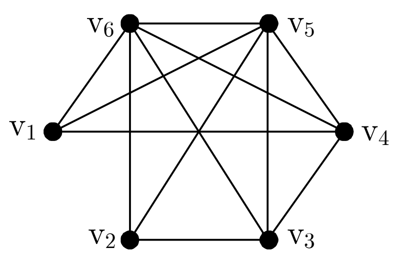


Figura 3.6.2: Grafo $G(6,12)$

Este é o caso mais geral de grafo, pois seus vértices têm graus diferentes. A rotação deste grafo é dada por

$$\Theta = \{1(456), 2(356), 3(2456), 4(1356), 5(12346), 6(12345)\}, \tag{3.11}$$

Vértices	v_1	v_2	v_3	v_3	v_5			v_6		
Rotações θ_i^j's dos vértices $v_i's$	456	356	2456	1356	12346	64321	62314	12345	54321	52314
	654	653	2465	1365	12364	46321	41326	12354	45321	41325
			2546	1536	12436	63421	14623	12435	53421	32541
			6542	6531	13246	64231	32641	13245	54231	14523
			5642	5631	12643	34621	34126	12543	34521	34125
			6452	6351	14326	62341	62143	14325	52341	52143
					31246	64213		31245	54213	

Tabela 3.6.1: Rotações distintas dos vértices de $G(6,12)$

e as rotações distintas de seus vértices, constam na Tabela 3.6.1.

Por (3.10), o número de rotações distintas de cada vértice de $G(6,12)$, são dadas por

$$\varrho(v_1) = \varrho(v_2) = 2, \ \ \varrho(v_3) = \varrho(v_4) = 6 \ \text{ e } \ \varrho(v_5) = \varrho(v_6) = 24,$$

o que vem a confirmar que a Tabela 3.6.1 contêm os sistemas de rotações distintos de cada vértice v_i de $G(6,12)$.

Na forma matricial, a rotação Θ em (3.11), pode ser representada por

$$\mathbb{M}_\Theta[\mathbb{Z}_7^*] = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & & \\ 3 & 5 & 6 & & \\ 2 & 4 & 5 & 6 & \\ 1 & 3 & 5 & 6 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

onde $\mathbb{Z}_7^* = \mathbb{Z}_7 \backslash \{0\}$ é o conjuntos dos elementos não nulos de $\mathbb{Z}_7$. A primeira matriz em (3.12) indica o sistema de rotação de G e a segunda, o complemento com zeros para obter uma matriz 6×5. Um mergulho distinto de G corresponde as permutações não cíclicas das linhas de $\mathbb{M}_\Theta$. Todas as permutações de $\mathbb{M}_\Theta$ nos dá o conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{6,5}[\mathbb{Z}_7^*]$, correspondentes aos mergulhos distintos de G. O Algorítmo 2.8.1 identifica todos os mergulhos, recebendo, como entrada, as matrizes de $\mathbb{M}_{6,5}[\mathbb{Z}_7^*]$.

Observe que um vértice v_i têm $\deg v_i - 1$ rotações. Se $\theta_1^1, \theta_1^2, \cdots, \theta_1^{\deg v_1 - 1}$ são as rotações distintas do vértice v_i, então as partições homogênes de $\mathbb{M}[\mathbb{Z}_7^*]$ que fixam a rotação de um único vértice são dadas por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}_{6,5}[\mathbb{Z}_7^*]/\theta_1 &= \{\overline{\theta}_1^1, \overline{\theta}_1^2, \cdots, \overline{\theta}_1^{\deg v_1 - 1}\} = \{\overline{\theta}_1^1, \overline{\theta}_1^2\}, \\
\mathbb{M}_{6,5}[\mathbb{Z}_7^*]/\theta_2 &= \{\overline{\theta}_2^1, \overline{\theta}_2^2, \cdots, \overline{\theta}_2^{\deg v_2 - 1}\} = \{\overline{\theta}_2^1, \overline{\theta}_2^2\}, \\
\mathbb{M}_{6,5}[\mathbb{Z}_7^*]/\theta_3 &= \{\overline{\theta}_3^1, \overline{\theta}_3^2, \cdots, \overline{\theta}_3^{\deg v_3 - 1}\} = \{\overline{\theta}_3^1, \overline{\theta}_3^2, \overline{\theta}_3^3, \overline{\theta}_3^4, \overline{\theta}_3^5, \overline{\theta}_3^6\}, \\
\mathbb{M}_{6,5}[\mathbb{Z}_7^*]/\theta_4 &= \{\overline{\theta}_4^1, \overline{\theta}_4^2, \cdots, \overline{\theta}_4^{\deg v_4 - 1}\} = \{\overline{\theta}_4^1, \overline{\theta}_4^2, \overline{\theta}_4^3, \overline{\theta}_4^4, \overline{\theta}_4^5, \overline{\theta}_4^6\}, \\
\mathbb{M}_{6,5}[\mathbb{Z}_7^*]/\theta_5 &= \{\overline{\theta}_5^1, \overline{\theta}_5^2, \cdots, \overline{\theta}_5^{\deg v_5 - 1}\} = \{\overline{\theta}_5^1, \overline{\theta}_5^2, \overline{\theta}_5^3, \overline{\theta}_5^4, \cdots, \overline{\theta}_5^{21}, \overline{\theta}_5^{22}, \overline{\theta}_5^{23}, \overline{\theta}_5^{24}\}, \\
\mathbb{M}_{6,5}[\mathbb{Z}_7^*]/\theta_6 &= \{\overline{\theta}_6^1, \overline{\theta}_6^2, \cdots, \overline{\theta}_6^{\deg v_6 - 1}\} = \{\overline{\theta}_6^1, \overline{\theta}_6^2, \overline{\theta}_6^3, \overline{\theta}_6^4, \cdots, \overline{\theta}_6^{21}, \overline{\theta}_6^{22}, \overline{\theta}_6^{23}, \overline{\theta}_6^{24}\},
\end{aligned}$$

portanto, o número de partições homegêneas que fixam um elemento, são dadas por

$$\#\left(\mathbb{M}_{6,5}\left[\mathbb{Z}_7^*\right]/\overline{\theta}_i\right) = \varrho\left(v_i\right). \tag{3.13}$$

Em particular, o número de partições homogêneas que fixam uma rotação de um vértice do grafo $G(6,12)$ é dado por

$$\#\left(\mathbb{M}_{6,5}\left[\mathbb{Z}_7^*\right]/\overline{\theta}_i\right) = \begin{cases} 2, & \text{se } i = 1 \text{ e } 2 \\ 6, & \text{se } i = 3 \text{ e } 4 \\ 24, & \text{se } i = 5 \text{ e } 6. \end{cases}$$

E fácil constatar que ao fixarmos uma rotação θ_i^j para o vértice v_i, toda classe $\overline{\theta}_i^j$ do conjunto quociente $\mathbb{M}_{6,5}\left[\mathbb{Z}_7^*\right]/\overline{\theta}_{4,5}$, passa a ter o mesmo número de elementos, independente da escolha do vértice v_i. Esta obsevação é importante por que caracteriza as partições introduzidas na Definição 3.6.2, como partições homogêneas, independente do tipo de escolha de grafo, de vértice e da quantidade destes, como será visto na sequência de exposições do nosso raciocínio.

Como todas as classes de uma partição homogênea de um grafo $G(p,q)$ têm o mesmo número de elementos, então, a cardinalidade de uma classe $\overline{\theta}_{i_1,\cdots,i_k}^j$ da partição homogênea $\mathbb{M}\left[\mathbb{Z}_p\right]/\overline{\theta}_{i_1,\cdots,i_k}$ é dada por

$$\begin{aligned}\#\left(\overline{\theta}_{i_1,\cdots,i_k}\right) &= \frac{\#(G)}{\#\left(\mathbb{M}\left[\mathbb{Z}_p\right]/\overline{\theta}_{i_1,\cdots,i_k}\right)} = \frac{\Pi_{v\in V(G)}\left(\deg v - 1\right)!.}{\Pi_{v_{i_j}\in V_f(G)}^k \varrho\left(v_{i_1}\right)} \\ &= \frac{\varrho\left(v_1\right)\varrho\left(v_2\right)\cdots\varrho\left(v_p\right)}{\varrho\left(v_{i_1}\right)\varrho\left(v_{i_2}\right)\cdots\varrho\left(v_{i_k}\right)} = \varrho\left(\widetilde{v}_1\right)\varrho\left(\widetilde{v}_2\right)\cdots\varrho\left(\widetilde{v}_{p-i_k}\right),\end{aligned}$$

isto é, á cardinalidade de cada classe $\overline{\theta}_{i_1,\cdots,i_k}^j$ é igual ao produto dos números de rotações distintas dos vértices cujas rotações não foram fixadas. Ou seja,

$$\#\left(\overline{\theta}_{i_1,\cdots,i_k}\right) = \varrho\left(\widetilde{v}_1\right)\varrho\left(\widetilde{v}_2\right)\cdots\varrho\left(\widetilde{v}_{p-i_k}\right). \tag{3.14}$$

Para comprovar a afirmação acima, calculemos as cardinalidades das classes que fixam uma rotação θ_i de um vértice v_i de $G(6,12)$. Estas são obtidas do seguinte modo

$$\begin{aligned}\#\left(\overline{\theta}_1\right) &= \#\left(\overline{\theta}_2\right) = \frac{\#\left(G(6,12)\right)}{\varrho\left(v_1\right)} = \frac{2!2!3!3!4!4!}{2!} = 41\,472, \\ \#\left(\overline{\theta}_3\right) &= \#\left(\overline{\theta}_4\right) = \frac{\#\left(G(6,12)\right)}{\varrho\left(v_3\right)} = \frac{2!2!3!3!4!4!}{3!} = 13\,824, \\ \#\left(\overline{\theta}_5\right) &= \#\left(\overline{\theta}_5\right) = \frac{\#\left(G(6,12)\right)}{\varrho\left(v_5\right)} = \frac{2!2!3!3!4!4!}{4!} = 3\,456.\end{aligned}$$

Por outro lado, veja por exemplo, no cálculo de $\#\left(\overline{\theta}_1\right)$, que

$$\#\left(\overline{\theta}_1\right) = \frac{\#\left(G(6,12)\right)}{\varrho\left(v_1\right)} = \frac{2!2!3!3!4!4!}{2!} = 2!3!3!4!4!,$$

onde 2!3!3!4!4! é o produto do número de rotações distintas dos vértices não fixos, o que comprova a nossa afirmação acima.

No caso do conjunto quociente das partições de $\mathbb{M}_{6,5}[\mathbb{Z}_7^*]$ que fixam duas rotações, por exemplo, as rotações dos vértices v_3 e v_4, temos que:

$$\mathbb{M}_{3,4}[\mathbb{Z}_7^*]/\overline{\theta}_{3,4} = \left\{\overline{\theta}_{3,4}^{1,1}, \overline{\theta}_{3,4}^{2,1}, \overline{\theta}_{3,4}^{1,2}, \overline{\theta}_{3,4}^{2,2}, \overline{\theta}_{3,4}^{1,3}, \overline{\theta}_{3,4}^{2,3}, \overline{\theta}_{3,4}^{1,4}, \overline{\theta}_{3,4}^{2,4}, \overline{\theta}_{3,4}^{1,5}, \overline{\theta}_{3,4}^{2,5}, \overline{\theta}_{3,4}^{1,6}, \overline{\theta}_{3,4}^{2,6}\right\},$$

onde $\overline{\theta}_{i,j}^{k,h} = \left\{N_{6,5} \in \mathbb{M}_{6,5}[\mathbb{Z}_6] : N_{6,5} \sim M_{6,5} \text{ e } M_{6,5} \text{ fixam } \theta^k \text{ de } v_i \text{ e } \theta^h \text{ de } v_j\right\}$. Uma vez que todos os pares de rotações θ_i^k e $\overline{\theta}_j^h$ vêm dos mesmos vértices v_3 e v_4, e estes contribuem sempre com $\varrho(v_4)$ e $\varrho(v_5)$ rotações distintas, então os elementos de $\mathbb{M}_{3,4}[\mathbb{Z}_6]/\overline{\theta}_{3,4}$ têm a mesma cardinalidade, e portanto,

$$\#\left(\mathbb{M}_{6,5}[\mathbb{Z}_7^*]/\overline{\theta}_{3,4}\right) = \varrho(v_3)\,\varrho(v_4) = 2 \cdot 6 = 12.$$

Com um raciocínio análogo, concluímos que, no caso geral de um grafo $G(p,q)$, temos que:

$$\#\left(\mathbb{M}[\mathbb{Z}_p]/\overline{\theta}_{i_1,i_2,\cdots,i_k}\right) = \varrho(v_{i_1})\,\varrho(v_{i_2})\cdots\varrho(v_{i_k}). \tag{3.15}$$

Em particular, para duas rotações fixas de vértices de $G(6,12)$, temos que

$$\#\left(\mathbb{M}_{6,5}[\mathbb{Z}_6]/\overline{\theta}_{i,j}\right) = \varrho(v_i)\,\varrho(v_j) = \begin{cases} 2\cdot 2 = 4, \text{ se } i \text{ ou } j = 1 \text{ e } 2, \\ 2\cdot 6 = 12, \text{ se } i = 1\text{ou } 2 \text{ e } j = 3 \text{ ou } 4, \\ 6\cdot 6 = 36, \text{ se } i \text{ ou } j = 3 \text{ ou } 4, \\ 2\cdot 24 = 48, \text{ se } i = 1 \text{ ou } 2 \text{ e } j = 5 \text{ ou } 6, \\ 6\cdot 24 = 144, \text{ se } i = 3 \text{ ou } 4 \text{ e } j = 5 \text{ ou } 6, \\ 24\cdot 24 = 576, \text{ se } i \text{ ou } j = 5 \text{ ou } 6. \end{cases}$$

Portanto, temos partições homogêneas que fixam duas rotações de vértices de $G(6,12)$ com classes $\overline{\theta}_{i,j}$ composta de $4, 12, 36, 48, 144$ e 576 elementos. A descrição das partições homogêneas do grafo $G(6,12)$ que fixam até três rotações, é mostrada na Tabela 3.6.2.

Os símbolos $\wedge$ e $\vee$ utilizados na Tabela 3.6.2, possuem os mesmos significados dos símbolos "e"e "ou"utilizados na lógica matemática. Dos comentários e análises da partição homogênea apresentados acima, podemos resumir os resultados através da seguinte proposição.

Proposição 3.6.4 *Se $G(p,q)$ é um grafo com p vértices, $\varrho(v)$ é o número de rotações distintas de $v \in G$ e V_f é o conjuntos de vértices v_f de G que têm rotações fixas, então o número de elementos da partição homogênea e de seus subconjuntos são dados por*

$$\#\left(\mathbb{M}[\mathbb{Z}_p]/\theta_{i=1}^k\right) = \Pi_{v_f \in V_f(G)}\varrho(v_f) \quad e \quad \#(\overline{\theta}_{i=1}^k) = \Pi_{v_i \notin V_f(G)}^{p-k}\varrho(v_i). \tag{3.16}$$

Demonstração. A demonstração segue das análises acima desta subseção. ∎

A Proposição 3.6.4 apresenta um resultado geral que é verdadeiro para todo tipo de grafo, porém, para as duas famílias de grafos mais importantes dentro do contexto de um sistema integrado de transmissão de dados (as modulações que estamos interssados são aquelas que apresentam padrões de um sistema integrado), os grafos completos K_n e os grafos completos biparticionados da forma $K_{m,n}$ e $K_{n,n}$, são verdadeiras as igualdades das afirmações seguintes.

Rotações Fixadas	Vértices Fixos	N^o partições Homogêneas	N^o elementos das classes
1	$1 \vee 2$	2	41 472
	$3 \vee 4$	6	13 824
	$4 \vee 5$	24	3 456
2	$1 \wedge 2$	4	20 736
	$(1 \vee 2) \wedge (3 \vee 4)$	12	6 912
	$3 \wedge 4$	36	2 304
	$(1 \vee 2) \wedge (5 \vee 6)$	48	1728
	$(3 \vee 4) \wedge (5 \vee 6)$	144	576
	$(5 \vee 6) \wedge (5 \vee 6)$	576	144
3	$(1 \vee 2) \wedge (1 \vee 2) \wedge (1 \vee 2)$	8	10 368
	$(1 \vee 2) \wedge (1 \vee 2) \wedge (3 \vee 4)$	24	3 456
	$(1 \vee 2) \wedge (3 \vee 4) \wedge (3 \vee 4)$	72	1152
	$(1 \vee 2) \wedge (1 \vee 2) \wedge (5 \vee 6)$	96	864
	$(3 \vee 4) \wedge (3 \vee 4) \wedge (3 \vee 4)$	216	384
	$(1 \vee 2) \wedge (3 \vee 4) \wedge (5 \vee 6)$	288	288
	$(3 \vee 4) \wedge (3 \vee 4) \wedge (5 \vee 6)$	864	96
	$(3 \vee 4) \wedge (5 \vee 6) \wedge (5 \vee 6)$	3456	24
	$(5 \vee 6) \wedge (5 \vee 6) \wedge (5 \vee 6)$	13 824	6

Tabela 3.6.2: Partições homogêneas do grafo $G(6, 12)$ que fixam até 3 rotações

Corolário 3.6.5 *As cardinalidades das partições homogêneas e de suas classes para os grafos K_n, $K_{m,n}$ e $K_{n,n}$, são dadas por:*

i) Se $\mathbb{M}_n\left[\mathbb{Z}_n\right]/\theta^k_{v_i \in V_f}$ é conjunto das matrizes de rotações que fixam k vértices de K_n, então:

$$\#\left(\mathbb{M}_n\left[\mathbb{Z}_n\right]/\theta^k_{v_i \in V_f}\right) = ((n-1)!)^k \;\; e \; \#\left(\overline{\theta}^k_{v_i \in V_f}\right) = ((n-1)!)^{n-k}; \tag{3.17}$$

ii) Se A e B são os conjuntos de m e n vértices de $K_{m,n}$ e $\mathbb{M}_{m,n}\left[\mathbb{Z}_{m+n}\right]/\theta^k_{v_i \in V_f}$ é o conjunto das matrizes de rotações que fixam k_1 vértices de A e k_2 vértices de B do grafo completo bipartido $K_{m,n}$, então:

$$\#\left(\mathbb{M}_{m+n}\left[\mathbb{Z}_{m+n}\right]/\theta^k_{v_i \in V_f}\right) = ((n-1)!)^{k_1}\,((m-1)!)^{k_2}, \tag{3.18a}$$

$$\#\left(\overline{\theta}^k_{v_i \in V_f}\right) = ((n-1)!)^{m-k_1}\,((m-1)!)^{n-k_2}; \tag{3.18b}$$

iii) Se $\mathbb{M}_{n,n}\left[\mathbb{Z}_{2n}\right]/\theta^k_{v_i \in V_f}$ é o conjunto das matrizes de rotações que fixam k vértices do grafo completo bipartido $K_{n,n}$, então:

$$\#\left(\mathbb{M}_{n,n}\left[\mathbb{Z}_{2n}\right]/\theta^k_{v_i \in V_f}\right) = ((n-1)!)^k \quad e \quad \#\left(\overline{\theta}^k_{v_i \in V_f}\right) = ((n-1)!)^{2n-k}. \tag{3.19}$$

Demonstração. Todas as afirmações são consequências das igualdades em (3.16) e das observações seguintes: $i)$ segue do fato de que todos os vértices de K_n possuem grau n; a afirmação $ii)$ é porque, em $K_{m,n}$, os vértices em A têm grau n e os vértices de B têm grau m; e $iii)$ é a conseqüncia de que, em $K_{n,n}$, todos os vértices têm grau n. ∎

Uma vez que o objetivo é classificar os mergulhos do grafo completo $K_{4,4}$, e os dados importantes deste grafo já podem ser obtidos através do Corolário 3.6.5 (iii), na Tabela 3.6.3, relacionamos o número de elementos de cada classe e o número de elementos de cada partição de rotações fixas de vértices de $K_{4,4}$.

Rotações Fixadas	N^o partições Homogêneas	N^o elementos das classes
0	1 679 616	1
1	279 936	6
2	46 656	36
3	20 736	216
4	1296	1296
5	216	7 776
6	36	46 656
7	6	279 936
8	1	1 679 616

Tabela 3.6.3: Partições homogêneas do grafo $K(4,4)$ que fixam k rotações

Após a implementação do Algorítmo 2.8.1, usando as classes da partição homogênea $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]/\theta^2_{v_i \in V_f}$, tivemos a grata surpresa de contar com valiosas propriedades que possibilitaram obter as classes de mergulhos de $K_{4,4}$ e, quem sabe, possa resolver o problema da identificação de grafos mais complexos como, por exemplos, os casos do grafo completo K_6 e do grafo completo biparticionado $K_{5,5}$, os grafos da vez na nossa lista de prentenção. As discursões que culminarão com um processo de identificação das classes de $K_{4,4}$, a aplicação deste processo e suas eventuais concequências são os temas a serem tratados na próxima seção.

3.7 Identificação das Classes de Mergulhos

A princípio, o número extremamente grande de matrizes de rotações do conjunto $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]$, 1 679 616 matrizes de ordem 8×4, inviabilizava qualquer tentativa de identificação, uma vez que as máquinas disponíveis não conseguiam gerar as matrizes do conjunto $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]$, entradas do Algorítmo 2.8.1, utilizando uma rotina em linguagem de programação C. Gerar subconjuntos pequenos era então a saída para o problema. Mas de forma aleatória, sem ter uma relação entre os elementos, de nada ajudaria a encontrar propriedades que simplificassem e ajudasse a resolver o problema da identificação. Então, veio a idéia da partição. As partições da Tabela 3.6.3, nos dão a idéia precisa do número de elementos de cada partição e o número de partições que teríamos que gerar, para identificar todos os mergulhos de $K_{4,4}$. Então resolvemos adotar uma estratégia de identificação que resultou no método seguinte.

Método 3.7.1 (Processo de Identificação) *As classes de mergulhos de $K_{4,4}$ podem ser identificadas através das seguintes etapas:*

E1 Identifica-se um conjunto de rotações distintas para os vértices de $K_{4,4}$.

E2 Gera-se, através de uma rotina de programação, os conjuntos de todas as classes $\left\{\overline{\theta}_i\right\}_{i=1}^{k}$ que fixam as rotações de k vértices de $K_{4,4}$.

E3 Implementa-se idividualmente cada classe $\left\{\overline{\theta}_i\right\}_{i=1}^{k}$ de $\mathbb{M}_{4,4}\left[\mathbb{Z}_p\right]$.

E4 Faz-se uma busca em uma das classes para identificar todos os mergulhos distintos de $K_{4,4}$.

E5 Faz-se um nova pesquisa para identificar as classes de emaranhamentos distintos de cada tipo de mergulho.

Comprovamos que o Método 3.7.1 mostrou-se muito eficiente na identificação das classes de mergulhos de $K_{4,4}$. Os procedimentos da aplicação do Processo de Identificação serão descritos com todos os detalhes a seguir.

3.7.1 Identificação das classes $K_{4,4}$

A etapa E1 é, talvez, a mais simples do Processo de Identificação. Pelo Lema 3.6.3, devemos identificar as $\varrho(v_i) = (\deg v_i - 1)!$ rotações distintas de $K_{4,4}$. Como $\deg v_i = 4$, para todo $v_i \in V(K_{4,4})$, então cada v_i possui 6 rotações distintas. Considerando o rotulamento fixo do grafo $K_{4,4}$ da Figura 3.6.1, este conjunto é dado por

$$A = (1,3,5,7)\,, B = (1,3,7,5)\,, C = (1,5,3,7)\,, a = (7{,}5{,}3{,}1)\,, b = (5{,}7{,}3{,}1)\,, c = (7{,}3{,}5{,}1)\,,$$

se i é um índice par do vértice v_i, ou o conjunto de rotações

$$D = (0,2,4,6)\,, E = (0,2,6{,}4)\,, F = (0{,}4{,}2{,}6)\,, d = (6{,}4{,}2{,}0)\,, e = (4{,}6{,}2{,}0)\,, f = (6{,}2{,}4{,}0)\,,$$

se j é um índice ímpar do vértice v_j de $K_{4,4}$.

Na etapa E2 tivemos que decidir pelo tipo de partição homogênea. Como não dispunhamos, *a priori,* de informações sobre algum tipo de propriedade, a decisão foi por uma partição cujo número de classes fosse possível de ser gerada pelo equipamento disponível (*notebooks* comuns). De imediato, descartamos as duas primeiras partições, pois teríamos que gerar cunjuntos de matrizes de $\mathbb{M}_{4,4}\left[\mathbb{Z}_8\right]$ com 1 679 616 ou 279 936 elementos. Em ambos os casos não foi possível gerar as matrizes de rotações de uma classe com os equipamentos disponíveis. O primeiro caso que se conseguiu gerar foram os elementos de uma classe que fixam duas rotações distintas. Quando é possível gerar uma das classes, as outras não são problemas porque, na partição homogênea, as complexidades de cálculos de todas as classes são iguais, pois possuem os mesmos números de elementos. Com isso geramos as 36 classes $\overline{\theta}_{1,2}$ da partição homogênea $\mathbb{M}_{4,4}\left[\mathbb{Z}_p\right]/\theta^2_{v_i\in V_f}$, isto é

$$\mathbb{M}_{4,4}\left[\mathbb{Z}_p\right]/\theta_{1,2}=\{\overline{\theta}_{AD},\overline{\theta}_{BD},\overline{\theta}_{CD},\overline{\theta}_{aD},\overline{\theta}_{bD},\overline{\theta}_{cD},\overline{\theta}_{AE},\overline{\theta}_{BE},\overline{\theta}_{CE},\overline{\theta}_{aE},\overline{\theta}_{bE},\overline{\theta}_{cE},\overline{\theta}_{AF},\overline{\theta}_{BF},\overline{\theta}_{CF},\overline{\theta}_{aF},\overline{\theta}_{bF},\overline{\theta}_{cF},\overline{\theta}_{Ad},\overline{\theta}_{Bd},\overline{\theta}_{Cd},\overline{\theta}_{ad},\overline{\theta}_{bd},\overline{\theta}_{cd},\overline{\theta}_{Ae},\overline{\theta}_{Be},\overline{\theta}_{Ce},\overline{\theta}_{ae},\overline{\theta}_{be},\overline{\theta}_{ce},\overline{\theta}_{Af},\overline{\theta}_{Bf},\overline{\theta}_{Cf},\overline{\theta}_{af},\overline{\theta}_{bf},\overline{\theta}_{cf}\}.$$

Na etapa E3 são gerados os 36 arquivos contendo as matrizes de cada classe de mergulhos de $\mathbb{M}_{4,4}\left[\mathbb{Z}_p\right]/\theta_{1,2}$. Cada arquivo é implementado individualmente através do Algorítmo 2.8.1 e gerados 36 arquivos contendo a descrição algébrica de cada mergulho. Mais precisamente, cada arquivo contêm a rotação, a partição e o conjunto de sequências orbitais de cada uma das saidas das 56 656 matrizes do arquivo da classe. Por exemplo, na classe θ_{AD} de $\mathbb{M}_{4,4}\left[\mathbb{Z}_p\right]/\theta_{1,2}$, a matriz

$$M_1=\begin{bmatrix}1&3&5&7\\0&2&4&6\\1&3&7&5\\6&4&0&2\\7&5&3&1\\6&4&2&0\\7&5&3&1\\6&2&4&0\end{bmatrix}$$

é um elemento de θ_{AD} porque as rotações de v_1 e v_2 são respectivamente $A=(1,3,5,7)$ e $D=(0,2,4,6)$. Na implementação do Algoritmo 2.8.1 a entrada M_1 retorna: 1) a rotação $ADBdaeaf$ de $K_{4,4}$ correspondente a M_1; 2) a sequência 16 16 a qual corresponde a um mergulho de $K_{4,4}$ composto por 2 regiões de 16 lados, isto é, um mergulho da forma $K_{4,4}\hookrightarrow\Omega\equiv 2R_{16}$; e as seqüêncais 1 0 3 2 7 4 5 2 1 4 7 0 1 2 3 6 e 3 0 5 6 3 4 1 6 7 2 5 0 7 6 5 4 correspondentes as sequências orbitais que definem as fronteiras das duas regiões R_{16}.

Obtidos os 36 arquivos contendo a descrição dos mergulhos de $K_{4,4}$, partimos para a etapa E4, que consiste em identificar e fazer a contagem de todas as classes de mergulhos.

Antes, porém, utilizamos as fórmulas (2.6) e (2.7) para obter:

1) Os gêneros mínimo e máximo de $K_{4,4}$

$$\gamma\left(K_{4,4}\right)=1 \quad \text{e} \quad \gamma_M\left(K_{4,4}\right)=4;$$

2) Utilizamos o Teorema 2.3.4 para obter o conjunto das superfícies dos mergulhos de $K_{4,4}$

$$\mathbb{M}_{4,4}=\{T,2T,3T,4T\};$$

3) As fórmulas de Eüler (2.4) e da característica da superfície orientada (2.5) para obter o número de regiões de cada mergulho:

$$\begin{aligned}K_{4,4} &\hookrightarrow T\equiv\cup_{i=1}^{8}R_{\alpha_i},\ K_{4,4}\hookrightarrow 2T\equiv\cup_{i=1}^{6}R_{\alpha_i},\\ K_{4,4} &\hookrightarrow 3T\equiv\cup_{i=1}^{4}R_{\alpha_i}\ \text{e}\ K_{4,4}\hookrightarrow 4T\equiv\cup_{i=1}^{2}R_{\alpha_i};\end{aligned}$$

e, finalmente, como os regiões R_{α_i} de $K_{4,4}\hookrightarrow\Omega$ possuem 32 lados com $\alpha_i=4+2k$, $k=0,1,2,\cdots$, deduzimos então que as partições dos mergulhos de $K_{4,4}$ de cada superfície de $\mathbb{M}_{4,4}$ só pode ser as partições com β regiões, $\overline{R}_{\beta}$, relacionadas na Tabela 3.7.1.

Classes do toro		Classes do bitoro		Classes do tritoro				Classes do 4-toro	
$\overline{R}_8$	#	$\overline{R}_6$	#	$\overline{R}_4$	#	$\overline{R}_4$	#	$\overline{R}_2$	#
$R_{4,4,4,4,4,4,4,4}$	3	$R_{4,4,4,4,4,12}$	112	$R_{4,4,4,20}$	2 096	$R_{4,8,8,12}$	384	$R_{4,28}$	11 984
		$R_{4,4,4,4,6,10}$	288	$R_{4,4,6,18}$	2 016	$R_{4,8,10,10}$	1 408	$R_{6,26}$	3 840
		$R_{4,4,4,4,8,8}$	150	$R_{4,4,8,16}$	2 448	$R_{6,6,6,14}$	96	$R_{8,24}$	2 872
		$R_{4,4,4,6,6,8}$	112	$R_{4,4,10,14}$	2 208	$R_{6,6,8,12}$	544	$R_{10,22}$	4 320
		$R_{4,4,6,6,6,6}$	32	$R_{4,4,12,12}$	1 016	$R_{6,6,10,10}$	144	$R_{12,20}$	3 136
				$R_{4,6,6,16}$	832	$R_{6,8,8,10}$	0	$R_{14,18}$	2 272
				$R_{4,6,8,14}$	864	$R_{8,8,8,8}$	39	$R_{16,16}$	1 840
				$R_{4,6,10,12}$	1 600				
Subtotal	3	Subtotal	694	Subtotal	13 080	Subtotal	2 615	Subtotal	30 264

Tabela 3.7.1: Cardinalidades das partições das classes de mergulhos de $K_{4,4}$

Observe que a partição homogênea que fixam as rotações dos vértices v_1 e v_2 é a partição de $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_p]$ dada por

$$\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_p]/\theta_{1,2} = \{\overline{\theta}_{AD}, \overline{\theta}_{BD}, \overline{\theta}_{CD}, \overline{\theta}_{aD}, \overline{\theta}_{bD}, \overline{\theta}_{cD}, \overline{\theta}_{AE}, \overline{\theta}_{BE}, \overline{\theta}_{CE}, \overline{\theta}_{aE}, \overline{\theta}_{bE}, \overline{\theta}_{cE}, \overline{\theta}_{AF}, \overline{\theta}_{BF}, \overline{\theta}_{CF}, \overline{\theta}_{aF}, \overline{\theta}_{bF}, \overline{\theta}_{cF}, \overline{\theta}_{Ad}, \overline{\theta}_{Bd}, \overline{\theta}_{Cd}, \overline{\theta}_{ad}, \overline{\theta}_{bd}, \overline{\theta}_{cd}, \overline{\theta}_{Ae}, \overline{\theta}_{Be}, \overline{\theta}_{Ce}, \overline{\theta}_{ae}, \overline{\theta}_{be}, \overline{\theta}_{ce}, \overline{\theta}_{Af}, \overline{\theta}_{Bf}, \overline{\theta}_{Cf}, \overline{\theta}_{af}, \overline{\theta}_{bf}, \overline{\theta}_{cf}\}.$$

Efetuamos então uma busca em cada um dos 36 arquivos de saída do Algoritmo 2.8.1, utilizando a função <`replace`> existente em todo editor de texto, neste caso foi usado o *Scientific WorkPlace*, a qual retorna o número de substituições, tivemos a grata surpresa de que todas as partições dos mergulhos, vindas dos 36 arquivos das saídas das classes da partição homogênea $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_p]/\theta_{1,2}$, tinham o mesmo número elementos, como mostram os resultados da busca relacionados na Tabela 3.7.1.

Da soma dos subtotais da Tabela 3.7.1 de mergulhos da classe $\overline{\theta}_{A,E}$ da partição homogênea $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_p]/\theta_{1,2}$, deduzimos que todos os 45 656 mergulhos de $\overline{\theta}_{A,E}$ foram identificados. Verificamos ainda que todas as demais classes de $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_p]/\theta_{1,2}$ possuem sempre os mesmos números de classes de mergulhos.

O primeiro problema não trivial de identificação foi o caso das classes de mergulhos de K_5 [24], de complexidade inferior, pois só tem 7 776 mergulhos, quando comparado com 1 679 616 mergulhos de $K_{4,4}$. Em termos de número de classes de mergulhos, K_4 é o grafo da família dos grafos completos que mais se aproxima de $K_{4,4}$ em termos de número de classes de mergulhos, conforme mostra a comparação de classes de partições de mergulhos por superfícies da Tabela 3.7.2. As letras P e E utilizadas na linha *Classes* da Tabela 3.7.2 indicam respectivamente os números de classes *possíveis* e *existentes* em cada superfície da coluna Ω.

Observe, nos dados apresentados na Tabela 3.7.2, que apesar do número de rotações K_5 (7 776) ser muito menor do que o de $K_{4,4}$ (1 679 616), a diferença entre partições é de 4 possíveis e de 6 existentes. Isto mostra que a tendência de um grafo completo K_n é ter mais partições do que a do grafo completo bipartido $K_{m,n}$. Isto se deve ao fato de que K_n possui um número maior de lados quando comparado com $K_{m,n}$ em situações

Classes	Toro		Bitoro		Tritoro		4-Toro		Totais		Não
	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	Existentes
K_5	7	5	16	15	1	1	0	0	24	21	3
$K_{4,4}$	1	1	5	5	15	14	7	7	28	27	1

Tabela 3.7.2: Partições possiveis (P) e existentes (E) de mergulhos de K_5 e $K_{4,4}$

aproximadas de números de vértices.

Observamos ainda que, enquanto no grafo completo, a probabilidade de não existir uma partição é maior no mergulho mínimo, nos mergulhos de $K_{m,n}$, a não existência da partição ocorre em um mergulho na superfície próxima do mergulho máximo. Esta é uma conclusão vinda dos mergulos de K_5 e $K_{4,4}$, os primeiros mergulhos das respectivas famílias de grafos, nas quais foram identificadas a não existência de partições. Até agora, nada sabemos das classes de mergulhos dos grafos dessas famílias com parâmetros de vértices superiores aos dos grafos K_5 e $K_{4,4}$.

Concluímos também da Tabela 3.7.2, que o número de incidência das partições possíveis é maior nos grafos completos bipartidos, somente a partição $R_{6,8,8,10}$ não é possivel de ser realizada em um mergulho orientado de 2-células de $K_{4,4}$. Já o grafo completo K_5, com um número menor de partições possíveis, 4 partições a menos, apresenta um número três vezes maior de partições não realizáveis em mergulhos de K_5, são as partições $R_{3,3,3,5,6}$ e $R_{3,4,4,4,5}$ do toro e $R_{6,7,7}$ do bitoro.

3.8 Propridades das classes de mergulhos de $K_{4,4}$

Em termos de mergulhos, descreveremos, através de resultados matemáticos, as classes de mergulhos orientados de $K_{4,4}$. Usaremos, é claro, os dados relacionadas na Tabela 3.7.1 obtidas da implementação do Algoritmo 2.8.1. Além disso, um invariante importante identificador da classe de mergulho é o estado de emaranhamento de suas regiões. As combinações destes determinam as possíveis categorias de mergulhos. Com relação aos emaranhados R_8 e R_{10} de mergulhos de $K_{4,4}$ mostraremos que os únicos emaranhados existentes são do tipo relacionados nas próximas afirmações.

Proposição 3.8.1 *Se R_8 é uma região do mergulho de 2-células orientado de $K_{4,4}$, então R_8 é um emaranhado pontual de grau* 0, 1 *ou* 2.

Demonstração. De fato, usando a Proposição 3.2.3, não é difícil concluir que uma região R_8 de $K_{4,4} \hookrightarrow gT$, a menos de rotulamento, só pode assumir uma das formas

$$R_8^1 = (01234567)\,,\ R_8^2 = (10325076) \quad \text{e} \quad R_8^3 = (07652745)\,, \tag{3.20}$$

consequentemente, quanto aos graus de emaranhamentos concluímos que

$$\varpi(R_8) = \begin{cases} 0, \text{ se } R_8 \text{ é do tipo } R_8^1, \\ 1, \text{ se } R_8 \text{ é do tipo } R_8^2, \\ 2, \text{ se } R_8 \text{ é do tipo } R_8^3. \end{cases}$$

De fato, suponha que o conjunto de vértices de $K_{4,4}$ sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{i, j, k, h\}$. Como as sequências orbitais de mergulhos de $K_{4,4}$ não possuem dois vértices consecutivos, nem de A nem de B, um emaranhado R_8 de grau zero só poderá ter todos os rótulos distintos, por exemplo, assumir a forma

$$R_8^1 = (aibjckdh)\,.$$

Por outro lado, considerando a condição da Proposição 3.2.3, um emaranhado pontual de grau 1, com interseção no vértice a, só pode assumir, a menos de rotulamento, a única forma

$$R_8^2 = (aibjakch)\,.$$

Veja que a está sempre separado por tres elementos da sequência. No caso de um emaranhado pontual de grau 2, com interseções nos vértices a e b, este assume, a menos de rotulamento, a única forma

$$R_8^3 = (aibjakbc)\,,$$

e, novamente, observe que a e b estão separados por três elementos da sequência. Finalmente, é impossível compor um emaranhado pontual R_8^4 de grau 3, pois, caso contrário teríamos,

$$R_8^4 = (aibjaibk)$$

então, $R_8^4 = (aibjaibk)$ seria um emaranhado mixto com $\varpi\left(R_8^4\right) = 1 = \sigma\left(R_8^4\right)$ de um mergulho não orientável, o que é um absurdo. Também não pode existir um emaranhado linear de grau um, pois, caso contrário, este seria necessariamente da forma,

$$R_8^4 = (aibjaick)\,,$$

e portanto, R_8^4 é uma região de um mergulho não orientável, o que seria uma contradição, já que estamos analisando os mergulhos orientáveis. Portanto, está provada a afirmação da proposição. ∎

Proposição 3.8.2 *Se R_{10} é uma região do mergulho de 2-células orientado de $K_{4,4}$, então R_{10} é um emaranhado linear de grau 1, ou R_{10} é um emaranhado pontual de grau 2, ou emaranhado mixto (pontual e linear) ambos de grau 1, ou é um emaranhado linear de grau 2.*

Demonstração. Segue da Proposição 3.2.3, que toda região de $K_{4,4} \hookrightarrow gT$, a menos de rotulamento, só assume uma das formas

$$\begin{array}{c} R_{10}^1 = (0567214763)\,,\ R_{10}^2 = (0123476527)\,, \\ R_{10}^3 = (0741672145)\ \text{ e } R_{10}^4 = (0543674563) \end{array} \tag{3.21}$$

ou seja,

$$\begin{array}{c} \varpi\left(R_{10}\right) = 0 \text{ e } \sigma\left(R_{10}\right) = 1, \text{ se } R_{10} \text{ é do tipo } R_{10}^1, \\ \varpi\left(R_{10}\right) = 2 \text{ e } \sigma\left(R_{10}\right) = 0, \text{ se } R_{10} \text{ é do tipo } R_{10}^2, \\ \varpi\left(R_{10}\right) = 1 \text{ e } \sigma\left(R_{10}\right) = 1, \text{ se } R_{10} \text{ é do tipo } R_{10}^3, \\ \varpi\left(R_{10}\right) = 0 \text{ e } \sigma\left(R_{10}\right) = 2, \text{ se } R_{10} \text{ é do tipo } R_{10}^4. \end{array}$$

Com efeito, considerando os mesmos rotulamentos de vértices utilizados na demonstração da Proposição 3.8.1, e por existirem somente 8 rótulos distintos, uma região R_{10} de um mergulho de $K_{4,4}$ deve possuir, pelo menos, interseção em dois de seus vértices; logo, usando o fato de ser um mergulho orientado de $K_{4,4}$ e a condição da Proposição 3.8.1, concluímos que R_{10}, a menos de mudança de rotulamento, é sempre um emaranhado:
1) linear de grau 1 da forma

$$R_{10}^1 = (aibjckbidh)\,,$$

onde (v_i, v_b) é o lado duplo;
2) pontual de grau 2 das formas

$$R_{10}^2 = (aibjckdhbk) \text{ ou } (aibhckdhbj)\,,$$

onde v_b e v_k são os vértices duplos da primeira sequência, e v_h e v_b são os vértices duplos da segunda;
3) misto de grau 2 da forma

$$R_{10}^3 = (aibjcidjbk)\,,$$

onde v_i é um vértice duplo e (v_b, v_j) é o lado duplo da região;
4) linear de grau 2 da forma

$$R_{10}^4 = (aibjckbicj)\,,$$

onde (v_i, b) e (v_j, v_c) são os dois lados duplos da região.
Toda tentativa de gerar um outo tipo de emaranhado resultou numa contradição, encerrando a demonstração. ∎

Os sete tipos de sequênicias orbitais em (3.20) e (3.21), nas demonstrações das Proposições 3.8.1 e 3.8.2, foram obtidos após exaurirem todas as possibilidades de construções de sequências que obdecem a condição da Proposição 3.2.3. Um problema bastante complexo surgido desse processo, a o mapeamento e definição precisa dessas regiões no modelo espacial da superfície. Este problema pode ser resolvido, obtendo-se um 2-células correspondente à região, sobre uma superfície orientada, e identificando-se a topologia do bordo da região. A identificação topológica de um emaranhado consiste em construir o modelo da região sobre a superfície, verificar que esta é uma 2-células e estabelecer a classe de homologia da fronteira da região. É possível fazer este tipo de identificação? Para alguns casos, sim; porém, quando o grau e o tipo de emaranhado começam a assumir valores maiores, a complexidade do problema é muito grande.

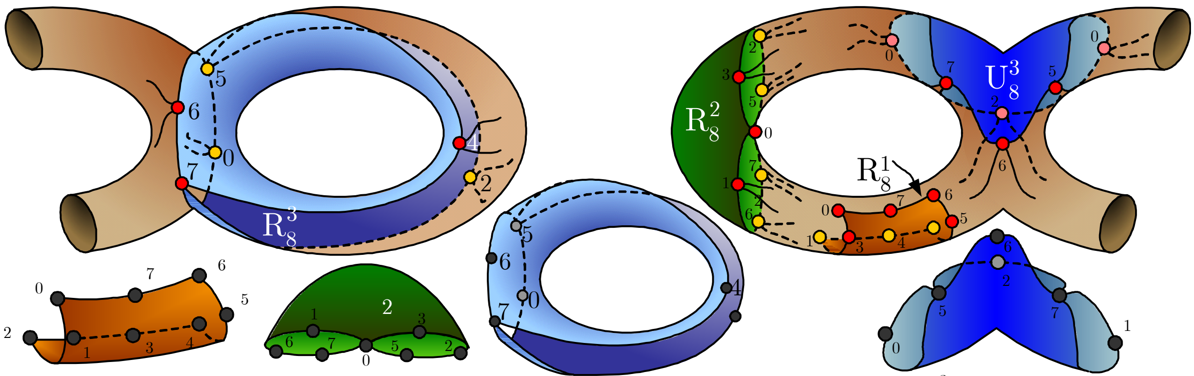
Quanto á identificação da topologia, esta é possível para os emaranhado de graus muito pequenos. É um problema que não foi trabalhado a nível de emaranhados de graus maiores. No entanto, já podemos afirmar que os emaranhados de grau 0, 1 e 2 podem ser identificados topologicamente. Os de graus zero e um foram identificados em [24], como também a topologia de um emaranhado misto não trivial, através de um processo de descomplexificação da região sobre o modelo planar do mergulho. É uma técnica que pode ser aplicada.

Apenas para mostrar que este tipo de identificação topológica é possível, o próximo resultado identifica a classe de homologia dos emaranhados R_8 de mergulhos orientados do grafo completo $K_{m,n}$. Neste processo, o simbolo $\cong$ será utilizado com o significado de *isomorfo*.

Teorema 3.8.3 *Seja $\partial(R_8)$ a fronteira da região octogonal de um mergulho orientado de um grafo completo bipartido. Então a classe de homologia de $\partial(R_8)$ é dada por:*

$$H(\partial(R_8)) \cong \begin{cases} \{0\}, & se\ \varpi(R_8) = 0, \\ \mathbb{Z}, & se\ \varpi(R_8) = 1, \\ \mathbb{Z}^2, & se\ \varpi(R_8) = 2. \end{cases}$$

Demonstração. De fato, para cada caso de emaranhado, a região R_8 é um 2-células e a sequência orbital que define a fronteira $\partial(R_8)$ deve satisfazer a Proposição 3.2.3. Topologicamente, os únicos modos de obter regiões de 2-células com fronteiras que satisfazem a Proposição 3.2.3, são como os modelos de regiões octogonais ilustrados na Figura 3.8.1.



a) R_8^1=(01234567) b) R_8^2=(03255761) c) R_8^3=(67455761) d) U_8^3=(76505270)

Figura 3.8.1: Topologia dos emaranhados R_8 de $K_{m,n}$

Todas as regiões destacadas na Figura 3.8.1 são de 2-células, possuem 8 lados e, com exceção de $U_3^8 = (7,6,5,0,5,2,7,0)$ em d), suas fronteiras satisfazem as condições da Proposição 3.2.3. Portanto, são regiões vindas de um mergulho de 2-células de um grafo $K_{m,n}$, exceto, é óbvio, a região U_3^8. É fácil ver que a fronteira de R_8^1 em a) é homotópica a um ponto; logo, $H(\partial(R_8^1)) \cong \{0\}$. Em b), $\partial(R_8^2)$ é homotópico a um círculo, e portanto $H(\partial(R_8^2)) \cong \mathbb{Z}$. Finalmente, em c), constatamos que $\partial(R_8^2)$ é homotópico a um oito (dois círculos), e portanto $H(\partial(R_8^3)) \cong \mathbb{Z}^2$, onde $\mathbb{Z}^2$ é a soma direta $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. ∎

Apesar da região $U_3^8 = (7,6,7,0,5,2,7,0)$ ser um mergulho de 2-células orientado de um 8-lados, ela não pode sequer ser uma região de um mergulho orientado do grafo completo K_n, uma vez que a seqüência orbital desta teria que possuir três termos consecutivos distintos [24]. Observe que U_3^8 contém a subsequência $\cdots, 5, 0, 5, \cdots$.

Sugerimos como proposta para futuros trabalhos identificar a topologia das regiões de mergulhos do grafo completo K_n e do grafo completo bipartido $K_{m,n}$.

3.9 Prova da Não Existência da Partição $R_{6,8,8,10}$

Uma inspeção nos 36 arquivos de saída do Algoritmo 2.8.1, mostra que $R_{6,8,8,10}$ de $3T$ é á única partição não existente em mergulhos orientados de 2-células de $K_{4,4}$. Do ponto de vista da matemática, é possível provar que $R_{6,8,8,10}$ não é um mergulho orientado de $K_{4,4}$? A resposta é sim e veremos que há meios, embora engenhosos, de provar a não existencia de um mergulho, mesmo sabendo que a sua partição atende as condições da característica de Eüler da superfície.

Lema 3.9.1 *A partição $R_{6,8,8,10}$ de $3T$ é a única que não existe em mergulhos orientados de 2-células de $K_{4,4}$.*

Demonstração. Suponha que exista um mergulho de $K_{4,4}$ sobre uma superfície orientada Ω contendo as regiões R_8 e R_{10}. Estas regiões só podem ser dos tipos relacionados nas Proposições 3.8.1 e 3.8.2. Devemos mostrar então que todas as 12 combinações possíveis de regiões R_8 em (3.20) e R_{10} em (3.21) não podem fazer parte de um mergulo da forma $R_{6,8,8,10}$. Observe que (10325436) e (0123476527) são emaranhados do tipo R_8^2 e R_{10}^2. Usando o procedimento inverso do Algoritmo 2.8.1, para construir a rotação parcial $\Theta_{R_{8,19}}$ que contém as regiões R_8 e R_{10}, a partir de suas respectivas sequências orbitais (10325436) e (0123476527) , temos que:

$$\Theta_8 = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & & \\ 6 & 0 & & \\ 3 & 5 & & \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & & \\ 2 & 4 & & \\ 3 & 1 & & \\ & & & \end{bmatrix}, \ \Theta_{8,10} = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & & 7 \\ 6 & 0 & 2 & \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 7 & \\ 2 & 4 & & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Theta = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, o sistema de rotações de $K_{4,4}$ só poderá assumir a forma Θ acima. Pelo Algoritmo 2.8.1, as sequências orbitais do mergulho de $K_{4,4}$ munido so sistema de rotações Θ:

$$\Gamma_\Theta = \{(3056)\,,(10325436)\,,(0123476527)\,,(5074167214)\}\,, \tag{3.22}$$

e portanto, um mergulho da forma $K_{4,4}(\Theta_1) \hookrightarrow 3T \equiv R_{4,8,10,10}$, com partição diferente de $R_{6,8,8,10}$. Com procedimentos análogos, mostramos, no Apêndice A, que os demais casos de combinações de regiões R_8 e R_{10} em (3.20) e (3.21) , na composição de sistemas de rotações parciais de $K_{4,4}$, quando completados, produzem sempre mergulhos distintos de $R_{6,8,8,10}$. Consequentemente, não existem mergulhos orientados de $K_{4,4}$ da forma $R_{6,8,8,10}$. ∎

Concluída a demonstração do Lema 3.9.1, observamos que, das doze combinações possíveis dos tipos de regiões R_8 e R_{10}, relacionadas em (3.20) e (3.21) , somente as oito combinações seguintes

$$R_8^1 R_{10}^2, R_8^2 R_{10}^1, R_8^2 R_{10}^2, R_8^2 R_{10}^3, R_8^2 R_{10}^4, R_8^3 R_{10}^2, R_8^3 R_{10}^3 \text{ e } R_8^3 R_{10}^4, \tag{3.23}$$

podem fazer parte da classe de partições $\overline{\theta}_{AD}$. Na demonstração do Lema 3.9.1 basta verificar a condição para pares de sequências orbitais representantes dos tipos de combinações em (3.23) . E os emaranhados que contêm as regiões do tipo

$$R_8^1 R_{10}^1, R_8^1 R_{10}^3, R_8^1 R_{10}^4 \text{ e } R_8^3 R_{10}^1, \tag{3.24}$$

existiriam? Se existem, como identificá-los?

Antes de resolvermos esta questão é importante saber que uma escolha de representantes para os emaranhados que contêm os tipos de regiões relacionados em (3.23), identificados na classe $\overline{\theta}_{AD}$, consta dos seguintes pares

$$\begin{aligned}
R_8^1 &= (10325476) \text{ e } R_{10}^2 = (0123416527), R_8^2 = (01234527) \text{ e } R_{10}^1 = (0567214763), \\
R_8^2 &= (10325436) \text{ e } R_{10}^2 = (0123476527), R_8^2 = (01236527) \text{ e } R_{10}^3 = (1032543056), \\
R_8^2 &= (10325076) \text{ e } R_{10}^4 = (0563416543), R_8^3 = (05432563) \text{ e } R_{10}^2 = (0123674527), \\
R_8^3 &= (07652745) \text{ e } R_{10}^3 = (1032543056), R_8^3 = (01230527) \text{ e } R_{10}^4 = (0765416745).
\end{aligned}$$

Estes pares foram obtidos através de uma busca em um dos arquivos de saída do Algoritmo 2.8.1, a classe $\overline{\theta}_{AD}$ que fixa as rotações A e D dos vértices v_0 e v_1. Nesta inspeção o objetivo foi identificar o maior número possível de emaranhados distintos. A Tabela 3.9.1 contém esta relação juntamente com a classificação de cada emaranhado.

Os casos de emaranhados não encontrados na inspeção da classe θ_{AD}, estariam na parte não inspecionada (são 1408 conjuntos de sequência orbitais contidas em um conjunto de 56 656) de $\overline{\theta}_{AD}$? Estaria em outra classe diferente de $\overline{\theta}_{AD}$? Ou não existiriam de fato? Como o processo de inspeção é muito lento e cansativo, já que o mesmo requer concentração extrema para identificação dos graus de emaranhados, tais interrogações requerem uma inspeção completa nos elementos conjunto $\overline{\theta}_{AD}$, e métodos que provem que duas classes distintas de $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]/\theta_{1,2}$ possuem, além dos mesmos número de tipo de merguhos, também os mesmos tipos de emaranhados. No entanto, todos os casos de combinações em (3.23) foram testados (veja Apêndice A), de modo análogo a demonstração do Lema 3.9.1, e todos deram resultados idênticos.

O que se pode fazer no sentido de mostrar que só existem os oito tipos de combinações possíveis em (3.23) é provar que os quatros pares de sequência em (3.24) existem, e as suas classes podem ser identificadas. É o que faremos em seguida.

R_α	$AEAECgaf$	ϖ	σ	δ	ϖ_{R^i}	σ_{R^i}	ϵ_{R^i}	ϵ_t	R_α	$AEAEbgCf$	ϖ	σ	δ	ϖ_{R^i}	σ_{R^i}	ϵ_{R^i}	ϵ_t
R_4^1	0563	0	0	0	0	0	0	5	R_4^1	0563	0	0	0	0	0	0	4
R_8^2	10325436	1^3	0	3	1	0	1		R_8^2	10325476	0	0	3	0	0	0	
R_{10}^3	0123476527	1^{27}	0	3	2	0	2		R_{10}^3	0123416527	1^{12}	0	3	2	0	2	
R_{10}^4	0741672145	1^7	14	3	1	1	2		R_{10}^4	0743672145	1^{74}	0	3	2	0	2	
R_α	$AEAFagBg$	ϖ	σ	δ	ϖ_{R^i}	σ_{R^i}	ϵ_{R^i}	ϵ_t	R_α	$AEAFagce$	ϖ	σ	δ	ϖ_{R^i}	σ_{R^i}	ϵ_{R^i}	ϵ_t
R_4^1	1634	0	0	0	0	0	0	6	R_4^1	1472	0	0	0	0	0	0	5
R_8^2	07652745	1^{57}	0	3	2	0	2		R_6^2	01236527	1^2	0	3	1	0	1	
R_{10}^3	1032543056	1^5	03	3	1	1	2		R_{10}^3	1032543056	1^5	03	3	1	1	2	
R_{10}^4	0123672147	1^7	12	3	1	1	2		R_{10}^4	0763416745	1^7	76	3	1	1	2	
R_α	$AEAGaGCe$	ϖ	σ	δ	ϖ_{R^i}	σ_{R^i}	ϵ_{R^i}	ϵ_t	R_α	$AEAeBFae$	ϖ	σ	δ	ϖ_{R^i}	σ_{R^i}	ϵ_{R^i}	ϵ_t
R_4^1	1472	0	0	0	0	0	0	6	R_4^1	1036	0	0	0	0	0	0	6
R_8^2	05432563	1^{35}	0	3	2	0	2		R_8^2	01230527	1^{02}	0	3	2	0	2	
R_{10}^3	1034165076	1^0	16	3	1	1	2		R_{10}^3	0765416745	0	76, 54	3	0	2	2	
R_{10}^4	0123674527	1^{27}	0	3	2	0	2		R_{10}^4	1432563472	1^2	34	3	1	1	2	
R_α	$AEAEcebf$	ϖ	σ	δ	ϖ_{R^i}	σ_{R^i}	ϵ_{R^i}	ϵ_t	R_α	$AEAFaeCe$	ϖ	σ	δ	ϖ_{R^i}	σ_{R^i}	ϵ_{R^i}	ϵ_t
R_4^1	1654	0	0	0	0	0	0	4	R_4^1	1472	0	0	0	0	0	0	5
R_8^2	01234527	1^2	0	3	1	0	1		R_8^2	10325076	1^0	0	3	1	0	1	
R_{10}^3	1032507436	1^{03}	0	3	2	0	2		R_{10}^3	0123674527	1^{27}	0	3	2	0	2	
R_{10}^4	0567214763	0	76	3	0	1	1		R_{10}^4	0563416543	0	56, 34	3	0	2	2	

Tabela 3.9.1: Emaranhados distintos da classe $R_{4,8,10,10}$

Teorema 3.9.2 *Existem emaranhados de $K_{4,4}$ com regiões do tipo $R_8^1R_{10}^1$, $R_8^1R_{10}^3$, $R_8^1R_{10}^4$ e $R_8^3R_{10}^1$ dada pelas condições em* (3.20) *e* (3.21)*.*

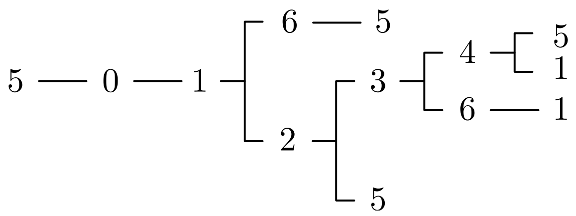
Demonstração. Suponha que exista um mergulho de $K_{4,4}$ com uma região do tipo $R_{10}^1 = (0567214763)$, então o sistema de rotação parcial de $K_{4,4}$ é da forma

$$\Theta_{R_{10}^1} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 5 & & \\ 2 & 4 & & \\ 7 & 1 & & \\ 6 & 0 & & \\ 1 & 7 & & \\ 0 & 6 & & \\ 5 & 7 & 3 & \\ 6 & 2 & & 4 \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Preenchendo a matriz $\Theta_{R_{10}^1}$ em (3.25), com todas as possibilidades possíveis de rotações de $K_{4,4}$ munido do rotulamento fixado na Figura 3.6.1, concluímos que as subsequênicias da rotação de cada vértice v_i de $K_{4,4}$, que podem contribuírem para a formação de um emaranhado R_8^1 de grau zero, deve ter necessariamente uma das formas das subsequências dos seguintes de vértices

$$\begin{array}{lcl}
0 & : & 51, 17, 73, 57, 71, 13 \\
1 & : & 40, 06, 62, 46, 60, 02 \\
2 & : & 13, 35, 57, 15, 53, 37 \\
3 & : & 02, 24, 46, 04, 42, 26 \\
4 & : & 73, 35, 51, 75, 53, 31 \\
5 & : & 62, 24, 40, 64, 42, 20 \\
6 & : & 31, 15 \\
7 & : & 20, 04.
\end{array}$$

Suponha então que o emaranhado seja da forma $R_8^1 = (501\cdots)$; logo, pelo Algoritmo 2.8.1, todas as possibilidades para $R_8^1 = (501\cdots)$ são dadas pelo seguinte diagrama de árvore



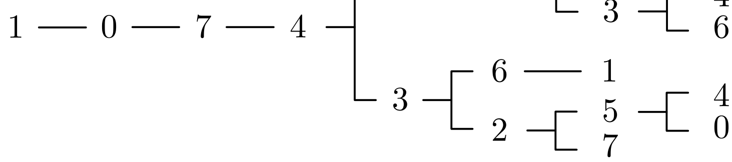
Pelo diagrama acima, o conjunto das possibilidades de sequências de mergulhos de $K_{4,4}$ contendo a região R_{10}^1 e a subsequência 501 são dadas por

$$(50165\cdots), (5012345\cdots), (5012341\cdots), (5012361\cdots), (50125\cdots). \tag{3.26}$$

Observe que todas as seqüências em (3.26) satisfazem a condição da Proposição 3.2.3, portanto podem ser, dependendo de seu comprimento, sequências de um mergulho de $K_{4,4}$, porém, se estabelecermos que todas devem ter comprimento 8, a sequênica $(5012345\cdots)$ não poderia ser um mergulho de $K_{4,4}$, e nem poderia ser do tipo R_8^1. As demais sequências, apesar de poderem tornar-se uma sequência de comprimento 8 de um meruglho de $K_{4,4}$, não seriam do tipo R_8^1, teriam que ter necessariamente comprimentos maior que 8.

Concluímos, portanto, que não existem emaranhados R_8 de grau zero que contém a subsequência 501 e a região R_{10}^1. Mas contendo a subseqûencia 107, existiria, nestas condições, um emaranhado R_8 de grau zero? É o que veremos a seguir.

O diagrama de árvore seguinte contém todas as probabilidades de existências de sequências de mergulhos de $K_{4,4}$ contendo R_{10}^1 e a subsequência 107.



O conjunto de sequência orbitais resultante do diagrama de árvore acima é dado portanto por

$$\begin{gathered}(107450\cdots),(1074527\cdots),(10745234),(10745236),\\(1074361\cdots),(10743254),(10743250),(1074327\cdots).\end{gathered}\tag{3.27}$$

Analisando as sequências de (3.27), vemos que todas atendem a condição da Proposição 3.2.3, portanto são sequências de mergulhos de $K_{4,4}$, porém, quando se trata de sequências de comprimento 8, $(1074361\cdots)$ é a única que não faz parte de um mergulho de $K_{4,4}$. Além disso, podemos ver que as sequências $(107450\cdots),(1074527\cdots)$ e $(1074327\cdots)$ são todas de mergulhos de $K_{4,4}$, no entanto, são todas correspondentes a emaranhados pontuais de grau diferente de zero. As regiões do tipo R_8 definidas pelas sequências $(10745234),(10743254)$ e (10743250) são todas emaranhados pontuais de grau 1. Contudo, a sequência (10745236) é a que estávamos procurando, é a única que atende a condição do tipo de R_8^1, isto é, correspondente a um emaranhado de grau zero. Neste caso, os sistema de rotações parciais contendo as regiões $R_8^1=(10745236)$ e $R_{10}^1=(0567214763)$ correspondem a uma única rotação de $K_{4,4}$, como mostra a seguinte implicação:

$$\Theta_{R_8^1R_{10}^1}=\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\begin{bmatrix}3&5&1&7\\2&4&6&0\\7&1&5&3\\6&0&&2\\1&7&5&\\0&6&4&2\\5&7&3&1\\6&2&0&4\end{bmatrix}\Rightarrow\Theta_{R_8^1R_{10}^1}=\begin{bmatrix}3&5&1&7\\2&4&6&0\\7&1&5&3\\6&0&4&2\\1&7&5&3\\0&6&4&2\\5&7&3&1\\6&2&0&4\end{bmatrix}.$$

Consequentemente, o conjunto das seqûencias orbitais do mergulho é dado por

$$\Gamma=\{(0567214763),(10745236),(5012),(7034165432)\}$$

e portanto é um mergulho da forma $K_{4,4}(\Theta)\hookrightarrow 3T\equiv R_{4,8,10,10}$. Podemos identificar, então, o sistema de rotações deste mergulho, o qual é dado por $\Theta=cDCFadbe$, consequentemente, um mergulho da classe $\overline{\theta}_{cD}$ da partição $\mathbb{M}_{4,4}[\mathbb{Z}_8]/\theta_{1,2}$, diferente da classe $\overline{\theta}_{AD}$. A conclusão é portanto: o grafo $K_{4,4}$ contêm mergulhos com região do tipo R_8^1 e R_{10}^1, embora esta não esteja na classe $\overline{\theta}_{AD}$.

De modo análogo, será mostrado no Apêndice B, que todas as combinações possíveis de regiões R_8^1 e R_{10}^1, relacionadas neste teorema, existem. ∎

Uma conclusão muito importante que se tira do Teorema 3.9.2, é que existe uma partição homogênea do conjunto dos sistemas de rotações do grafo completo bipartido $K_{m,n}$, em classes que fixam as rotações de k vértices de $K_{m,n}$, cada classe de rotações contém todas as classes de mergulhos de $K_{m,n}$, e cada classe de mergulhos tem o mesmo número de elementos em todas as classes de rotações. No entanto, uma classe de rotações pode não conter todos os tipos de emaranhados. Estes encontram-se em classes de partições distintas.

Conjectura 3.9.3 *Existe uma partição homogênea* $K_{m,n}\left[\mathbb{Z}_{m+n}\right]/\theta_{i_1,\cdots,i_k}$, *com* $k>1$, *tal que cada* $\overline{\theta}_{i_1,\cdots,i_k}$ *contém todas as classes de mergulhos de* $K_{m,n}$ *e cada classe de mergulho contêm o mesmo número de elementos em todas as classes da partição.*

A afirmação é consequência dos resultados estabelecidos nas Seções 3.6 e 3.7. Verificamos que o resultado da Comjectura 3.9.3 também é válido para o caso do grafo completo.

Uma indagação de bastante interesse é: todas as combinações possíveis de emaranhados existiriam nos mergulhos de $K_{4,4}$? Para o caso de duas regiões, esta afirmação mostrou-se verdadeira. E para os casos de mais de 2 regiões? Só uma análise mais profunda dos emaranhado de $K_{4,4}$ pode elucidar esta dúvida.

Ao conseguirmos concluir a demonstração do Lema 3.9.1, a sensação foi ter obtido ferramentas de grande utilidade para o desenvolvimento da teoria de mergulhos de grafos. São informações que podem ser usadas no problema da construção dos modelos topologicos do mergulhos, no problema da identificação dos casos complexos, como por exemplos, os casos de mergulhos do grafo completo $K_{6,6}$ e do grafo completo bipartido $K_{5,5}$.

Provada a não existência de mergulhos de $K_{4,4}$ da forma $R_{6,8,8,10}$, podemos então classificar as classes de mergulhos através do seguinte teorema.

Teorema 3.9.4 (Teorema da Classificação) *Os mergulhos orientados de* $K_{4,4}$ *encontram-se sobre o conjunto de superfícies* $T, 2T, 3T$ *e* $4T$, *distribuidas em 27 partições, sendo: 1 de* T, *5 de* $2T$, *14 de* $3T$ *e 7 de* $4T$. *Mais exatamente, as partições:*

$$\begin{aligned}
T &= \left\{R_{4,4,4,4,4,4,4,4}\right\}, \\
2T &= \left\{R_{4,4,4,4,4,12}, R_{4,4,4,4,6,10}, R_{4,4,4,4,8,8}, R_{4,4,4,6,6,8}, R_{4,4,6,6,6,6}\right\}, \\
3T &= \{R_{4,4,4,20}, R_{4,4,6,18}, R_{4,4,8,16}, R_{4,4,10,14}, R_{4,4,12,12}, R_{4,6,6,16}, R_{4,6,8,14}, \\
&\quad R_{4,6,10,12}, R_{4,8,8,12}, R_{4,8,10,10}, R_{6,6,6,14}, R_{6,6,8,12}, R_{6,6,10,10}, R_{8,8,8,8}\}, \\
4T &= \left\{R_{4,28}, R_{6,26}, R_{8,24}, R_{10,22}, R_{12,20}, R_{14,18}, R_{16,16}\right\}.
\end{aligned}$$

Demonstração. De fato, pelas igualdades (2.6) e (2.7) os mergulhos mínimo e máximo de $K_{4,4}$ encontram-se em superfícies de gêneros

$$\gamma\left(K_{4,4}\right)=1 \quad \text{e} \quad \gamma_M\left(K_{4,4}\right)=4.$$

Pelo Teorema 2.3.4, os mergulhos de $K_{4,4}$ encontram-se no conjunto das superfícies

$$\mathbb{M}_{4,4}=\left\{T, 2T, 3T, 4T\right\}.$$

Das fórmulas de Eüler (2.4) e da característica da superfície orientada (2.5) as partições $K_{4,4}$ sobre estas superfícies são das formas

$$T \equiv \cup_{i=1}^{8} R_{\alpha_i},\ 2T \equiv \cup_{i=1}^{6} R_{\alpha_i},\ 3T \equiv \cup_{i=1}^{4} R_{\alpha_i},\ 4T \equiv \cup_{i=1}^{2} R_{\alpha_i}.$$

Como as regiões dos mergulhos $K_{4,4}$ totalizam 32 lados, é fácil comprovar que as partições possíveis de $K_{4,4}$ são como as relacionadas na Tabela 3.7.1. Pelo Lema 3.9.1, a partição

$R_{6,8,8,10}$ de $3T$ é á única que não existe em mergulhos orientados de 2-células de $K_{4,4}$, o que mostra o teorema. ∎

Na verdade, a demostração do Teorema da Classificação abrange quase todo o conteúdo do Capítulo 3. Este teorema é a síntese de todos os resultados deste capítulo e tem uma grande importância para os nossos objetivos. A nosssa intenção em futuros trabalhos é obter teoremas semelhantes de classificação do grafo completo K_6 e do grafo completo biparticionado $K_{5,5}$. Acreditamos que é muito difícil identificar os mergulhos de grafos destas duas famílias com número de vértices superiores a estes dois grafos.

Proposição 3.9.5 *Se $\overline{R}_{\alpha_1,\cdots\alpha_k}(\Omega)$ é o conjunto das classes de mergulhos de $K_{4,4}$ que possuem regiões $R_{\alpha_i},\cdots,R_{\alpha_k}$, então, o número de elementos de $\overline{R}_{\alpha_1,\cdots\alpha_k}(\Omega)$ é dado pela Tabela 3.9.2.*

Demonstração. Como todas as 36 partições contêm os mesmos tipos de classes com o mesmo número de elementos, basta multiplicar cada candinalidade de classe na Tabela 3.7.1 por 36, para obter a cardinalidade de cada classe de mergulhos, como mostram os dados relacionados na Tabela 3.9.2. ∎

Classes do toro		Classe bitoro		Classe tritoro				Classe 4-toro	
$\overline{R}_8$	#	$\overline{R}_6$	#	$\overline{R}_4$	#	$\overline{R}_4$	#	$\overline{R}_2$	#
$R_{4,4,4,4,4,4,4,4}$	108	$R_{4,4,4,4,4,4,12}$	4 032	$R_{4,4,4,20}$	75 456	$R_{4,8,8,12}$	13 824	$R_{4,28}$	431 424
		$R_{4,4,4,4,6,10}$	10 368	$R_{4,4,6,18}$	72 576	$R_{4,8,10,10}$	50 688	$R_{6,26}$	138 240
		$R_{4,4,4,4,8,8}$	5400	$R_{4,4,8,16}$	88 128	$R_{6,6,6,14}$	3456	$R_{8,24}$	103 392
		$R_{4,4,4,6,6,8}$	4032	$R_{4,4,10,14}$	79 488	$R_{6,6,8,12}$	19 584	$R_{10,22}$	155 520
		$R_{4,4,6,6,6,6}$	1152	$R_{4,4,12,12}$	36 576	$R_{6,6,10,10}$	5184	$R_{12,20}$	112 896
				$R_{4,6,6,16}$	29 952	$R_{6,8,8,10}$	0	$R_{14,18}$	81 792
				$R_{4,6,8,14}$	31 104	$R_{8,8,8,8}$	1404	$R_{16,16}$	66 240
				$R_{4,6,10,12}$	57 600				
Subtotais	108		24 984		470 880		94 140		1 089 504

Tabela 3.9.2: Cardinalidades das classes de mergulhos de $K_{4,4}$

Observe que o número de mergulhos de $K_{4,4}$, existentes nas classes de uma superfície, aumenta significativamente com a variação do gênero da superfície. Veja que são 108 mergulhos sobre T, 24 984 mergulhos sobre $2T$, 565 020 mergulhos sobre $3T$ e 1679 616 mergulhos sobre $4T$. Quanto ao número de partições ou classes de mergulhos existentes em cada superfície, há um aumento acentuado de classes à medida que o gênero aumenta, a partir do toro, atingindo o valor máximo na família do $3T$, e há uma queda do número de classe na família de $4T$, como mostra o gráfico ilustrado na Figura 3.9.1.

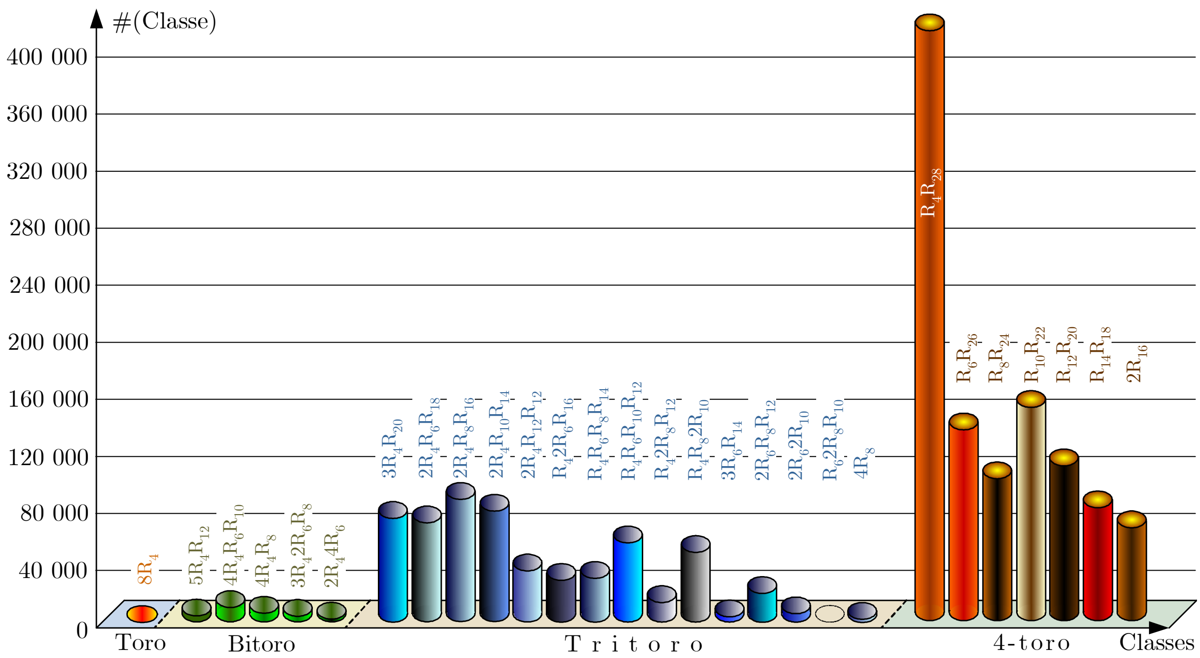


Figura 3.9.1: Gráfico em barras da cardinalidade das classes de mergulhos de $K_{4,4}$

Com o processo de identificação das classes de mergulhos de $K_{4,4}$ exposto acima, colhemos muitas informações importantes em relação à complexidade do problema, existência de modulações particulares de grande interesse para as nossas futuras aplicações e, principalmente, sobre as propriedades, técnicas e métodos relevantes que serão os grandes aliados no trato dos casos mais complexos de identicação de clases de mergulhos de grafos.

Para sermos mais precisos, estamos colhendo subsídos para usar no processo de identificação dos dois próximos casos de grafos de complexidades superiores, o grafo completo K_6 e o grafo completo bipartido $K_{5,5}$, sendo este último o de maior complexidade.

3.10 Classes de Mergulhos Particulares de $K_{m,n}$

O estudo realizado nas Seções 3.7 e 3.8, sobre as proriedades dos mergulhos do grafo $K_{4,4}$, já revelam muitas das características dos mergulhos dos grafos completos bipartidos. Induzidos por estas propriedades, analisaremos, sob o ponto de vista de mergulhos de grafos da família dos grafos completos bipartido, aquelas com propriedades de interesse relevantes para as aplicações futuras deste trabalho.

A regularidade do mergulho, uma das propriedades mais visadas neste trabalho, refere-se ao número de regiões idênticas do mergulho, quanto maior for este número, diremos que maior é o grau de regularidade de mergulho. Sob este aspecto, dizemos que um mergulho é *regular*, quando a sua regularidade é máxima, ou seja, quando todas as suas regiões são idênticas. Por exemplos, os mergulhos de K_{44} da forma

$$K_{4,4} \hookrightarrow T \equiv 8R_4,\ K_{4,4} \hookrightarrow 3T \equiv 4R_8,\ \text{e}\ K_{4,4} \hookrightarrow 4T \equiv 2R_{16},$$

são mergulhos regulares. Portanto, a menos da classe de mergulhos sobre $2T$, todas as classes de mergulhos de $K_{4,4}$ possuem mergulhos regulares.

Apesar dos mergulhos da classe de $2T$ não serem regulares, estes apresentam um alto grau de regularidadade. Observe que as partições desta classe são das formas

$$R_{4,4,4,4,4,12}, R_{4,4,4,4,6,10}, R_{4,4,4,4,8,8}, R_{4,4,4,6,6,8} \text{ e } R_{4,4,6,6,6,6}.$$

Definição 3.10.1 *Seja $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup R_\alpha$, um mergulho de G, tal que a partição $\cup R_{\alpha_i} = \cup_{i=1}^{s} \upsilon_i R_{\alpha_i}$ e $\Sigma \upsilon_i = s$. Para cada região R_{α_i} da partição $\cup R_\alpha$ denominaremos de* grau de regularidade da região R_{α_i}, *denotado por $\circ R_{\alpha_i}$, o número de vezes que a partição $\cup R_\alpha$ contém R_{α_i}, isto é,*

$$\circ\left(R_{\alpha_i}\right) = \upsilon_i.$$

Denominaremos ainda de grau de regularidade da classe $\cup R_\alpha$ *o número real $\circ\left(\cup R_\alpha\right)$ definido pela fórmula*

$$\circ\left(\cup R_\alpha\right) = \frac{\sum_{i=1}^{s} \upsilon_i \log \alpha_i}{ks}, \tag{3.28}$$

onde s é o número de regiões distintas da partição $\cup R_\alpha$.

Aplicando a Definição 3.10.1 nas classes de mergulhos de $K_{4,4}$ sobre $2T$, obtemos os seguintes graus de regularidades relacionadas na Tabela 3.10.1.

Classe	$5R_4R_{12}$		$4R_4R_6R_{10}$			$4R_42R_8$		$3R_42R_6R_8$			$2R_44R_6$	
R_α	R_4	R_{12}	R_4	R_6	R_{10}	R_4	R_8	R_4	R_6	R_8	R_4	R_6
$\circ(R_\alpha)$	5	1	4	1	1	4	2	3	2	1	2	4
$\circ(\cup_{R_\alpha})$	$0,78470$		$0,53553$			$0,80867$		$0,54566$			$0,8283$	

Tabela 3.10.1: Grau de regularidades das classes e respectivas regiões de $K_{4,4} \hookrightarrow 2T$

Voltaremos a utilizar a fórmula (3.28), quando da avaliação do desempenho de um modulação realizada no Capítulo 5. Iremos ver que a fórmula (3.28) é parte integrante da fórmula de desempenho de uma modulação QAMS, quando a eficiência desta é avaliada através das matrizes de probabilidades condicionadas de acertos do canal equiprovável associado à modulação QAMS. Veja que a fórmula (3.28) dar informações sobre a regularidade da modulação, e a eficiência desta depende da regularidade.

3.10.1 Mergulhos orientáveis e não orientáveis

Vimos que os mergulhos de um grafo G ocorrem sobre o conjunto de superfícies $\mathbb{M}(G)$. No caso orientável, este conjunto é dado por

$$\mathbb{M}(G) = \{\gamma T, (\gamma+1)T, \cdots, (\gamma+k)T, \cdots, \gamma_M T\}, \tag{3.29}$$

onde γ e γ_M são os gêneros mínimo e máximo das superfícies orientáveis para o mergulho de G.

No caso não orientável, o conjunto é dado por

$$\widetilde{\mathbb{M}}\,(G) = \{\widetilde{\gamma}P, (\widetilde{\gamma}+1)\,P, \cdots, (\widetilde{\gamma}+\tau)\,P, \cdots, \widetilde{\gamma}_M P\}, \tag{3.30}$$

onde $\widetilde{\gamma}$ e $\widetilde{\gamma}_M$ são os gêneros mínimo e máximo das superfícies não orientáveis de G, τ é um inteiro positivo e P é o plano projetivo. No entanto, a superfície $2P$ é homeomorfa a uma superfície famosa conhecida como *garrafa de Klein* ou *superfície de Klein*. Denominando-a por K, esta relação de homeomorfismo será indicada por

$$2P \cong K. \tag{3.31}$$

Sendo assim, os elementos $(\widetilde{\gamma}+\tau)\,P$ do conjunto $\widetilde{\mathbb{M}}\,(G)$, em (3.30), podem ser representados pelas notações opcionais

$$\frac{\widetilde{\gamma}+\tau-1}{2}KP \ \text{ e } \ \frac{\widetilde{\gamma}+\tau}{2}K \tag{3.32}$$

conforme $\widetilde{\gamma}+\tau$ sejam inteiros ímpar e par, respectivamente. Veja que

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\gamma}+\tau)\,P &= (\widetilde{\gamma}+\tau\text{-}1\text{+}1)\,P = 2\left(\frac{\widetilde{\gamma}+\tau-1}{2}\right)PP = \frac{\widetilde{\gamma}+\tau-1}{2}KP, \text{ se } \widetilde{\gamma}+\tau \text{ é ímpar},\\
(\widetilde{\gamma}+\tau)\,P &= 2\left(\frac{\widetilde{\gamma}+\tau}{2}\right)P = \left(\frac{\widetilde{\gamma}+\tau}{2}\right)(2P) \cong \frac{\widetilde{\gamma}+\tau}{2}K, \text{ se } \widetilde{\gamma}+\tau \text{ é par.}
\end{aligned}$$

Com o objetivos de usar valores menores nos gêneros das superfícies não orientáveis, algumas vezes serão usadas as notações alternativas em (3.32). Outra vantagem desta notação é a relação entre as características de Eüler das superfícies orientável T e não orientável K, isto é,

$$\chi\,(T) = \chi\,(K) = 0.$$

No caso geral, tem-se que $\chi\,(\tau T) = \chi\,(\tau K)$; e portanto, por (2.5), resulta que

$$\chi\,(\tau T) = \chi\,(\tau K) = 2 - 2\tau.$$

Como o número de regiões de um mergulho de G sobre τT e τK dependem de suas características de Eüler, então os mergulhos $G \hookrightarrow \tau T$ e $G \hookrightarrow \tau K$ possuem o mesmo número de regiões. Tal relação, tem como consequência, simplificar o processo de identificação das classes de mergulhos não orientados de um grafo. Identificado os mergulhos orientáveis de G, ou seja as classes de $G \hookrightarrow \tau T$, estas também são as classes de $G \hookrightarrow \tau K$, resta então identificar as classes de de $G \hookrightarrow \tau K$.

Ao adotar as notações τK e τKP para uma superfície não orientável, devemos lembrar que τ não é o gênero da superfície, τ é somente um coeficiente que indica a soma conexas de τ superfícies não orientáveis K ou KP, conforme seja o caso. Com estas notações, os gêneros das superfícies não orientáveis seria dadas por

$$\widetilde{\gamma}\,(\tau K) = 2\tau \text{ e } \widetilde{\gamma}\,(\tau KP) = 2\tau + 1. \tag{3.33}$$

Obviamente que da primeira igualdade em (5.14), resulta que gT e τK possuem o mesmo gênero se, e somente se, $2g = \tau$.

T e K	KP	$2T$ e $2K$	$2KP$	$3T$ e $3K$	$3KP$	$4T$ e $4K$	$4KP$
$R_{4,4,4,4,4,4,4,4}$	$R_{4,4,4,4,4,4,8}$	$R_{4,4,4,4,4,12}$	$R_{4,4,4,4,16}$	$R_{4,4,4,20}$	$R_{4,4,24}$	$R_{4,28}$	R_{32}
	$R_{4,4,4,4,4,6,6}$	$R_{4,4,4,4,6,10}$	$R_{4,4,4,6,14}$	$R_{4,4,6,18}$	$R_{4,6,22}$	$R_{6,26}$	
		$R_{4,4,4,4,8,8}$	$R_{4,4,4,8,12}$	$R_{4,4,8,16}$	$R_{4,8,20}$	$R_{8,24}$	
		$R_{4,4,4,6,6,8}$	$R_{4,4,4,10,10}$	$R_{4,4,10,14}$	$R_{4,10,18}$	$R_{10,22}$	
		$R_{4,4,6,6,6,6}$	$R_{4,4,6,6,12}$	$R_{4,4,12,12}$	$R_{4,12,16}$	$R_{12,20}$	
			$R_{4,4,6,8,10}$	$R_{4,6,6,16}$	$R_{4,14,14}$	$R_{14,18}$	
			$R_{4,4,8,8,8}$	$R_{4,6,8,14}$	$R_{6,6,20}$	$R_{16,16}$	
				$R_{4,6,10,12}$	$R_{6,8,18}$		
				$R_{4,8,8,12}$	$R_{6,10,16}$		
				$R_{4,8,10,10}$	$R_{6,12,14}$		
				$R_{6,6,6,14}$	$R_{8,8,16}$		
				$R_{6,6,8,12}$	$R_{8,10,14}$		
				$R_{6,6,10,10}$	$R_{8,12,12}$		
				$R_{6,8,8,10}$	$R_{10,10,12}$		
				$R_{8,8,8,8}$			

Tabela 3.10.2: Classes de mergulhos orientados e não-orientados de $K_{4,4}$

Com o intuido de relacionar os tipos de partições distintas dos mergulos de $K_{4,4}$, a Tabela 3.10.2 contém as classes de mergulhos orientáveis e não orientáveis do grafo $K_{4,4}$, identificadas pelo processo acima e usando as identificações dos mergulhos orientados da Tabela 3.7.1.

Apesar do objetivo deste trabalho está restrito ao estudo do caso orientável, a relação natural do processo de identificação com o caso não orientável, nos conduz a inclusão deste. Além disso, a identificação das classes de mergulhos não orientáveis é um dos nossos objetivos a serem tratados em breve. A curiosidade surgiu desde o trabalho de Lima [21] e só não foi trabalhado ainda porque há muito o que se conhecer ainda do caso orientável.

3.11 Mergulhos regulares de $K_{n,n}$

O estudo inicial realizado acima sobre o processo de identificação das classes de mergulhos de um grafo, nos revela uma superfície Ω de conjunto de mergulhos de G, $\mathbb{M}(G)$, quando possui uma classe de mergulho regular, esta é única. Neste sentido, exibiremos primeiro a forma dos mergulhos regulares.

Proposição 3.11.1 *Seja D_m o conjunto dos divisores positivos do inteiro m. Então, todo mergulho regular do grafo $G(p,q)$ sobre uma superfície Ω é da forma*

$$G(p,q) \hookrightarrow \Omega \equiv dR_{2q/d}, \ d \in D_{2q}. \tag{3.34}$$

Demonstração. *De fato, em um mergulho regular, todas as regiões devem ser do mesmo tipo. Suponha que $G(p,q) \hookrightarrow \Omega$ contêm d regiões do mesmo tipo; como a soma dos lados de todas as regiões de um mergulho $G(p,q)$ é constante e igual a $2q$, então cada uma das d regiões do mergulho regular é da forma $R_{2q/d}$. Portanto, todo mergulho regular é da forma $G(p,q) \hookrightarrow \Omega \equiv dR_{2q/d}$, e como o número de lados de uma região é um número inteiro $d \in D_{2q}$, então está provada a afirmação.* ■

Segue da Proposição 3.11.1 que uma superfície Ω de $\mathbb{M}(G)$ tem um mergulho regular se e somente se, d é um divisor de $2q$ e o número de regiões de $G(p,q) \hookrightarrow \Omega$ é igual a d, isto é, se todo mergulho de G sobre Ω é da forma $G(p,q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_i^d R_{\alpha_i}$, como será mostrado a seguir.

Proposição 3.11.2 *A superfície Ω de $\mathbb{M}(G)$ tem um mergulho regular se e somente se, d é um divisor de $2q$ e o número de regiões de $G(p,q) \hookrightarrow \Omega$ é igual a d, isto é, G é um mergulho da forma*

$$G(p,q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_i^d R_{\alpha_i}.$$

Demonstração. *Como as regiões de um mergulho regular tem o mesmo número de lados e o total de lados das regiões é igual a $2q$, as condições de existências são necessariamente que o numero de regiões de Ω seja d e este seja um divisor de $2q$. Reciprocamente, se o número de regiões $G(p,q) \hookrightarrow \Omega$ é d e $d|2q$, então existe o mergulho regular $dR_{2q/d}$ sobre Ω.* ■

Vale observar aqui que não existe uma prova matemática para a existência do mergulho regular. A existência deste tem sido observada em todos os casos identificados das classes de mergulhos deste trabalho e em [24]. Até agora foi constatado que todos os modelos de mergulhos regulares, realmente existem. É evidente que a afirmação da proposição refere-se a existência da partição regular. O fato de que o mergulho regular existe é uma conjectura que precisa ainda ser provada, e portanto fica a proposta para futuros trabalhos.

Proposição 3.11.3 *Seja $\mathbb{M}(G)$ o conjunto das superfícies para o mergulho de $G(p,q)$. Se $\Omega \in \mathbb{M}(G)$ contém uma classe de mergulho regular $d\overline{R}_{2q/d}$, esta é única.*

Demonstração. *De fato, suponha que $d_1\overline{R}_{2q/d_1}$ e $d_2\overline{R}_{2q/d_2}$ sejam duas classes regulares de mergulhos de G sobre $\Omega \in \mathbb{M}(G)$. Como o número de regiões de toda a classe de G sobre Ω é constante, segue que $d_1 = d_2$, e portanto $d_1\overline{R}_{2q/d_1} = d_2\overline{R}_{2q/d_2}$, o que mostra a unicidade da classe regular.* ■

Usando os resultados acima, podemos caracterizar os mergulhos regulares de um grafo através do seguinte

Teorema 3.11.4 *Sejam $\mathbb{M}_r(G)$ o conjunto dos mergulhos regulares de $G(p,q)$ sobre $\Omega \in \mathbb{M}(G)$. Se d_i é o número de regiões do mergulho de G sobre $\Omega_i \in \mathbb{M}(G)$, então:*

$$\#(\mathbb{M}_r(G)) = \begin{cases} \#\{d_i : d_i|2q\}, & \text{se } \Omega \text{ é orientável,} \\ \#\{d_i : d_i \in D_{2q} \text{ e } d_i \le t\}, & \text{se } \Omega \text{ é não orientável,} \end{cases}$$

onde t é o número de regiões do mergulho mínimo não orientado de G.

Demonstração. *Seja $D_{2q} = \{d_1, d_2, \cdots, d_s\}$ o conjunto de divisores do inteiro $2q$. Se Ω é orientável, então, por (3.29), G tem mergulhos sobre superfícies*

$$\gamma T, (\gamma + 1) T, \cdots, (\gamma + t) T, \cdots, \gamma_M T.$$

Vimos, na identificação $K_{4,4}$ na Tabela 3.10.2, que os mergulhos são das formas

$$\begin{aligned} \gamma T &\equiv \cup_i^t R_{\alpha_i}, (\gamma+2) T \equiv \cup_i^{t\text{-}2} R_{\alpha_i}, \cdots, (\gamma_M+2) T \equiv \cup_i^4 R_{\alpha_i}, \gamma_M T \equiv \cup_i^2 R_{\alpha_i}, \text{ se } t \text{ é par,} \\ \gamma T &\equiv \cup_i^t R_{\alpha_i}, (\gamma+2) T \equiv \cup_i^{t\text{-}2} R_{\alpha_i}, \cdots, (\gamma_M+2) T \equiv \cup_i^3 R_{\alpha_i}, \gamma_M T \equiv \cup_i^1 R_{\alpha_i}, \text{ se } t \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

Assim, o mergulho regular deve ter números de regiões iguais a

$$\begin{aligned} &t, t-2, \cdots, 6, 4, 2, \text{ se } t \text{ é par, ou} \\ &t, t-2, \cdots, 5, 3, 1, \text{ se } t \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

Mas o mergulho regular $dR_{2q/d}$ possui todas as regiões iguais, então, pela Proposição 3.11.2, ele existe se, e somente se, $d \in \{t, t-2, \cdots, 6, 4, 2\}$ e d é divisor de $2q$, se t é par; ou $d \in \{t, t-2, \cdots, 5, 3, 1\}$ e d é divisor de $2q$, se t é ímpar. Portanto, se d_i é o número de regiões do mergulho de G sobre $\Omega_i \in \mathbb{M}(G)$, segue que

$$\#(\mathbb{M}_r(G)) = \#\{d_i : d_i | 2q\}, \text{ se } \Omega \text{ é orientável.}$$

De modo análogo (veja Tabala 3.10.2), concluímos que os mergulhos não orientados de G são das formas

$$\widetilde{\gamma} P \equiv \cup_i^t R_{\alpha_i}, (\widetilde{\gamma} + 1) P \equiv \cup_i^{t-1} R_{\alpha_i}, \cdots, (\widetilde{\gamma}_M + 1) P \equiv \cup_i^2 R_{\alpha_i}, \widetilde{\gamma}_M P \equiv \cup_i^1 R_{\alpha_i},$$

e portanto, as partições das superfícies ocorrem em números de regiões dados pelo conjunto

$$\{t, t-1, t-2, \cdots, 3, 2, 1\}.$$

Consequentemente, todo divisor d de $2q$, $d \leq t$, pertence a $\{t, t-1, \cdots, 3, 2, 1\}$. Logo, $\widetilde{\mathbb{M}}_r(G)$ contém um mergulho regular $dR_{2q/d}$ para todo divisor d satisfazendo a condição acima. Portanto,

$$\#(\mathbb{M}_r(G)) = \#\{d_i : d_i \in D_{2q} \text{ e } d_i \leq t\}, \text{ se } \Omega \text{ é não orientável,}$$

o que encerra a demonstração. ■

Corolário 3.11.5 *Sejam $\mathbb{D}(K_{n,n})$ o conjunto dos mergulhos regulares de $G(p,q)$ sobre $\Omega \in \mathbb{M}(K_{n,n})$. Se d_i é o número de regiões do mergulho de G sobre $\Omega_i \in \mathbb{M}(K_{n,n})$, então:*

$$\#(\mathbb{D}(K_{n,n})) = \begin{cases} \#\{d_i : d_i \in D_{2n^2}\}, \text{ se } \Omega \text{ é orientável,} \\ \#\{d_i : d_i \in D_{2n^2} \text{ e } d_i \leq t\}, \text{ se } \Omega \text{ é não orientável,} \end{cases}$$

onde t é o número de regiões do mergulho mínimo não orientado de G.

Demonstração. Caso particular do Teorema 3.11.4 e considerando que em $K_{n,n}$ vale a igualdade $2q = 2n^2$. ∎

O Teorma 3.11.4 e Corolário 3.11.5, identificam, respectivamente, os tipos de modelos de mergulhos regulares, orientáveis ou não, vindos de mergulhos de um grafo qualquer G e do caso particular do grafo completo bipartido $K_{6,6}$. Eles não garantem a existência desses modelos regulares. Esta é garantida pela Proposição 3.11.2.

Os mergulhos regulares são sempre os mais importantes para o contexto de modulações, pois correspondem aos espaços de sinais geometricamente uniformes (e.s.g.u.). Quando o projeto de sinais é do tipo e.s.g.u. há um ganho na redução dos cálculos computacionais no sentido de minimizar a sua complexidade.

Para entender o porcesso de identificação de mergulhos regulares, através do Teorema 3.11.4, consideremos o caso do grafo completo bipartido $K_{6,6}$. Pelas igualdades (2.6) e (2.7), os mergulhos mínimo e máximo de $K_{6,6}$ encontram-se sobre as superfícies de gêneros

$$\gamma\left(K_{6,6}\right) = \left\{\frac{1}{4}\left(6-2\right)\left(6-2\right)\right\} = 4 \text{ e } \gamma_M\left(K_{6,6}\right) = \left[\frac{1}{2}\left(6-1\right)\left(6-1\right)\right] = 12.$$

Como o mergulho mínimo encontra-se sobre $4T$, segue da igualdade (2.5) que a característica de Eüler de $4T$ é dada por

$$\chi\left(\Omega\right) = 2 - 2\gamma \Rightarrow \chi\left(\Omega\right) = 2 - 2\cdot 4 = -6,$$

logo, pela igualdade (2.4), o número de regiões do mergulho mínimo $K_{6,6} \hookrightarrow 4T$ é dado por

$$\chi\left(\Omega\right) = v - e + f \Rightarrow -6 = 12 - 36 + f \Rightarrow f = 18,$$

isto é, o mergulho mínimo de $K_{6,6}$ é da forma

$$K_{6,6} \hookrightarrow 4T \equiv \cup_{i=1}^{18} R_{\alpha_i}.$$

Além disso, a soma dos lados das regiões de $K_{6,6} \hookrightarrow 4T$ é igual a

$$2n^2 = 2\cdot 6^2 = 72,$$

e para sermos mais precisos, o mergulho mínimo é da forma

$$K_{6,6} \hookrightarrow 4T \equiv 18R_4. \tag{3.35}$$

Consequentemente, um mergulho regular. Obtido o mergulho mínimo, e sabendo que o gênero do mergulho máximo é 12, o Teorema 2.3.4 nos dá o conjunto das superfícies para os mergulhos orientados de 2-células de $K_{6,6}$, como sendo o conjunto

$$\mathbb{M}\left(K_{6,6}\right) = \left\{4T, 5T, 6T, 7T, 8T, 9T, 10T, 11T, 12T\right\}. \tag{3.36}$$

Por outra parte, a partição do mergulho mínimo de $K_{6,6}$ é composta de 18 regiões, logo, se f_Ω é o número de regiões da partição $\cup_{i=1}^{f} R_{\alpha_i}$ do mergulho de $K_{6,6}$ sobre Ω, então o número de partições nas superfícies de $\mathbb{M}\left(K_{6,6}\right)$ são dadas por

$$f_{4T} = 18,\ f_{5T} = 16,\ f_{6T} = 14,\ f_{7T} = 12,$$
$$f_{8T} = 10, f_{9T} = 8, f_{10T} = 6, f_{11T} = 4, f_{12T} = 2.$$

Uma vez que o conjunto dos divisores de 72 é dado por

$$D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\},$$

e as regiões das superfícies $\mathbb{M}(K_{6,6})$ que são divisores de 72 são

$$18, 12, 8, 6, 4 \text{ e } 2,$$

podemos concluir, do Corolário 3.11.5, que os mergulhos orientados regulares de $K_{6,6}$ são os seguintes

$$\begin{array}{lll} K_{6,6} \hookrightarrow 4T \equiv 18R_4, & K_{6,6} \hookrightarrow 7T \equiv 12R_6, & K_{6,6} \hookrightarrow 9T \equiv 8R_9, \\ K_{6,6} \hookrightarrow 10T \equiv 6R_{12}, & K_{6,6} \hookrightarrow 11T \equiv 4R_{18}, & K_{6,6} \hookrightarrow 12T \equiv 2R_{36}. \end{array} \tag{3.37}$$

Observação 3.11.6 *De modo análogo ao que acontece com os mergulhos orientáveis, os não orientáveis também só possuem regiões com números pares de lados maiores ou iguais a 4.*

Portanto, segue da Observação 3.11.6, que não existe o mergulho da forma $K_{6,6} \hookrightarrow 9T \equiv 8R_9$. Este é o único não existente em (3.37); logo, são cinco mergulhos regulares orientáveis vindo do grafo completo bipartido $K_{6,6}$.

Observamos que a divisão de 72 por 8 é exata, isto é, igual a 18. Logo não pode existir mergulhos de $K_{6,6}$ com mais de 18 regiões, inclusive em superfícies não orientáveis. Portanto o mergulho mínimo não orientável de $K_{6,6}$ é da mesma forma do mergulho mínimo orientável em (3.35). Como $4T$ e $4K$ possuem a mesma característica de Eüler, o número de regiões de mergulhos de $K_{6,6}$ sobre estas superfícies são iguais, assim o conjunto das superfícies não orientáveis para os mergulhos de $K_{6,6}$ é dado por

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{M}}(K_{6,6}) = \{&4K, 4KP, 5K, 5KP, 6K, 6KP, 7K, 7KP, 8K, 8KP, \\ &9K, 9KP, 10K, 10KP, 11K, 11KP, 12K, 12KP\} \end{aligned} \tag{3.38}$$

e o número de regiões do mergulho em cada superfície é dado por

$$\begin{array}{llllll} f_{4K} = 18, & f_{4KP} = 17, & f_{5K} = 16, & f_{5KP} = 15, & f_{6K} = 14, & f_{6KP} = 13, \\ f_{7K} = 12, & f_{7KP} = 11, & f_{8K} = 10, & f_{8KP} = 9, & f_{9K} = 8, & f_{9KP} = 7, \\ f_{10K} = 6, & f_{10KP} = 5, & f_{11K} = 4, & f_{11KP} = 3, & f_{12K} = 2, & f_{12KP} = 1. \end{array}$$

Por outro lado, um mergulho regular não orientável de $K_{6,6}$ deve ter, por número de regiões, um divisor de 72 menor ou igual a 18, o número de regiões do mergulho mínimo não orientável de $K_{6,6}$. Consequentemente, os mergulhos regulares não orientáveis de $K_{6,6}$ ocorrem em mergulhos cujos números de regiões são

$$18, 12, 9, 8, 6, 4, 3, 2 \text{ e } 1.$$

Logo, existem nove modelos possíveis de mergulhos regulares não orientáveis do grafo $K_{6,6}$, a saber:

$$\begin{array}{lll} K_{6,6} \hookrightarrow 4K \equiv 18R_4, & K_{6,6} \hookrightarrow 7K \equiv 12R_6, & K_{6,6} \hookrightarrow 8KP \equiv 9R_8, \\ K_{6,6} \hookrightarrow 9K \equiv 8R_9, & K_{6,6} \hookrightarrow 10K \equiv 6R_{12}, & K_{6,6} \hookrightarrow 11K \equiv 4R_{18}, \\ K_{6,6} \hookrightarrow 11KP \equiv 3R_{24}, & K_{6,6} \hookrightarrow 12K \equiv 2R_{36}, & K_{6,6} \hookrightarrow 12KP \equiv R_{72}. \end{array} \tag{3.39}$$

Mas, pela Observação 3.11.6, um modelo de mergulho não orientável não deve ter regiões com um número ímpar de lados; assim, $K_{6,6} \hookrightarrow 9K \equiv 8R_9$ não pode existir. Portanto, existem 8 mergulhos regulares de $K_{6,6}$ sobre superfícies não orientáveis.

Diferentemente do grafo completo K_n o qual possue regiões com um número ímpar de lados, o grafo completo biparticionado não tem esta propriedade, todas as regiões vindas de mergulhos de grafos completos biparticionados possuem um número par de lados. Esta propriedade tem sido muito relvante no sentido de caracterizar e diferenciar estes dois tipos de grafos. Vários resultados deste trabalho dependem diretamente desta propriedade.

Concluímos portanto o processo de identificação das classes de mergulhos regulares do grafo completo biparticionado $K_{6,6}$. Além disso, deduzimos dos resultados apresentados acima que é verdadeira a afirmação seguinte, em relação ao número de classes dos mergulhos regulares orientáveis e não orientáveis do grafo $K_{6,6}$.

Proposição 3.11.7 *Os mergulhos de $K_{6,6}$ contêm 13 classes de mergulhos regulares, sendo: 5 sobre superfícies orientáveis, os mergulhos em (3.35), exceto a classe $9T \equiv 8R_9$; e 8 sobre superfícies não orientáveis, os mergulhos em* (3.39)*, exceto a classe $9K \equiv 8R_9$.*

Utilizando o processo de identificação acima relacionamos, na Tabela 3.11.1, os modelos de mergulhos regulares orientáveis e não orientáveis do grafo completo bipartido $K_{n,n}$, para os valores de $n = 2, 3, 4, \cdots, 16$.

Para efeito de simplificação, foram usadas várias notações matemáticas na construção daTabela 3.11.1 com os seguintes significados: Ω e $\widetilde{\Omega}$ representam superfícies orientáveis e não orientáveis, respectivamente: $dR_\alpha|gT/K$ indica os mergulhos equivalentes do grafo G nas superfícies orientável gT e na superfície não orientável gK, com o mesmo número d de regiões do tipo R_α, isto é,

$$dR_\alpha|gT/K \Leftrightarrow \begin{cases} G \hookrightarrow gT \equiv dR_\alpha \\ G \hookrightarrow \tau K \equiv dR_\alpha; \end{cases}$$

e, por último, $dR_\alpha|gKP$ corresponde ao único modelo de mergulho de G sobre a superfície não orientável de gênero ímpar gKP (este não tem um equivalente em superfícies orientáveis), ou seja, em notação matemática, temos:

$$dR_\alpha|\tau KP \Leftrightarrow G \hookrightarrow \tau KP \equiv dR_\alpha.$$

Concluímos na construção dos modelos de mergulhos regulares da Tabela 3.11.1, que a existência do modelo regular depende basicamene do número de divisores de $2q$, onde q é o número de lados do grafo. Para ter uma idéia da quantidade de modelos regulares possíveis de mergulhos de $K_{n,n}$, observe o gráfico em barras ilustrado na Figura 3.11.1.

A função da contrução do grafico em barras da Figura 3.11.1 é mostrar, a perda de mergulhos regulares que ocorrem no conjunto de modelos possíveis de mergulhos do grafo, quando comparados com o número total de modelos de mergulhos regulares existentes no grafo $K_{n,n}$. Observamos que a perda refere-se aos modelos que possuem regiões com um número símpar de lados.

$K_{n,n}$	$dR_\alpha\|_{\Omega/\widetilde{\Omega}}$	$\#\,(dR_\alpha)$		
		Ω	$\widetilde{\Omega}$	T
$K_{2,2}$	$2R_4\|_{S/P},\ R_8\|_{T/K}$	2	2	4
$K_{3,3}$	$3R_6\|_{T/K},\ 2R_9\|_{KP},\ R_{18}\|_{2T/2K}$	2	3	5
$K_{4,4}$	$8R_4\|_{T/K},\ 4R_8\|_{3T/3K},\ 2R_{16}\|_{4T/4K},\ R_{32}\|_{4KP}$	3	4	7
$K_{5,5}$	$5R_{10}\|_{T/K},\ 2R_{25}\|_{KP},\ R_{50}\|_{8T/8K}$	2	3	5
$K_{6,6}$	$18R_4\|_{4T/K},\ 12R_6\|_{7T/K},\ 9R_8\|_{8KP},\ 8R_9\|_{9T/K},$ $6R_{12}\|_{10T/K},\ 4R_{18}\|_{11T/K},\ 3R_{24}\|_{11KP},\ 2R_{36}\|_{12T/K},\ R_{72}\|_{12KP}$	6	9	15
$K_{7,7}$	$14R_7\|_{12KP},\ 7R_{14}\|_{15T/K},\ 2R_{49}\|_{17KP},\ R_{98}\|_{18T/K}$	2	4	6
$K_{8,8}$	$32R_4\|_{9T/K}, 16R_8\|_{17T/K}, 8R_{16}\|_{21T/K}, 4R_{32}\|_{23T/K}, 2R_{64}\|_{24T/K}, R_{128}\|_{24KP}$	5	6	11
$K_{9,9}$	$27R_6\|_{19T/K},\ 18R_9\|_{23KP},\ 9R_{18}\|_{28T/K}$ $6R_{27}\|_{29KP},\ 3R_{54}\|_{31T/K},\ 2R_{81}\|_{31KP},\ R_{162}\|_{32T/K}$	4	7	11
$K_{10,10}$	$40R_4\|_{16T/K},\ 25R_8\|_{28KP},\ 20R_{10}\|_{31T/K},\ 10R_{20}\|_{36T/K}$ $8R_{25}\|_{37T/K},\ 5R_{40}\|_{38KP},\ 4R_{50}\|_{39T/K},\ 2R_{100}\|_{40T/K},\ R_{200}\|_{40KP}$	6	9	15
$K_{11,11}$	$11R_{22}\|_{45T/K},\ 2R_{121}\|_{49KP},\ R_{242}\|_{50T/K}$	2	3	5
$K_{12,12}$	$72R_4\|_{25T/K},\ 48R_6\|_{37T/K},\ 36R_8\|_{43T/K},\ 32R_9\|_{45T/K},\ 24R_{12}\|_{49T/K}$ $18R_{16}\|_{52T/K},\ 16R_{18}\|_{53T/K},\ 12R_{24}\|_{55T/K},\ 9R_{32}\|_{56KP},\ 8R_{36}\|_{57T/K}$ $6R_{48}\|_{58T/K},\ 4R_{72}\|_{59T/K},\ 3R_{96}\|_{59KP},\ 2R_{144}\|_{60T/K},\ R_{288}\|_{60KP}$	12	15	27
$K_{13,13}$	$26R_{13}\|_{60KP},\ 13R_{26}\|_{67T/K},\ 2R_{169}\|_{71KP},\ R_{338}\|_{72T/K}$	2	4	6
$K_{14,14}$	$98R_4\|_{36T/K},\ 56R_7\|_{57T/K},\ 49R_8\|_{60KP},\ 28R_{14}\|_{71T/K},\ 14R_{28}\|_{78T/K}$ $8R_{49}\|_{81T/K},\ 7R_{56}\|_{81KP},\ 4R_{98}\|_{83T/K},\ 2R_{196}\|_{84T/K},\ R_{392}\|_{84KP}$	7	10	17
$K_{15,15}$	$90R_5\|_{53KP},\ 75R_6\|_{61T/K},\ 50R_9\|_{73KP},\ 45R_{10}\|_{76T/K},\ 30R_{15}\|_{83KP}$ $25R_{18}\|_{86T/K},\ 18R_{25}\|_{89KP},\ 15R_{30}\|_{91T/K},\ 10R_{45}\|_{93KP},\ 9R_{50}\|_{94T/K}$ $6R_{75}\|_{95KP},\ 5R_{90}\|_{96T/K},\ 3R_{150}\|_{97T/K},\ 2R_{225}\|_{97KP},\ R_{450}\|_{98T/K}$	8	15	23
$K_{16,16}$	$28R_4\|_{49T/K},\ 64R_8\|_{81T/K},\ 32R_{16}\|_{97T/K},\ 16R_{32}\|_{105T/K},$ $8R_{64}\|_{109T/K},\ 4R_{128}\|_{111T/K},\ 2R_{256}\|_{112T/K},\ R_{512}\|_{112KP}$	7	8	15
	Totais	70	102	172

Tabela 3.11.1: Modelos de mergulhos regulares de $K_{n,n}$, $n = 2, 3, 4, \cdots, 16$

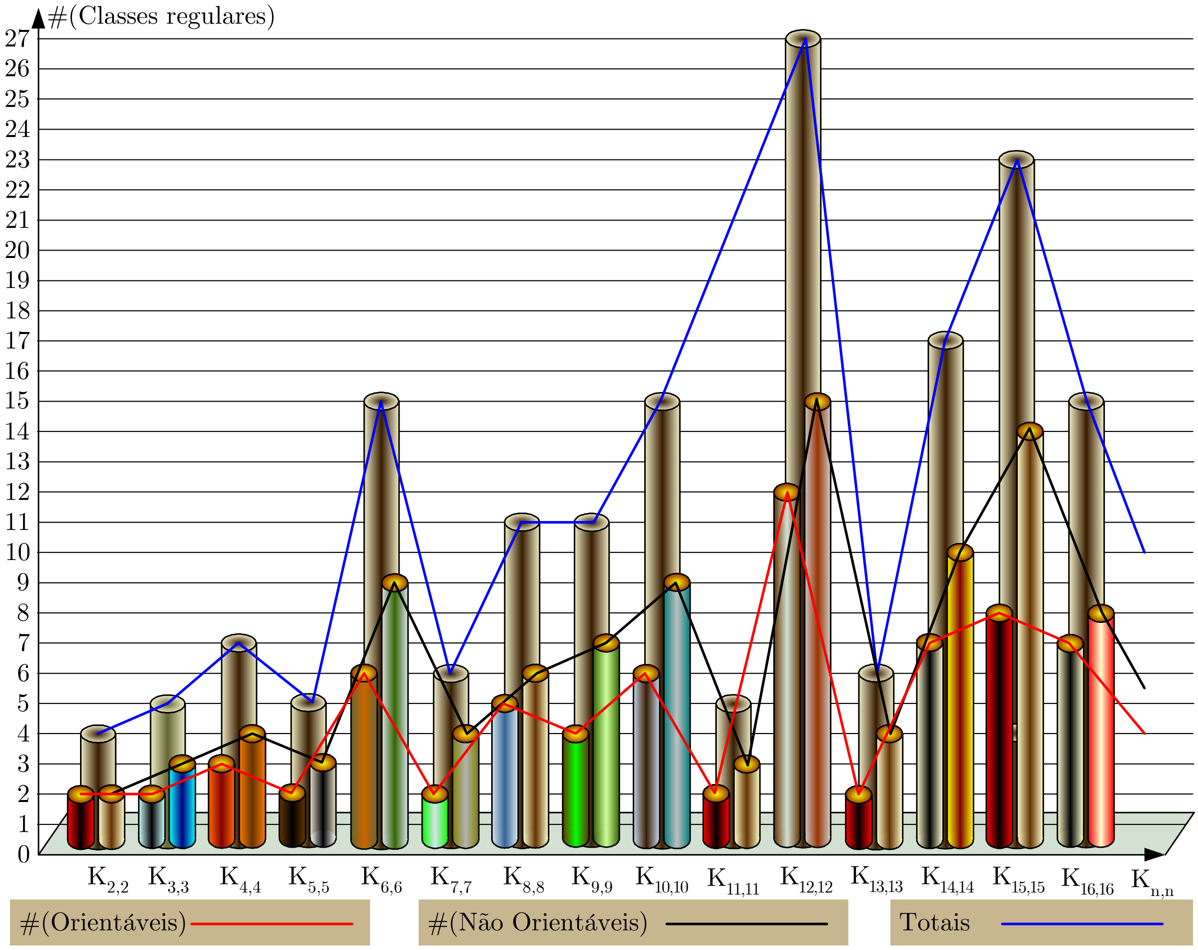


Figura 3.11.1: Gráfico em barras do número de modelos regulares possíveis de Kn, n

Dado um grafo G, o conjunto das superfícies para os mergulhos de 2-células de G será indicado por $\mathbb{M}_G$. Neste caso, iremos considerar $\mathbb{M}_G$ com sendo a união do conjunto das superfícies orientáveis

$$\mathbb{M}\,(G) = \{\gamma T, (\gamma+2)\,T, \cdots, (\gamma_M+2)\,T, \gamma_M T\} \tag{3.40}$$

e as não orientáveis

$$\widetilde{\mathbb{M}}\,(G) = \{\widetilde{\gamma}P, (\widetilde{\gamma}+1)\,P, \cdots, (\widetilde{\gamma}_M+1)\,P, \widetilde{\gamma}_M P\}\,, \tag{3.41}$$

ou seja, $\mathbb{M}_G = \mathbb{M}\,(G) \cup \widetilde{\mathbb{M}}(G)$, e portanto,

$$\mathbb{M}_G = \{\gamma T, (\gamma{+}2)\,T, \cdots, (\gamma_M{+}2)\,T, \gamma_M T, \widetilde{\gamma}P, (\widetilde{\gamma}{+}1)\,P, \cdots, (\widetilde{\gamma}_M{+}1)\,P, \widetilde{\gamma}_M P\}\,. \tag{3.42}$$

De um modo geral, γ e $\widetilde{\gamma}$ são iguais e, quando diferem, diferem somente por uma unidade. No caso particular do grafo completo bipartido, podemos até prever quando estes casos ocorrem.

Proposição 3.11.8 *Seja t o número de regiões de um mergulho mínimo de $K_{m,n}$. Então os mergulhos mínimos orientáveis e não orientaveis do grafo completo bipartido $K_{m,n}$ são da forma*

$$K_{m,n} \hookrightarrow \gamma T \equiv tR_4 \equiv \tau K \hookleftarrow K_{m,n}, \text{ e } \gamma = \tau, \text{ se } m \text{ ou } n \text{ é par,}$$

caso contrário, o mergulho mínimo orientável de $K_{m,n}$ é da forma

$$K_{m,n} \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{t-1} R_{\alpha_i}$$

e o mergulho mínimo não orientável de $K_{m,n}$ é da forma

$$K_{m,n} \hookrightarrow \tau KP \equiv (t-1) R_4 + R_6, \text{ e } \gamma = \tau + 1.$$

Demonstração. *Seja $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. O mergulho mínimo de $K_{4,4}$ é aquele que possui o maior número de regiões R_4, e como a soma dos lados das regiões é igual a $2mn$, então o número de regiões s de um mergulho mínimo (orientável ou não) $K_{m,n} \hookrightarrow g\Omega \equiv \cup_{i+1}^{s} R_{\alpha_i}$ é dado por*

$$2mn = \begin{cases} 4t, \text{ se } m \text{ ou } n \text{ for par} \\ 4t+2, \text{ se } m \text{ e } n \text{ forem ímpares,} \end{cases} \tag{3.43}$$

logo, segue que o mergulho mínimo de $K_{m,n}$ só pode assumir uma das formas

$$K_{m,n} \hookrightarrow g\Omega \equiv \begin{cases} tR_4, \text{ se } m \text{ ou } n \text{ for par} \\ (t-1) R_4 + R_6, \text{ se } m \text{ e } n \text{ forem ímpares.} \end{cases}$$

Por outro lado, t é o número de regiões de um mergulho mínimo de G. Pela característica de Eüler da superfície Ω, temos que

$$t = \chi(\Omega) - (m+n) + mn$$

Supondo que este é mergulho mínimo é orientável, então $\chi(\Omega)$ é par, resulta que,

$$t \text{ é } \begin{cases} \text{par, se } m \text{ ou } n \text{ for par,} \\ \text{ímpar, se } m \text{ e } n \text{ forem ímpares.} \end{cases} \tag{3.44}$$

Consequentemente, se m ou n é par, t também o será, por (3.44), e os mergulhos mínimos orientáveis e não orientávies são necessariamente das formas

$$K_{m,n} \hookrightarrow \gamma T \equiv tR_4 \equiv \tau K \hookleftarrow K_{m,n}, \text{ e } \gamma = \tau. \tag{3.45}$$

Obviamente que, neste caso, o mergulho mínimo não orientável é também da forma $K_{m,n} \hookrightarrow 2\gamma P \equiv tR_4$. Caso contrário, se m e n forem ímpares, então t será também ímpar, por (3.46), e o mergulho mínimo será obrigatoriamente da forma

$$K_{m,n} \hookrightarrow \Omega \equiv (t-1) R_4 + R_6. \tag{3.46}$$

Resta saber se Ω é orientável ou não. Mas se t é ímpar, a partição $(t-1) R_4 + R_6$ em (3.46) contém um número par de regiões. Sendo assim, o mergulho mínimo orientável *não pode ter t regiões, e como o seu número de regiões é máximo ele deve ter $t-1$ regiões, portanto, um mergulho da forma*

$$K_{m,n} \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{t-1} R_{\alpha_i}. \tag{3.47}$$

Neste caso $\gamma = t-1$. Mas o mergulho em (3.46) é um mergulho mínimo, porque t é o máximo de regiões, logo, ele é um mergulho mínimo não orientável. Mais precisamente, um mergulho sobre a superfície não orientável de gênero $\widetilde{\gamma} = \gamma+1$, ou seja, um mergulho mínimo da forma

$$K_{m,n} \hookrightarrow \tau KP \equiv (t-1)\,R_4 + R_6, \ \ e\ \gamma = \tau + 1. \tag{3.48}$$

Das relações (3.45), (3.47) *e* (3.48), *concluímos a validade da proposição.* ∎

Observamos diretamente da Proposição 3.11.8 que os mergulhos mínimos orientáveis e não orientáveis de $K_{m,n}$ podem ter a mesma partição ou o número de região destas diferem somente de uma unidade. As condições desta proposição são essenciais para a identificação dos mergulhos orientáveis e não orientáveis de $K_{m,n}$. Também pode ser usada para identificar a classe de mergulho regular trivial R_{2mn}.

Corolário 3.11.9 *Se m ou n é par, então a classe de mergulho regular trivial R_{2mn} é a classe do mergulho máximo não orientável de $K_{m,n}$. Caso contrário, se m e n são ímpares, R_{2mn} é a classe do mergulho máximo orientável de $K_{m,n}$.*

Demonstração. *De fato, se m ou n é par, por* (3.44), *t é par, logo, o mergulho maximal orientável de $K_{m,n}$ tem 2 regiões; portanto R_{2mn} vem de um mergulho máximo de $K_{m,n}$. Por outro lado, se m e n são ímpares, por* (3.44), *t é ímpar, e o mergulho máximo de $K_{m,n}$ tem por partição R_{2mn}, isto é, a classe regular trivial R_{2mn} é a classe do mergulho máximo orientável.* ∎

Deduzimos ainda da demonstração da Proposição 3.11.8 a condição para que os mergulhos mínimos sejam regulares.

Corolário 3.11.10 *Se m ou n é par, então os mergulhos orientáveis e não orientáveis de $K_{m,n}$ são sempre regulares e possuem o mesmo tipo de partição; caso contrário, o mergulho mínimo não orientável é sempre não regular.*

Demonstração. *De fato, se m ou n for par, por* (3.45), *os mergulhos orientáveis e não orientáveis de $K_{m,n}$ têm a mesma partição tR_{2mn}; logo ambos são mergulhos regulares. O caso contrário segue da demonstração da Proposição 3.11.8, a qual mostra que os mergulhos mínimos são da forma*

$$K_{m,n} \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{t-1} R_{\alpha_i} \text{ e } K_{m,n} \hookrightarrow \tau KP \equiv (t-1)\,R_4 + R_6.$$

De imediato, vemos que o mergulho não orientável não é regular. ∎

Para o caso particular do grafo completo bipartido da forma $K_{n,n}$ os resultados da Proposição 3.11.8 e Corolários 3.11.9 e 3.11.10 podem ser condensados na forma da seguinteproposição.

Proposição 3.11.11 *Seja t o número de regiões do mergulho mínimo de $K_{n,n}$. Então:*

i) Os mergulhos mínimos orientáveis e não orientaveis do grafo completo bipartido $K_{n,n}$ são da forma

$$K_{n,n} \hookrightarrow \gamma T \equiv tR_4 \equiv \tau K \hookleftarrow K_{n,n}, \ e\ \gamma = \tau, \ se\ n\ é\ par,$$

caso contrário, o mergulho mínimo orientável de $K_{m,n}$ é da forma

$$K_{n,n} \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{t-1} R_{\alpha_i},$$

e o mergulho mínimo não orientável de $K_{m,n}$ é da forma

$$K_{n,n} \hookrightarrow \tau KP \equiv (t-1)\, R_4 + R_6, \ e\ \gamma = \tau + 1;$$

ii) A classe do mergulho máximo não orientável de $K_{n,n}$ é uma classe regular trivial R_{2n^2}, se n é par, caso contrário, R_{2n^2} é um mergulho máximo orientável de $K_{n,n}$.

iii) Se n é par então os mergulhos mínimos orientável e não orientável de $K_{n,n}$ são sempre regulares e possuem o mesmo tipo de partição, caso contrário, o mergulho mínimo não orientável é sempre não regular.

Demonstração. *A provas são análogas as demostrações das respectivas afirmações provadas na Proposição 3.11.8 e Corolários 3.11.9 e 3.11.10.* ∎

O conjunto das classes de mergulhos regulares de G será representada por $\mathbb{D}_G$, conjunto compostos pelas classes de mergulhos regulares orientáveis $\mathbb{D}\,(G)$ e não orientáveis $\widetilde{\mathbb{D}}(G)$. Sendo assim, temos que

$$\mathbb{D}_G = \mathbb{D}\,(G) \cup \widetilde{\mathbb{D}}(G).$$

Algumas conclusões importantes que caracterizam os modelos de mergulhos regulares serão apresentadas a seguir. Antes, porém, iremos fazer algumas considerações sobre o mergulho máximo de G. Quando se trata de obter os mergulhos regulares de um grafo G, observamos, diretamente da Tabela 3.11.1, que o mergulho maximal formado por uma única região está sempre presente, isto é, R_{2q} se faz sempre presente em $\mathbb{D}_G$, às vezes está em $\mathbb{D}\,(G)$, às vezes em $\widetilde{\mathbb{D}}(G)$, dependendo da paridade do gênero minimo γ do mergulho orientável, como foi mostrado na Proposição 3.11.8. Como o mergulho G da forma $G \hookrightarrow \Omega \equiv R_{2q}$ é sempre um elemento de $\mathbb{D}_G$, o mesmo será denominado de *mergulho regular trivial.* Observe, na Tabela 3.11.1, que todos os grafos $K_{n,n}$ possuem o mergulho regular trivial.

Uma observação importante é que nem todos os modelos relacionados da Tabela 3.11.1 podem existir em mergulhos de grafos completos bipartidos. A razão é porque os mergulhos de grafos desta família não produzem regiões com um número ímpar de lados. Basta então eliminar estes mergulhos para relacionar o mergulhos regulares de $K_{n,n}$ que realmente existem. Eliminando os modelos que contém regiões com um número ímpar de lados, obtemos os mergulhos regulares de $K_{n,n}$, como mostrarm as relações destes listados na Tabela 3.11.2.

Os modelos regulares de mergulhos de $K_{n,n}$ relacionados na Tabela 3.11.2, exibem as principais características particulares dos modelos regulares do grafo completo bipartido $K_{m,n}$. Uma análise nos elementos desta tabela apontam, como principais caracteríscas dos mergulhos regulares, as propriedades apresentadas a seguir.

$K_{n,n}$	$dR_\alpha\|_{\Omega/\tilde{\Omega}}$	$\#(dR_\alpha)$		
		Ω	$\tilde{\Omega}$	T
$K_{2,2}$	$2R_4\|_{S/P},\ R_8\|_{T/K}$	2	2	4
$K_{3,3}$	$3R_6\|_{T/K},\ R_{18}\|_{2T/K}$	2	2	4
$K_{4,4}$	$8R_4\|_{T/K},\ 4R_8\|_{3T/K},\ 2R_{16}\|_{4T/K},\ R_{32}\|_{4KP}$	3	4	7
$K_{5,5}$	$5R_{10}\|_{T/K},\ R_{50}\|_{8T/8K}$	2	2	4
$K_{6,6}$	$18R_4\|_{4T/K},\ 12R_6\|_{7T/K},\ 9R_8\|_{8KP},\ 6R_{12}\|_{10T/K}$ $4R_{18}\|_{11T/K},\ 2R_{36}\|_{12T/K},\ R_{72}\|_{12KP}$	5	7	12
$K_{7,7}$	$7R_{14}\|_{15T/K},\ R_{98}\|_{18T/K}$	2	2	4
$K_{8,8}$	$32R_4\|_{9T/K}, 16R_8\|_{17T/K}, 8R_{16}\|_{21T/K}, 4R_{32}\|_{23T/K}, 2R_{64}\|_{24T/K}, R_{128}\|_{24KP}$	5	6	11
$K_{9,9}$	$27R_6\|_{19T/K},\ 9R_{18}\|_{28T/K},\ 3R_{54}\|_{31T/K},\ R_{162}\|_{32T/K}$	4	4	8
$K_{10,10}$	$40R_4\|_{16T/K},\ 25R_8\|_{28KP},\ 20R_{10}\|_{31T/K},\ 10R_{20}\|_{36T/K}$ $5R_{40}\|_{38KP},\ 4R_{50}\|_{39T/K},\ 2R_{100}\|_{40T/K},\ R_{200}\|_{40KP}$	5	8	13
$K_{11,11}$	$11R_{22}\|_{45T/K},\ R_{242}\|_{50T/K}$	2	2	4
$K_{12,12}$	$72R_4\|_{25T/K},\ 48R_6\|_{37T/K},\ 36R_8\|_{43T/K},\ 24R_{12}\|_{49T/K}$ $18R_{16}\|_{52T/K},\ 16R_{18}\|_{53T/K},\ 12R_{24}\|_{55T/K},\ 9R_{32}\|_{56KP},\ 8R_{36}\|_{57T/K}$ $6R_{48}\|_{58T/K},\ 4R_{72}\|_{59T/K},\ 3R_{96}\|_{59KP},\ 2R_{144}\|_{60T/K},\ R_{288}\|_{60KP}$	11	14	25
$K_{13,13}$	$13R_{26}\|_{67T/K},\ R_{338}\|_{72T/K}$	2	2	4
$K_{14,14}$	$98R_4\|_{36T/K},\ 49R_8\|_{60KP},\ 28R_{14}\|_{71T/K},\ 14R_{28}\|_{78T/K}$ $7R_{56}\|_{81KP},\ 4R_{98}\|_{83T/K},\ 2R_{196}\|_{84T/K},\ R_{392}\|_{84KP}$	5	8	13
$K_{15,15}$	$75R_6\|_{61T/K},\ 45R_{10}\|_{76T/K},\ 25R_{18}\|_{86T/K},\ 15R_{30}\|_{91T/K}$ $9R_{50}\|_{94T/K},\ 5R_{90}\|_{96T/K},\ 3R_{150}\|_{97T/K},\ R_{450}\|_{98T/K}$	8	8	16
$K_{16,16}$	$128R_4\|_{49T/K},\ 64R_8\|_{81T/K},\ 32R_{16}\|_{97T/K},\ 16R_{32}\|_{105T/K}$ $8R_{64}\|_{109T/K},\ 4R_{128}\|_{111T/K},\ 2R_{256}\|_{112T/K},\ R_{512}\|_{112KP}$	7	8	15
	Totais	65	81	146

Tabela 3.11.2: Mergulhos regulares de $K_{n,n}$, $n = 2, 3, 4, \cdots, 16$

3.12 Conclusões sobre Mergulhos Regulares

A busca por mergulhos regulares é sempre de grande interesse, quando a meta é usar esses mergulhos como projetos de modulações. Quando se trata do grafo completo bipartido $K_{m,n}$, a existência dos mergulhos regulares podem ser identificadas de um modo geral e, particularmente, para algumas restrições como é o caso do grafo $K_{n,n}$, a condição de paridades de m e n e nos casos em que m e n são números primos.

Proposição 3.12.1 *Todo modelo de um mergulho orientável de um grafo é um modelo de um mergulho não orientável.*

Demonstração. *Se t é o número de regiões do mergulho mínimo orientável de um grafo G e $G \hookrightarrow gT \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ é um mergulho orientável, os modelos de mergulhos orientáveis de G são da forma*

$$\gamma T \equiv \cup_{i=1}^{t} R_{\alpha_i}, (\gamma+2)\, T \equiv \cup_{i=1}^{t+2} R_{\alpha_i}, \cdots, (\gamma_M+2)\, T \equiv \cup_{i=1}^{4} R_{\alpha_i}, \gamma_M T \equiv \cup_{i=1}^{2} R_{\alpha_i}, \tag{3.49}$$

se t for par. Se t é ímpar, os mergulhos não orientáveis são da forma

$$\gamma T \equiv \cup_{i=1}^{t} R_{\alpha_i}, (\gamma+2)\, T \equiv \cup_{i=1}^{t+2} R_{\alpha_i}, \cdots, (\gamma_M+2)\, T \equiv \cup_{i=1}^{3} R_{\alpha_i}, \gamma_M T \equiv \cup_{i=1}^{1} R_{\alpha_i}. \tag{3.50}$$

Mas os mergulhos não orientáveis de G são dados por

$$\widetilde{\gamma} P \equiv \cup_{i=1}^{t} R_{\alpha_i}, (\widetilde{\gamma}+1)\, P \equiv \cup_{i=1}^{t+1} R_{\alpha_i}, \cdots, (\widetilde{\gamma}_M+1)\, P \equiv \cup_{i=1}^{2} R_{\alpha_i}, \widetilde{\gamma}_M P \equiv \cup_{i=1}^{1} R_{\alpha_i}, \tag{3.51}$$

e pela demonstração da Proposição 3.11.8, concluímos que

$$\widetilde{\gamma} = \begin{cases} 2\gamma, & \text{se } t \text{ é par} \\ 2\gamma - 1, & \text{se } t \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

o que resulta em

$$\begin{array}{l} k \in \{\gamma, \gamma+2, \cdots, 4, 2\}, \text{ se } \gamma \text{ for par ou} \\ k \in \{\gamma, \gamma+2, \cdots 3, 1\}, \text{ se } \gamma \text{ for ímpar.} \end{array}$$

Em quaisquer dos casos de paridade de t, podemos concluir que toda partição $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ de um mergulho orientável, seja do conjunto (3.47) *ou de* (3.50), *é uma partição de G* (3.51). *Portanto segue a afirmação.* ■

A recíproca da Proposição 4.4.2 não é verdadeira, pois, independente de k ser par ou ímpar e $\widetilde{\gamma} \leq k \leq \widetilde{\gamma}_M$, $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ é sempre uma partição de um mergulho não orientável; contudo, $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ não é uma partição de um mergulho orientável, quando k for ímpar e t for par, ou quando k for par e t for ímpar.

Observação 3.12.2 *Concluímos dos resultados acima que a existência de uma partição regular dR_α de $K_{m,n}$ depende de três condições:* 1) *$d \in D_{2mn}$;* 2) *$\alpha = 2mn/d$; e* 3) *α é par e $\alpha = 4s+2$. No caso orientável, d depende ainda do número t de regiões do mergulho mínimo: se t é par, todas as regiões das demais partições orientáveis também o serão. Ocorre a mesma situação para o caso em que t é ímpar. No caso não orientável, a única diferença é que d não depende de t, independente de t ser par ou ímpar a partição regular não orientáveis existe, desde que satisfaça as condições* 1), 2) *e* 3) *desta observação.*

Para identificar os elementos do conjunto $\mathbb{D}_G$ dos mergulhos orientáveis e não orientáveis regulares de G, basta indentificar os tipos de modelos regulares, são aqueles que satisfazem as condições da Observação 3.12.2 e será representado por D_G. Observamos que D_G refere-se somente aos modelos regulares de partições regulares, diferentemente de $\mathbb{D}_G$, o conjunto dos mergulhos regulares. Obviamente que

$$D_G = D\,(G) \cup \widetilde{D}\,(G)\,,$$

onde $D\,(G)$ é o conjunto dos modelos regulares orientáveis e $\widetilde{D}\,(G)$, o conjunto dos modelos regulares não orientáveis. É evidente ainda que $D\,(G) \cup \widetilde{D}\,(G) = \varnothing$.

Proposição 3.12.3 *Para o grafo completo bipartido $K_{m,n}$ valem as seguintes desigualdades:*

$$3 \leq \#(D\,(G)) \leq \#(\widetilde{D}(G)).$$

Demonstração. *Pela Observação 3.12.2, uma partição regular dR_α pode ser somente não orientável, desde que d atenda as condições* 1), 2) *e* 3) *e d não possua a mesma paridade de t, como é o caso, por exemplo, da partição regular $9R_8|_{8KP}$ do grafo $K_{6,6}$. Isto prova que $\#(D\,(G)) \leq \#(\widetilde{D}(G))$. Como a partição regular depende de D_{2mn}, o pior caso para a sua existência é quando m e n são simultâneamente números primos. Neste caso, os divisores de $2mn$ são dados por*

$$D_{2mn} = \{1, 2, m, n, 2m, 2n, mn, 2mn\}\,.$$

Desse modo, pelas condições 1), 2) *e* 3 *da Observação 3.12.2, o conjunto das partições regulares de $K_{m,n}$ só podem ser da forma*

$$D_{K_{m,n}} = \{nR_{2m}, mR_{2n}, R_{2mn}\}\,. \tag{3.52}$$

Mas m e n são ímpares, então o número t de regiões do mergulho mínimo orientável e de todos os mergulhos orientáveis têm números de regiões ímpares. Como o número de regiões dos modelos regulares em (3.52) *são os ímpares $1, m$ e n, então todas as partições em $D_{K_{m,n}}$ são de mergulhos orientáveis, isto é, $\#(D\,(G)) = 3$; mas, por outro lado, também são partições de mergulhos não orientáveis de $K_{m,n}$, uma vez que $1, m$ e n pertencem a D_{2mn}. Sendo assim, $\#(\widetilde{D}\,(G)) = 3$, e consequentemente, vale as relações de desigualdades*

$$3 \leq \#(D\,(G)) \leq \#(\widetilde{D}(G)),$$

o que mostra o desejado. ■

Corolário 3.12.4 *Para o grafo completo bipartido $K_{n,n}$ valem as desigualdades*

$$2 \leq \#(D\,(G)) \leq \#(\widetilde{D}(G)).$$

Demonstração. *De modo análogo à Proposição 3.12.3, podemos concluir que a partição regular dR_α pode ser somente não orientável, desde que d atenda as condições* 1), 2) *e* 3) *da Observação 3.12.2* e *d não possua a mesma paridade de t, como é o caso, por exemplo, da partição regular $9R_8|_{8KP}$ do grafo $K_{6,6}$. Isto prova que $\#(D\,(G)) \leq \#(\widetilde{D}(G))$. Por outo lado, os divisores de $2n^2$ são dados pelo conjunto*

$$D_{2n^2} = \left\{1, 2, n, 2n, n^2, 2n^2\right\}.$$

Analisando o caso em que n é um número primo, segue das condições 1), 2) *e* 3 *da Observação 3.3.1, que o conjunto das partições regulares de $K_{n,n}$ só podem ser da forma*

$$D_{K_{n,n}} = \{nR_{2n}, R_{2n^2}\}.$$

Mas n é ímpar, então t é ímpar e todos os mergulhos orientáveis são ímpares. Como o número de regiões dos modelos regulares em (3.52) *são os ímpares* 1 *e n, então todas as partições em $D_{K_{n,n}}$ são de mergulhos orientáveis, isto é, $\#(D(G)) = 2$; mas, por outro lado, também são partições de mergulhos não orientáveis de $K_{m,n}$, uma vez que* 1 *e n pertencem a D_{2mn}. Sendo assim, $\#(\widetilde{D}(G)) = 2$, e consequentemente, vale a relação*

$$2 \leq \#(D(G)) \leq \#(\widetilde{D}(G)),$$

o que mostra a proposição. ■

Corolário 3.12.5 *Se p é primo então $\#\left(D_{K_{n,n}}\right) = 4$.*

Demonstração. *De fato, pelo Corolário 3.12.4, o conjunto de modelos de mergulhos regulares de $K_{n,n}$ orientável e não orientável são ambos da forma*

$$D(K_{n,n}) = \{nR_{2n}, R_{2n^2}\} = \widetilde{D}(K_{n,n}).$$

Como $D_{K_{n,n}} = D(K_{n,n}) \cup \widetilde{D}(K_{n,n})$ e $D(K_{n,n}) \cap \widetilde{D}(K_{n,n}) = \varnothing$, segue o resultado. ■

Concluímos, do Corolário 3.12.5, que uma partição de um mergulho regular de $K_{n,n}$ encontra-se simultaneamente em uma superfície orientável e em uma não orientável, e como são dois modelos possíveis, os mergulhos regulares $K_{n,n}$ são sempre 4, para todo n primo.

Lema 3.12.6 *Se $p = 2$ e $n = 2^m$, então o conjunto de modelos regulares de $K_{n,n}$ é composto pelos $2m$ elementos seguintes*

$$D_{K_{n,n}} = \left\{R_{2^{2m+1}}, 2R_{2^{2m}}, 4R_{2^{2m-1}}, \cdots, 2^{2m-2}R_8, 2^{2m-1}R_4\right\}.$$

Demonstração. *O grafo $K_{n,n}$ é da forma $K_{2^m,2^m}$, então, se dR_α é um modelo regular de $K_{n,n}$, este satisfaz a condição $d \in D_{2\cdot 2^{2m}}$. Então determinemos os divisores de $2 \cdot 2^{2m}$. Ora, os divisores de 2^m são dados pelo conjunto*

$$D_{2^m} = \left\{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^m\right\},$$

logo, os divisores de $2^m \cdot 2^m$ são dados pelo conjunto

$$D_{2^m} = \left\{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^m, \cdots, 2^{2m}\right\}$$

e portanto os divisores de $2 \cdot 2^{2m}$ são os divisores de $2 \cdot 2^m \cdot 2^m$ os quais são dados por

$$D_{2\cdot 2^{2m}} = \left\{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^m, 2^{m+1}\right\}. \tag{3.53}$$

Como $n = 2^{2m+1}$ é par, no modelo regular dR_α, d deve ser par e α é par ≥ 4. Consequentemente, d, α e dR_α, em função de k, $k \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 2m, 2m+1\}$, são dados como na tabela seguinte

k	0	1	2	3	$\cdots$	$2m-2$	$2m-1$	$2m$	$2m+1$
d	1	2	2^2	2^3	$\cdots$	2^{2m-2}	2^{2m-1}	2^m	2^{2m+1}
α	2^{2m+1}	2^{2m}	2^{2m-1}	2^{2m-2}	$\cdots$	2^3	2^2	2	1
dR_α	$R_{2^{2m+1}}$	$2R_{2^{2m}}$	$4R_{2^{2m-1}}$	$8R_{2^{2m-2}}$	$\cdots$	$2^{2m-2}R_8$	$2^{2m-1}R_4$	$\nexists$	$\nexists$

Logo, o conjunto dos modelos regulares de $K_{n,n}$ é dado por

$$D_{K_{n,n}} = \left\{R_{2^{2m+1}}, 2R_{2^{2m}}, 4R_{2^{2m-1}}, \cdots, 2^{2m-2}R_8, 2^{2m-1}R_4\right\},$$

portanto, um conjunto com números de elementos dado por

$$\#\left(D_{K_{n,n}}\right) = 2m + 1 - 2 + 1 = 2m,$$

o que mostra a afirmação. ∎

Lema 3.12.7 *Seja q um número primo diferente de 2 e m um número inteiro, então o conjunto de modelos regulares de $K_{n,n}$ é composto pelos $2m$ elementos seguintes*

$$D_{K_{n,n}} = \left\{R_{2q^{2m}}, 2R_{2q^{2m-1}}, 4R_{2q^{2m-2}}, 8R_{2q^{2m-3}}, \cdots, 2^{2m-2}R_{2q^2}, 2^{2m-1}R_{2q}\right\}.$$

Demonstração. *O grafo $K_{n,n}$ é da forma K_{q^m,q^m} e q é primo. Se dR_α é um modelo regular de $K_{n,n}$, este satisfaz as condições: $d \in D_{2q^{2m}}$. Então determinemos os divisores de $2q^{2m}$. Os divisores de q^m são dados pelo conjunto*

$$D_{q^m} = \left\{1, q, q^2, q^3, \cdots, q^m\right\},$$

logo, os divisores de $q^m \cdot q^m$ são dados pelo conjunto

$$D_{2^m} = \left\{1, q, q^2, q^3, \cdots, q^m, \cdots, q^{2m}\right\}$$

e portanto os divisores de $2q^{2m}$ são os divisores de $2q^m q^m$ os quais são dado por

$$D_{2\cdot 2^{2m}} = \left\{1, q, q^2, q^3, \cdots, q^m, \cdots, q^{2m}, 2, 2q, 2q^2, 2q^3, \cdots, 2q^m, \cdots, 2q^{2m}\right\}.$$

Observe que $D_{2\cdot 2^{2m}}$ possui $4m + 2$ elementos. Como $n = 2q^{2m}$ é par, no modelo regular dR_α, d deve ser par, e α é par ≥ 4. Então devemos procurar valores de d em $D_{2\cdot 2^{2m}}$ de maneira que $\alpha = 2q^{2m}/d$ seja um número par, isto é, α deve ser da forma

$$\alpha = \frac{2q^{2m}}{q^k}, \ k \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 2m\}.$$

Note que $\alpha = 2q^{2m}/q^k$ é um número ímpar e, portanto, os modelos da forma dR_{2q^{2m}/q^k} não são mergulhos de $K_{n,n}$. Consequentemente, os modelos regulares dR_α de mergulhos de $K_{n,n}$ são como os relacionados na tabala seguinte, em função de d, α e k:

k	0	1	2	3	$\cdots$	$2m-2$	$2m-1$	$2m$
d	1	q	q^2	q^3	$\cdots$	q^{2m-2}	q^{2m-1}	q^m
α	$2q^{2m}$	$2q^{2m-1}$	$2q^{2m-2}$	$2q^{2m-3}$	$\cdots$	$2q^2$	$2q$	2
dR_α	$R_{2q^{2m}}$	$qR_{2q^{2m-1}}$	$q^2R_{2q^{2m-2}}$	$q^2R_{2q^{2m-3}}$	$\cdots$	$q^{2m-2}R_{2q^2}$	$q^{2m-1}R_{2q}$	$\nexists$

Logo, o conjunto dos modelos regulares de $K_{n,n}$ é dado por

$$D_{K_{n,n}} = \left\{R_{2q^{2m}}, qR_{2q^{2m-1}}, q^2R_{2q^{2m-2}}, q^2R_{2q^{2m-3}}, \cdots, q^{2m-2}R_{2q^2}, q^{2m-1}R_{2q}\right\},$$

portanto, um conjunto com números de elementos dado por

$$\#\left(D_{K_{n,n}}\right) = 2m - 1 + 1 = 2m,$$

o que mostra a afirmação. ■

Utilizando os Lemas 3.12.6 e 3.12.7 podemos caracterizar os mergulhos regulares de $K_{n,n}$, no caso em que q é um número primo, através do seguinte Teorema.

Teorema 3.12.8 *Seja q é primo e $n = q^m$, $m \in \mathbb{N}$. Então:*

i) Existem $2m$ modelos regulares de $K_{n,n}$, isto é, $\#\left(D_{K_{n,n}}\right) = 2m$;

ii) O conjunto de modelos regulares é dado por

$$D_{K_{n,n}} = \begin{cases} \{R_{2^{2m+1}}, 2R_{2^{2m}}, 4R_{2^{2m-1}}, \cdots, 2^{2m-2}R_8, 2^{2m-1}R_4\}, & se\ q = 2, \\ \{R_{2q^{2m}}, 2R_{2q^{2m-1}}, 4R_{2q^{2m-2}}, \cdots, 2^{2m-2}R_{2q^2}, 2^{2m-1}R_{2q}\}, & se\ q \neq 2; \end{cases}$$

iii) $\#\left(\mathbb{D}_{K_{n,n}}\right) = 4m$ e $\mathbb{D}(K_{n,n}) = 2m = \widetilde{\mathbb{D}}(K_{n,n})$.

Demonstração. *As afirmações i) e ii) podem ser comprovadas diretamente dos conjuntos $D_{K_{n,n}}$ existentes nas demonstrações dos Lemas 3.12.6 e 3.12.7. A afirmação iii) segue do fato de que $n = q^m$ é impar, pois é primo $\neq 2$, o número de regiões dos modelos de $D_{K_{n,n}}$ é q^t, logo também é impar. Isto implica que os modelos de $D_{K_{n,n}}$ são modelos simultâneos de mergulhos orientáveis e não orientáveis. Como $\#\left(D_{K_{n,n}}\right) = 2m$, então,*

$$\mathbb{D}(K_{n,n}) = 2m = \widetilde{\mathbb{D}}(K_{n,n}) \Rightarrow \#\left(\mathbb{D}_{K_{n,n}}\right) = 4m,$$

o que prova a afirmação iii). ■

Os resultados desta seção mostram que é possível identificar todos os mergulhos de um grafo, seja ele completo ou não, identificar aqueles com regularidades, e estimar o número de mergulhos regulares.

Ao relacionarmos os mergulhos regulares na Tabela 3.11.1, tinhamos muitas incertezas da existência dos mergulhos regulares. Foi necessário um estudo aprofundado do comportamento do elementos que constituem os mergulhos regulares para obtermos informações de sua existência. Sem os resultados apresentadoa acima, não teríamos a certeza de que os mergulhos relacionados na Tabela 3.11.2 seriam, de fato, os mergulhos regulares orientáveis e não orientáveis do grafo completo bipartido $K_{n,n}$. As demonstrações de todos os resultados vem confirmar que, de fato, os mergulhos regulares de

$K_{n,n}$ são exatamente os apresentados na Tabela 3.11.2. Verificamos que houve uma redução de modelos regulares dos elementos da Tabela 3.11.1 devido a propriedade da Proposição 4.4.2. Para mostrar esta redução, o gráfico em barras dos modelos regulares de $K_{n,n}$, que de fato existem, são ilustrados na Figura 3.12.1. Este preserva ainda as informações do grafo em barras da Figura 3.12.1, para mostrar onde ocorreram as reduções e de quantas unidades foram estas.

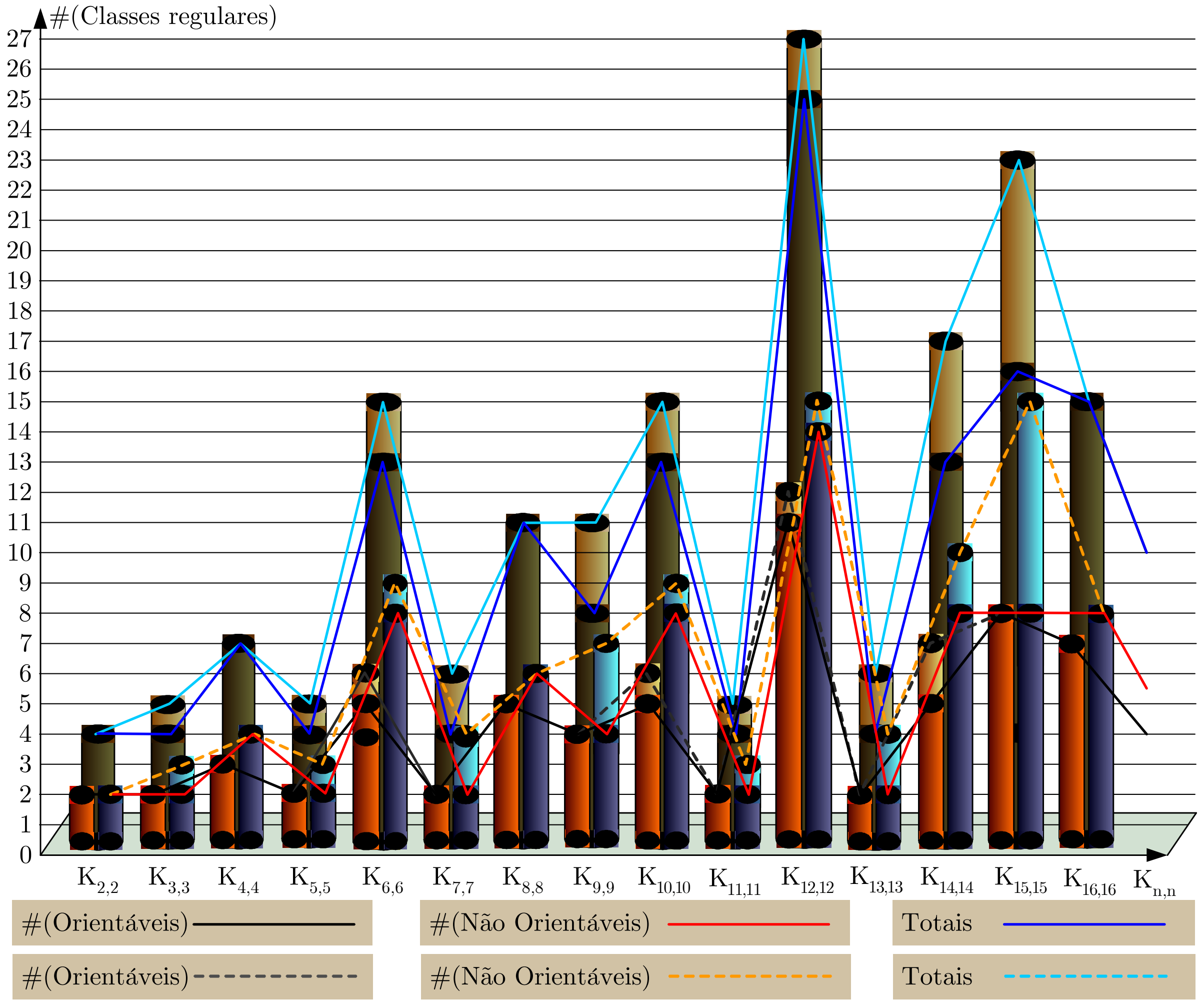


Figura 3.12.1: Gráfico com número de mergulhos regulares e reduções

Analisando o gráfico em barras da Figura 3.12.1, chegamos as seguintes conclusões quanto ao fator de redução ρ do número de mergulhos regulares.

Proposição 3.12.9 *Sejam $\widehat{\rho}$ e $\widetilde{\rho}$ os respectivos números de perdas do conjunto de modelos de mergulhos regulares orientáveis e não orientáveis. Se $\rho = \widehat{\rho} + \widetilde{\rho}$ é o total das perdas, então:*

i) A perda ρ é maior nos casos em que n é um número composto, e atinge maiores valores nos casos em que n é ímpar;

ii) *Seja* t *o número de regiões do mergulho mínimo, então* ρ *é constante, se* n *é um número primo, e*

$$\rho = \begin{cases} 1, \text{ se } t > 2n \\ 2, \text{ se } t < 2n. \end{cases}$$

iii) $\rho = 0 \Leftrightarrow n = 2^m$;

iv) $\rho = 3 \Leftrightarrow n = q^m$ *e* q *é primo* $\neq 2$.

v) $\widehat{\rho} \leq \widetilde{\rho}$.

vi) *Na maioria dos casos* $\widehat{\rho} = 0$ *e* $\widehat{\rho} \neq 0$ *para* n *composto par diferente de potência de primo.*

Demonstração. *Consideremos* $D^p_{K_{n,n}}$ *o conjunto de modelos regulares possíveis* $K_{n,n}$ *(modelos da Tabela 3.11.1) e* $D^e_{K_{n,n}}$ *o conjunto dos modelos de mergulhos regulares que realmente existem (modelos da Tabela 3.11.2). Um modelo regular* dR_α *existe, isto é,* dR_α *está relacionado na Tabela 3.11.2, quando* d *e* α *satisfazem todas as condições da Observação 3.12.2. O principal motivo da não existência é o fato de* α *ser ímpar, ou seja, quando o quociente* $2n^2/d$ *é ímpar. Quando* n *é par,* t *também o será, e todo* dR_α*, com* α *par, está em* $D^e_{K_{n,n}}$*. Então todo* $dR_\alpha \in D^e_{K_{n,n}}$*, quando* n *é uma potência de* 2 *ou* n *é primo (veja Lema 3.12.6 e Proposição 3.12.3). Estas justificativas provam as afirmações iii) e iv). Se* n *possui divisores pares e ímpares (como* 6 *e* 12*),* α *pode ser ímpar. Se* α *é ímpar e* d *é par, então* dR_α *representa duas perdas, pois* $dR_\alpha \in D(K_{n,n})$ *e* $dR_\alpha \in \widetilde{D}(K_{n,n})$*. Por outro lado, se* d *e* a *são ímpares,* $dR_\alpha \in \widetilde{D}(K_{n,n})$ *e* $dR_\alpha \notin \widetilde{D}(K_{n,n})$*, portanto, a perda ocorre somente em* $\widetilde{D}(K_{n,n})$*, daí* $\widehat{\rho} \leq \widetilde{\rho}$ *e portanto v) é verdadeira, como consequência,* ρ *é maior quando* n *é um composto ímpar, logo a afirmação i) também é verdadeira. As afirmação ii) e iv) são somente consequências de como os modelos da Tabela 3.11.1 foram escolhidos e não representam propriedade gerais.* ■

Concluímos assim a análise dos mergulhos regulares de $K_{n,n}$. Foram obtidos muitos resultados os quais, quando usados devidamente, forneceram informações necessárias para a identificação imediata dos mergulhos regulares de grafos. São informações que dizem respeito ao tipo, quantidade e local de existência do mergulho do grafo completo $K_{n,n}$, condicionadas ao tipo de paridade de n e a condição de n ser primo ou não. As técnicas de identificação e resultados aplicam-se a outras categorias de grafos e podem ser aplicadas para forncecer resultados equivalentes.

CAPÍTULO 4

Mergulhos em Superfícies com Bordos

Vimos, nas seções anteriores, que os mergulhos de grafos podem ser realizados em superfícies orientáveis e não orientáveis. Na relação de modelos de mergulhos da Tabela 3.10.2, concluímos que as classes de mergulhos não-orientáveis de um grafo é bem maior do que o dobro das classes de mergulhos orientáveis. No estudo das classes de mergulhos regulares realizado na Seção 3.10 observamos a mesma propriedade em relação aos mergulhos regulares, as classes mais importantes, quando o objetivo é usar mergulhos para projetos de modulações de sinais. Apesar de nossas ações, neste trabalho, estarem concentradas em projetos de modulações vindos de mergulhos orientáveis, os procedimentos também aplicam-se ao caso não orientável, com as suas devidas adaptações. Sem falar que as classes de mergulhos não orientáveis, além de ser maioria no universo das superfícies compactas, também é maioria quando se trata de classes regulares. Um motivo de não darmos os mesmos tratamentos às duas familias de classes de mergulhos em superfícies compactas é que a grande quantidade de classes de mergulhos não orientáveis, tornaria este trabalho por demasiado extenso.

Existiriam outros tipos de mergulhos diferentes dos mergulhos em superfícies compactas onde poderíamos realizar o processo de identificação? Se estes existem, o número de classes seria menor ou maior do que as das superfícies compactas? Seria possível identificá-las e construí-las? Existiriam muitas classes de mergulhos regulares? O objetivo deste capítulo é fornecer respostas para estas questões, através dos mergulhos do grafo completo $K_{4,4}$.

4.1 Considerações sobre Mergulhos em Superfícies com Bordos

O conceito de mergulhos de grafos em superfícies com bordos foi introduzido por Lima e Palazzo em [21]. Este tipo de mergulho foi definido através de uma operação geométrica da retirada de um interior de uma região conforme o estabelecido na Definição 2.4.1.

Do ponto de vista da Topologia Algébrica, uma superfície Ω com k componentes de bordos, denotada por Ω_k, é uma superfície homeomorfa a Ω menos k pontos. Cada ponto retirado de uma superfície gera uma componente de bordo denominada de *fim*. De um modo geral, o fim em uma superfície refere-se à porção que se prolonga indefinidamente e tem por bordo, uma curva homotópica a um círculo. Os tipos de fins mais conhecidos são os fins *catenóide*, *planar* e *Enneper*. A Figura 4.1.1 ilustra exemplos famosos de superfícies mínimas, todas com bordos e com os tipos de fins mais conhecidos.

Note que, nas superfícies da Figura 4.1.1, o catenóide (b) contém dois fins do tipo catenóides. A superfície c) é semelhante a Superfície de Costa-Meeks III, tem três fins, sendo dois deles do tipo catenóide e um, o do meio, é do tipo planar. A diferença da superfíce c) para a superfície de Costa-Meeks III está no gênero, esta é de gênero 1 enquanto a superfície em c) é de gênero 4. Observe que os fins das superfícies a) e d) são topologicamente bem difenrentes. Enquanto o fim da superfície de Enneper (a) possui autointersções, o do helicóide (d) nem sequer chega a ser homotópico a um círculo. É óbvio que existem outras superfícies com os tipos de fins os mais variados possíveis.

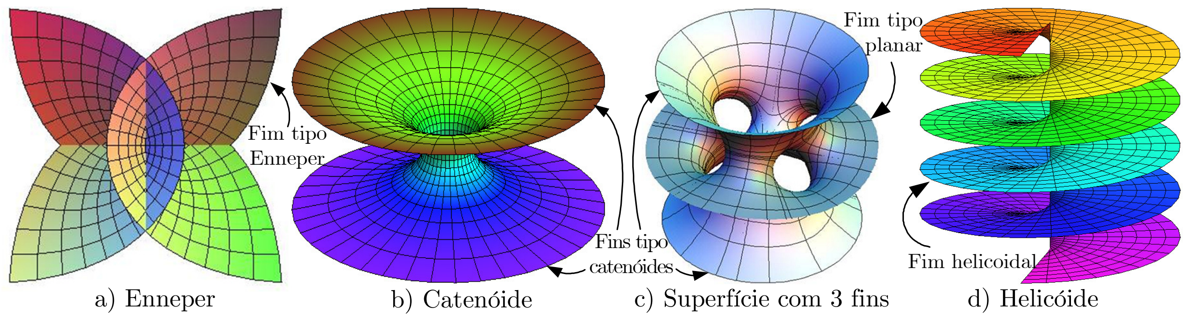


Figura 4.1.1: Superfícies mínimas com bordos e principais tipos de fins

A princípio, importante para os nossos propósitos é o fato das superfícies apresentadas na Figura 4.1.1, poderem ser utilizadas para projetos de modulações, do mesmo modo que se pretende fazer com as superficies compactas, aquelas que não possuem bordos. Para isto, faz-se necessário definir um mergulho em superfície com bordo. Após algumas tentativas nesta direção, Lima [21] chegou a conclusão que a forma mais natural de definir um mergulho com bordo é aplicar uma operação geométrica nos interiores de regiões de mergulhos em superfícies compactas, para obter as componentes de bordos. Esta operação usa o princípio de que uma região R_α de um mergulho de 2-células de um grafo é homotópica a um ponto, e se R_α é emaranhada, a sua fronteira ∂R_α é homotópica a um círculo, portanto se retirarmos o interior da região, obteremos um bordo com um fim do tipo catenóide. No caso da região R_α ser emaranha, a sua fornteira é uma curva fechada não homotópica a um círculo uma vez que ∂R_α possui interseções de vértices e lados. No entando, foi mostrado em [24] que um bordo pode ser gerado a partir de uma região emaranhada, através da operação geométrica de retirada do interior da região, do modo realizado para as regiões não emaranhadas. A diferença é que os mergulhos com bordos sobre regiões emaranhadas difere da não emaranhada porque os mergulho com bordos não podem ser representados sobre os modelos planares da superfíce, somente sobre os modelos espaciais.

Na Figura 4.1.2 ilustramos dois exemplos de mergulhos: 1) com uma componente de bordo, o mergulho planar (b), obtido do mergulho de $K_{4,4}$ em (a) através da retirada do interior da região R_1 e; 2) o mergulho com duas componentes de bordos, obtido do mergulho de $K_{4,4}$ em (a), através da retirada do interior das regiões R_1 e R_3. Ambos são mergulhos com bordos em uma superfície não orientável de gênro 2, a Superfície de Klein, o caso mais complexo de mergulho que se pode obter. Estes foram os primeiros esboços de mergulhos planares realizados em superfícies não orientáveis com bordos. Quanto à dificuldade da construção, esta apresentou a mesma complexidade do mergulho em superfícies orientáveis sem bordo. A forma geométrica espacial correspondente a cada mergulho com bordo encontra-se na parte inferior da Figura 4.1.2.

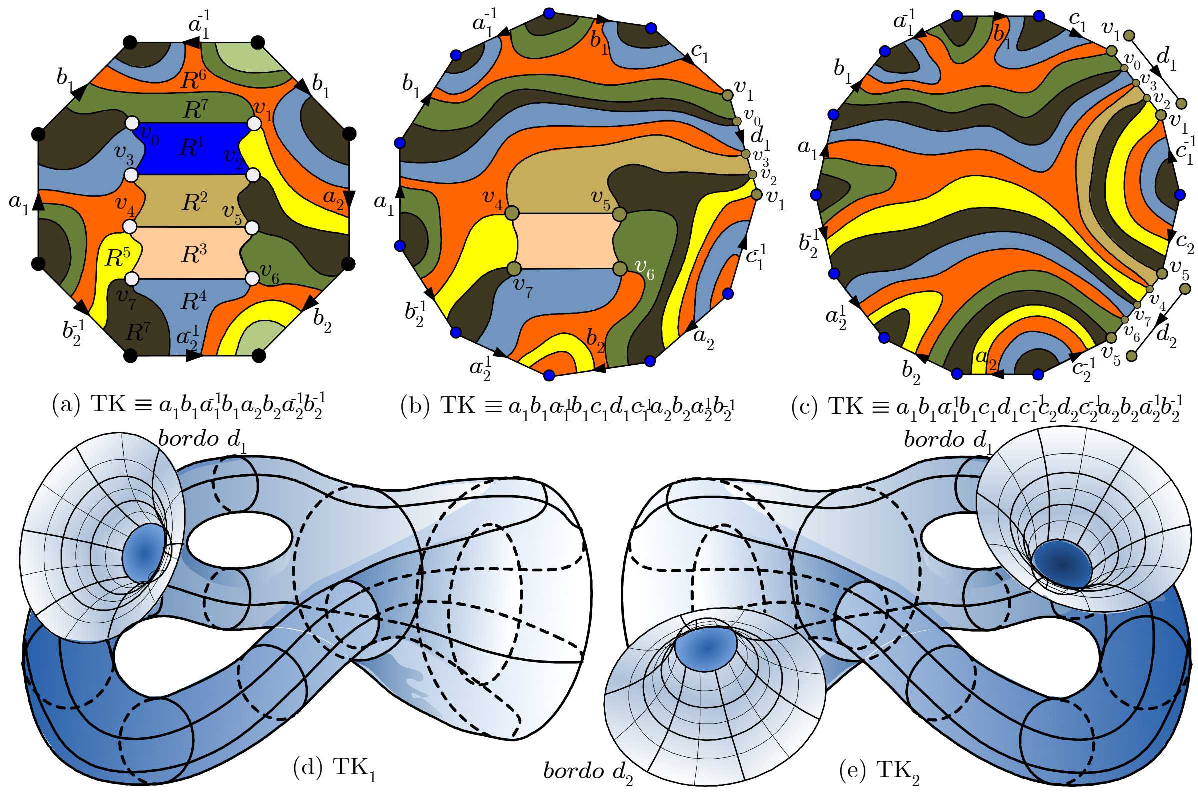


Figura 4.1.2: Mergulhos do grafo completo bipartido $K_{4,4}$ sobre modelos planares de superfícies não orientadas com bordos

É evidente, que este processo de construção em mergulhos com bordos baseia-se no mergulho de um grafo em uma superfície compacta. Este tem que ser construído *a priori*, analisados os tipos de regiões, as condições de emaranhamentos e as interseções entre as mesmas para, depois, decidir que tipo de superfícies desejamos para o mergulho. Para os modelos com bordos de mergulhos da Figura 4.1.2, foi escolhido o mergulho em (a), porque este contem regiões não emaranhadas isoladas, como é o caso das regiões R_4^1 e R_4^3, o que permite construir mergulhos com bordos bem definidos. Esta não é obviamente uma condição necesária, a princípio pode-se aplicar a operação de exérese em todas as regiões, neste caso a superfície é formada somente pelas curvas do grafo, ou sobre um número menor de regiões, independente destas serem emaranhadas ou não.

Utilizando o inverso do método de transferência de mergulho do modelo espacial para o planar introduzido por Lima em [21], é possível construir os mergulhos equivalentes sobre os modelos espaciais, correspondentes aos mergulhos com bordos. Estes só não foram realizados nos respectivos modelos espacias (d) e (e) devido a grande quantidade de sobreposição de linhas que tornaria o mergulho confuso.

Pode-se também, como foi realizado por Lima [21], construir o mergulho diretamente sobre os modelos planar e espacial de uma superfície com bordo, sem ter por base um mergulho em uma superfície compacta, cujo grafo mergulhado vem de um grafo associado a uma DMC, como mostram os modelos de mergulhos ilustrados na Figura 4.1.3. São todos modelos reformulados construídos em [21].

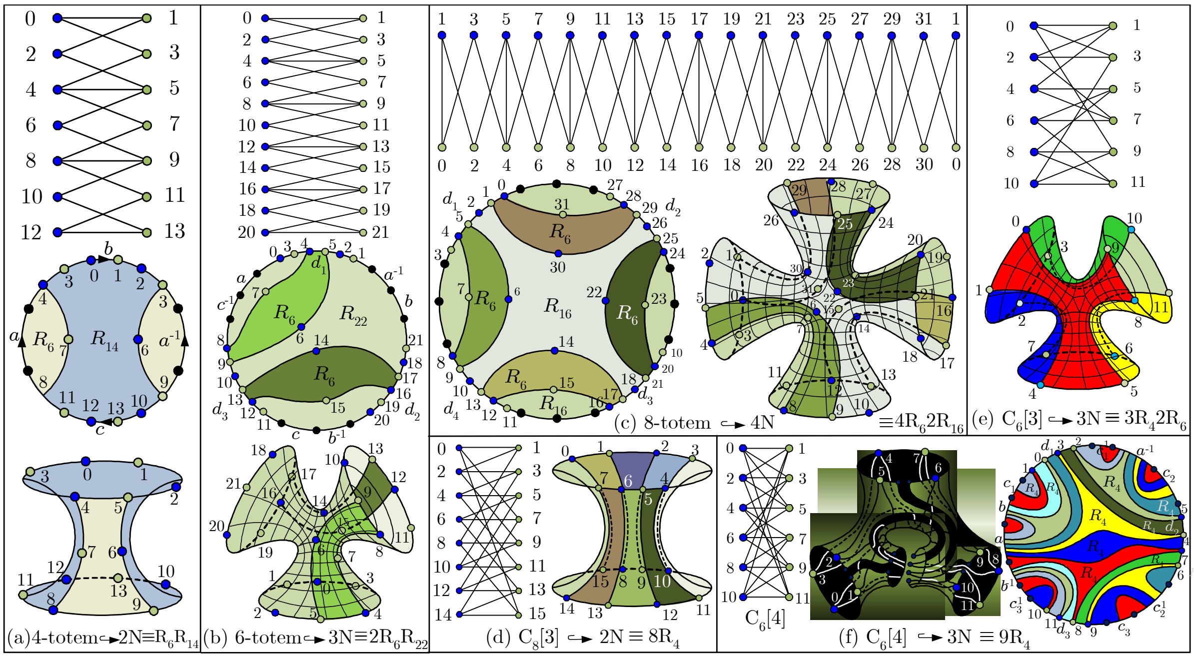


Figura 4.1.3: Mergulhos sobre superfícies orientadas com bordos grafos associados a DMC

Os mergulhos com bordos da Figura 4.1.3 foram construídos observando as condições da Definição 2.4.1, veja que cada componente de bordo é definida pelo acréscimo de 3 vértice (ou três lados) ao polígono $2m$-lados da superfície compacta básica. Por exemplo, o mergulho em (a) vem do grafo correspondente a um canal 7-ário e encontra-se sobre o catenóide, superfície homeomorfa à esfera com duas componentes de bordos. Como a esfera tem por polígono, o 2-lados $= aa^{-1}$, acrescenta-se as duas seqûencias de 3 lados $b_1c_1b_1^{-1}$ e $b_2c_2b_2^{-1}$ à fronteira de aa^{-1} para obter o polígono do catenóide

$$C \equiv S_2 = ab_1c_1b_1^{-1}a^{-1}b_2c_2b_2^{-1},$$

assim, o catenóide tem por polígono um $(2m + 2 \cdot 3)$-lados, pois cada componente de bordo contribui com 3 lados.

A Figura 4.1.3 contém ainda mergulhos com 3 componentes de bordos, os mergulhos (b), (e) e (f) sobre a superfície mínima denominada de tri-nóide, $3N$, cuja palavra representante da forma poligonal é dado por

$$4N = aa^{-1}b_1c_1b_1^{-1}b_2c_2b_2^{-1}b_3c_3b_3^{-1},$$

e com 4 componentes, o mergulho (c) sobre o 4-nóide, cuja palavra é dada por

$$4N = aa^{-1}b_1c_1b_1^{-1}b_2c_2b_2^{-1}b_3c_3b_3^{-1}b_4c_4b_4^{-1}.$$

De um modo geral, se $2m$-lados é a forma polígonal de uma superfície compacta gT, a superfície com k componentes de bordos, gT_k, tem por forma poligonal,

$$gT_k = (2m+3k)\text{-lados} = a_1a_1^{-1}\cdots a_m^{-1}b_1\cdots b_k \text{ ou} \tag{4.1a}$$
$$gT_k = (2m+3k)\text{-lados} = a_1c_1b_1^{-1}a_1^{-1}\cdots a_m^{-1}b_kc_kb_k^{-1}b_1. \tag{4.1b}$$

Como a palavra de um mergulho com bordo é obtida da palavra na forma normal de uma superfície sem bordo acrescentando-se as componentes de bordos, então todo mergulho com bordo vem de um mergulho em superfície compacta (sem bordo). Esta observação é importante e será utilizada para identificar os mergulhos com bordos, a partir dos mergulhos em superfícies compactas.

Lembrando que, do modo como são distribuídas as componentes de bordos na forma poligonal da superfície, estas podem ter um ponto em comum, como a superfície definida pela palavra em $(4.1a)$, ou serem todas isoladas, como o caso da superfície em $(4.1b)$. Observe, na Figura 4.1.4, os dois casos de superfíices com bordos correspondentes as palavras $(4.1a)$ e $(4.1b)$.

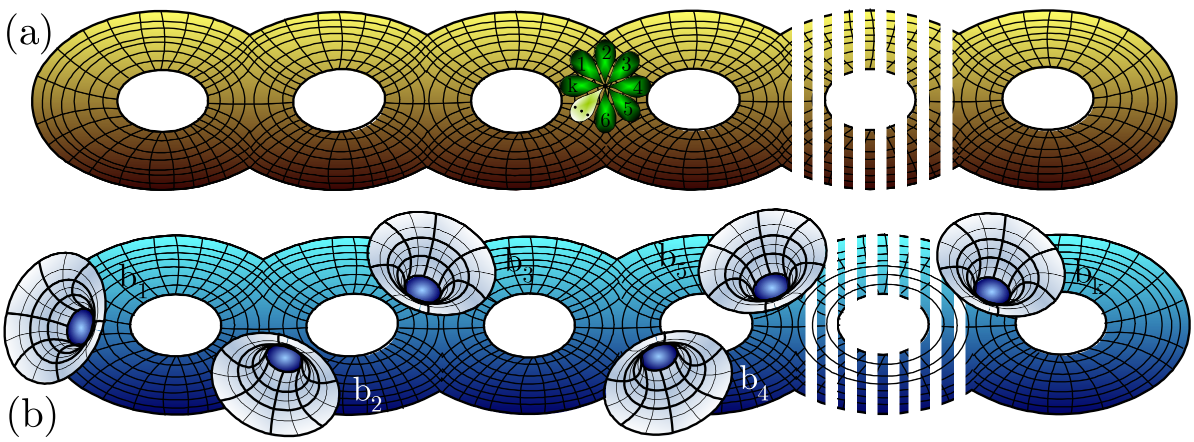


Figura 4.1.4: Superfícies orientadas gT_k bordos: (a) consecutivos, (b) isolados.

Apesar da superfície (a) na Figura 4.1.4 representar uma superfície orientável de gênero m com k componentes de bordos, mT_k, a forma usual é a superfície (b). Consequentemente, $(4.1b)$ é denominada de forma normal da superfície mT_k. A razão de $(4.1a)$ não ser a forma usual de mT_k é porque o grupo de homologia, quando calculada através do método de Betti sobre a forma poligonal em (4.1a), dar resultado completamente diferente do esperado.

O modelo planar de mergulho em superfícies com bordos só é possível de ser realizado, quando a operação de exérese incide sobre uma região não emaranhada de um mergulho de uma superfície Ω. Quando se trata de uma região emranhada R_α as interseções no bordo ∂R_α, principalmente as provenientes de emaranhados lineares, provocam deformações no modelo planar do mergulho do tipo descontinuidade da fronteira da forma polígonal $2m$-lados de Ω. Como consequência, a forma poligonal $2m$-lados de Ω fica totalmente descaracterizada e até mesmo irreconhecível no sentido de identificar a superfícies de origem do mergulho. Pode-se até usar este modelo deformado de mergulho planar com bordo, mas perde-se totalmente a representação poligonal de um mergulho com bordo do modo ilustrado, como exemplos, nos mergulhos (b) (c) da Figura 4.1.2. Entretanto, sobre o modelo espacial, tudo é possível: desde a construção do mergulho compacto Ω, as representações de regiões isoladas, até a identificação da classe de homologia do curva que define o bordo da região emaranhada e o tipo de fim, caso a operação de exérese saja aplicada na região com bordo.

Em [24], Lima mostrou que é possível construir um mergulho espacial de um grafo a partir do mergulho planar e destacar a região emaranhada, operação importante que permite identificar a topologia da região e seu bordo, identificando assim o tipo de fim, caso a operação de exerese seja aplicada na região emaranhada.

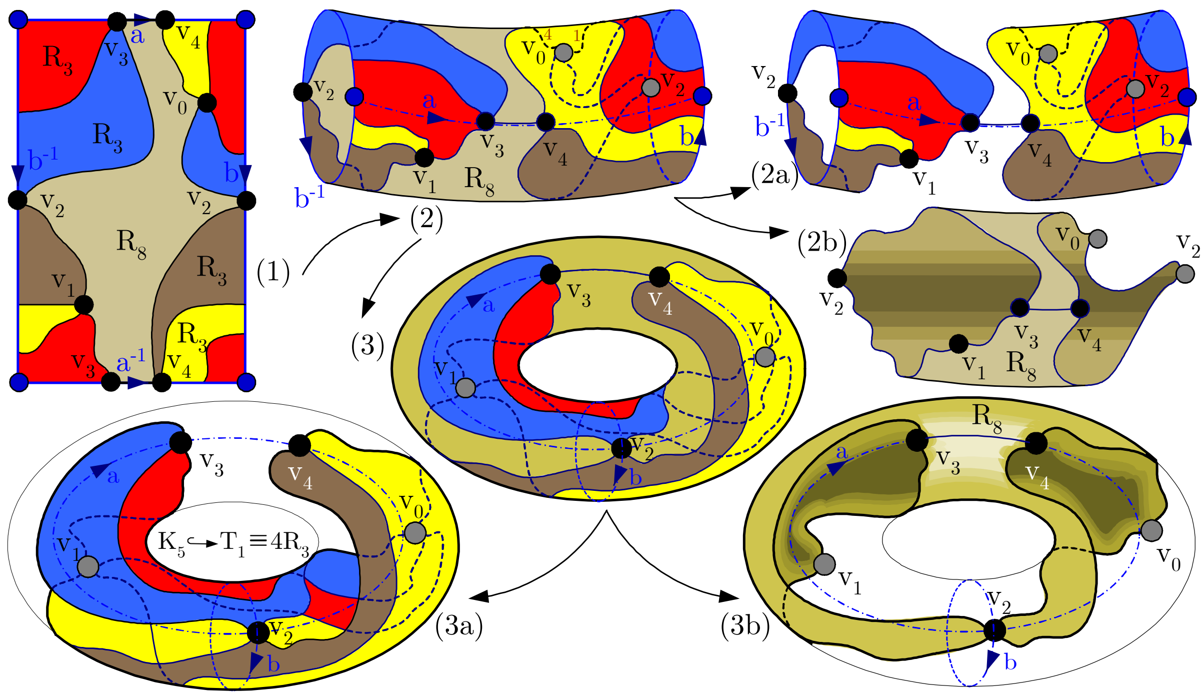


Figura 4.1.5: Etapas de construção do mergulho espacial de K_5, destaque da região emaranhada

A Figura 4.1.5, construída a partir de várias construções em [24], mostra o processo de construção do mergulho espacial de um mergulho do grafo completo K_5 sobre o toro, a partir do modelo planar descomplexificado[1] (1) de um mergulho de K_5. Quando o modelo encontra-se na forma descomplexificada o mergulho espacial é mais fácil de ser construído. O modelo espacial do mergulho (3) foi obtido através de uma etapa intermediária do mergulho correspondente a (1), sobre o cilindro (2), etapa que permite identificar parcialmente as formas topológicas do mergulho sem a região emaranhada (2a) e da região emaranhada (2b). Na etapa intermediária do mergulho sobre o cilindro, já é possível identificar a forma topológica da superfície: o mergulho complementar da região emaranhada (2a) é homeomorfo ao cilindro e a região emaranhada em (2b) está na mesma classe de homologia do toro. Além disso as regiões triangulares são todas homotópicas a um ponto, pela Proposição 3.3.2. Por este processo, toda região de um mergulho sobre o toro pode ser identificado já na etapa intermediária do mergulho sobre o cilindro, é suficiente imaginar o que ocorre quando unirmos os bordos b e b^{-1} do cilindro (2). É bom lembrar que este processo de identificação só é possível no toro. Numa superfície de gênero maior ou igual a 2, é claro que este procedimento não deve funcionar, porque, a etapa anterior da operação geométrica não é um cilindro, seria um toro e dois cilindros e, provavelmente, uma região emaranhada poderia não ser identificável nesta etapa.

A Figura 4.1.5(3) é o mergulho sobre o modelo espacial do toro de K_5 correspondente ao modelo planar em (1). Veja que há uma certa dificuldade de vizualizar a região emaranhada, no entanto, quando esta é isolada, como no mergulho (3b), percebemos imediatamente a sua forma exata topológica: é uma região da mesma classe de homologia do toro. Observe que se trata de uma região de 8 lados definida pela sequência orbital $\gamma = (3, 4, 0, 2, 4, 3, 1, 2)$, com um emaranhado pontual no vértice v_2 e um emaranhado linear no lado $(v_{3,}v_4)$, pontanto, um emaranhado misto de grau 2.

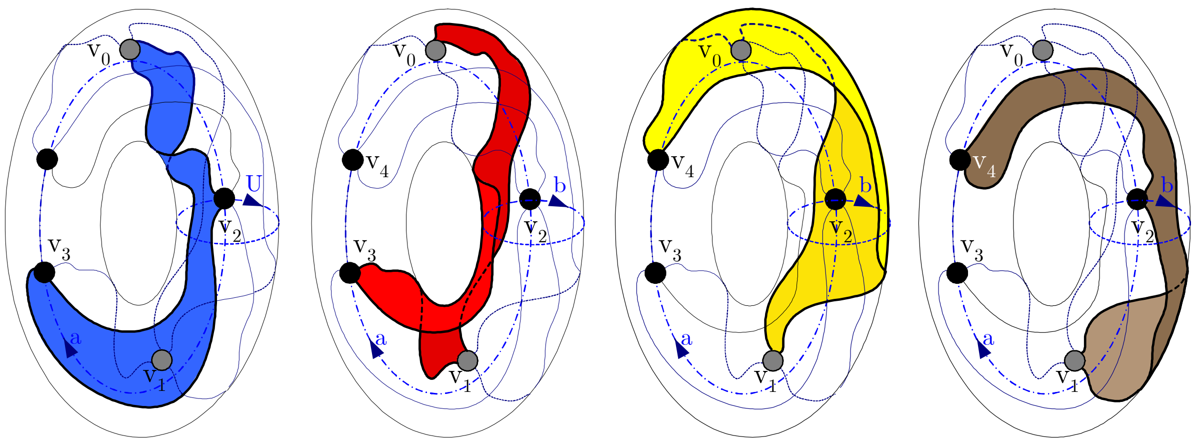


Figura 4.1.6: Regiões quadrangulares do mergulho de K_5 da Figura 4.1.5.

O mergulho complementar em (3a) exibe confusamente as demais regiões triangulares do mergulho. Entretanto, estas podem ser isoladas, do mesmo modo que foi feito com a região emaranhada. Para termos uma idéia precisa de cada região triangular

[1] Um modelo se diz *descomplexificado* quando todas a região emaranhada não se encontra fragmentada no modelo planar do mergulho. Este processo foi introduzido por Lima em [24].

apresentamos, isoladamente na Figura 4.1.6, cada região triangular correspondente ao mergulho (3a) da Figura 4.1.5.

Observe que cada uma das regiões destacadas através de cores distintas da Figura 4.1.6 passam por 3 vértices distintos, logo são regiões não emaranhadas, todas de 3 lados e, portanto, são regiões do tipo R_3, cujas respectivas sequências orbitais são dadas por

$$R_3^{azul} = (0,3,2)\,,\ R_3^{vermelha} = (0,1,3)\,,\ R_3^{amarela} = (0,1,4)\ \text{ e }\ R_3^{marrom} = (1,4,2)\,.$$

No caso do uso de uma destas regiões na composição de um bordo, todos seriam homotópicos a um círculo, diferente do bordo vindo da região emaranhada R_8 que teria, aproximadamente, o formato de bordo ilustrado na Figura 4.1.7.

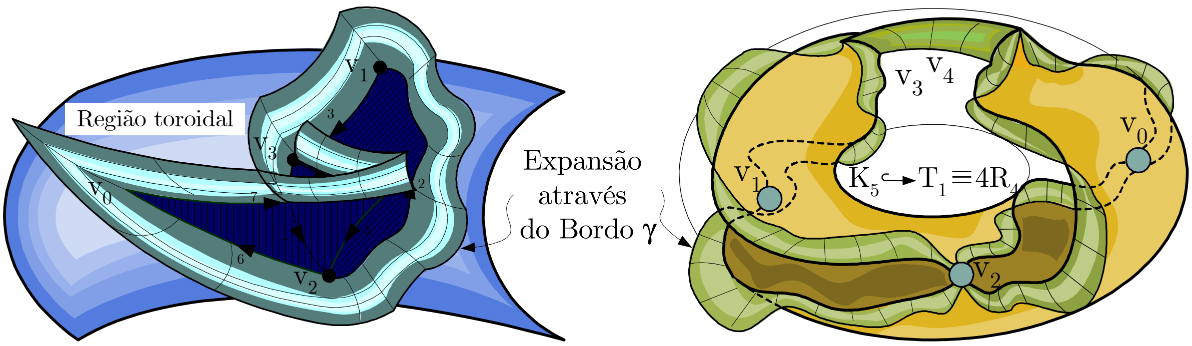


Figura 4.1.7: Identificação do bordo de $K_5 \hookrightarrow T_1$ de um emaranhado mixto de grau 2

Em um projeto de modulação sobre uma superfície vindo de um mergulho de grafo, as etapas das construções de mergulhos conforme o processo ilustrados nas Figura 4.1.5, 4.1.6 e 4.1.7, desempenham papéis muito importantes, dentre os quais destacamos a identificação das formas topológicas da região emaranhada R_α e da classe de homologia de sua fronteira ∂R_α. As regiões não emaranhadas não são problemas, região (conjunto dos pontos interiores) e fronteira possuem a mesma classe de homologia, porém quando se trata de regiões emaranhadas, devemos saber que a região é sempre homotópica a zero apesar de sua fronteira ter sempre classe de homotopia diferente de zero. Por isso, este tipo de construção é fundamental para se obter as primeiras informações sobre a classe de homologia das regiões emaranhadas e, quem sabe, chegar a conclusões mais gerais.

O primeiro esquema da Figura 4.1.7 foi realizado tomando-se a sequência orbital $\gamma = (3,4,0,2,4,3,1,2)$ do emaranhado mixto R_8 de grau 2, colocando a fronteira ∂R_8 sobre uma região toroidal homotópica a um ponto e realizando a expansão sobre a fronteira ∂R_8, para vizualizar a forma do bordo imaginado, caso ∂R_8 pentença a esta região. Este esquema é para efeito de comparação e ver o quanto a região R_8 e seu bordo são diferentes daquele que imaginamos em um primeiro momento. É claro que esta identificação só é possível através do mergulho sobre o modelo espacial bem trabalhado, isolando a região de forma adequada, para que se possa vizualizar precisamente a forma topológica da região e seu bordo. Este processo de identificação é de grande interesse nosso. O exemplo é para mostrar que é possível fazer este tipo de identificação. Não iremos explorar aqui este aspecto do problema por motivos justificados anteriormente: este trabalho já tem muitos objetivos a serem concluídos.

4.2 Mergulhos com Bordos

Na Seção 4.1, vimos alguns aspectos importantes dos mergulhos com bordos que justificam o nosso investimento em desenvolver um processo de identificação desses mergulhos.

Voltemos então ao problema da identificação dos mergulhos de $K_{4,4}$ para estabelcer, nesta seção, um processo de identificação de mergulhos em superfícies com bordos. Já identificamos, no Capítulo 3, os mergulhos orientáveis é não orientáveis. Pela Definição 2.4.1 e os mergulhos da Figura 4.1.3, deduzimos que todo mergulho com bordo vem de um mergulho em superfície compacta. Logo, todo mergulho com bordo do grafo completo $K_{4,4}$ pode ser obtido de um mergulho orientável ou não orientável relacionado no Capítulo 3.

Já que todo mergulho com bordo origina-se de um mergulho sem bordo, identifiquemos então, para cada mergulho sem bordo do Capítulo 3, todos os mergulhos que podem ser obtidos deste.

Afim de introduzir uma notação simplificada para o conjunto de mergulhos com bordo originados de um mergulho sem bordo, vejamos as condições necessárias para qualificar mergulhos distintos com bordos.

Definição 4.2.1 *Dado um mergulho* $G_\Theta \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_i^k R_{\alpha_i}$, *denominaremos de* conjunto gerado *por* $G_\Theta \hookrightarrow \Omega$, *o conjunto de todas as superfícies de* 1 *até* k *bordos gerados de* $G \hookrightarrow \Omega$, *denotado por* $\mathbb{S}_b\left(G_\Theta\right)$, *ou seja,*

$$\mathbb{S}_b\left(G_\Theta\right) = \left\{G_\Theta \hookrightarrow \Omega_j : 1 \leq j \leq k,\ h = k - j \ e\ R_{\alpha_i} \in \cup_i^k R_{\alpha_i}\right\}.$$

Visando relacionar os elementos de $\mathbb{S}_b\left(G_\Theta\right)$, consideremos $G_\Theta \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_i^k R_{\alpha_i}$ um mergulho sem bordo com k regiões distintas. Então, pela Definição 4.2.1, os mergulhos gerados por $G_\Theta \hookrightarrow \Omega$ são todos os mergulhos distintos de 1 até k componentes de bordos, obtidos de $G_\Theta \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_i^k R_{\alpha_i}$. Para todo $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, denotemos por $\mathbb{M}_b^i\left(G_\Theta\right)$ o conjunto das partições de mergulhos como i componentes de bordos obtidos do mergulho de G_Θ. Se $R^{x_1 x_2 \cdots x_i}$ é a partição do mergulho com i bordos, onde $R_{\alpha_{x_1}}, R_{\alpha_{x_1}}, \cdots, R_{\alpha_{x_1}}$ são as regiões nas quais as operação de exéreses foram aplicadas, isto é, $R_\alpha^{x_1 x_2 \cdots x_i} = \cup_i^k R_{\alpha_i} - \{R_{\alpha_{x_1}}, R_{\alpha_{x_1}}, \cdots, R_{\alpha_{x_1}}\}$, então os elementos de $\mathbb{M}_b^i\left(G_\Theta\right)$ são obtidos através das combinações de i elementos das k regiões do mergulho sem bordo de G_Θ, ou seja,

$$\begin{array}{lcllll}
\mathbb{M}_b^1 & = & \{R^{x_1}, R^{x_2}, \cdots, R^{x_k}\}, & & & \\
\mathbb{M}_b^2 & = & \{R^{x_1 x_2}, R^{x_1 x_3}, \cdots, R^{x_{k-1} x_k}\}, & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbb{M}_b^i & = & \{R^{x_1 \cdots x_i}, R^{x_1 \cdots x_i x_{i+1}}, \cdots, R^{x_{k-i+1} \cdots x_{k-1} x_k}\}, & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbb{M}_b^k & = & \{R^{x_1 x_2 \cdots x_{k-1} x_k}\}. & & &
\end{array}$$

Com isto, $\mathbb{M}_b\left(G_\Theta\right) = \cup_{i=1}^k \mathbb{M}_b^i$, e o número de elementos de cada subconjunto de mergulhos com i componentes de bordos é dado por

$$\left|\mathbb{M}_b^i\right| = \binom{k}{i}.$$

Como $|\mathbb{M}_b^i| \neq |\mathbb{M}_b^i|$, para todo $i \neq t$, segue que o número de elementos de $\mathbb{M}_b(G_\Theta)$ é dado por

$$|\mathbb{M}_b(G_\Theta)| = \sum\nolimits_{i=1}^{k} \binom{k}{i} = 2^k - 1.$$

Consequentemente, os comentários acima provam a seguinte afirmação.

Proposição 4.2.2 *Se todas as regiões do mergulhos $G_\Theta \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_i^k R_{\alpha_i}$ são idênticas, então*

$$|\mathbb{M}_b(G_\Theta)| = 2^k - 1.$$

Demonstração. *Consequência direta dos comentários acima.* ■

Observamos ainda que todos os mergulhos com i componentes de bordos pertencem a um mesmo tipo de superfície. Sendo assim, devemos saber que, nas condições acima, para toda $R^{x_1 \cdots x_i} \in \mathbb{M}_b^i$, $R^{x_1 \cdots x_i}$ é uma partição sobre Ω_i.

No caso em que $G_\Theta \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_i^k R_{\alpha_i}$ tem regiões iguais. O número de elementos de $\mathbb{M}_b(G_\Theta)$ depende, deste número de regiões iguais. Mas não é problema este tipo de cálculo, trata-se somente do cálculo de combinações com elementos repetidos. Obviamente que o número de elementos de $\mathbb{M}_b(G_\Theta)$ é menor à medida que $\cup_i^k R_{\alpha_i}$ possui regiões repetidas. Já que o número de regiões em mergulhos de $K_{4,4}$ não chega a ser muito expressivo, não hverá meiores dificuldades em identificar os mergulhos com bordos de $K_{4,4}$.

Da Proposição 4.2.2, deduzimos que o número de mergulhos com bordos é muito maior do os mergulhos sem bordos. Esta diferença atinge valores máximos quando as regiões do mergulho são todas distintas. Podemos então estimar um limitante superior para o conjunto dos mergulhos com bordos através da seguinte afirmação.

Conjectura 4.2.3 *Seja t o número de regiões do mergulho mínimo $G \hookrightarrow \gamma\Omega$ e $|G(g\Omega)|$ o número de classes dos mergulhos de G sobre $|G(g\Omega)|$. Se $\mathbb{M}(G)$ é o conjunto dos mergulhos orientáveis sem bordos de G então*

$$|\mathbb{M}(G)| < |\mathbb{M}_b(G)| \leq \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{t/2-2} \left[\left| G_{(\gamma+i)\Omega} \right| (t-2i)\left(2^{t-2i}-1\right) \right], & \textit{se } t \textit{ é par} \\ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{(t+1)/2-2} \left[\left| G_{(\gamma+i)\Omega} \right| (t-2i)\left(2^{t-2i}-1\right) \right], & \textit{se } t \textit{ é ímpar.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Demonstração. *Faremos a prova da conjectura para as classes de mergulhos de $K_{4,4}$. Toda classe de mergulho de G sobre $g\Omega$ tem número de regiões constante que dependem do mergulho mínimo $G \hookrightarrow \gamma\Omega \equiv \cup_{i=1}^t R_{\alpha_i}$. Então, se todas as classes forem de regiões distintas, pela Proposição 4.2.2, temos que:*

$$\#\,|\mathbb{M}_b(G)| = \begin{cases} \sum_{i=0}^{t/2-2} \left[\left| G_{(\gamma+i)\Omega} \right| (t-2i)\left(2^{t-2i}-1\right) \right], & \text{se } t \text{ é par} \\ \sum_{i=0}^{(t+1)/2-2} \left[\left| G_{(\gamma+i)\Omega} \right| (t-2i)\left(2^{t-2i}-1\right) \right], & \text{se } t \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Mas, como podemos deduzir da análise da diferença entre o número total de modelos existentes e a perda devido as regiões idênticas, realizada no Apêndice C das classes de $K_{4,4}$ relacionadas na Tabela 3.10.2, a maioria das classes de $K_{4,4}$ possuem regiões *idênticas. Como o número de mergulhos com bordos decresce com o aumento de regiões iguais, esta redução chega a ser superior à metade dos números de elementos de $M_b(G)$ em (4.3), e diminui com o aumento do número de regiões no modelo. No caso das classes de mergulhos com bordos de $K_{4,4}$ gerados a partir das classes com 6 regiões, a*

Tabela 4.2.1

Classe	*Componentes de bordos*						*Total*	*Perda*	*Perda em porcentagem*
$R_{\alpha_1,\cdots,\alpha_6}$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*			
$R_{4,4,4,4,4,12}$	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*1*	*11*	52	$82,54\%$
$R_{4,4,4,4,6,10}$	*3*	*4*	*4*	*4*	*3*	*1*	*19*	44	$69,84\%$
$R_{4,4,4,4,8,8}$	*3*	*4*	*4*	*4*	*3*	*1*	*19*	44	$69,84\%$
$R_{4,4,4,6,6,8}$	*3*	*4*	*4*	*4*	*3*	*1*	*19*	44	$69,84\%$
$R_{4,4,6,6,6,6}$	*3*	*4*	*4*	*4*	*3*	*1*	*19*	44	$69,84\%$

Tabela 4.2.1: Mergulhos com bordos das classes de $K_{4,4} \hookrightarrow 2T \equiv R_{\alpha_1,\cdots,\alpha_6}$

mostra o número de mergulhos com bordos e suas respectivas perdas. Observe que esta superior a 69%. Analisando o número de mergulhos com bordos das demais classes de mergulhos de $K_{4,4}$, concluímos que a perda é superior a 50%. Veja os dados apresentados nas tabelas do Apêndice B. ■

Na Tabela 4.2.1 a coluna "Total" indica o número de classes de mergulhos distintos como bordo gerados pela classe $R_{\alpha_1,\cdots,\alpha_6}$. Por exemplo, as classes de mergulhos orientáveis e não orientáveis sem bordo $R_{4,4,4,4,4,12}$ de $K_{4,4}$ geram: 2 mergulhos com 1 componente de bordo sobre $2T_1$,

$$K_{4,4} \hookrightarrow 2T_1 \equiv R_{4,4,4,4,4} \text{ e } K_{4,4} \hookrightarrow 2T \equiv R_{4,4,4,4,12};$$

2 mergulhos com 2 componentes de bordos sobre as superfícies $2T_2$,

$$K_{4,4} \hookrightarrow 2T_2 \equiv R_{4,4,4,4} \text{ e } K_{4,4} \hookrightarrow 2T_2 \equiv R_{4,4,4,12};$$

2 mergulhos com 3 componentes de bordos sobre as superfícies $2T_3$ e $2K_3$,

$$K_{4,4} \hookrightarrow 2T_3 \equiv R_{4,4,4} \text{ e } K_{4,4} \hookrightarrow 2T_3 \equiv R_{4,4,12};$$

2 mergulhos com 4 componentes de bordos sobre as superfícies $2T_4$ e $2K_4$,

$$K_{4,4} \hookrightarrow 2T_4 \equiv R_{4,4} \text{ e } K_{4,4} \hookrightarrow 2T_4 \equiv R_{4,12};$$

2 mergulhos com 5 componentes de bordos sobre as superfícies $2T_5$ e $2K_5$,

$$K_{4,4} \hookrightarrow 2T_5 \equiv R_{4} \text{ e } K_{4,4} \hookrightarrow 2T_5 \equiv R_{12};$$

e 1 mergulho com 6 componentes de bordos equivalente ao grafo $K_{4,4}$ mergulhado sobre as superfícies $2T_6$ e $2K_6$,

$$K_{4,4} \hookrightarrow 2T_4 \equiv K_{4,4}.$$

Consequentemente, um total de 11 classes de mergulhos com bordos gerados pela classe de mergulhos sem bordo $K_{4,4} \hookrightarrow 2T_1 \equiv R_{4,4,4,4,4,12}$. Por outro lado, pela Proposição 4.2.2, um mergulho de 6 regiões pode gerar 63 mergulhos com bordos distintos, porém, como a classe $R_{4,4,4,4,4,12}$ tem somente 2 tipos de regiões distintos, deixou de gerar 52 mergulhos, quantidade computada na coluna "Perda"da Tabela 4.2.1. Portanto, a porcentagem da perda foi de $82,54\%$. As demais linhas da tabela descrevem o mesmos tipos de dados para as classes de mergulhos com bordos, geradas pelas demais classes de mergulhos sem bordos com 6 regiões de $K_{4,4}$.

Como os mergulhos de $K_{4,4}$ sobre $2K$ possuem os mesmos tipos de partições de $2T$, os resultados da Tabela 4.2.1 são equivalentes para o caso dos mergulhos não orientáveis com bordos de $K_{4,4}$ sobre $2K$. Sendo assim, o conjunto $\mathbb{M}_b(\widetilde{G})$, das classes de mergulhos não orientáveis sem bordos, têm o mesmo número de elementos do conjunto $\mathbb{M}_b(G)$, das classes de mergulhos sem bordos orientáveis, isto é,

$$|\mathbb{M}_b(G))| = |\mathbb{M}_b(\widetilde{G})|.$$

Como consequencia do exposto acima, as classes de mergulhos com bordos de $K_{4,4}$ sobre $2T$ contêm, a menos de isomorfismos, 87 mergulhos, contabilizando 228 perdas, num universo de 315 classes possíveis; logo a perda é de $72,38\%$. Esta relação está de acordo com as desigualdades da Conjectura 4.2.3. Observe ainda que o número de mergulhos com bordos vindos das classes de mergulhos sem bordos de $K_{4,4}$ sobre $2T$, é que as classes de mergulhos com bordos de $K_{4,4}$ é de $14,5$ vezez maior do que a classes de mergulhos sem bordos de $K_{4,4}$ sobre $2T$, isto é,

$$|\mathbb{M}_b\left(K_{4,4} \hookrightarrow 2T, 2K\right)| = 14,5\left|\mathbb{M}\left(K_{4,4} \hookrightarrow 2T, 2K\right)\right|.$$

Melhorar os limitantes de $|\mathbb{M}_b\left(G\right)|$ é um problema que depende obviamente do tipo de grafo. Apresentamos aqui somente as conclusões do caso dos mergulhos com bordos de $K_{4,4}$, mas vale ressaltar que conclusões análogas foram apresentadas em [24] quando da análise do grafo completo K_5.

Concluímos, então, que o processo de identificação de um mergulho com bordo começa a partir da fixação de um mergulho sem bordo; neste, o grafo G, a superfície Ω e a partição $\cup_i^k R_{\alpha_i}$ já devem ser conhecidos. Resta somente decidir pelo número de regiões i que irão ser eliminadas (regiões sobre as quais serão aplicadas a operação de exérese); este número pode variar de 1 até k e, finalmente, escolher dentre as k regiões, i regiões para serem transformadas em componentes de bordos. Então começaremos, a seguir, identificar os mergulhos com bordo de $K_{n,n}$, $n = 2, 3, 4$.

4.3 Mergulhos Orientáveis com Bordos de $K_{n,n}$

Vimos, na Subseção 3.3.1, que o grafo completo bipartido $K_{1,1}$ não possui mergulho de 2-células, e portanto não faz sentido construir um mergulho com bordo a partir do mergulho de $K_{1,1}$ da Figura 3.3.1. Caso realmente desejemos obter este mergulho, iremos considerá-lo como o mergulho com bordo composto somente pelo $K_{1,1}$ como um grafo sobre a esfera.

De um modo geral, se $G\left(\Theta\right) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}$ é um mergulho sem bordo, iremos considerar todo mergulho com k componentes de bordos como sendo somente os lados

Orientável							Não Orientável						
Sem bordo		$\mathbb{M}_s$	C/bordo		$\mathbb{M}_b$	$\mathbb{M}$	S/bordo		$\widetilde{\mathbb{M}}_s$	C/bordo	$\widetilde{\mathbb{M}}_b$	$\widetilde{\mathbb{M}}$	Tot
Ω	S	1	S_1	S_2	2	3	$\widetilde{\Omega}$	P	1	P_1	1	2	5
$\cup R_\alpha$	$R_{4,4}$	1	R_4	$K_{2,2}$	2	3	$\cup R_\alpha$	R_4	1	$K_{2,2}$	1	2	5

Tabela 4.3.1: Classes de mergulhos de $K_{4,4}$

e vértices do próprio grafo $G(\Theta)$ mergulhado na superfície Ω, isto é,

$$G(\Theta) \hookrightarrow \Omega_k \equiv G(\Theta) \hookrightarrow \Omega - \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i} = \cup_{i=1}^{k} \partial R_{\alpha_i}. \tag{4.4}$$

Neste caso, $G(\Theta) \hookrightarrow \Omega_k$ seria composto somente pela união das fronteiras das k regiões R_{α_i} do mergulho sem bordo $G(\Theta) \hookrightarrow \Omega$. Esta conclusão é decorrente da condição da própria operação de exérese que retira todo interior da região, e quando a operação é aplicada em todas as regiões, resta somente o grafo mergulhado na superfície.

4.3.1 Mergulhos com bordos de $K_{2,2}$

Considerando as notações anteriores, os mergulhos com e sem bordos do grafo $K_{2,2}$ são como os relacionados na Tabela

Pelo exposto na Tabela 4.3.1, vemos que o conjunto das classes de mergulhos de $K_{2,2}$ é composto de 5 elementos, sendo 3 orientáveis e 2 não orientáveis. Dos 3 mergulhos orientáveis, dois são com bordos, e dos 2 não orientáveis, um é com bordo. Sendo assim,

$$|\mathbb{M}_b| = 2\,|\mathbb{M}_s| \quad \text{e} \quad |\widetilde{\mathbb{M}}_b| = |\widetilde{\mathbb{M}}_s|. \tag{4.5}$$

O grafo $K_{2,2}$ é o único caso da família dos grafos completos $K_{n,n}$ que valem as igualdades em (4.5). Então os únicos conjuntos que possuem mergulhos com bordos iguais aos mergulhos sem bordos é o conjunto dos mergulhos não orientados de $K_{2,2}$. Nos casos seguintes iremos constatar que, em vez de igualdades, ocorrem as desigualdades

$$|\mathbb{M}_b| > 2\,|\mathbb{M}_s| \quad e \quad |\widetilde{\mathbb{M}}_b| > 2|\widetilde{\mathbb{M}}_s|.$$

É evidente que o processo de descrição dos mergulhos começa a ficar mais complexo a partir do grafo $K_{3,3}$. A identificação de $K_{3,3}$ é simples, de $K_{4,4}$ já dar mais trabalho e de $K_{5,5}$, sequer ainda não cogitamos em realizá-la devido a sua grande quantidade de classes e complexidade de cálculo exigida do Algorítmo 2.8.1 para este caso.

4.3.2 Mergulhos com bordos de $K_{3,3}$

Apesar do objetivo ser identificar os mergulhos com bordos temos que partir, pela Definição 4.2.1, dos mergulhos sem bordos. Assim os mergulhos sem bordos passam a ser incluidos naturalmente no processo. Pela Tabela 3.4.1, o conjunto das classes de mergulhos orientáveis de $K_{3,3}$ é formada por 3 elementos

$$K_{3,3} \hookrightarrow T \equiv 3R_6, \quad K_{3,3} \hookrightarrow T \equiv 2R_4R_{10} \quad \text{e} \quad K_{3,3} \hookrightarrow 2T \equiv R_{18}, \tag{4.6}$$

Orientável					Não Orientável		
	Sem bordo	Com bordo			Sem bordo	Com bordo	
Ω	T	T_1	T_2	T_3	K	K_1	K_2
Ξ	$3R_6, 2R_{4,10}$	$2R_6, 2R_4, R_{4,10}$	R_6, R_4, R_{10}	$K_{3,3}$	$3R_6, 2R_{4,10}$	$2R_6, 2R_4, R_{4,10}$	R_4, R_6, R_{10}
Ω	$2T$	$2T_1$			KP	KP_1	KP_2
Ξ	R_{18}	$K_{3,3}$			$R_{4,14}, R_{6,12}, R_{8,10}$	$R_4, R_6, \cdots, R_{14}$	$K_{3,3}$
Ω					$2K$	$2K_1$	
Ξ					R_{18}	$K_{3,3}$	

Tabela 4.3.2: Mergulhos com bordos das classes de $K_{4,4} \hookrightarrow 2T \equiv R_{\alpha_1,\cdots,\alpha_6}$

enquanto as classes de mergulhos não orientáveis encontram-se sobre as superfícies K, KP e $2K$ e são dadas por

$$K_{3,3} \hookrightarrow K \equiv 3R_6, 2R_4R_{10}, K_{3,3} \hookrightarrow KP \equiv R_4R_{14}, R_6R_{12}, R_8R_{10}, \quad \text{e} \quad K_{3,3} \hookrightarrow 2K \equiv R_{18}, \tag{4.7}$$

Aplicando as condições de mergulhos com bordos gerados pelos sem bordos da Definição 4.2.1, nas partições em (4.6) e (4.7), deduzimos que os mergulhos com e sem bordos de $K_{3,3}$ são exatamente aqueles relacionados na Tabela 4.3.2.

O símbolo Ξ utilizado na Tabela 4.3.2 indica a partição do mergulho sobre a superfície Ω. Veja que o conjunto dos mergulhos de $K_{3,3}$ são compostos de 11 mergulhos orientáveis, sendo 3 sem bodos e 8 com bordos, e 20 não orientáveis, sendo 6 sem bordos e 14 com bordos. Em ambos os casos o número de mergulhos com bordos é maior que o dobro do número de mergulhos sem bordos.

4.4 Mergulhos com bordos de $K_{4,4}$

Por ser relativamente grande a quantidade de mergulhos com bordos do grafo completo, o processo de identificação será realizado em duas etapas, os mergulhos orientáveis com bordos e não orientáveis.

4.4.1 Mergulhos com bordos orientáveis de $K_{4,4}$

Utilizando os mesmos procedimentos da Seção 4.3, relacionaremos os mergulhos com bordos do grafo completo $K_{4,4}$, juntamente com os sem bordos, já que estes são os geradores dos mergulhos com bordos. Utilizando os modelos de mergulhos orientáveis e não orientáveis de $K_{4,4}$ relacionados na Tabela 3.10.2, as condições da Definição 4.2.1 nos dá o conjunto de mergulhos de $K_{4,4}$, de acordos com os modelos relacionados na Tabela 4.4.1.

Devido a acomodação dos elementos na Tabela 4.4.1, optamos pela notação $5R_4R_{12}$

Tabela 4.4.1: Classes de mergulhos orientáveis de $K_{4,4}$

Família do toro									
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos							
Ω	T	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
Ξ	$8R_4$	$7R_4$	$6R_4$	$5R_4$	$4R_4$	$3R_4$	$2R_4$	R_4	$K_{4,4}$

Família do bitoro							
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos					
Ω	$2T$	$2T_1$	$2T_2$	$2T_3$	$2T_4$	$2T_5$	$2T_6$
Ξ_1	$5R_4R_{12}$	$5R_4, 4R_4R_{12}$	$4R_4, 3R_4R_{12}$	$3R_4, 2R_4R_{12}$	$2R_4, R_4R_{12}$	R_4, R_{12}	$K_{4,4}$
Ξ_2	$4R_4R_6R_{10}$	$4R_4R_6, 4R_4R_{10}$ $3R_4R_6R_{10}$	$3R_4R_6, 3R_4R_{10}$ $4R_4, 2R_4R_6R_{10}$	$2R_4R_6, 2R_4R_{10}$ $3R_4, R_4R_6R_{10}$	$2R_4, R_4R_6$ R_4R_{10}, R_6R_{10}	R_4, R_6 R_{10}	$K_{4,4}$
Ξ_3	$4R_42R_8$	$4R_4R_8$ $3R_42R_8$	$4R_4, 3R_4R_8$ $2R_42R_8$	$3R_4, 2R_4R_8$ R_42R_8	$2R_4, 2R_8$ R_4R_8	R_4 R_8	$K_{4,4}$
Ξ_4	$R_{4,4,4,6,6,8}$	$3R_42R_6$ $3R_4R_6R_8$ $2R_42R_6R_8$	$2R_42R_6, 3R_4R_8$ $3R_4R_6, 2R_4R_6R_8$ $R_42R_6R_8$	$2R_4R_6, 2R_4R_8$ $3R_4, R_42R_6$ $R_4R_6R_8$	$2R_4, R_4R_6$ R_4R_8 $R_6R_8, 2R_6$	R_4 R_6 R_8	$K_{3,3}$
Ξ_5	$2R_44R_6$	$2R_43R_6$ R_44R_6	$2R_42R_6, 4R_6$ R_43R_6	$2R_4R_6, 3R_6$ R_42R_6	R_4R_6 $2R_4, 2R_6$	R_4 R_6	$K_{4,4}$

Família do tritoro					
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos			
Ω	$3T$	$3T_1$	$3T_2$	$3T_4$	$3T_4$
Ξ_1	$3R_4R_{20}$	$3R_4, 2R_4R_{20}$	$2R_4, R_4R_{20}$	R_4, R_{20}	$K_{3,3}$
Ξ_2	$2R_4R_6R_{18}$	$2R_4R_6, 2R_4R_{18}$ $R_4R_6R_{18}$	R_4R_6, R_4R_{18} $2R_4, R_6R_{18}$	R_4, R_6 R_{18}	$K_{4,4}$
Ξ_3	$2R_4R_8R_{16}$	$2R_4R_8, 2R_4R_{16}$ $R_4R_8R_{16}$	R_4R_8, R_4R_{16} $2R_4, R_8R_{16}$	R_4, R_8 R_{16}	$K_{4,4}$
Ξ_4	$2R_4R_{10}R_{14}$	$2R_4R_{10}, 2R_4R_{14}$ $R_4R_{10}R_{14}$	R_4R_{10}, R_4R_{14} $2R_4, R_{10}R_{14}$	R_4, R_{10} R_{14}	$K_{4,4}$
Ξ_5	$2R_42R_{12}$	$2R_4R_{12}$ R_42R_{12}	$2R_4, 2R_{12}$ R_4R_{12}	R_4 R_{12}	$K_{4,4}$
Ξ_6	$R_42R_6R_{16}$	$R_42R_6, 2R_6R_{16}$ $R_4R_6R_{16}$	R_4R_6, R_6R_{16} $2R_6, R_4R_{16}$	R_4, R_6 R_{16}	$K_{4,4}$
Ξ_7	$R_{4,6,8,14}$	$R_4R_6R_8$ $R_4R_6R_{14}$ $R_6R_8R_{14}$	R_4R_6, R_4R_8 R_4R_{14}, R_6R_8 R_6R_{14}, R_8R_{14}	R_4, R_6 R_8 R_{14}	$K_{4,4}$

Continua na próxima página

Tabela 4.4.1 - Continuação da página anterior

Família do tritoro						
Sem Bordo		Partições dos mergulhos com bordos				
Ξ_{3T}	$3T$	$3T_1$	$3T_2$	$3T_3$	$3T_4$	
Ξ_8	$R_{4,6,10,12}$	$R_4R_6R_{10}$ $R_4R_6R_{12}$ $R_6R_{10}R_{12}$	R_4R_6, R_4R_{10} R_4R_{12}, R_6R_{10} $R_6R_{12}, R_{10}R_{12}$	R_4R_6, R_4R_{10} R_4R_{12}, R_6R_{10} $R_6R_{12}, R_{10}R_{12}$	R_4, R_6 R_{10} R_{12}	$K_{4,4}$
Ξ_9	$R_42R_8R_{12}$	$R_42R_8, 2R_8R_{12}$ $R_4R_8R_{12}$	R_4R_8, R_8R_{12} $2R_8, R_4R_{12}$	R_4R_8, R_8R_{12} $2R_8, R_4R_{12}$	R_4, R_8 R_{12}	$K_{4,4}$
Ξ_{10}	$R_4R_82R_{10}$	R_42R_{10}, R_82R_{10} $R_4R_8R_{10}$	R_4R_8, R_8R_{10} $2R_{10}, R_4R_{10}$	R_4R_8, R_8R_{10} $2R_{10}, R_4R_{10}$	R_4, R_8 R_{10}	$K_{4,4}$
Ξ_{11}	$3R_6R_{14}$	$3R_6, 2R_6R_{14}$	$2R_6, R_6R_{14}$	$2R_6, R_6R_{14}$	R_6, R_{14}	$K_{4,4}$
Ξ_{12}	$2R_6R_8R_{12}$	$2R_6R_8, 2R_6R_{12}$ $R_6R_8R_{12}$	R_6R_8, R_6R_{12} $2R_6, R_8R_{12}$	R_6R_8, R_6R_{12} $2R_6, R_8R_{12}$	R_6, R_8 R_{12}	$K_{4,4}$
Ξ_{13}	$2R_62R_{10}$	$2R_6R_{10}$ R_62R_{10}	$2R_6, 2R_{10}$ R_6R_{10}	$2R_6, 2R_{10}$ R_6R_{10}	R_6 R_{10}	$K_{4,4}$
Ξ_{14}	$R62R_8R_{10}$	$R_62R_8, 2R_8R_{10}$ $R_6R_8R_{10}$	R_6R_8, R_6R_{10} $2R_8, R_8R_{10}$	R_6R_8, R_6R_{10} $2R_8, R_8R_{10}$	R_6, R_8 R_{10}	$K_{4,4}$
Ξ_{15}	$4R_8$	$3R_8$	$2R_8$	$2R_8$	R_8	$K_{4,4}$

Família do 4-toro							
Sem bordos		Com bordos		Sem bordos		Com bordos	
Ξ_Ω	$4T$	$4T_1$	$4T_2$	Ξ_Ω	$4T$	$4T_1$	$4T_2$
Ξ_1	R_4R_{28}	R_4, R_{28}	$K_{4,4}$	Ξ_5	$R_{12}R_{20}$	R_{10}, R_{22}	$K_{4,4}$
Ξ_2	R_6R_{26}	R_6, R_{26}	$K_{4,4}$	Ξ_6	$R_{14}R_{18}$	R_{10}, R_{22}	$K_{4,4}$
Ξ_3	R_8R_{24}	R_8, R_{24}	$K_{4,4}$	Ξ_7	$R_{16}R_{16}$	R_{10}, R_{22}	$K_{4,4}$
Ξ_4	$R_{10}R_{22}$	R_{10}, R_{22}	$K_{4,4}$				

em vez de $R_{4,4,4,4,4,4,12}$. Além disso iremos construir uma única tabela para os mergulhos de $K_{4,4}$, evitando uma pulverização em quatro tabelas distintas referentes as famílias de mergulhos de $K_{4,4}$. O símbolo Ξ será usado no sentido de representar o modelo de mergulho, o qual indica o número e o tipo de regiões. Se o modelo de partição $\cup R_\alpha$ encontra-se na coluna da superfície Ω é porque existe o modelo de mergulho $K_{4,4} \hookrightarrow \Omega \equiv \cup R_\alpha$.

A Tabela 4.4.1 só não inclui o número de partições devido a sua estrutura avantajada. Estes dados serão relacionados na Tabela 4.4.2.

As classes de mergulhos com e sem bordos do grafo completo bipartido $K_{4,4}$, apresentados na Tabela 4.4.1, representam o maior nível de mergulhos orientáveis identificados neste trabalho. Como as partições de $K_{4,4}$ são simples, foi possível fazer a relação de todos as partições com e sem bordos, em uma única tabela. Mas devido a grande quantidade de dados existentes optamos por construir a Tabela 4.4.2 contendo os número de partições de cada classe dos mergulhos orientáveis de $K_{4,4}$.

A notação Ξ_Ω usada na Tabela 4.4.2 refere-se ao modelo da partição do mergulho sem bordo e o número inteiro abaixo de cada superfície Ω corresponde ao número de modelos de partições vindos de mergulhos orientáveis do grafo $K_{4,4}$.

Quanto ao número de classes de mergulhos de $K_{4,4}$ vemos, da Tabela 4.4.2, que: 1) são 9 mergulhos sobre a família do toro, conjunto formados pelas superfícies $T, T_1, T_2, \cdots, T_8$, sendo um em cada superfície e, protanto, 1 sem bordo e 8 com bordos; 2) 85 mergulhos sobre a família do bitoro, compostas pelas superfícies $2T, 2T_1, 2T_2, \cdots, 2T_6$, sendo 5 sem bordos e 69 com bordos; 3) 165 mergulhos sobre a família do tritoro $3T, 3T_1, 3T_2, 3T_3, 3T_4$ sendo 15 sem bordos e 150 com bordos e; 4) 28 mergulhos sobre a família de mergulhos máximos, isto é, a família do 4-toro compostas pelas superfícies $4T, 4T_1$ e $4T_2$, sendo 7 mergulhos sem bordos, 21 mergulhos com bordos. Ao todo são 287 mergulhos não orientáveis do grafo completo bipartido $K_{4,4}$, sendo 28 sem bordos e 259 com bordos, e portanto o número de mergulhos com bordos é de $9,25$ maior do que o número de mergulhos sem bordos.

Observe que a família de mergulho mínimo é composta por 9 superfícies, uma sem bordo e oito com bordos, o mesmo número de mergulhos com bordos. Esta é uma propriedade do mergulho mínimo, e só ocorre quando esta é composta por um único elemento e este é regular.

Suponhamos que $\mathbb{S}_s(G)$ e $\mathbb{S}_c(G)$ são os respectivos conjuntos das superfícies orientáveis sem e com bordos para os mergulhos de 2-células de G, isto é, $\mathbb{S}(G) = \mathbb{S}_s(G) \cup \mathbb{S}_c(G)$, onde,

$$\mathbb{S}_s(G) = \bigcup_{g=\gamma}^{\gamma_M} \{gT\} \text{ e } \mathbb{S}_c(G) = \bigcup_{g_i=\gamma}^{\gamma_M} \left\{\bigcup_{i=1}^{k_i} \{g_i T_i\}\right\};\ G \hookrightarrow g_i T \equiv \cup_{i=1}^{k_i} R_{\alpha_i}.$$

Consideremos ainda que $\mathbb{M}_s(G) \cup \mathbb{M}_c(G)$ são os respectivos conjuntos dos mergulhos orientáveis de 2-células sem e com bordos de G, isto é, $\mathbb{M}(G) = \mathbb{M}_s(G) \cup \mathbb{M}_c(G)$, onde,

$$\mathbb{M}_s(G) = \bigcup_{g=\gamma}^{\gamma_M} \{G(gT)\} \text{ e } \mathbb{M}_s(G) = \bigcup_{g_i=\gamma}^{\gamma_M} \left\{\bigcup_{i=1}^{k_i} \{G(g_i T_i)\}\right\}$$

e $G(\Omega)$ é o conjunto das classes de mergulhos sobre Ω.

Observação 4.4.1 *Para entender as notações simplificadas que iremos adotar em seguida, recordemos que a família das classes de superfícies gerada por um mergulho sem bordo* $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$, *ou conjunto gerado por* $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$, *é o conjunto de todas as superfícies formadas pela superfície sem bordo* Ω *e as superfícies com até* k *componentes de bordos,*

$$\mathbb{S}(G(\Omega)) = \{\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \cdots \Omega_{k-1}, \Omega_k\}.$$

Lembramos ainda que $G(\Omega)$ *é o conjunto das classes de mergulhos de* G *sobre* Ω *e pode ser representado pela partições de mergulhos distintos de* G *sobre* Ω. *Além disso, o conjunto de todas as superfícies nas quais* G *pode ser mergulhado é dado por* $\mathbb{S}(G) = \bigcup G(\Omega)$.

No caso do mergulho de $K_{4,4}$, os conjuntos importantes são:

1) o conjuntos das famílias de superfícies para os mergulhos de $K_{4,4}$

$$\mathbb{S}(K_{4,4}) = \{K_{4,4}(T), K_{4,4}(2T), K_{4,4}(3T), K_{4,4}(4T)\}$$

Família do toro										
Sem bordo		Partições dos mergulhos com bordos								
Ξ_T	T	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	Total
$8R_4$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9

Família do bitoro								
Mergulho sem bordo		Partições dos mergulhos com bordos						
Ξ_{2T}	$2T$	$2T_1$	$2T_2$	$2T_3$	$2T_4$	$2T_5$	$2T_6$	Total
$R_4R_4R_4R_4R_4R_{12}$	1	2	2	2	2	2	1	12
$R_4R_4R_4R_4R_6R_{10}$	1	3	4	4	4	3	1	20
$R_4R_4R_4R_4R_8R_8$	1	2	3	3	3	2	1	15
$R_4R_4R_4R_6R_6R_8$	1	3	5	5	5	3	1	23
$R_4R_4R_6R_6R_6R_6$	1	2	3	3	3	2	1	15
Subtotais	5	12	17	17	17	12	5	85

Família do tritoro						
Sem bordo	Partições dos mergulhos com bordos					
Ξ_{3T}	$3T$	$3T_1$	$3T_2$	$3T_3$	$3T_4$	Total
$R_4R_4R_4R_{20}$	1	2	2	2	1	8
$R_4R_4R_6R_{18}$	1	3	4	3	1	12
$R_4R_4R_8R_{16}$	1	3	4	3	1	12
$R_4R_4R_{10}R_{14}$	1	3	4	3	1	12
$R_4R_4R_{12}R_{12}$	1	2	3	2	1	9
$R_4R_6R_6R_{16}$	1	3	4	3	1	12
$R_4R_6R_8R_{14}$	1	3	6	4	1	15
$R_4R_6R_{10}R_{12}$	1	3	6	4	1	15
$R_4R_8R_8R_{12}$	1	3	4	3	1	12
$R_4R_8R_{10}R_{10}$	1	3	4	3	1	12
$R_6R_6R_6R_{14}$	1	2	2	2	1	8
$R_6R_6R_8R_{12}$	1	3	4	3	1	12
$R_6R_6R_{10}R_{10}$	1	2	3	2	1	9
$R_6R_8R_8R_{10}$	1	3	4	3	1	12
$R_8R_8R_8R_8$	1	1	1	1	1	5
Subtotais	15	39	55	41	15	165

Família do 4-toro									
Sem bordo		Com bordo		Sem bordo		Com bordo			
Ξ_{4T}	$4T$	$4T_1$	$4T_2$	Sub	Ξ_{4T}	$4T$	$4T_1$	$4T_2$	Total
R_4R_{28}	1	2	1	4	$R_{10}R_{22}$	1	2	1	4
R_6R_{26}	1	2	1	4	$R_{10}R_{22}$	1	2	1	4
R_8R_{24}	1	2	1	4	$R_{10}R_{22}$	1	2	1	4
$R_{10}R_{22}$	1	2	1	4	Subtotais	3	6	3	28
Subtotais	4	8	4	16					

Tabela 4.4.2: Número de classes das famílias de mergulhos orientáveis de $K_{4,4}$

onde $K_{4,4}(\Omega)$ é a família de superfícies geradas pelas classes de mergulhos de $K_{4,4} \hookrightarrow \Omega$, ou seja,

$$\begin{aligned}
K_{4,4}(T) &= \{T, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8\}, \\
K_{4,4}(2T) &= \{2T, 2T_1, 2T_2, 2T_3, 2T_4, 2T_5, 2T_6\}, \\
K_{4,4}(3T) &= \{3T, 3T_1, 3T_2, 3T_3, 3T_4\}, \\
K_{4,4}(4T) &= \{4T, 4T_1, 4T_2\},
\end{aligned}$$

no qual o conjunto de superfícies sem bordos é dado por

$$\mathbb{S}_s(K_{4,4}) = \{T, 2T, 3T, 4T\}$$

e das superfícies com bordos é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_c(K_{4,4}) = \{&T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, 2T_1, 2T_2, 2T_3, \\
&2T_4, 2T_5, 2T_6, 3T_1, 3T_2, 3T_3, 3T_4, 4T_1, 4T_2\};
\end{aligned}$$

2) o conjunto dos mergulhos $\mathbb{M}(K_{4,4})$ o qual é definido pelas partições dos mergulhos em cada família de superfícies $\Omega \in \mathbb{S}(K_{4,4})$, isto é,

$$\mathbb{M}(K_{4,4}) = \{\Xi(\Omega) : K_{4,4} \hookrightarrow \Omega \equiv \Xi(\Omega) \text{ é um 2-células}\},$$

cujos elementos são dados por

$$\mathbb{M}(K_{4,4}) = \{\Xi(T), \Xi(2T), \Xi(3T), \Xi(4T)\}.$$

Veja que $\mathbb{M}(K_{4,4})$ é a união dos mergulhos sem bordos $\mathbb{M}_s(K_{4,4})$ com os mergulhos com bordos $\mathbb{M}_c(K_{4,4})$, ou seja

$$\mathbb{M}(K_{4,4}) = \mathbb{M}_s(K_{4,4}) \cup \mathbb{M}_c(K_{4,4}),$$

logo $\Xi(\Omega)$ é a união do conjunto $\Xi_s(\Omega)$, dos mergulhos sem bordos de $K_{n,n}$ sobre Ω, com a conjunto $\Xi_c(\Omega)$, dos mergulhos com bordos de $K_{n,n}$ sobre Ω, isto é,

$$\Xi(\Omega) = \Xi_s(\Omega) \cup \Xi_c(\Omega).$$

Por exemplo, as classes de mergulhos de $K_{4,4}$ sobre a família do bitoro é dado por $\Xi(2T) = \Xi_s(2T) \cup \Xi_c(2T)$, onde

$$\begin{aligned}
\Xi_s(2T) &= \{R_{4,4,4,4,4,12}, R_{4,4,4,4,6,10}, R_{4,4,4,4,8,8}, R_{4,4,4,6,6,8}, R_{4,4,6,6,6,6}\}, \quad \text{e} && (4.8\text{a}) \\
\Xi_c(2T) &= \{\Xi_c(2T_1), \Xi_c(2T_2), \Xi_c(2T_3), \Xi_c(2T_4), \Xi_c(2T_5), \Xi_c(2T_6)\} && (4.8\text{b})
\end{aligned}$$

Mas como são cinco classes de mergulhos sem bordos sobre o bitoro, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, 6\}$, temos que

$$\Xi_c(2T_i) = \{\cup_j^6 R_{\alpha_j} \backslash \{R_{\alpha_{j_1}}, \cdots, R_{\alpha_{j_i}}\} : \cup_j^6 R_{\alpha_j} \in \Xi_s(2T)\}.$$

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned}
\Xi_c(2T_1) &= \{R_{4,4,4,4,4}, R_{4,4,4,4,12}\} \cup \{R_{4,4,4,4,6}, R_{4,4,4,4,10}, R_{4,4,4,6,10}\} \cup \{R_{4,4,4,4,8}, R_{4,4,4,8,8}\} \\
&\cup \{R_{4,4,4,6,6}, R_{4,4,4,6,8}, R_{4,4,6,6,8}\} \cup \{R_{4,4,6,6,6}, R_{4,6,6,6,6}\}, \\
\Xi_c(2T_2) &= \{R_{4,4,4,4}, R_{4,4,4,12}\} \cup \{R_{4,4,4,4}, R_{4,4,4,6}, R_{4,4,4,10}, R_{4,4,6,10}\} \cup \{R_{4,4,4,4}, R_{4,4,4,8}, \\
&\quad R_{4,4,8,8}\} \cup \{R_{4,4,4,6}, R_{4,4,4,8}, R_{4,4,6,8}, R_{4,4,6,6}\} \cup \{R_{4,4,6,6}, R_{4,6,6,6}, R_{6,6,6,6}\}, \\
\Xi_c(2T_3) &= \{R_{4,4,4}, R_{4,4,12}\} \cup \{R_{4,4,4}, R_{4,4,6}, R_{4,4,10}, R_{4,6,10}\} \cup \{R_{4,4,4}, R_{4,4,8}, R_{4,8,8}\} \cup \\
&\quad \{R_{4,4,6}, R_{4,4,8}, R_{4,6,8}, R_{4,4,6}\} \cup \{R_{4,4,6}, R_{4,6,6}, R_{6,6,6}\}, \\
\Xi_c(2T_4) &= \{R_{4,4}, R_{4,12}\} \cup \{R_{4,4}, R_{4,6}, R_{4,10}, R_{6,10}\} \cup \{R_{4,4}, R_{4,8}, R_{8,8}\} \cup \{R_{4,4}, R_{4,6}, \\
&\quad R_{4,8}, R_{6,8} \cup \{R_{4,4}, R_{4,6}, R_{6,6}\}, \\
\Xi_c(2T_5) &= \{R_4, R_{12}\} \cup \{R_4, R_6, R_{10}\} \cup \{R_4, R_8\} \cup \{R_4, R_6, R_8\} \cup \{R_4, R_6\}, \\
\Xi_c(2T_6) &= \{K_{4,4}\} \cup \{K_{4,4}\} \cup \{K_{4,4}\} \cup \{K_{4,4}\} \cup \{K_{4,4}\}.
\end{aligned}$$

Observamos que as partições de mergulhos com bordos relacionados acima é o conjunto $\Xi_c(2T_1)$, as partições de mergulhos sem bordos relacionadas em $(4.8a)$ é o conjunto $\Xi_s(2T_1)$ e a união dos dois correspondem às partições de todos os mergulhos de $K_{4,4}$ sobre a família do bitoro, ou seja, é o conjunto $\Xi(2T_1)$. As partições relacionadas na Tabela 4.4.1 foram determinadas com os mesmos procedimentos descrito acima.

Proposição 4.4.2 *Nas condições das notações acima, são equivalentes as seguintes afirmações:*

i) $|\mathbb{S}(G(\Omega))| = |\mathbb{M}(G(\Omega))|$ *se, e somente se,* $|\mathbb{M}_s(G(\Omega))| = 1$ *e* $M_s(G(\Omega))$ *é composta por um único mergulho regular;*

ii) $S_s(G(\Omega))$ *é a classe de mergulho mínimo de* G *regular formada por uma única região ou é a de mergulho máximo de* G *formado por uma única região;*

Demonstração. *Pela Definição 4.2.1, toda superfície com bordo* Ω_i *de* $M_c(G)$ *contém pelo menos um mergulho e este é único se, e somente se, a partição sobre* $\Omega \in M_s(G)$ *contém todas as regiões iguais, isto é,* $G \hookrightarrow \Omega \equiv kR_\alpha$ *é um mergulho regular. De fato, se* $G \hookrightarrow \Omega \equiv (k-1)R_\alpha R_\beta$, $\alpha \neq \beta$, *a superfície* Ω_{k-1} *de* $M_c(G)$ *teria exatamente dois mergulhos distintos*

$$G \hookrightarrow \Omega_{k-1} \equiv R_\alpha \ \text{ e } \ G \hookrightarrow \Omega_{k-1} \equiv R_\beta$$

e assim, não teríamos a igualdade em (i), *como consequência,* $M_s(G(\Omega))$ *é composta por um único mergulho regular. Por outro lado, não existem duas classes de mergulhos regulares sobre uma mesma superfície* Ω, *caso existisse, a divisão* $2e/\alpha = k$ *não seria única. Pela análise anterior, deduzimos ainda que* $|\mathbb{M}_s(G)| = 1$, *caso contrário, cada* Ω_i *teria pelo menos dois elementos distintos e não valeria a igualdade* $|\mathbb{S}(G(\Omega))| = |\mathbb{M}(G(\Omega))|$. *Consequentemente,* $M_s(G(\Omega))$ *é composta por um único mergulho regular, o que prova i).*

Se vale a propriedade i), então $|\mathbb{S}(G(\Omega))| = 1$. *Mas se* $S(G(\Omega))$ *tem um único mergulho regular então* $G(\Omega)$ *é o mergulho minimal ou maximal quando este for formado* *por uma única região, estas são as únicas condições em que $G(\Omega)$ possui um único elemento. Se vale a afirmação ii), vimos no incício da demonstração que $|\mathbb{S}(G(\Omega))| = |\mathbb{M}(G(\Omega))|$.* ■

No caso particular do grafo completo bipartido $K_{m,n}$, temos a seguinte equivalência para a Proposição 4.4.2.

Proposição 4.4.3 *Se m e n são pares, então, existe uma única família de superfícies orientáveis de $\mathbb{S}(K_{m,n}(g_iT))$, a família de mergulho mínimo formada por uma única classe sem bordo γT tal que o número de superfícies para o mergulhos de 2-células de $K_{m,n}$ é igual ao conjunto das classes de mergulhos de $K_{m,n}$ sobre esta família, isto é,*

$$|\mathbb{S}(K_{n,n}(\gamma T))| = |\mathbb{M}(K_{n,n}(\gamma T))|. \tag{4.9}$$

Demonstração. *De fato, existem inteiros positivos $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $m = 2p$ e $n = 2q$. Pela fórmula (2.6), o gênero da superfície orientável para o mergulho mínimo de $K_{m,n}$ é dado por*

$$\gamma = \left\{\frac{1}{4}(m-2)(n-2)\right\} = \left\{\frac{1}{4}(2p-2)(2q-2)\right\} = \{(p-1)(q-2)\} = (p-1)(q-2).$$

Logo a característica de Eüler da superfície para o mergulho mínimo de $K_{m,n}$ é dado por

$$\chi(\Omega) = 2 - 2g = 2 - 2(p-1)(q-2)$$

e, se t é o número de regiões do mergulho mínimo, então pela fórmula (2.4), segue que

$$\begin{aligned} \chi(\Omega) &= m + n - mn + t \Rightarrow 2 - 2(p-1)(q-2) = 2p + 2q - 4pq + t \\ &\Rightarrow t = 2 - 2(p-1)(q-2) - 2p - 2q + 4pq = 2(p + pq - 1). \end{aligned}$$

Mas pela fórmula (2.7), o gênero máximo para o mergulho de $K_{m,n}$ é dado por

$$\gamma_M(K_{m,n}) = \left[\frac{1}{2}(m-1)(n-1)\right] = \left[\frac{1}{2}(2p-1)(2q-1)\right].$$

Como o número de regiões dos mergulhos de $K_{m,n}$ dependem de t, e este é par, então o mergulho maximal de $K_{m,n}$ possui duas regiões; sendo assim, pela demonstração da Proposição 4.4.2, vale a desigualdade para a família de mergulhos máximos de $K_{m,n}$

$$|\mathbb{S}(K_{n,n}(\gamma_M T))| < |\mathbb{M}(K_{n,n}(\gamma_M T))|.$$

Consequentemente, pela Proposição 4.4.2, a única família que vale a iguadade (4.9) é a de mergulhos mínimos de $K_{m,n}$ dada por

$$\Xi(\gamma T) = \left\{\gamma T, \gamma T_1, \gamma T_2, \cdots, \gamma T_{2p+2pq-3}, \gamma T_{2(p+pq-1)}\right\}, \ \gamma = (p-1)(q-2),$$

todas contendo um único mergulho de $K_{m,n}$ da forma

$$\gamma T \equiv tR_4, \gamma T_1 \equiv (t-1)R_4, \gamma T_2 \equiv (t-2)R_4, \cdots, \gamma T_{2p+2pq-3} \equiv R_4, \gamma T_{2(p+pq-1)} \equiv K_{4,4}.$$

E portanto, temos a igualdade

$$|\mathbb{S}(K_{n,n}(\gamma T))| = t + 1 = |\mathbb{M}(K_{n,n}(\gamma T))|.$$

Logo a família de mergulho mínimo de $K_{m,n}$, se m e n são pares, é a única que satisfaz a igualdade (4.9), o que mostra a afirmação. ■

Corolário 4.4.4 *Se n é par, então, existe uma única família de superfícies orientáveis, a família de mergulho mínimo formada por uma única classe, tal que o número de superfícies para o mergulhos de 2-células de $K_{n,n}$ é igual ao conjunto das classes de mergulhos de $K_{n,n}$ sobre esta família, isto é,*

$$\left|\mathbb{S}(K_{n,n}((k-1)^2 T))\right| = \left|\mathbb{M}(K_{n,n}((k-1)^2 T))\right|. \tag{4.10}$$

Demonstração. De fato, se $n = 2k$, pela igualdade (2.6), temos que

$$\gamma = \left\{\frac{1}{4}(2k-2)(2k-2)\right\} = \{(k-1)(k-1)\} = (k-1)^2.$$

Como $\chi\left((k-1)^2 T\right) = 2 - 2(k-1)^2$, então segue que

$$\chi = 2n - n^2 + t \Rightarrow t = \chi - 2n + n^2 \Rightarrow t = 2 - 2(k-1)^2 - 4k + 4k^2 = 2k^2,$$

e portanto o mergulho mínimo de $K_{n,n}$ sem bordo é único da forma

$$K_{n,n} \hookrightarrow (k-1)^2 \equiv \left(2k^2\right) R_4.$$

Desse modo, o conjunto dos mergulhos de $K_{n,n}$ sobre a família gerada pelo mergulho mínimo é da forma

$$(k-1)^2 T \equiv \left(2k^2\right) R_4, (k-1)^2 T_1 \equiv \left(2k^2-1\right) R_4, \cdots, \gamma T_{2k^2-1} \equiv R_4, \gamma T_{2k^2} \equiv K_{4,4}$$

e consequente, temos:

$$\#\mathbb{S}(K_{n,n}((k-1)^2 T)) = 2k^2 = \#\mathbb{M}(K_{n,n}((k-1)^2 T)).$$

Como o mergulho maximal possui 2 regiões, pela Proposição 4.4.2, a única família que satisfaz a igualdade (4.10) é a família de mergulho mínimo de $K_{n,n}$, se n é par. ■

Os resultados acima mostram que a única classe de mergulhos de $K_{m,n}$ (de $K_{n,n}$) em que o número de superfícies geradas é igual ao número de mergulhos, é a classe de mergulhos mínimos formada por uma única partição regular, e se esta não é regular a igualdade não ocorre. Além disso, m e n devem ser pares (n deve ser par). Afora esta condição, somente a classe de mergulho máximo formada por uma única região tem esta propriedade. Com efeito, os mergulhos orientáveis da classe seriam formados por dois mergulhos,

$$K_{m,n} \hookrightarrow \gamma_M T \equiv R_{2mn} \text{ e } K_{m,n} \hookrightarrow \gamma_M T_1 \equiv K_{m,n} \tag{4.11}$$

e no caso de $K_{n,n}$ teríamos

$$K_{n,n} \hookrightarrow \gamma_M T \equiv R_{2n^2} \text{ e } K_{n,n} \hookrightarrow \gamma_M T_1 \equiv K_{n,n}. \tag{4.12}$$

Estes casos ocorrem quando o número de regiões do mergulho mínimo é impar ou seja quando m ou n é ímpar, caso do mergulho $K_{m,n}$, ou quando n é ímpar no caso de $K_{n,n}$. Sendo assim temos a seguinte

Proposição 4.4.5 *O número de mergulhos orientáveis da classe de mergulho máximo é igual ao número de superfícies geradas se, e somente se, m ou n é ímpar, no caso de $K_{m,n}$, e no caso de $K_{n,n}$, quando n for um número par.*

Demonstração. *A caracterítica de uma superfície orientável é sempre par. Seja $\chi(\Omega) = 2s$, se Ω for a superfície para o mergulho mínimo de $K_{m,n}$. Se m é impar e n é par, isto é, $m = 2p$ e $n = 2q + 1$, então o número t de regiões do mergulho mínimo de $K_{m,n}$ é dado por*

$$t = \chi(\Omega) - m - n + mn = 2s - 2p - 2q - 1 + 2p(2q + 1) = 2(s - q + pq) - 1,$$

logo t é ímpar, e portanto o mergulho máximo tem uma única região da forma R_{2mn}. Por (4.11) *segue a afirmação da proposição. No caso de m e n serem ímpares, isto é, $m = 2p + 1$ e $n = 2q + 1$, temos:*

$$t = \chi(\Omega) - m - n + mn = 2s - 2p - 1 - 2q - 1 + (2p + 1)(2q + 1) = 2(s + 2pq) - 1,$$

novamente teríamos um t ímpar, e a igualda da afirmação seria verdadeira. De modo análoga prova-se o caso de $K_{n,n}$. ■

Para finalizar a discussão sobre os mergulhos orientáveis dos grafo completo $K_{4,4}$ apresentamos, no grafo em barras da Figura 4.4.1, as classes de mergulhos orientáveis com bordos de cada família das superfícies nas quais $K_{4,4}$ possui mergulhos de 2-células.

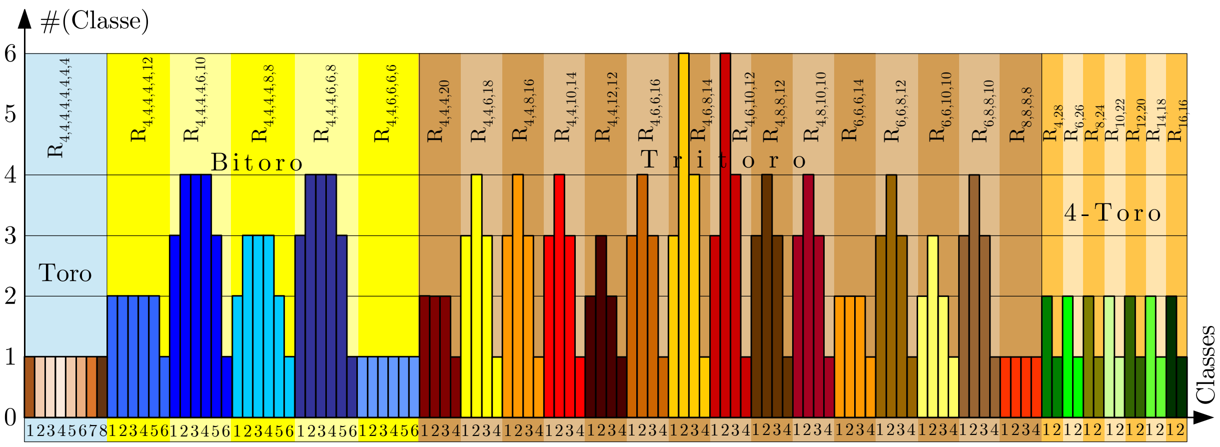


Figura 4.4.1: Gráfico em barras do número de classes com bordos de $K_{4,4}$

A sequência 12345678 abaixo das colunas da classe $R_{4,4,4,4,4,4,4,4}$ do toro indica as respectivas componentes de bordos das superfícies homeomorfas ao toro com componentes de bordos, $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8$, sobre as quais $K_{4,4}$ tem mergulhos de 2-células: neste caso, as barras verticais indicam que cada superfície contém um único mergulho. De modo análogo, a sequência 123456 abaixo da classe $R_{4,4,4,4,6,10}$ do bitoro indica as superfícies com bordos $2T_1, 2T_2, 2T_3, 2T_4, 2T_5$ e $2T_6$ que contem mergulhos com bordos de $K_{4,4}$: são respectivamente $3, 4, 4, 4, 3$ e 1 mergulhos com bordos. A interpretação do gráfico deve seguir este procedimento.

4.4.2 Mergulhos com bordos não orientáveis de $K_{4,4}$

Vimos, na Tabela 3.10.2, que o modelos de mergulhos orientáveis e não orientáveis de um grafo coincidem nos casos das superfícies gT e gK, com isso, podemos considerar que o processo de identificação dos mergulhos com bordos não orientáveis, já foi parcialmente concluído. Resta somente identificar os mergulhos com bordos das superfícies da forma $\widetilde{g}KP$, ou seja, das superfícies $KP, 2KP, 3KP$ e $4KP$. O procedimentos para identificação nãs são diferentes dos utilizados para o caso orientável da Subseção 4.4.1.

Como consequência do comentário anterior, os modelos de partições de mergulhos não orientáveis com bordos do grafo completo $K_{4,4}$, das superfícies $K, 2K, 3K$ e $4K$ são os respectivos modelos das superfícies $T, 2T, 3T$ e $4T$ relacionados na Tabela 4.4.1. Os demais modelos de mergulhos com bordos de $K_{4,4}$ será relacionado na Tabela 4.4.3.

A simbologia usada na Tabela 4.4.3, é equivalente do caso orientável utilizada na Tabela 4.4.1. O símbolo $\widetilde{\Omega}$ indica uma superfície não orientável genérica e Ξ_i representa o modelo da i-ésima classe de mergulho sem bordo de $\widetilde{\Omega}$, o qual será usado como o modelo básico gerador dos mergulhos com bordos. Por exemplo, o segundo modelo de mergulho sem bordo escolhido para a superfície não orientável $2KP$ foi $\Xi_2 = 4R_4R_6R_{14}$, e este gera os seguintes mergulhos com bordos (veja as duas linhas logo após Ξ_2 nas partições de $2KP$ da Tabela 4.4.3):

$$\begin{aligned}
&K_{4,4} \hookrightarrow 2KP_1 \equiv 3R_4R_6, 3R_4R_{14}, 2R_4R_6R_{14}\\
&K_{4,4} \hookrightarrow 2KP_2 \equiv 3R_4, 2R_4R_6, 2R_4R_{14}, R_4R_6R_{14}\\
&K_{4,4} \hookrightarrow 2KP_3 \equiv 2R_4, R_4R_6, R_4R_{14}, R_6R_{14}\\
&K_{4,4} \hookrightarrow 2KP_4 \equiv R_4, R_6, R_{14}\\
&K_{4,4} \hookrightarrow 2KP_5 \equiv K_{4,4}.
\end{aligned}$$

Concluímos, portanto que o mergulho sem bordo $K_{4,4} \hookrightarrow 2KP \equiv 4R_4R_6R_{14}$ gera os seguintes mergulhos: 3 com uma componente de bordo sobre a superfície $2KP_1$; 4 com 2 componentes de bordos sobre a superfície $2KP_2$; 4 com 3 componentes de bordos sobre a superfície $2KP_3$; 3 mergulhos com 4 componentes de bordos sobre a superfície $2KP_4$ e um mergulho sobre $2KP_5$, homeomorfo a $K_{4,4}$, equivalente ao mergulho com 5 componentes de bordos (a operação exérese foi aplicada em todas as regiões). O restante da tabela deve ser interpretada de modo análogo. É evidente que estamos utilizando a Definição 4.2.1 para gerar os mergulhos com bordos não orientáveis do mesmo modo como foi feito para o caso orientável.

Tabela 4.4.3: Classes de mergulhos não orientáveis de $K_{4,4}$ sobre gKP

Família de KP								
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos						
$\widetilde{\Omega}$	KP	KP_1	KP_2	KP_3	KP_4	KP_5	KP_6	KP_7
Ξ_1	$6R_4R_8$	$6R_4, 5R_4R_8$	$5R_4, 4R_4R_8$	$4R_4, 3R_4R_8$	$3R_4, 2R_4R_8$	$2R_4, R_4R_8$	R_4, R_8	$K_{4,4}$
Ξ_2	$5R_42R_6$	$5R_4R_6$ $4R_42R_6$	$5R_4, 4R_4R_6$ $3R_42R_6$	$4R_4, 3R_4R_6$ $2R_42R_6$	$3R_4, 2R_4R_6$ R_42R_6	$2R_4, R_4R_6$ $2R_6$	R_4 R_6	$K_{4,4}$

Continua na próxima página

Tabela 4.4.3 - Continuação da página anterior

Família de $2KP$						
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos				
$\widetilde{\Omega}$	$2KP$	$2KP_1$	$2KP_2$	$2KP_3$	$2KP_4$	$2KP_5$
Ξ_1	$R_{4,4,4,4,16}$	$4R_4, 3R_4R_{16}$	$3R_4, 2R_4R_{16}$	$2R_4, R_4R_{16}$	R_4, R_{16}	
Ξ_2	$3R_{4,4,4,6,14}$	$3R_4R_6, 3R_4R_{14}$ $2R_4R_6R_{14}$	$3R_4, 2R_4R_6,$ $2R_4R_{14}, R_4R_6R_{14}$	$2R_4, R_4R_6,$ R_4R_{14}, R_6R_{14}	R_4, R_6 R_{14}	$K_{4,4}$
Ξ_3	$3R_{4,4,4,8,12}$	$3R_4R_8, 3R_4R_{12}$ $2R_4R_8R_{12}$	$3R_4, 2R_4R_8,$ $2R_4R_{12}, R_4R_8R_{12}$	$2R_4, R_4R_8,$ R_4R_{12}, R_8R_{12}	R_4, R_8 R_{12}	$K_{4,4}$
Ξ_4	$3R_{4,4,4,10,10}$	$3R_4R_{10}$ $2R_42R_{10}$	$3R_4, 2R_4R_{10}$ R_42R_{10}	$2R_4, R_4R_{10}$ $2R_{10}$	R_4 R_{10}	$K_{4,4}$
Ξ_5	$R_{4,4,6,6,12}$	$2R_42R_6$ $R_42R_6R_{12}$ $2R_4R_6R_{12}$	$2R_4R_6, 2R_4R_{12}$ $R_42R_6, 2R_6R_{12}$ $R_4R_6R_{12}$	$2R_4, R_4R_{12}$ $2R_6, R_4R_6$ R_6R_{12}	R_4 R_6 R_{12}	$K_{4,4}$
Ξ_6	$R_{4,4,6,8,10}$	$2R_4R_6R_8$ $2R_4R_6R_{10}$ $2R_4R_8R_{10}$ $R_4R_6R_8R_{10}$	$2R_4R_6, 2R_4R_8$ $2R_4R_{10}, R_4R_6R_8$ $R_4R_6R_{10}, R_4R_8R_{10}$ $R_6R_8R_{10}$	$2R_4, R_4R_6$ R_4R_8, R_4R_{10} R_6R_8, R_6R_{10} R_8R_{10}	R_4 R_6 R_8 R_{10}	$K_{4,4}$
Ξ_7	$R_{4,4,8,8,8}$	$2R_42R_8$ R_43R_8	$2R_4R_8, R_42R_8$ $3R_8$	$2R_4, R_4R_8$ $2R_8$	R_4 R_8	$K_{4,4}$
Ξ_8	$R_{4,6,6,6,10}$	$R_43R_6, 3R_6R_{10}$ $R_42R_6R_{10}$	$R_42R_6, 2R_6R_{10}$ $3R_6, R_4R_6R_{10}$	R_4R_6, R_6R_{10} $2R_6, R_4R_{10}$	R_4, R_6 R_{10}	$K_{4,4}$
Ξ_9	$R_{4,6,6,8,8}$	$R_42R_6R_8$ $R_4R_62R_8$ $2R_62R_8$	$R_4R_6R_8$ $2R_6R_8$ R_62R_8	R_4R_6 R_4R_8 R_6R_8	R_4 R_6 R_8	$K_{4,4}$
Ξ_{10}	$R_{6,6,6,6,8}$	$4R_6, 3R_6R_8$	$3R_6, 2R_6R_8$	$2R_6, R_6R_8$	R_6, R_8	$K_{4,4}$

Família $3KP$				
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos		
$\widetilde{\Omega}$	$3KP$	$3KP_1$	$3KP_2$	$3KP_3$
Ξ_1	$R_4R_4R_{24}$	$2R_4, R_4R_{24}$	R_4, R_{24}	$K_{4,4}$
Ξ_2	$R_4R_6R_{22}$	$R_4R_6, R_4R_{22}, R_6R_{22}$	R_4, R_6, R_{22}	$K_{4,4}$
Ξ_3	$R_4R_8R_{20}$	$R_4R_8, R_4R_{20}, R_8R_{20}$	R_4, R_8, R_{20}	$K_{4,4}$
Ξ_4	$R_4R_{10}R_{18}$	$R_4R_{10}, R_4R_{18}, R_{10}R_{18}$	R_4, R_{10}, R_{18}	$K_{4,4}$
Ξ_5	$R_4R_{12}R_{16}$	$R_4R_{12}, R_4R_{16}, R_{12}R_{16}$	R_4, R_{12}, R_{16}	$K_{4,4}$
Ξ_6	$R_4R_{14}R_{14}$	$R_4R_{14}, R_{14}R_{14}$	R_4, R_{14}	$K_{4,4}$

Continua na próxima página

Tabela 4.4.3 - Continuação da página anterior

Família do $3KP$				
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos		
$\widetilde{\Omega}$	$3KP$	$3KP_1$	$3KP_2$	$3KP_3$
Ξ_7	$R_6R_6R_{20}$	R_6R_6, R_6R_{20}	R_6, R_{20}	$K_{4,4}$
Ξ_8	$R_6R_8R_{18}$	$R_6R_8, R_6R_{18}, R_8R_{18}$	R_6, R_8, R_{18}	$K_{4,4}$
Ξ_9	$R_6R_{10}R_{16}$	$R_6R_{10}, R_6R_{16}, R_{10}R_{16}$	R_6, R_{10}, R_{16}	$K_{4,4}$
Ξ_{10}	$R_6R_{12}R_{14}$	$R_6R_{12}, R_6R_{14}, R_{12}R_{14}$	R_6, R_{12}, R_{14}	$K_{4,4}$
Ξ_{11}	$R_8R_8R_{16}$	R_8R_8, R_8R_{16}	R_8, R_{16}	$K_{4,4}$
Ξ_{12}	$R_8R_{10}R_{14}$	$R_8R_{10}, R_8R_{14}, R_{10}R_{14}$	R_8, R_{10}, R_{14}	$K_{4,4}$
Ξ_{13}	$R_8R_{12}R_{12}$	$R_8R_{12}, R_{12}R_{12}$	R_8, R_{12}	$K_{4,4}$
Ξ_{14}	$R_{10}R_{10}R_{12}$	$R_{10}R_{10}, R_{10}R_{12}$	R_{10}, R_{12}	$K_{4,4}$

Família $4KP$		
Sem bordos		Com bordos
$\widetilde{\Omega}$	$4KP$	$4KP_1$
Ξ_{14}	R_{32}	$K_{4,4}$

Após relacionarmos todos os mergulhos não orientados com e sem bordos de $K_{4,4}$ nas Tabelas 4.4.1 e 4.4.3 concluímos que existem modelos de mergulhos em 24 superfícies da forma gK e 20 superfícies da forma gKP. Observe ainda que o número de classes geradoras dos mergulhos não orientáveis, possue a distribuição dada pela Tabela 4.4.4.

$\widetilde{\Omega}$	K	KP	$2K$	$2KP$	$3K$	$3KP$	$4K$	$4KP$	Total
Classes	1	2	5	10	15	14	7	1	55

Tabela 4.4.4: Número de classes de mergulhos não orientáveis sem bordos de $K_{4,4}$

Pelo Lema 3.9.1, $R_{6,8,8,10}$ é a única das 28 classes de mergulhos orientáveis sem bordos que não existe, no entanto, não podemos afirmar que esta não seja uma classe de $3K$, por este motivo o modelo da classe $R_{6,8,8,10}$ não foi excluido da Tabela 4.4.1. É bem provável que $R_{6,8,8,10}$ seja a partição de um mergulho de $K_{4,4}$ não orientável sobre $3K$, mas não iremos nos aprofundar na questão da existência das classes de mergulhos não orientáveis, somente dos seus prováveis tipos modelos. Lembramos que os modelos das superfícies do tipo gK são os mesmos de gT.

Resta saber quantas classes de mergulhos existem em cada família de superfície não orientáveis sobre a qual $K_{4,4}$ tem um mergulho de 2-células. Quanto as superfícies da forma gK, o número de mergulhos de $K_{4,4}$ sobre estas estão relacionados na Tabela 4.4.2. Falta determinar o número de classes de mergulhos sobre o conjunto das superfícies geradoras da forma gKP, é o que iremos relacionar na Tabela 4.4.5.

Família de KP									
Sem bordo		Partições dos mergulhos com bordos							
Ξ_{KP}	KP	KP_1	KP_2	KP_3	KP_4	KP_5	KP_6	KP_7	Total
$6R_4R_8$	1	2	2	2	2	2	2	1	14
$5R_42R_6$	1	2	3	3	3	3	2	1	18
Subtotais	2	4	5	5	5	5	4	2	32

Família de $2KP$							
Mergulho sem bordo			Partições dos mergulhos com bordos				
Ξ_{2KP}	$2KP$	$2KP_1$	$2KP_2$	$2KP$	$2KP_4$	$2KP_5$	Total
$R_4R_4R_4R_4R_{16}$	1	2	2	2	2	1	10
$R_4R_4R_4R_6R_{14}$	1	3	4	4	3	1	16
$R_4R_4R_4R_8R_{12}$	1	3	4	4	3	1	16
$R_4R_4R_4R_{10}R_{10}$	1	2	3	3	2	1	12
$R_4R_4R_6R_6R_{12}$	1	3	5	5	3	1	18
$R_4R_4R_6R_8R_{10}$	1	4	7	7	4	1	24
$R_4R_4R_8R_8R_8$	1	2	3	3	2	1	12
$R_4R_6R_6R_6R_{10}$	1	3	4	4	3	1	16
$R_4R_6R_6R_8R_8$	1	3	3	3	3	1	14
$R_6R_6R_6R_6R_8$	1	2	2	2	2	1	10
Subtotais	10	27	37	37	27	10	148

Família de $3KP$					
Sem bordo		Partições dos mergulhos com bordos			
Ξ_{3KP}	$3KP$	$3KP_1$	$3KP_2$	$3KP_3$	Total
$R_4R_4R_{24}$	1	2	2	1	6
$R_4R_6R_{22}$	1	3	3	1	8
$R_4R_8R_{20}$	1	3	3	1	8
$R_4R_{10}R_{18}$	1	3	3	1	8
$R_4R_{12}R_{16}$	1	3	3	1	8
$R_4R_{14}R_{14}$	1	2	2	1	6
$R_6R_6R_{20}$	1	2	2	1	6
$R_6R_8R_{18}$	1	3	3	1	8
$R_6R_{10}R_{16}$	1	3	3	1	8
$R_6R_{12}R_{14}$	1	3	3	1	8
$R_8R_8R_{16}$	1	2	2	1	6
$R_8R_{10}R_{14}$	1	3	3	1	8
$R_8R_{12}R_{12}$	1	2	2	1	6
$R_{10}R_{10}R_{12}$	1	2	2	1	6
Subtotais	14	36	36	14	100

Família de $4KP$			
Sem bordo		Com bordo	
Ξ_{4KP}	$4KP$	$4KP_1$	Total
R_{32}	1	1	2
Subtotais	1	1	2

Tabela 4.4.5: Número de classes das famílias de mergulhos de $K_{4,4}$ da forma gKP

A notação na Tabela 4.4.5 segue o mesmo padrão descrito acima nos comentários sobre as construção das Tabela 4.4.1 e 4.4.2.

Inicialmente devemos lembrar que cada superfície sem bordo Ω, sobre a qual um grafo G tem um mergulho de 2-células $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_\alpha$, gera um conjunto denominado de *conjunto gerado* por Ω, constituido de superfícies composto pela própria Ω e as superfície com $1, 2, \cdots, k$ componentes de bordos, $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_k$, sobre as quais G possue mergulhos de 2-células com bordos. Se $[\Omega]$ é o conjunto gerado por Ω então o número de elementos dos conjuntos geradores de Ω são dados por

$[\widetilde{\Omega}]$	$[K]$	$[KP]$	$[2K]$	$[2KP]$	$[3K]$	$[3KP]$	$[4K]$	$[4KP]$	Total
$\vert[\widetilde{\Omega}]\vert$	9	8	7	6	5	4	3	2	44

Tabela 4.4.6: Número de elementos do conjunto $[\Omega]$ de mergulhos de $K_{4,4}$

Das Tabelas 4.4.2 e 4.4.5 deduzimos que o número de elementos de classses de mergulhos não orientáveis sobre cada família de superfícies, é dado pela Tabela 4.4.7.

$\widetilde{\Omega}$	K	KP	$2K$	$2KP$	$3K$	$3KP$	$4K$	$4KP$	Total
#(Classe)	9	32	74	148	165	100	28	2	558

Tabela 4.4.7: Número de elementos do conjunto $[\Omega]$ de mergulhos de $K_{4,4}$

Observamos que dos 558 modelos de classes de mergulhos não orientáveis de $K_{4,4}$, 276 vem das superfícies da forma gK e 282 são oriundos das superfícies gKP. Concluímos então que, baseados nos modelos de mergulhos não orientáveis de $K_{4,4}$, o número de modelos sobre gKP, são 282, já supera o número de modelos orientáveis, pois estes são da forma gT, os quais possuem o mesmo número de modelo de gK, isto é, 276 modelos de mergulhos orientáveis. Na verdade, foi mostrado no Lema 3.9.1, que não existe mergulho orientável da form $K_{4,4} \hookrightarrow 3T \equiv R_{6,8,8,10}$; logo, pela Tabela 4.4.2, a classe $R_{6,8,8,10}$ contribui com 12 mergulhos (1 orientável e 11 não orientável), consequentemente, existem 264 mergulhos orientáveis. Neste caso, a taxa de modelos de mergulhos orientáveis não existentes de $K_{4,4}$ é aproximadamente de $4,35\%$, em prol de $96,35\%$ de modelos de mergulhos existentes. Ou seja a porcentagem de mergulhos orientáveis não existentes é muito baixa. Supondo que os mergulhos não orientáveis mantenha a mesma taxa de modelos não existentes, concluímos que o número de modelos não orientáveis de $K_{4,4}$ é 2 vezes maior do que os mergulhos orientáveis.

Analizando a questão em termos de modelos prováveis, podemos afirmar que, no caso do grafo completo bipartido $K_{4,4}$, o número de modelos de mergulhos não orientáveis de $K_{4,4}$ é exatamente $2,021\,7$ maior do que o número de modelos orientáveis, isto é, é aproximadamente o dobro de modelos orientáveis.

A grande quantidade de informação contida no processo de descrição de mergulhos de um grafo deve-se, sem dúvida, as diversas classes de superfícies e suas relações com os modelos comuns as superfícies do tipo gT e gK. Para uma sínteses dos resultados mais significativos, utilizaremos as análises e comentários acima sobre as classes de mergulhos de $K_{4,4}$, como também os dados contidos nas Tabelas 4.4.1 a 4.4.7, apresentamos o seguinte

Teorema 4.4.6 *O grafo completo bipartido $K_{4,4}$ tem:*

i) *mergulhos em* 44 *superfície, sendo:*

- *a)* 24 *orientáveis, dos quais* 4 *são em superfícies sem bordos e* 20 *com bordos;*
- *b)* 44 *não orientáveis, dos quais* 8 *são em superfícies sem bordos e* 36 *com bordos;*

ii) 834 *modelos de classes de mergulhos, sendo:*

- *a)* 276 *orientáveis, dos quais* 29 *são em superfícies sem bordos e* 247 *com bordos;*
- *b)* 558 *não orientáveis, dos quais* 55 *são em superfícies sem bordos e* 503 *com bordos;*

iii) 264 *mergulhos orientáveis, dos quais* 28 *são em sem bordos e* 236 *com bordos, isto é:*

$$\mathbb{S}\left(\Omega\right) = 264,\ \mathbb{S}_s\left(\Omega\right) = 28 \ \text{ e } \ \mathbb{S}_s\left(\Omega\right) = 236;$$

iv) 558 *modelos de mergulhos não orientáveis, sendo 55 sem bordos e* 503 *com bordos, isto é:*

$$\mathbb{S}(\widetilde{\Omega}) = 558,\ \mathbb{S}_s(\widetilde{\Omega}) = 55 \ \text{ e } \ \mathbb{S}_s(\widetilde{\Omega}) = 503.$$

Demonstração. *A prova segue das análises acima e resultados apresentados nas Tabelas 4.4.1 a 4.4.7.* ∎

O Teorema 4.4.6, apesar de fornecer os dados em relação a existência de mergulhos orientáveis e uma estimativa semelhante para a existência de mergulhos não orientáveis, para o caso particular do grafo $K_{4,4}$, nos dá informações valiosas sobre os mergulhos dos demais membros da família do grafo completo bipartido $K_{m,n}$. Veremos, na Seção 4.5, que os métodos e técnicas utilizados no processo de identificação do grafo completo bipartido $K_{4,4}$ permite obter afirmações equivalentes sobre o conjunto dos mergulhos do grafo completo $K_{m,n}$.

Antes, porém, com o objetivo de simplificar os dados do Teorema 4.4.6 apresentamos, na Tabela 4.4.8, um resumo simplificado das cardinalidades dos principais conjuntos de mergulhos de $K_{4,4}$.

	Conjuntos de superfícies						Conjuntos de mergulhos					
	Orientáveis			Não orientáveis			Orientáveis			Não orientáveis		
Conjuntos	$\mathbb{S}_s$	$\mathbb{S}_c$	$\mathbb{S}$	$\widetilde{\mathbb{S}}_s$	$\widetilde{\mathbb{S}}_c$	$\widetilde{\mathbb{S}}$	$\mathbb{M}_s$	$\mathbb{M}_c$	$\mathbb{M}$	$\widetilde{\mathbb{M}}_s$	$\widetilde{\mathbb{M}}_c$	$\widetilde{\mathbb{M}}$
$\#\,(Classes)$	4	20	24	8	36	44	28	236	264	55	503	588
Subtotais	68						852					

Tabela 4.4.8: Cardinalidades dos principais subconjuntos de mergulhos de $K_{4,4}$

Observamos, nos dados fornecidos pela Tabela 4.4.8, que o grafo completo bipartido $K_{4,4}$, apesar do número 4 não ser tão grande, contém um número de mergulhos bastante expressivo, são 952 ao todo. Este grande número é um legado, a princípio, do conjunto das superfíces orientáveis, estas contém aproximadamente o dobro de mergulhos orientáveis e, principalmente, dos mergulhos com bordos: são 795 contra 95 sem bordos, um número $8,368\,4$ maior do que o de sem bordos.

A Figura 4.4.2 mostra o gráfico em barras das classes de mergulhos de $K_{4,4}$ sobre as família de superfícies não orientáveis da forma gKP. Dos gráficos em barras das classes de mergulhos não orientáveis das formas gK e gKP, ilustrados nas Figura 4.4.1 e 4.4.2, observamos que as variações das classes dessas famílias são muito parecidas, já que as distribuições são combinatoriais, entretanto, as classes de mergulhos da família $R_{4,4,6,8,10}$ de $2KP$ é a que apresenta a maior distribuição, apesar do número de regiões das classes de gP serem maiores do que das classes de gKP.

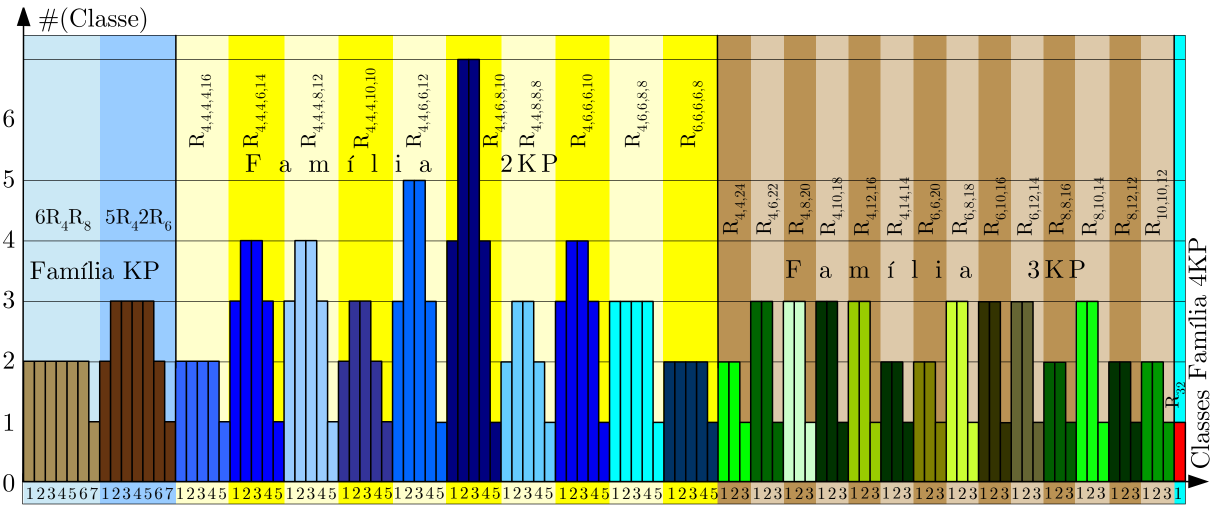


Figura 4.4.2: Gráfico em barras do número de mergulhos com bordos de $K_{4,4}$ sobre a família gKP

Chamamos a atenção para o grande número de classes de mergulhos de $K_{4,4}$, são 952 classes. A maioria das classes encontra-se sobre superfícies não orientáveis, é o dobro das classes das superfícies orientáveis, e quando se trata de mergulhos com bordos, estes representam $89,3268\%$ do número de classes de mergulhos de $K_{4,4}$.

4.5 Considerações sobre os Mergulhos de $K_{m,n}$

Sejam $\mathbb{S}_s(\Omega)$ e $\mathbb{S}_c(\Omega)$ ($\mathbb{S}_s(\widetilde{\Omega})$ e $\mathbb{S}_c(\widetilde{\Omega})$) os respectivos conjuntos de superfícies sem e com bordos para o mergulho orientáveis (não orientáveis) de G sobre Ω (sobre $\widetilde{\Omega}$). Considere também $\mathbb{M}_s(\Omega)$ e $\mathbb{M}_c(\Omega)$ ($\mathbb{M}_s(\widetilde{\Omega})$ e $\mathbb{M}_c(\widetilde{\Omega})$) como sendo os respectivos conjuntos dos mergulhos sem e com bordos orientáveis (não orientáveis) de G sobre Ω (sobre $\widetilde{\Omega}$). Em relação aos mergulhos do grafo completo bipartido $K_{m,n}$ iremos mostrar a seguir os resultados equivalentes aos de $K_{4,4}$, obtidos acima.

Lema 4.5.1 *Se m e n são ímpares e t é o número de regiões do mergulho mínimo orientável de $K_{m,n}$, então os mergulhos mínimos orientáveis e não orientáveis sem bordos de $K_{m,n}$ são da forma*

$$K_{m,n} \hookrightarrow \gamma T \equiv (t-1)\, R_4 R_6 \equiv \gamma K \hookleftarrow K_{4,4},\ \textit{se } t \textit{ é ímpar,}$$

caso contrário, os mergulhos mínimos orientáveis são das formas

$$K_{m,n} \hookrightarrow \gamma T \equiv (t-2)\, R_4 R_{10}, (t-3)\, R_4 R_6 R_8$$

e o mergulho mínimo não orientável é da forma

$$K_{m,n} \hookrightarrow (\gamma - 1)\, KP \equiv (t-1)\, R_4 R_6.$$

Demonstração. *Se $m = 2p+1$ e $n = 2q+1$, então, o número de regiões t para o mergulho mínimo de $K_{m,n}$ é dado por*

$$t = 2s - 2p - 1 - 2q - 1 + (2p+1)(2q+1) = 2s + 4pq - 1 = 2(s + pq - 1),$$

isto é, t é ímpar. Mas, por outro lado, o mergulho mínimo de $K_{m,n}$ possui o máximo de regiões quandrangulares. Como $2mn$ é par não divisível por 4, pois m e n são ímpares, então

$$2mn = 4k + 2$$

e a partição de um mergulho mínimo deve maximizar o número de regiões quadrangulares isto é, deve ser necessariamente da forma

$$\Xi_{\min}(K_{m,n}) = (k-1)\, R_4 R_6. \tag{4.13}$$

Assim, o mergulho mínimo possui k regiões, sendo $(k-1)$ regiões quadrangulares e uma hexagonal. Mas k pode ser par ou ímpar. Se k for ímpar, os mergulhos mínimos orientáveis e não orientáveis de $K_{n,n}$ possuem o mesmo tipo de partição, isto é, são mergulhos da forma

$$K_{m,n} \hookrightarrow \gamma T \equiv (t-1)\, R_4 R_6 \equiv \gamma K \hookleftarrow K_{m,n}.$$

Se k for par, a partição (4.13) não pode ser de um mergulho mínimo orientável, logo é partição do mergulho mínimo não orientável o qual assume a forma

$$K_{m,n} \hookrightarrow (\gamma - 1)\, KP \equiv (t-1)\, R_4 R_6,$$

e o mergulho mínimo orientável deverá ser formado por $t-1$ regiões, e portanto deverá assumir necessáriamente uma das duas formas

$$K_{m,n} \hookrightarrow \gamma T \equiv (t-2)\, R_4 R_{10}, (t-3)\, R_4 R_6 R_8,$$

o que mostra o desejado. ∎

Concluímos, do Lema 4.5.1, que as partições de mergulhos mínimos orientáveis de $K_{m,n}$ podem ser do tipo $(t-1)\,R_4R_6$, se t é impar; ou dos tipos, $(t-2)\,R_4R_{10}$ e $(t-3)\,R_4R_6R_8$ se t for par. Entretanto, a partição do mergulho mínimo não orientável de $K_{m,n}$ assume a única forma de partição $(t-1)\,R_4R_6$, encontra-se sobre a superfície γK, se t for ímpar, ou sobre $(\gamma-1)\,KP$, caso t seja um número par.

O Lema 4.5.1 identifica os mergulhos mínimos orientáveis e não orientáveis do grafo completo bipartido $K_{m,n}$, dados importantes para a identificação dos demais mergulhos de $K_{m,n}$, seja estes orientáveis ou não, com ou sem bordos. Para se ter uma idéia da importância do Lema 4.5.1, basta conhecer os mergulhos mínimos de um grafo, para se obter as demais classes de mergulhos deste grafo.

Teorema 4.5.2 *Os conjuntos das superfícies orientáveis e não orientáveis sem bordos para os mergulhos de $K_{m,n}$ são:*

i) Se m e n são pares, então:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_s &= \left\{\gamma T \equiv \tfrac{mn}{2}R_4, (\gamma+1)\,T \equiv \cup_{i=1}^{mn/2-2}R^i, \cdots, \left(\gamma+\tfrac{mn}{4}-1\right)T \equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\},\\ \widetilde{\mathbb{S}}_s &= \left\{\gamma K \equiv \tfrac{mn}{2}R_4, (\gamma+1)\,K \equiv \cup_{i=1}^{mn/2-2}R^i, \cdots, \left(\gamma+\tfrac{mn}{4}-1\right)K \equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\}\\ &\cup\left\{\gamma KP \equiv \cup_{i=1}^{mn/2-1}R^i, (\gamma{+}1)\,KP \equiv \cup_{i=1}^{mn/2-3}R^i, \cdots, \left(\gamma+\tfrac{mn-4}{4}\right)KP \equiv R_{2mn}\right\};\end{aligned}$$

ii) Se um dos inteiro m ou n é ímpar, e $mn/2$ é par, então:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_s &= \left\{\gamma T \equiv (\tfrac{mn}{2}-1)R_4, (\gamma+1)\,T \equiv \cup_{i=1}^{mn/2-3}R^i, \cdots, (\gamma+\tfrac{mn}{4}-1)T \equiv R_{2mn}\right\},\\ \widetilde{\mathbb{S}}_s &= \left\{\gamma K \equiv (\tfrac{mn}{2}-1)R_4, (\gamma+1)\,K \equiv \cup_{i=1}^{mn/2-3}R^i, \cdots, (\gamma+\tfrac{mn}{4}-1)K \equiv R_{2mn}\right\}\\ &\cup\left\{(\gamma-1)\,KP \equiv \tfrac{mn}{2}R_4, \gamma KP \equiv \cup_{i=1}^{mn/2-2}R^i, \cdots, (\gamma+\tfrac{mn}{4}-2)KP \equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\};\end{aligned}$$

e se $mn/2$ ímpar, então:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_s &= \left\{\gamma T \equiv \tfrac{mn}{2}R_4, (\gamma+1)\,T \equiv \cup_{i=1}^{mn/2-2}R^i, \cdots, \left(\gamma+\tfrac{mn}{4}-\tfrac{1}{2}\right)T \equiv R_{2mn}\right\},\\ \widetilde{\mathbb{S}}_s &= \left\{\gamma K \equiv \tfrac{mn}{2}R_4, (\gamma+1)\,K \equiv \cup_{i=1}^{mn/2-2}R^i, \cdots, \left(\gamma+\tfrac{mn}{4}-\tfrac{1}{2}\right)K \equiv R_{2mn}\right\}\\ &\cup\left\{\gamma KP \equiv \cup_{i=1}^{mn/2\text{-}1}R_4, (\gamma+1)\,KP \equiv \cup_{i=1}^{mn/2-3}R^i, \cdots, \tfrac{4\gamma+mn\text{-}6}{4}KP \equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\};\end{aligned}$$

iii) Se m e n são ímpares, então $2mn = 4u+2$; neste caso, se u é par, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_s &= \left\{\gamma T \equiv \cup_{i=1}^{u-1}R^i, (\gamma+1)\,T \equiv \cup_{i=1}^{u-3}R^i, \cdots, (\gamma+\tfrac{u}{2}-1)T \equiv R_{2mn}\right\},\\ \widetilde{\mathbb{S}}_s &= \left\{\gamma K \equiv \cup_{i=1}^{u-1}R^i, (\gamma+1)\,K \equiv \cup_{i=1}^{u-3}R^i, \cdots, (\gamma+\tfrac{u}{2}-1)K \equiv R_{2mn}\right\}\\ &\cup\left\{(\gamma\text{-}1)\,KP \equiv (u\text{-}1)\,R_4R_6, \gamma KP \equiv \cup_{i=1}^{u-2}R^i, \cdots, \tfrac{2\gamma+u-4}{2}KP \equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\};\end{aligned}$$

e se u é ímpar, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_s &= \left\{\gamma T \equiv (u-1)\,R_4R_6, (\gamma+1)\,T \equiv \cup_{i=1}^{u-2}R^i, \cdots, \left(\gamma+\tfrac{u-1}{2}\right)T \equiv R_{2mn}\right\},\\ \widetilde{\mathbb{S}}_s &= \left\{\gamma K \equiv (u-1)\,R_4R_6, (\gamma+1)\,K \equiv \cup_{i=1}^{u-2}R^i, \cdots, \left(\gamma+\tfrac{u-1}{2}\right)K \equiv R_{2mn}\right\}\\ &\cup\left\{\gamma KP \equiv \cup_{i=1}^{u-1}R^i, (\gamma+1)\,KP \equiv \cup_{i=1}^{u-3}R^i, \cdots, \tfrac{2\gamma+u-3}{2}KP \equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\}.\end{aligned}$$

Demonstração. *Suponhamos que m e n são pares, pela demontração do Lemma 4.5.1, t é par, consequentemente,*

$$\mathbb{S}_s\left(K_{m,n}\right)=\left\{\gamma T\equiv \tfrac{mn}{2}R_4,(\gamma+1)\,T\equiv \cup_{i=1}^{mn/2-2}R^i,\cdots,\left(\gamma+\tfrac{mn}{4}-1\right)T\equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\}$$

e

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{S}}_s\left(K_{m,n}\right)=&\left\{\gamma K\equiv \tfrac{mn}{2}R_4,(\gamma+1)\,K\equiv \cup_{i=1}^{mn/2-2}R^i,\cdots,\left(\gamma+\tfrac{mn}{4}-1\right)K\equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\}\\ \cup&\left\{\gamma KP\equiv \cup_{i=1}^{mn/2-1}R^i,(\gamma+1)\,KP\equiv \cup_{i=1}^{mn/2-3}R^i,\cdots,\left(\gamma+\tfrac{mn}{4}-1\right)KP\equiv R_{2mn}\right\};\end{aligned}$$

Suponha que um dos inteiros m ou n é ímpar, isto é, $m=2p$ e $n=2q+1$ então,

$$t=2s-2p-2q-1+2p\,(2q+1)=2\,(s-q+2pq)-1,$$

e assim t é ímpar. Por outro lado, $2mn$ é múltiplo de 4, pois m é par. Daí, o modelo do mergulho mínimo de $K_{m,n}$ é da forma:

$$\Xi_{\min}\left(K_{m,n}\right)=\tfrac{mn}{2}R_4 \tag{4.14}$$

Mas $2mn/4$ pode ser par ou ímpar; se for par, teremos:

$$\mathbb{S}_s\left(K_{m,n}\right)=\left\{\gamma T\equiv (\tfrac{mn}{2}-1)R_4,(\gamma+1)\,T\equiv \cup_{i=1}^{mn/2-3}R^i,\cdots,(\gamma+\tfrac{mn}{4}-1)T\equiv R_{2mn}\right\}$$

e

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{S}}_s\left(K_{m,n}\right)=&\left\{\gamma K\equiv (\tfrac{mn}{2}-1)R_4,(\gamma+1)\,K\equiv \cup_{i=1}^{mn/2-3}R^i,\cdots,(\gamma+\tfrac{mn}{4}-1)K\equiv R_{2mn}\right\}\\ \cup&\left\{(\gamma-1)\,KP\equiv \tfrac{mn}{2}R_4,\gamma KP\equiv \cup_{i=1}^{mn/2-2}R^i,\cdots,(\gamma+\tfrac{mn}{4}-2)KP\equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\};\end{aligned}$$

caso contrário, se $\frac{mn}{2}$ é ímpar, então:

$$\mathbb{S}_s\left(K_{m,n}\right)=\left\{\gamma T\equiv \tfrac{mn}{2}R_4,(\gamma+1)\,T\equiv \cup_{i=1}^{mn/2-2}R^i,\cdots,\left(\gamma+\tfrac{mn}{4}-\tfrac{1}{2}\right)T\equiv R_{2mn}\right\}$$

e

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{S}}_s\left(K_{m,n}\right)=&\left\{\gamma K\equiv \tfrac{mn}{2}R_4,(\gamma+1)\,K\equiv \cup_{i=1}^{mn/2-2}R^i,\cdots,\left(\gamma+\tfrac{mn}{4}-\tfrac{1}{2}\right)K\equiv R_{2mn}\right\}\\ \cup&\left\{\gamma KP\equiv \cup_{i=1}^{mn/2-1}R_4,(\gamma+1)\,KP\equiv \cup_{i=1}^{mn/2-3}R^i,\cdots,(\gamma+\tfrac{mn}{4}-\tfrac{3}{2})KP\equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\}.\end{aligned}$$

A análise do caso em que m é impar e n é par nos dá resultados semelhantes ao caso acima. Finalmente, se ambos os inteiros m e n são ímpares, isto é, $m=2p+1$ e $n=2q+1$, então o número de regiões t do mergulho mínimo de $K_{m,n}$ é dado por

$$t=2s-2p-1-2q-1+(2p+1)\,(2q+1)=2s+4pq-1=2\,(s+pq-1)\,,$$

ou seja, t é ímpar. Mas por outro lado, o mergulho mínimo de $K_{m,n}$ é da forma (4.14), e como

$$2mn=2\,(2p+1)\,(2q+1)=4p+4q+8pq+2=4\,(p+q+2pq)+2,$$

então $2mn = 4u + 2$, $u = p + q + 2pq$, e portanto u pode ser par ou ímpar. Se u for par, então a partição do mergulho mínimo de $K_{m,n}$ é da forma

$$\Xi_{\min}(K_{m,n}) = (u-1)\,R_4 + R_6.$$

Mas o número de regiões do mergulho mínimo orientável é ímpar, logo

$$\mathbb{S}_s(K_{m,n}) = \left\{\gamma T \equiv \cup_{i=1}^{u-1} R^i, (\gamma+1)\,T \equiv \cup_{i=1}^{u-3} R^i, \cdots, (\gamma + \tfrac{u}{2} - 1)T \equiv R_{2mn}\right\}$$

e

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{S}}_s(K_{m,n}) &= \left\{\gamma K \equiv \cup_{i=1}^{u-1} R^i, (\gamma+1)\,K \equiv \cup_{i=1}^{u-3} R^i, \cdots, (\gamma + \tfrac{u}{2} - 1)K \equiv R_{2mn}\right\} \\ &\cup \left\{(\gamma-1)\,KP \equiv (u-1)\,R_4R_6, \gamma KP \equiv \cup_{i=1}^{u-2} R^i, \cdots, (\gamma + \tfrac{u}{2} - 2)KP \equiv \cup_{i=1}^{2} R^i\right\};\end{aligned}$$

caso contrário, se u é ímpar, então:

$$\mathbb{S}_s(K_{m,n}) = \left\{\gamma T \equiv (u-1)\,R_4R_6, (\gamma+1)\,T \equiv \cup_{i=1}^{u-2} R^i, \cdots, \left(\gamma + \tfrac{u}{2} - \tfrac{1}{2}\right) T \equiv R_{2mn}\right\}$$

e

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{S}}_s(K_{m,n}) &= \left\{\gamma K \equiv (u-1)\,R_4R_6, (\gamma+1)\,K \equiv \cup_{i=1}^{u-2} R^i, \cdots, \left(\gamma + \tfrac{u}{2} - \tfrac{1}{2}\right) K \equiv R_{2mn}\right\} \\ &\cup \left\{\gamma KP \equiv \cup_{i=1}^{u-1} R^i, (\gamma+1)\,KP \equiv \cup_{i=1}^{u-3} R^i, \cdots, (\gamma + \tfrac{u}{2} - \tfrac{3}{2})KP \equiv \cup_{i=1}^{2} R^i\right\},\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração das afirmações do teorema. ■

Relacionar os conjuntos das famílias de superfícies orientáveis e não orientáveis sem bordos, no Teorema 4.5.2, é uma tarefa árdua, mas necessária para estimar o número de elementos desses conjuntos, como também relacionar os subconjuntos com bordos.

Corolário 4.5.3 *Se $\pi_n = P$ ($\pi_n = I$) indica que n é par (n é impar), então a cardinalidade dos conjuntos de superfícies orientáveis e não orientáveis sem bordos de mergulhos de $K_{m,n}$ é dada por:*

$$\left|\mathbb{S}_s(K_{m,n})\right| = \begin{cases} \frac{1}{4}mn, & se\ \pi_m \neq \pi_n = P,\ ou\ se\ \pi_m \neq \pi_n\ e\ \pi_{mn/2} = P \\ \frac{1}{4}mn + \frac{1}{2}, & se\ \pi_m \neq \pi_n\ e\ \pi_{mn/2} = I \\ \frac{1}{4}mn - \frac{1}{4}, & se\ \pi_m, \pi_n \in I\ e\ \pi_{mn-1/2} = P \\ \frac{1}{4}mn + \frac{1}{4}, & se\ \pi_m, \pi_n \in I\ e\ \pi_{mn-1/2} = I \end{cases}$$

$$\left|\widetilde{\mathbb{S}}_s(gKP)\right| = \begin{cases} \frac{1}{4}mn, & se\ \pi_m \neq \pi_n = P,\ ou\ se\ \pi_m \neq \pi_n\ e\ \pi_{mn/2} = P \\ \frac{1}{4}mn - \frac{1}{2}, & se\ \pi_m \neq \pi_n\ e\ \pi_{mn/2} = I \\ \frac{1}{2}mn - \frac{1}{4}, & se\ \pi_m, \pi_n \in I\ e\ \pi_{mn-1/2} = P \\ \frac{1}{4}mn - \frac{3}{4}, & se\ \pi_m, \pi_n \in I\ e\ \pi_{mn-1/2} = I \end{cases}$$

$$\left|\widetilde{\mathbb{S}}_s(K_{m,n})\right| = \begin{cases} \frac{1}{2}mn, & se\ \pi_m \neq \pi_n = P,\ ou\ se\ \pi_m \neq \pi_n\ e\ \pi_{mn/2} = P \\ \frac{1}{2}mn, & se\ \pi_m \neq \pi_n\ e\ \pi_{mn/2} = I \\ \frac{1}{2}mn - \frac{1}{2}, & se\ \pi_m, \pi_n \in I\ e\ \pi_{mn-1/2} = P \\ \frac{1}{2}mn - \frac{1}{2}, & se\ \pi_m, \pi_n \in I\ e\ \pi_{mn-1/2} = I \end{cases}$$

$$\left|\widetilde{\mathbb{S}}_s(K_{m,n})\right| = \begin{cases} \frac{3}{4}mn, & se\ \pi_m \neq \pi_n = P,\ ou\ se\ \pi_m \neq \pi_n\ e\ \pi_{mn/2} = P \\ \frac{3}{4}mn + \frac{1}{2}, & se\ \pi_m \neq \pi_n\ e\ \pi_{mn/2} = I \\ \frac{3}{4}mn - \frac{3}{4}, & se\ \pi_m, \pi_n \in I\ e\ \pi_{mn-1/2} = P \\ \frac{3}{4}mn - \frac{1}{4}, & se\ \pi_m, \pi_n \in I\ e\ \pi_{mn-1/2} = I \end{cases}$$

Demonstração. *A cardinalidade dos conjuntos acima foram obtidos, aplicando-se as igualdades*

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{\mathbb{S}}_s\left(K_{m,n}\right)\right| &= \left|\mathbb{S}_s\left(K_{m,n} \hookrightarrow gT\right)\right| = \left|\mathbb{S}_s\left(K_{m,n}\right) \hookrightarrow gK\right| \\ \left|\widetilde{\mathbb{S}}_s\left(K_{m,n}\right)\right| &= \left|\mathbb{S}_s\left(K_{m,n}\right) \hookrightarrow gK\right| + \left|\mathbb{S}_s\left(K_{m,n}\right) \hookrightarrow gKP\right| \\ \left|\mathbb{S}_s\left(K_{m,n}\right)\right| &= \left|\mathbb{S}_s\left(K_{m,n}\right)\right| + \left|\widetilde{\mathbb{S}}_s\left(K_{m,n}\right)\right|, \end{aligned}$$

em cada família de superfície do Teorema 4.5.2. Por exemplo, no caso em que $\pi_m \neq \pi_n$ e $\pi_{mn/2} = P$, os conjuntos são dados por

$$\begin{array}{l} \mathbb{S}_s = \left\{\gamma T \equiv \cup_{i=1}^{u-1} R^i, (\gamma+1)\, T \equiv \cup_{i=1}^{u-3} R^i, \cdots, (\gamma + \frac{u}{2} - 1)T \equiv R_{2mn}\right\}, \\ \widetilde{\mathbb{S}}_s = \left\{\gamma K \equiv \cup_{i=1}^{u-1} R^i, (\gamma+1)\, K \equiv \cup_{i=1}^{u-3} R^i, \cdots, (\gamma + \frac{u}{2} - 1)K \equiv R_{2mn}\right\} \\ \cup \left\{(\gamma\text{-}1)\, KP \equiv (u\text{-}1)\, R_4 R_6, \gamma KP \equiv \cup_{i=1}^{u-2} R^i, \cdots, \frac{2\gamma+u-4}{2} KP \equiv \cup_{i=1}^{2} R^i\right\}. \end{array}$$

Como $u = \frac{1}{2}mn - \frac{1}{2}$, então o número de elementos dos conjuntos (cardinalidade) são obtidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{S}_s\left(K_{m,n}\right)\right| &= \gamma + \frac{u}{2} - 1 - \gamma + 1 = \frac{u}{2} = \frac{1}{4}mn - \frac{1}{4}, \\ \left|\widetilde{\mathbb{S}}_s\left(gKP\right)\right| &= \frac{2\gamma + u - 4}{2} - (\gamma - 1) + 1 = \frac{u}{2} = \frac{1}{4}mn - \frac{1}{4}, \\ \left|\widetilde{\mathbb{S}}_s\left(K_{m,n}\right)\right| &= \widetilde{\mathbb{S}}_s\left(gK\right) + \widetilde{\mathbb{S}}_s\left(gKP\right) = \widetilde{\mathbb{S}}_s\left(K_{m,n}\right) + \widetilde{\mathbb{S}}_s\left(gKP\right) = \frac{1}{2}mn - \frac{1}{2}, \\ \left|\mathbb{S}\left(K_{m,n}\right)\right| &= \mathbb{S}_s\left(K_{m,n}\right) + \widetilde{\mathbb{S}}_s\left(K_{m,n}\right) = \frac{1}{4}mn - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}mn - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}mn - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Os demais resultados foram obtidos de forma análoga. ■

Observamos, nos cálculos realizados na demonstração do Corolário 4.5.3, que os subconjuntos não orientáveis $\widetilde{\mathbb{S}}_s(gK)$ e $\widetilde{\mathbb{S}}_s(gKP)$ de $\widetilde{\mathbb{S}}_s(K_{m,n})$ podem ou não ter o mesmo número de elementos e quando diferem é somente por uma unidade.

Corolário 4.5.4 *Os subconjuntos não orientáveis $\widetilde{\mathbb{S}}_s(gK)$ e $\widetilde{\mathbb{S}}_s(gKP)$ de $\widetilde{\mathbb{S}}_s(K_{m,n})$ satisfazem as seguintes igualdades*

$$\left|\widetilde{\mathbb{S}}_s(gK)\right| = \left|\widetilde{\mathbb{S}}_s(gKP)\right|, \text{ se } t \text{ é par ou se } t \text{ é ímpar e } mn/2 \text{ é par}$$

e

$$\left|\widetilde{\mathbb{S}}_s(gK)\right| = \left|\widetilde{\mathbb{S}}_s(gKP)\right| + 1, \text{ se } t \text{ é ímpar e } mn/2 \text{ é ímpar.}$$

Demonstração. *De fato, t é par se e só se m e n são pares. Então $2mn/4$ é par, daí, o mergulho máximo de $K_{m,n}$ é da forma $\cup_{i=1}^{2} R^i$, consequentemente,*

$$\begin{array}{l} \widetilde{\mathbb{S}}_s(gK) = \left\{\gamma K \equiv (\frac{mn}{2} - 1)R_4, (\gamma+1)\, K \equiv \cup_{i=1}^{mn/2-3} R^i, \cdots, (\gamma + \frac{mn}{4} - 1)K \equiv R_{2mn}\right\} \\ \widetilde{\mathbb{S}}_s(gKP) = \left\{(\gamma\text{-}1)\, KP \equiv \frac{mn}{2} R_4, \gamma KP \equiv \cup_{i=1}^{mn/2-2} R^i, \cdots, (\gamma + \frac{mn}{4} - 2)KP \equiv \cup_{i=1}^{2} R^i\right\}, \end{array}$$

o que mostra a igualdade $\left|\widetilde{\mathbb{S}}_s(gK)\right| = \left|\widetilde{\mathbb{S}}_s(gKP)\right|$. O caso t é ímpar e $mn/2$ é par e a outra igualdade podem ser provados de forma análoga, utilizando os conjuntos do Teorema 4.5.2. ■

Corolário 4.5.5 *O número de elementos de quaquer um dos conjuntos não orientáveis de $K_{n,n}$ é aproximadamente o dobro do seu respectivo conjunto não orientável, isto é,*

$$\left|\widetilde{\mathbb{S}}\left(K_{n,n}\right)\right| \cong 2\left|\mathbb{S}\left(K_{n,n}\right)\right| \quad e \quad \left|\widetilde{\mathbb{M}}_c\left(K_{n,n}\right)\right| \gtrapprox 2\left|\mathbb{M}_c\left(K_{n,n}\right)\right|.$$

Demonstração. *A primeira relação é uma consequência imediata do Corolário 4.5.4. A segunda relação deve-se ao fato de que os modelos de partições de mergulhos são os mesmos nas superfícies das formas gT e gK, porém, o número de partições nas superfícies gKP é um pouco superior ao número de partições em gK.* ■

Os resultados desta seção podem ser transferidos imediatamente para o grafo completo bipartido da forma $K_{n,n}$, será este o objetivo da próxima subseção.

4.5.1 Considerações sobre os Mergulhos de $K_{n,n}$

O grafo completo bipartido $K_{n,n}$ é o modelo de grafo completo adotado para obter informações mais gerais sobre a família dos grafos completos bipartidos, daí a nossa preocupação em fornecer os resultados equivalentes para a família de grafos $K_{n,n}$.

Corolário 4.5.6 (Equivalente ao Lema 4.5.1) *Se n é ímpar é t o número de regiões do mergulho mínimo orientável de $K_{n,n}$, então os mergulhos mínimos orientáveis e não orientáveis sem bordos de $K_{m,n}$ são da forma*

$$K_{n,n} \hookrightarrow \left(\tfrac{1}{4}n^2 - n + \tfrac{7}{4}\right) T \equiv \left(\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{5}{2}\right) R_4 R_6 \equiv \left(\tfrac{1}{4}n^2 - n + \tfrac{7}{4}\right) K \hookleftarrow K_{n,n}, \text{ se } t \text{ é ímpar},$$

caso contrário, os mergulhos mínimos orientáveis são das formas

$$K_{n,n} \hookrightarrow \left(\tfrac{1}{4}n^2 - n + \tfrac{7}{4}\right) T \equiv \left(\tfrac{1}{4}n^2 - n - \tfrac{5}{4}\right) R_4 R_{10}, \left(\tfrac{1}{4}n^2 - n - \tfrac{9}{4}\right) R_4 R_6 R_8,$$

é o mergulho mínimo não orientável é da forma

$$K_{n,n} \hookrightarrow \left(\tfrac{1}{4}n^2 - n + \tfrac{3}{4}\right) KP \equiv \left(\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{5}{2}\right) R_4 R_6.$$

Demonstração. *Se $n = 2q+1$, então, o número de regiões t para o mergulho mínimo de $K_{n,n}$ é dado por*

$$\begin{aligned} \gamma &= \left\{\frac{1}{4}\left(2q+1-2\right)^2\right\} = \left\{q^2 - q + \tfrac{1}{4}\right\} = q^2 - q + 1 \\ &= \left(\tfrac{n-1}{2}\right)^2 - \tfrac{n-1}{2} + 1 = \tfrac{1}{4}n^2 - n + \tfrac{7}{4} \end{aligned}$$

daí, a característica da superfície $\Omega_{\min}$ para o mergulho mínimo de K é dada por

$$\chi\left(\Omega_{\min}\right) = 2 - 2\gamma \Rightarrow 2 - 2\left(q^2 - q + 1\right).$$

Portanto, o número de regiões do mergulho mínimo é dado por

$$\begin{aligned} t &= \chi\left(\Omega_{\min}\right) - v + e = 2 - 2\left(q^2 - q + 1\right) - 2\left(2q+1\right) + \left(2q+1\right)^2 \\ &= 2q^2 + 2q - 1 = 2\left(\tfrac{n-1}{2}\right)^2 + 2\left(\tfrac{n-1}{2}\right) - 1 = \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Observe que t é ímpar. Por outro lado, o mergulho mínimo de $K_{n,n}$ possui o máximo de regiões quandrangulares. Como 2mn é par não divisível por 4, pois m e n são ímpares, então $2n^2 = 4k + 2$. Mas a partição de um mergulho mínimo deve maximizar o número de regiões quadrangulares isto é, deve ser necessariamente da forma

$$\Xi_{\min}(K_{m,n}) = (k-1)\, R_4R_6.$$

Assim, o mergulho mínimo possui k regiões, sendo $(k-1)$ regiões quadrangulares e uma hexagonal. Mas k pode ser par ou ímpar. Se k for ímpar, os mergulhos mínimos orientáveis e não orientáveis de $K_{n,n}$ possuem o mesmo tipo de partição, isto é, são mergulhos da forma

$$K_{n,n} \hookrightarrow \left(\tfrac{1}{4}n^2 - n + \tfrac{7}{4}\right)T \equiv \left(\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{5}{2}\right)R_4R_6 \equiv \left(\tfrac{1}{4}n^2 - n + \tfrac{7}{4}\right)K \hookleftarrow K_{n,n}.$$

Se k for par, (4.13) *não pode ser partição de um mergulho mínimo orientável, logo é partição do mergulho mínimo não orientável o qual assume a forma*

$$K_{n,n} \hookrightarrow \left(\tfrac{1}{4}n^2 - n + \tfrac{3}{4}\right)KP \equiv \left(\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{5}{2}\right)R_4R_6,$$

o mergulho mínimo orientável deverá ser formado por $t-1$ regiões, e portanto deverá assumir necessáriamente uma das duas formas

$$K_{n,n} \hookrightarrow \left(\tfrac{1}{4}n^2 - n + \tfrac{7}{4}\right)T \equiv \left(\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{5}{2}\right)R_4R_{10}, \left(\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{7}{2}\right)R_4R_6R_8,$$

o que mostra o desejado. ■

Teorema 4.5.7 (Equivalente do Teorema 4.5.2) *Os conjuntos das superfícies orientáveis e não orientáveis sem bordos para os mergulhos de $K_{n,n}$ são:*

i) Se n é par, então $\gamma = \frac{1}{4}(n-2)^2$ e

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_s &= \left\{\tfrac{1}{4}(n-2)^2\,T \equiv \tfrac{n^2}{2}R_4, (\gamma+1)\,T \equiv \cup_{i=1}^{n^2/2-2}R^i, \cdots, \left(\tfrac{1}{2}n^2 - n\right)T \equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\},\\
\widetilde{\mathbb{S}}_s &= \left\{\tfrac{1}{4}(n-2)^2\,K \equiv \tfrac{n^2}{2}R_4, (\gamma+1)\,K \equiv \cup_{i=1}^{n^2/2-2}R^i, \cdots, \left(\tfrac{1}{2}n^2 - n\right)K \equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\}\\
&\cup \left\{\tfrac{1}{4}(n\text{-}2)^2\,KP \equiv \cup_{i=1}^{n^2/2-1}R^i, (\gamma\text{+}1)\,KP \equiv \cup_{i=1}^{n^2/2-3}R^i, \cdots, \left(\tfrac{n^2-2n}{2}\right)KP \equiv R_{2n^2}\right\};
\end{aligned}$$

iii) Se n é ímpar, $\gamma = \frac{1}{4}n^2 - n + \frac{7}{4}$, $2n^2 = 4u + 2$; neste caso, se u é par, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_s &= \left\{\gamma T \equiv \cup_{i=1}^{u-1}R^i, (\gamma+1)\,T \equiv \cup_{i=1}^{u-3}R^i, \cdots, (\tfrac{1}{2}n^2 - n + \tfrac{1}{2})T \equiv R_{2mn}\right\},\\
\widetilde{\mathbb{S}}_s &= \left\{\gamma K \equiv \cup_{i=1}^{u-1}R^i, (\gamma+1)\,K \equiv \cup_{i=1}^{u-3}R^i, \cdots, (\tfrac{1}{2}n^2 - n + \tfrac{1}{2})K \equiv R_{2mn}\right\}\\
&\cup \left\{(\gamma\text{-}1)\,KP \equiv (u\text{-}1)\,R_4R_6, \gamma KP \equiv \cup_{i=1}^{u-2}R^i, \cdots, \left(\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{2n+1}{2}\right)KP \equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\};
\end{aligned}$$

e se u é ímpar, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_s &= \left\{\gamma T \equiv (u-1)\,R_4R_6, (\gamma+1)\,T \equiv \cup_{i=1}^{u-2}R^i, \cdots, \left(\tfrac{1}{2}n^2 - n + 1\right)T \equiv R_{2mn}\right\},\\
\widetilde{\mathbb{S}}_s &= \left\{\gamma K \equiv (u-1)\,R_4R_6, (\gamma+1)\,K \equiv \cup_{i=1}^{u-2}R^i, \cdots, \left(\tfrac{1}{2}n^2 - n + 1\right)K \equiv R_{2mn}\right\}\\
&\cup \left\{\gamma KP \equiv \cup_{i=1}^{u-1}R^i, (\gamma+1)\,KP \equiv \cup_{i=1}^{u-3}R^i, \cdots, \left(\tfrac{1}{2}n^2 - n\right)KP \equiv \cup_{i=1}^{2}R^i\right\}.
\end{aligned}$$

Demonstração. *Se $n = 2q$, então*

$$\begin{aligned}\gamma &= \left\{\tfrac{1}{4}(2q-2)^2\right\} = \left\{q^2-2q+1\right\} = q^2-2q+1 \\ &= \left(\tfrac{n}{2}\right)^2 - 2\left(\tfrac{n}{2}\right)+1 = \tfrac{1}{4}n^2-n+1.\end{aligned}$$

Se $n = 2q+1$ então, pela demonstração do Corolário 4.5.6, $\gamma = \frac{1}{4}n^2 - n + \frac{7}{4}$. O restante da demonstração segue do Teorema 4.5.2. ■

Corolário 4.5.8 (Equivalente ao Corolário 4.5.3) *Se $\pi_n = P$ ($\pi_n = I$) indica que n é par (n é impar), então a cardinalidade dos conjuntos de superfícies orientáveis e não orientáveis sem bordos de mergulhos de $K_{n,n}$ é dada por:*

$$\begin{aligned}
|\mathbb{S}_s(K_{m,n})| &= \begin{cases} \frac{1}{4}n^2, & se\ \pi_n = P \\ \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{4}, & se\ \pi_n \in I\ e\ \pi_{n^2/2-1/2} = P \\ \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}, & se\ \pi_n \in I\ e\ \pi_{n^2/2-1/2} = I \end{cases} \\
\left|\widetilde{\mathbb{S}}_s(gKP)\right| &= \begin{cases} \frac{1}{4}n^2, & se\ \pi_n = P \\ \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{4}, & se\ \pi_n \in I\ e\ \pi_{n^2/2-1/2} = P \\ \frac{1}{4}mn - \frac{3}{4}, & se\ \pi_n \in I\ e\ \pi_{n^2/2-1/2} = I \end{cases} \\
\left|\widetilde{\mathbb{S}}_s(K_{m,n})\right| &= \begin{cases} \frac{1}{2}n^2, & se\ \pi_n = P \\ \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}, & se\ \pi_n \in I\ e\ \pi_{n^2/2-1/2} = P \\ \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}, & se\ \pi_n \in I\ e\ \pi_{n^2/2-1/2} = I \end{cases} \\
\left|\widetilde{\mathbb{S}}_s(K_{m,n})\right| &= \begin{cases} \frac{3}{4}n^2, & se\ \pi_n = P \\ \frac{3}{4}n^2 - \frac{3}{4}, & se\ \pi_n \in I\ e\ \pi_{n^2/2-1/2} = P \\ \frac{3}{4}n^2 - \frac{1}{4}, & se\ \pi_n \in I\ e\ \pi_{n^2/2-1/2} = I. \end{cases}
\end{aligned}$$

Demonstração. *Basta fazer $m = n$ nos resultados do Corolário 4.5.3, eliminar os casos em que $\pi_m \neq \pi_n$ e usar o Corolário 4.5.3.* ■

Nas análises sobre os mergulhos de $K_{m,n}$ e $K_{n,n}$ realizadas na Seção 4.5, somente não foi explorado as relações matemáticas referentes aos mergulhos com bordos, porque estes dependem das classes de mergulhos sem bordos e variam muito de caso para caso. Não é nada dificil identificar as classes de mergulhos, seja orientáveis ou não, com ou sem bordos. É trabalhoso. A identificação começa sempre pelas classes de mergulhos sem bordos orientáveis, esta é idêntica ao caso não orientável sobre superfícies da forma gK, depois vem as classes não orientáveis sobre superfícies da forma gKP e, finalmente, faz-se a identificação das classes de mergulhos com bordos. A identificação destas últimas só dependem da combinação de regiões sobre as quais são aplicadas a operação e exerese. Como cada classe sem bordo gera um número bastante elevado de mergulhos sem bordos, o número destas são muito maiores do que ao número das classes sem bordos.

O número preciso dos mergulhos sem bordos pode ser perfeitamente estimado, mas é um trabalho mais laborioso do que os sem bordos, uma vez que depende dos tipo e quantidade de regiões de cada classe. Mas, à medida que os números de vértices e lados do grafo aumentam o número de classe de mergulhos sem bordos crescem fatorialmente, uma vez que se trata de um problema combinatorial. Pode-se até pensar em identificar os mergulhos com bordos de $K_{m,n}$, contudo, seria sempre uma estimativa, uma vez que nem todas as classes de mergulhos sem bordos existem, como foi mostrado no Lema 3.9.1, para a classe de $R_{6,8,8,10}$. Caso este problema seja resolvido, o número de mergulhos sem bordos seria sempre um limitante superior, até que a não existência das classes de mergulhos sem bordos de $K_{m,n}$ sejam identificadas.

Em vez de enveredarmos pelo caminho dos mergulhos sem bordos, preferimos tratar do problema da identificação dos mergulhos regulares, por estes representarem uma importante classe de mergulhos, quando o propósito for usá-los como projetos de modulações sobre superfícies.

4.6 Os mergulhos regulares de $K_{4,4}$

Lembramos que um mergulho se diz regular quando todas as regiões da partição são do mesmo tipo. Quando se trata de usar mergulhos para projetos de modulações sobre superfícies, os mergulhos regulares correspondem aos e.s.g.u., projetos em que todas as regiões de decisão são congruentes, reconhecidos como os projetos que apresentam a menor complexidade de cálculo e, por isso, os mais visados para projetos de sinais em em processos de transmissão de sinais digitais.

Quando o objetivo é construir um mergulho topológico, a preocupação incial é obter somente o modelo do mergulho. Nesta etapa do processo, não é relevante conhecer o tipo de região do mergulho. Dependendo do grafo o mergulho topológico é um processo de alta complexidade e não há métodos infalíveis que permitam obter este tipo de construção. A identificação das regiões do mergulho é um processo que vem depois da construção topológica do mergulho. Do ponto de vista da topologia, regiões de um mergulho de um mesmo tipo são todas iguais. Sob este aspectos os mergulhos regulares são modelos naturais de e.s.g.u., e daí a importância em identificar este tipo de mergulho.

Se o mergulho de G é regular, isto é, $G \hookrightarrow \Omega = kR_\alpha$, então iremos considerar, para efeito de classificação, o mergulho com k componentes de bordos $G \hookrightarrow \Omega_k \equiv G$ como sendo um mergulho não regular.

Voltemos à inspeção dos mergulhos sem bordos do grafo $K_{4,4}$ relacionados no Capítulo 3 e dos mergulhos com bodos realicionados neste capítulo, e identifiquemos aqueles que são regulares.

4.6.1 Mergulhos regulares de $K_{1,1}$ e $K_{2,2}$

Vimos que o grafo $K_{1,1}$ não possui mergulho de 2-células e, portanto, não faz sentido falar em mergulhos regulares vindos do grafo completo bipartido $K_{1,1}$. Passemos então para os mergulhos de $K_{2,2}$. Analisando a Tabela 4.3.1, vemos que todos os mergulhos de $K_{2,2}$ são regulares, consequentemente, se $\check{R}_{\mathbb{M}}, \check{R}_{\mathbb{M}_s}, \check{R}_{\mathbb{M}_b}, \check{R}_{\widetilde{\mathbb{M}}}, \check{R}_{\widetilde{\mathbb{M}}_s}$ e $\check{R}_{\widetilde{\mathbb{M}}_b}$ são os conjuntos principais de mergulhos regulares de $K_{2,2}$, então o número de elementos é dado pela Tabela 4.6.1.

O grafo $K_{2,2}$ é o primeiro da família de $K_{m,n}$ a ter um modelo de mergulho cuja partição é composta por duas regiões, a condição mínima exigida para que se tenha um projeto natural de modulação, problema que será analisado minuciosamente no Capítulo 5.

No caso do grafo $K_{2,2}$, o índice de incidência de mergulhos com bordos é de 100%.

Orientável				Não orientável			
$\check{R}_{\nleq}$	$\check{R}_{\mathbb{M}_s}$	$\check{R}_{\mathbb{M}_b}$	$\check{R}_{\mathbb{M}}$	$\check{R}_{\widetilde{\mathbb{M}}_s}$	$\check{R}_{\widetilde{\mathbb{M}}_b}$	$\check{R}_{\widetilde{\mathbb{M}}}$	Total
$\cup R_\alpha$	1	2	3	1	1	2	5

Tabela 4.6.1: Classes de mergulhos regulares de $K_{2,2}$

Este é o único grafo da família dos grafos completos bipartidos $K_{n,n}$ que apresenta todos os mergulhos regulares.

4.6.2 Mergulhos regulares de $K_{3,3}$

As classes de mergulhos de $K_{3,3}$ contêm uma adversidade maior de modelos, que servem de amostras para ilustrar de como são os tipos de modelos que iremos encontrar nas classes de mergulhos dos grafos completos bipartidos $K_{m,n}$. Utilizando a Tabela 4.3.2, vemos que os mergulhos regulares de $K_{3,3}$ são como os relacionados na Tabela 4.6.2.

Orientável					Não Orientável		
Sem bordo		C/bordo			S/bordo	$\widetilde{\mathbb{M}}_s$	C/bordo
Ω	T	T_1	T_2	T_3	K	K_1	K_2
Ξ	$3R_6$	$2R_6, 2R_4$	R_6, R_4, R_{10}	$K_{3,3}$	$3R_6$	$2R_6, 2R_4$	R_4, R_6, R_{10}
Ω	$2T$	$2T_1$			KP	KP_1	KP_2
Ξ	R_{18}	$K_{3,3}$			$\varnothing$	$R_4, R_6, \cdots, R_{14}$	$K_{3,3}$
Ω					$2K$	$2K_1$	
Ξ					R_{18}	$K_{3,3}$	

Tabela 4.6.2: Mergulhos com bordos das classes de $K_{4,4} \hookrightarrow 2T \equiv R_{\alpha_1,\cdots,\alpha_6}$

Efetuando a contagem dos elementos da Tabela 4.6.2, constatamos que o número de mergulhos regulares das principais famílias de mergulhos de $K_{4,4}$ são discriminados na Tabela 4.6.3. Observamos de imediato que o número de mergulhos regulares com bordos é sempre superior aos mergulhos regulares sem bordos.

Orientável				Não orientável			
$\check{R}_{\nleq}$	$\check{R}_{\mathbb{M}_s}$	$\check{R}_{\mathbb{M}_b}$	$\check{R}_{\mathbb{M}}$	$\check{R}_{\widetilde{\mathbb{M}}_s}$	$\check{R}_{\widetilde{\mathbb{M}}_b}$	$\check{R}_{\widetilde{\mathbb{M}}}$	Total
$\cup R_\alpha$	3	8	11	6	19	25	36
kR_α	2	7	9	2	19	21	30
$\cup R_\alpha - kR_\alpha$	1	1	2	4	0	4	6

Tabela 4.6.3: Classes de mergulhos regulares de $K_{4,4}$

Analisando os dados da Tabela 4.6.3 deduzimos que o índice de incidência dos mergulhos regulares é de $81,82\%$ nos mergulhos orientáveis e de 84% nos mergulhos não orientáveis. No geral, o índice de incidência é $83,33\%$. Portanto o índice de incidência de mergulhos regulares continua elevado nos mergulhos de $K_{3,3}$, sendo maior nos mergulhos orientáveis. Este seria o perfil do índice de incidência da família do grafo completo bipartido $K_{n,n}$. Estimativa precisa, somente com a identificação dos casos mais complexos.

4.7 Mergulhos regulares de $K_{4,4}$

A identificação das classes de mergulhos regulares de $K_{4,4}$ já pode ser considerado um problema de alta complexidade, este só é possível após a certeza absoluta da existência das classes de mergulhos de $K_{4,4}$. Quanto as classes orientáveis com e sem bordos, identificaremos com abssoluta segurança os mergulhos regulares, pois trata-se das de mergulhos comprovadamente existentes através do Algoritmo 2.8.1. No caso não orientável, a identificação será realizada a nível do conjunto dos possíveis modelos de classes de mergulhos regulares com e sem bordos, pois não se tem certeza da existência de todas as classes de mergulhos não orientáveis relacionadas na Tabela 3.10.2. Vimos no caso orientável que apenas a classe $R_{6,8,8,10}$ não existe. Quanto a existência das classes de mergulhos não orientáveis, este índice de incidência seria preservado? Esperamos que sim, mas é um fato que só deve ser comprovado através de um algoritmo gerador de mergulhos não orientáveis. A certeza que temos é que se uma classe de mergulho não orientável existe então ela está necessariamente relacionada em uma das Tabelas 4.4.1 ou 4.4.3.

4.7.1 Mergulhos regulares orientáveis de $K_{4,4}$

Recorramos então às classes de mergulhos orientáveis de $K_{4,4}$ da Tabela 4.4.3 e identifiquemos, dentre estes, aquelas que são regulares, conforme mostram os modelos de mergulhos com e sem bordos relacionados na Tabela 4.7.1.
Efetuando uma contagem nas classes das famílias de superfícies dos mergulhos regulares da Tabela 4.7.1, obtemos os seguintes resultados apresentados na Tabela 4.7.2.

Concluímos portanto, da Tabela 4.7.2, que os mergulhos orientáveis regulares com e sem bordos do grafo completo bipartido $K_{4,4}$ possuem a seguinte distribuição: 8 mergulhos sobre a família do toro, sendo um sem bordo; 30 mergulhos sobre o bitoro, todos com bordos; 60 sobre a família do tritoro, somente um é sem bordo;e 14 sobre a família de 4-toro, sendo um sem bordo. Observamos que a maioria dos mergulhos regulares com bordos encontram-se sobre as superfícies com o maior número de componentes de bordos. No caso em que o mergulho com bordo possui uma única região, este é sempre regular, pela condição de regularidade. Este seria o caso trivial de regularidade. Em termos de modulação, uma partição formada por uma única região seria para um projeto de uma constelação de sinais composto por um único sinal. Como este projeto não se aplica no processo de transmissão de sinais, as partições de uma região não serão consideradas projetos de modulações. Por isso iremos apresentar um resumo dos dados referentes aos mergulhos regulares orientáveis em ralação ao índice de existência, apresentando o caso em que as partições de uma região são consideradas modulações e quando estas não são consideradas, conforme os dados mostrados na Tabela 4.7.3.

Na Tabela 4.7.3 usamos as seguintes notações: R e I indicam mergulhos regulares e irregulares, respectivamente; Tot_{R+I} indica o total de $R+I$; M_R indica os mergulhos regulares que são modelos de modulações; $Red\,(R)$ redução dos modelos regulares que são modelos de modulações; e $I_{M_R}\,(Tot)\,\%$ significa o índice de existência de M_R em relação a Tot dado em porcentagem. As demais notações têm significados equivalentes.

Quando se trata de modulação o número de mergulhos regulares decresce significativamente em todas as famílias de mergulhos orientáveis de $K_{4,4}$. O caso mais radical de decréscimo é o da família do 4-toro, este deixa de ter os 27 mergulhos com bordos orientáveis e, portanto uma perda de 100% dos modelos regulares de mergulhos com bordos. Nas demais famílias as perdas vão diminuinido à medida que o gênero da superfície aumenta: na família do tri-toro a perda é de $68,33\%$, família do bitoro é de $40,0\%$ e na família do toro é de $14,286\%$.

Tabela 4.7.1: Classes de mergulhos orientáveis regulares de $K_{4,4}$

Família do toro									
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos							
Ω	T	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
Ξ	$8R_4$	$7R_4$	$6R_4$	$5R_4$	$4R_4$	$3R_4$	$2R_4$	R_4	$K_{4,4}$
Família do bitoro									
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos							
Ω	$2T$	$2T_1$	$2T_2$	$2T_3$			$2T_4$	$2T_5$	$2T_6$
Ξ_1	$5R_4R_{12}$	$5R_4$	$4R_4$	$3R_4$			$2R_4$	R_4, R_{12}	$\varnothing$
Ξ_2	$4R_4R_6R_{10}$	$\varnothing$	$4R_4$	$3R_4$			$2R_4$	R_4, R_6, R_{10}	$\varnothing$
Ξ_3	$4R_4R_8R_8$	$\varnothing$	$4R_4$	$3R_4$			$2R_4, 2R_8$	R_4, R_8	$\varnothing$
Ξ_4	$3R_42R_6R_8$	$\varnothing$	$\varnothing$	$3R_4$			$2R_4, 2R_6$	R_4, R_6, R_8	$\varnothing$
Ξ_5	$2R_44R_6$	$\varnothing$	$4R_6$	$3R_6$			$2R_4, 2R_6$	R_4, R_6	$\varnothing$

Tabela 4.7.1 - Continuação da página anterior

Tabela 4.7.1 - Continuação da página anterior					
Família do tritoro					
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos			
Ω	$3T$	$3T_1$	$3T_2$	$3T_4$	$3T_4$
Ξ_1	$R_{4,4,4,20}$	$3R_4$	$2R_4$	R_4, R_{20}	$\varnothing$
Ξ_2	$R_{4,4,6,18}$	$\varnothing$	$2R_4$	R_4, R_6, R_{18}	$\varnothing$
Ξ_3	$R_{4,4,8,16}$	$\varnothing$	$2R_4$	R_4, R_8, R_{16}	$\varnothing$
Ξ_4	$R_{4,4,10,14}$	$\varnothing$	$2R_4$	R_4, R_{10}, R_{14}	$\varnothing$
Ξ_5	$R_{4,4,12,12}$	$\varnothing$	$2R_4, 2R_{12}$	R_4, R_{12}	$\varnothing$
Ξ_6	$R_{4,6,6,16}$	$\varnothing$	$2R_6$	R_4, R_6, R_{16}	$\varnothing$
Ξ_7	$R_{4,6,8,14}$	$\varnothing$	$\varnothing$	R_4, R_6, R_8, R_{14}	$\varnothing$
Ξ_8	$R_{4,6,10,12}$	$\varnothing$	$\varnothing$	R_4, R_6, R_{10}, R_{12}	$\varnothing$
Ξ_9	$R_{4,8,8,12}$	$\varnothing$	$2R_8$	R_4, R_8, R_{12}	$\varnothing$
Ξ_{10}	$R_{4,8,10,10}$	$\varnothing$	$2R_{10}$	R_4, R_8, R_{10}	$\varnothing$
Ξ_{11}	$R_{6,6,6,14}$	$3R_6$	$2R_6$	R_6, R_{14}	$\varnothing$
Ξ_{12}	$R_{6,6,8,12}$	$\varnothing$	$2R_6$	R_6, R_8, R_{12}	$\varnothing$
Ξ_{13}	$R_{6,6,10,10}$	$\varnothing$	$2R_6, 2R_{10}$	R_6, R_{14}	$\varnothing$
Ξ_{14}	$R_{6,8,8,10}$	$\varnothing$	$2R_8$	R_6, R_8, R_{10}	$\varnothing$
Ξ_{15}	$R_{8,8,8,8}$	$3R_8$	$2R_8$	R_8	$K_{4,4}$
Família 4-toro					
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos			
Ξ_{4T}	$4T$	$4T_1$	$4T_2$		
Ξ_1	R_4R_{28}	R_4, R_{28}	$\varnothing$		
Ξ_2	R_6R_{26}	R_6, R_{26}	$\varnothing$		
Ξ_3	R_8R_{24}	R_8, R_{24}	$\varnothing$		
Ξ_4	$R_{10}R_{22}$	R_{10}, R_{22}	$\varnothing$		
Ξ_5	$R_{12}R_{20}$	R_{12}, R_{20}	$\varnothing$		
Ξ_6	$R_{14}R_{18}$	R_{14}, R_{18}	$\varnothing$		
Ξ_7	$R_{16}R_{16}$	R_{16}	$\varnothing$		

Vimos então que muitos dos mergulhos regulares podem não servir para projetos de modulações, são aqueles que possuem uma única região e podem acontecer tanto nas superfícies sem bordos como nas superfícies com bordos. Em relação a estes aspectos podemos descrever os mergulhos regulares orientáveis através da seguinte proposição.

Proposição 4.7.1 *Os mergulhos regulares orientáveis sem e com bordos de 2-células do grafo completo bipartido $K_{4,4}$ têm a seguinte distribuição:*

i) 111 regulares, sendo 3 sem bordos e 108 com bordos;

Família do toro										
Ξ_T	T	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	Total
$8R_4$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	8

Família do bitoro								
Ξ_T	$2T$	$2T_1$	$2T_2$	$2T_3$	$2T_4$	$2T_5$	$2T_6$	Total
$R_4R_4R_4R_4R_4R_{12}$	0	1	1	1	1	2	0	6
$R_4R_4R_4R_4R_6R_{10}$	0	0	1	1	1	3	0	6
$R_4R_4R_4R_4R_8R_8$	0	0	1	1	2	2	0	6
$R_4R_4R_4R_6R_6R_8$	0	0	0	1	2	3	0	6
$R_4R_4R_6R_6R_6R_6$	0	0	1	1	2	2	0	6
Total	0	1	4	5	8	12	0	30

Família do tritoro						
Ξ_{3T}	$3T$	$3T_1$	$3T_2$	$3T_3$	$3T_4$	Total
$R_4R_4R_4R_{20}$	0	1	1	2	0	4
$R_4R_4R_6R_{18}$	0	0	1	3	0	4
$R_4R_4R_8R_{16}$	0	0	1	3	0	4
$R_4R_4R_{10}R_{14}$	0	0	1	3	0	4
$R_4R_4R_{12}R_{12}$	0	0	2	2	0	4
$R_4R_6R_6R_{16}$	0	0	1	3	0	4
$R_4R_6R_8R_{14}$	0	0	0	4	0	4
$R_4R_6R_{10}R_{12}$	0	0	0	4	0	4
$R_4R_8R_8R_{12}$	0	0	1	3	0	4
$R_4R_8R_{10}R_{10}$	0	0	1	3	0	4
$R_6R_6R_6R_{14}$	0	1	1	2	0	4
$R_6R_6R_8R_{12}$	0	0	1	3	0	4
$R_6R_6R_{10}R_{10}$	0	0	2	2	0	4
$R_6R_8R_8R_{10}$	0	0	1	3	0	4
$R_8R_8R_8R_8$	1	1	1	1	0	4
Totais	1	3	15	41	0	60

Família do 4-toro				
Ξ_{4T}	$4T$	$4T_1$	$4T_2$	Total
R_4R_{28}	0	2	0	2
R_6R_{26}	0	2	0	2
R_8R_{24}	0	2	0	2
$R_{10}R_{22}$	0	2	0	2
$R_{12}R_{20}$	0	2	0	2
$R_{14}R_{18}$	0	2	0	2
$R_{16}R_{16}$	1	1	0	2
Totais	1	13	0	14

Tabela 4.7.2: Número de classes das famílias de mergulhos orientáveis regulares de $K_{4,4}$

Família	T		$2T_1$		$3T$		$4T$		Totais	
Superfície	Ω	Ω_k	Ω	Ω_k	Ω	Ω_k	Ω	Ω_k	Ω	Ω_k
$R+I$	1	8	5	80	14	139	7	21	27	248
Tot_{R+I}	9		85		153		28		275	
R	1	7	0	30	1	59	1	13	3	109
$I_R\,(Tot)\,\%$	11, 11	77, 79	0	35, 294	0, 654	38, 56	3, 57	46, 43	1, 09	43, 95
$I_{Tot}\,(R)\,\%$	88, 89		35, 294		39, 216		50, 00		40, 727	
M_R	1	6	0	18	1	18	1	0	3	42
Tot_{M_R}	7		18		19		1		45	
$I_{M_R}\,(Tot)\,\%$	11, 11	66, 667	0	21, 176	0, 654	11, 765	3, 57	0	1, 09	15, 273
$Tot_{I_{M_R}}\%$	77, 778		21, 176		12, 418		3, 57		16, 364	
$Red\,(R)\,\%$	0	1	0	14, 118	0	26, 798	3, 57	46, 43	1, 09	24, 363

Tabela 4.7.3: Número de classes das famílias de mergulhos orientáveis regulares de $K_{4,4}$

ii) 67 moduções regulares, sendo 3 sem bordos e 64 com bordos;

Demonstração. *São dados colhidos diretamente da Tabela 4.7.2.* ■

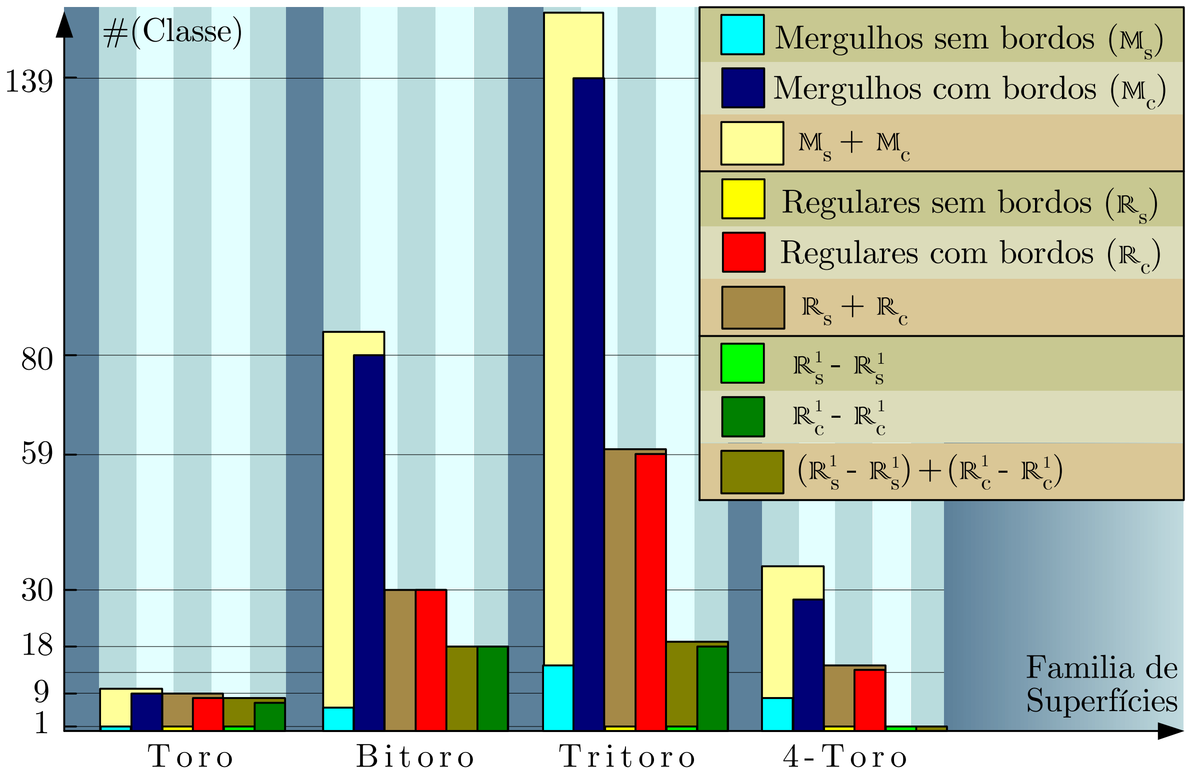


Figura 4.7.1: Gráfico em barras dos mergulhos regulares orientáveis de $K_{4,4}$

Observamos ainda no processo de identificação dos mergulhos orientáveis com bordos que: a soma dos mergulhos regulares com bordos de cada classe de mergulhos de uma superfície é constante e igual ao número de regiões da classe. De um outro modo, esta afirmação pode ser descrita através da seguinte

Proposição 4.7.2 *Seja $\Xi(\Omega)$ o conjunto das classes de mergulhos de $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$. Então, para todo $\Xi_i \in \Xi(\Omega)$, o número de mergulhos com bordos regulares gerados pelo mergulho $G \hookrightarrow \Omega$ é dado por*

$$|\mathbb{M}_c^r(\Xi_i)| = k.$$

Demonstração. *De fato, para toda classe Ξ_i de $\Xi(\Omega)$, $\Xi_i = \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ e o conjunto dos mergulhos com bordos gerados por Ξ_i depende dos tipos de regiões R_{α_i} da partição $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$. Duas regiões R_{α_i} e R_{α_j} são distintas se, e somente se, $\alpha_i \neq \alpha_j$. Se todos as regiões são distintas, então o conjunto dos mergulhos regulares com bordos gerados por Ξ_i é dado por*

$$\mathbb{M}_c^r(\Xi_i) = \{R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, \cdots, R_{\alpha_k}\},$$

logo o número de elementos de $M_c^r(\Xi_i)$ é $\#(\mathbb{M}_c(\Xi_i)) = k$. Suponhamos, no caso geral, que Ξ_i é uma partição da forma

$$\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i} = \beta_1 R_{\alpha_1} + \beta_2 R_{\alpha_2} + \cdots + \beta_s R_{\alpha_s}, \text{ e } \textstyle\sum_{j=1}^{s} \beta_j = k, \tag{4.15}$$

então o conjunto dos mergulhos regulares com bordos gerados por Ξ_i é dado pelos seguintes subconjuntos de mergulhos

$$\begin{array}{rcl}
G & \hookrightarrow & \Omega_{\beta_1} \equiv \beta_1 R_{\alpha_1},\ G \hookrightarrow \Omega_{\beta_1 - 1} \equiv (\beta_1 - 1) R_{\alpha_1}, \cdots, G \hookrightarrow \Omega_1 \equiv R_{\alpha_1}, \\
G & \hookrightarrow & \Omega_{\beta_2} \equiv \beta_2 R_{\alpha_2},\ G \hookrightarrow \Omega_{\beta_2 - 1} \equiv (\beta_1 - 1) R_{\alpha_2}, \cdots, G \hookrightarrow \Omega_1 \equiv R_{\alpha_2}, \\
 & \vdots & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
G & \hookrightarrow & \Omega_{\beta_1} \equiv \beta_2 R_{\alpha_2},\ G \hookrightarrow \Omega_{\beta_2 - 1} \equiv (\beta_1 - 1) R_{\alpha_2}, \cdots, G \hookrightarrow \Omega_1 \equiv R_{\alpha_2},
\end{array}$$

Observe que cada relação j-ésima relacionado na horizontal acima define os conjuntos de mergulhos regulares de 1 até β_j componentes de bordos; logo, cada linha contem β_j elementos, e portanto

$$|\mathbb{M}_c^r(\Xi_i)| = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_2 = \textstyle\sum_{j=1}^{s} \beta_j = k,$$

o que mostra o desejado. ■

A Proposição 4.7.2 é importante para a identificação das classes de mergulhos regulares de um grafo porque permite estimar o número de mergulhos regulares, contando somente com os tipos de regiões das classes. Para sermos precisos o número de elementos dos conjunto dos mergulhos regulares de um grafo G pode ser obtido através de uma fórmula matemática, como será visto a seguir.

Vimos, nos Capítulos 3 e 4, que os mergulhos orientáveis de um grafo G são das formas

$$\mathbb{M}(G) = \left\{G \hookrightarrow \gamma T \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}, G \hookrightarrow (\gamma + 1) T \equiv \cup_{i=1}^{k-2} R_{\alpha_i}, \cdots, G \hookrightarrow \gamma_M T \equiv 2R_{\alpha_i}\right\},$$

se k é par, ou

$$\mathbb{M}(G) = \left\{G \hookrightarrow \gamma T \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}, G \hookrightarrow (\gamma+1)\, T \equiv \cup_{i=1}^{k-2} R_{\alpha_i}, \cdots, G \hookrightarrow \gamma_M T \equiv R_{\alpha_i}\right\},$$

se k e ímpar. Neste caso, o conjunto das superfícies para os mergulhos de G é dado por

$$\mathbb{S}(G) = \{\gamma T, (\gamma+1)\, T, \cdots, \gamma_M T\}.$$

Teorema 4.7.3 *Se o número de classes de mergulhos de G sobre a superfície gT, $\gamma < g < \gamma_M$, é dado por $|\Xi(gT)|$, então o número de mergulhos regulares orientáveis com bordos de G é dado por*

$$|\mathbb{M}_c^r(G)| = \textstyle\sum_{g=\gamma}^{\gamma_M} k_g\, |\Xi(gT)|.$$

Demonstração. *Seja $S(G)$ o conjunto das superfícies orientáveis para os mergulhos de G e seja $\Xi(G(gT))$ o conjunto das classes de mergulhos de G sobre a superfície gT. Então, para cada $\gamma \leq g < \gamma T$, seja k_g o número de regiões da partição do mergulho de G sobre gT, isto é, o mergulhos é da forma $G \hookrightarrow gT \equiv \cup_{i=1}^{k_g} R_{\alpha_i}$. Pelo Lema 4.7.2, para cada classe $\Xi_i \in \Xi(gT)$ o número de mergulhos regulares com bordos gerados pela classe Ξ_i é dado por k_g, então, se $|\Xi(gT)|$ é o número de classes de $\Xi(gT)$, segue que o número de mergulhos regulares com bordos de G sobre a superfície gT é dado por*

$$\mathbb{M}_c^r(gT) = k_g\, |\Xi(gT)|.$$

Consequentemente, o número de mergulhos regulares de 2-células orientáveis com bordos do grafo G é dado por

$$|\mathbb{M}_c^r(G)| = \textstyle\sum_{g=\gamma}^{\gamma_M} k_g\, |\Xi(gT)|,$$

o que mostra o desejado. ∎

Lembramos que k_g é a variação do número de regiões do mergulho sobre a superfície gT, por isso k_g depende do gênero g, que assume valor máximo quando $g = \gamma$ e diminui de duas em duas unidades até chegar em 2 ou 1, conforme γ seja par ou ímpar. Observamos que no caso do grafo completo bipartido $K_{4,4}$, o cálculo para o número de mergulhos orientáveis com bordos é dado por

$$|\mathbb{M}_c^r(K_{4,4})| = \textstyle\sum_{g=1}^{4} k_g\, |\Xi(gT)| = 8\cdot 1 + 6\cdot 5 + 4\cdot 14 + 2\cdot 7 = 108,$$

o que confere com o resultado obtido na Tabela 4.7.2. Além de funcionar como uma prova de que os dados da Tabela 4.7.2 estão corretos o Teorema 4.7.3 tem uma grande utilidade quande se quer saber o número de mergulhos regulares de uma grafo qualquer. Apesar de ter sido enunciado para o caso particular do mergulho orientável do grafo completo $K_{n,n}$, o Teorema 4.7.3 vale também para o caso não orientável. Este problema será abordado logo após relacionarmos os mergulhos regulares não orientáveis na próxima subseção.

4.7.2 Mergulhos regulares não orientáveis de $K_{4,4}$

Os mergulhos regulares não orientáveis de $K_{4,4}$ sobre as superfícies da forma gK são obtidos imediatamente dos mergulhos orientáveis, substituindo a superfície gT pela superfície gK, pois, como já é um comentário anterior ao longo deste trabalho, as partições de mergulhos de um grafo G sobre gT são as mesmas dos mergulhos sobre gK. Com isso conseguimos de imediato a identificação da metade dos mergulhos regulares não orientáveis de $K_{4,4}$. É evidente que este é um procedimento geral e aplica-se ao processo de identificação de mergulhos não orientáveis de qualquer tipo de grafo. Falta somente identificar os mergulhos regulares não orientáveis de $K_{4,4}$ sobre as superfícies da forma gKP.

O processo de identificação dos mergulhos regulares de $K_{4,4}$ sobre as superfícies não orientáveis da forma gKP é idêntico ao caso orientável realizado na Seção 4.7.1, e será concluído através da identificação dos mergulhos regulares existentes na Tabela 4.4.3. Em seguida, será apresentada uma análises minuciosa das principais características deste mergulhos, em forma de grafos de barras e tabelas de dados contendo o número de elementos, índices de existências e taxa de redução dos mergulhos com características de modulações regulares.

A Tabela 4.7.4 contêm todos os modelos possíveis de mergulhos regulares não orientáveis do grafo completo bipartido $K_{4,4}$. Novamente, não iremos considerar os mergulhos em que todas as regiões sofreram a operação de exérese como mergulho regular com bordos. O único modelo que poderia ser regular seria o caso de $K_{4,4} \hookrightarrow 4KP_1 \equiv K_{4,4}$, uma vez que vem de um modelo regular. Devido a sua característica peculiar, isto é, de ser o próprio grafo $K_{4,4}$ mergulhado sobre a superfície $4KP_1$, não iremos considerá-lo como mergulho regular, pois não teríamos como propor uma modulação sobre este mergulho, já que a ausência da região de decisão de sinais é bastante óbvia neste tipo de modelo.

Analisando os modelos de mergulhos regulares relacionados na Tabela 4.7.4, concluímos, de imediato, que existe somente um único mergulho regular sobre uma superfície não orientável sem bordos da forma gKP, é o mergulho máximo não orientável $K_{4,4} \hookrightarrow 4KP \equiv R_{32}$. No mais, todos os mergulhos regulares dessa família encontram-se sobre superfícies com bordos, sendo que, a maioria, encontram-se sobre os mergulhos com 2 e 1 regiões, atingindo o máximo de elementos nos modelos com uma única região.

Novamente, como não é o costume projetar modulações para constelações de um sinal, os mergulhos com uma região serão descartados deste propósito. Com isso, há uma grande redução no número de modelos regulares de mergulhos, quando o objetivo é utilizá-los como projetos de modulações regulares. As superfícies que concentram o maior número de modelos regulares, são exatamente aquelas que contém as modulações para constelação de um sinal, consequentemente não seram consideradas para o uso de projetos de modulações.

Tabela 4.7.4: Classes de mergulhos regulares não orientáveis de $K_{4,4}$ sobre gKP

Família de KP								
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos						
$\widetilde{\Omega}$	KP	KP_1	KP_2	KP_3	KP_4	KP_5	KP_6	KP_7
$6R_4R_8$	$\varnothing$	$6R_4$	$5R_4$	$4R_4$	$3R_4$	$2R_4$	R_4, R_8	$\varnothing$
$5R_42R_6$	$\varnothing$	$\varnothing$	$5R_4$	$4R_4$	$3R_4$	$2R_4, 2R_6$	R_4, R_6	$\varnothing$
Família de $2KP$								
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos						
$\Xi(2KP)$	$2KP$	$2KP_1$	$2KP_2$	$2KP_3$	$2KP_4$	$2KP_5$		
$R_{4,4,4,4,16}$	$\varnothing$	$4R_4$	$3R_4$	$2R_4$	R_4, R_{16}	$\varnothing$		
$R_{4,4,4,6,14}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$3R_4$	$2R_4$	R_4, R_6, R_{14}	$\varnothing$		
$R_{4,4,4,8,12}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$3R_4$	$2R_4$	R_4, R_8, R_{12}	$\varnothing$		
$R_{4,4,4,10,10}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$3R_4$	$2R_4, 2R_{10}$	R_4, R_{10}	$\varnothing$		
$R_{4,4,6,6,12}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$2R_4, 2R_6$	R_4, R_6, R_{12}	$\varnothing$		
$R_{4,4,6,8,10}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$2R_4$	R_4, R_6, R_8, R_{10}	$\varnothing$		

Continua na próxima página

Tabela 4.7.4 - Continuação da página anterior

Família de $2KP$						
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos				
$R_{4,4,8,8,8}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$3R_8$	$2R_4, 2R_8$	R_4, R_8	$\varnothing$
$R_{4,6,6,6,10}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$3R_6$	$2R_6$	R_4, R_6, R_{10}	$\varnothing$
$R_{4,6,6,8,8}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$2R_6, 2R_8$	R_4, R_6, R_8	$\varnothing$
$R_{6,6,6,6,8}$	$\varnothing$	$4R_6$	$3R_6$	$2R_6$	R_6, R_8	$\varnothing$
Família $3KP$						
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos				
$\Xi\,(3KP)$	$3KP$	$3KP_1$	$3KP_2$		$3KP_3$	
$R_4R_4R_{24}$	$\varnothing$	$2R_4$	R_4, R_{24}		$\varnothing$	
$R_4R_6R_{22}$	$\varnothing$	$\varnothing$	R_4, R_6, R_{22}		$\varnothing$	
$R_4R_8R_{20}$	$\varnothing$	$\varnothing$	R_4, R_8, R_{20}		$\varnothing$	
$R_4R_{10}R_{18}$	$\varnothing$	$\varnothing$	R_4, R_{10}, R_{18}		$\varnothing$	
$R_4R_{12}R_{16}$	$\varnothing$	$\varnothing$	R_4, R_{12}, R_{16}		$\varnothing$	
$R_4R_{14}R_{14}$	$\varnothing$	$2R_{14}$	R_4, R_{14}		$\varnothing$	
$R_6R_6R_{20}$	$\varnothing$	$\varnothing$	R_6, R_{20}		$\varnothing$	
$R_6R_8R_{18}$	$\varnothing$	$\varnothing$	R_6, R_8, R_{18}		$\varnothing$	
$R_6R_{10}R_{16}$	$\varnothing$	$\varnothing$	R_6, R_{10}, R_{16}		$\varnothing$	
$R_6R_{12}R_{14}$	$\varnothing$	$\varnothing$	R_6, R_{12}, R_{14}		$\varnothing$	
$R_8R_8R_{16}$	$\varnothing$	$2R_8$	R_8, R_{16}		$\varnothing$	
$R_8R_{10}R_{14}$	$\varnothing$	$\varnothing$	R_8, R_{10}, R_{14}		$\varnothing$	
$R_8R_{12}R_{12}$	$\varnothing$	$2R_{12}$	R_8, R_{12}		$\varnothing$	
$R_{10}R_{10}R_{12}$	$\varnothing$	$2R_{10}$	R_{10}, R_{12}		$\varnothing$	
Família $4KP$						
Sem bordos		Com bordos				
$\widetilde{\Omega}$	$4KP$	$4KP_1$				
Ξ_{14}	R_{32}	$\varnothing$				

Na Tabela 4.7.3 usamos as seguintes notações: R e I indicam mergulhos regulares e irregulares, respectivamente; Tot_{R+I} indica o total de $R+I$; M_R indica os mergulhos regulares que são modelos de modulações; $Red\,(R)$ indica a redução dos modelos regulares que são modelos de modulações; e $I_{M_R}\,(Tot)\,\%$ significa o índice de existência de M_R em relação a Tot dado em porcentagem. As demais notações têm significados equivalentes.

A Tabela 4.7.5 mostra a quantidade exata de modelos de mergulhos de $K_{4,4}$ existentes em cada família de superfície não orientada da forma gKP, o total de modelos de mer-

Família	KP		$2KP$		$3KP$		$4KP$		Totais	
Superfície	Ω	Ω_k	Ω	Ω_k	Ω	Ω_k	Ω	Ω_k	Ω	Ω_k
$R+I$	2	30	10	138	14	86	1	1	27	255
Tot	32		148		100		2		282	
R	0	14	0	50	0	42	1	0	1	106
$I_R\,(R+I)$	0	$46,667$	0	$33,784$	0	$48,837$	100	0	$3,704$	$41,569$
$I_R\,(Tot)$	$43,75$		$35,294$		42		50		$37,943$	
M_R	0	10	0	27	0	5	1	0	1	42
$I_{M_R}\,(R)$	0	71.429	0	$54,0$	0	$11,905$	100	0	100	$39,623$
$I_{M_R}\,(R+I)$	0	$33,333$	0	$19,565$	0	$5,814$	100	0	$3,704$	$16,471$
$I_{M_R}\,(Tot)$	0	$31,25$	0	$18,243$	0	$5,0$	50	0	$0,355$	$14,894$
$Red\,(R)$	0	28,571	0	46.0	0	88,095	0	0	0	$60,377$

Tabela 4.7.5: Númerso de mergulhos não orientáveis, regulares e de modulações regulares de $K_{4,4}$

gulhos regulares, o total de mergulhos regulares que podem ser utilizados como projetos de modulações, as respectivas porcentagens de modelos existentes em cada família, como também, a taxa de redução dos modelos que são utilizados como modulações regulares.

As notações utilizadas na Tabela 4.7.5 tem os mesmos significados das notações da Tabela 4.7.3, descritos acima logo em seguida a esta tabela.

No gráfico em barras da Figura 4.7.2, cada barra de largura igual as duas barras menores contidas em ser interior, representa o número total de mergulhos correspondeste à soma dos números de mergulhos destas duas barras. O gráfico discrimina, ordenadamente, os números de mergulos gerais, mergulhos regulares e mergulhos regulares típicos de modulações, de cada família de superfícies geradas pelas superfícies sem bordos, sobre as quais $K_{4,4}$ possui mergulhos não orientáveis de 2-células. Mais precisamente, o conjunto de superfícies

$$\widetilde{\mathbb{S}}\,(K_{4,4}) = \{K, KP, 2K, 2KP, 3K, 3KP, 4K, 4KP\}\,,$$

cujas famílias de superfícies geradas dependem do número de regiões do mergulho de $K_{4,4}$ em cada uma das superfícies de $\widetilde{\mathbb{S}}\,(K_{4,4})$, as quais são dadas por

$$\begin{aligned}
[K] &= \{K, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8\}\,,\\
[KP] &= \{KP, KP_1, KP_2, KP_3, KP_4, KP_5, KP_6, KP_7\}\,,\\
[2K] &= \{2K, 2K_1, 2K_2, 2K_3, 2K_4, 2K_5, 2K_6\}\,,\\
[2KP] &= \{2KP, 2KP_1, 2KP_2, 2KP_3, 2KP_4, 2KP_5\}\,,\\
[3K] &= \{3K, 3K_1, 3K_2, 3K_3, 3K_4\}\,,\\
[3KP] &= \{3KP, 3KP_1, 3KP_2, 3KP_3\}\,,\\
[4K] &= \{4K, 4K_1, 4K_2\}\,,\\
[3KP] &= \{4KP, 4KP_1\}\,.
\end{aligned}$$

Como só existem mergulhos não orientáveis de 2-células de $K_{4,4}$ nas superfícies das família relacionadas acima, o gráfico em barras da Figura 4.7.2 fornece o número preciso de todos os mergulhos não orientáveis de $K_{4,4}$, nas categorias gerais, regulares e regulares típicos de modulações. O gráfico discrimina ainda, para cada caso, o número de mergulhos sem e com bordos.

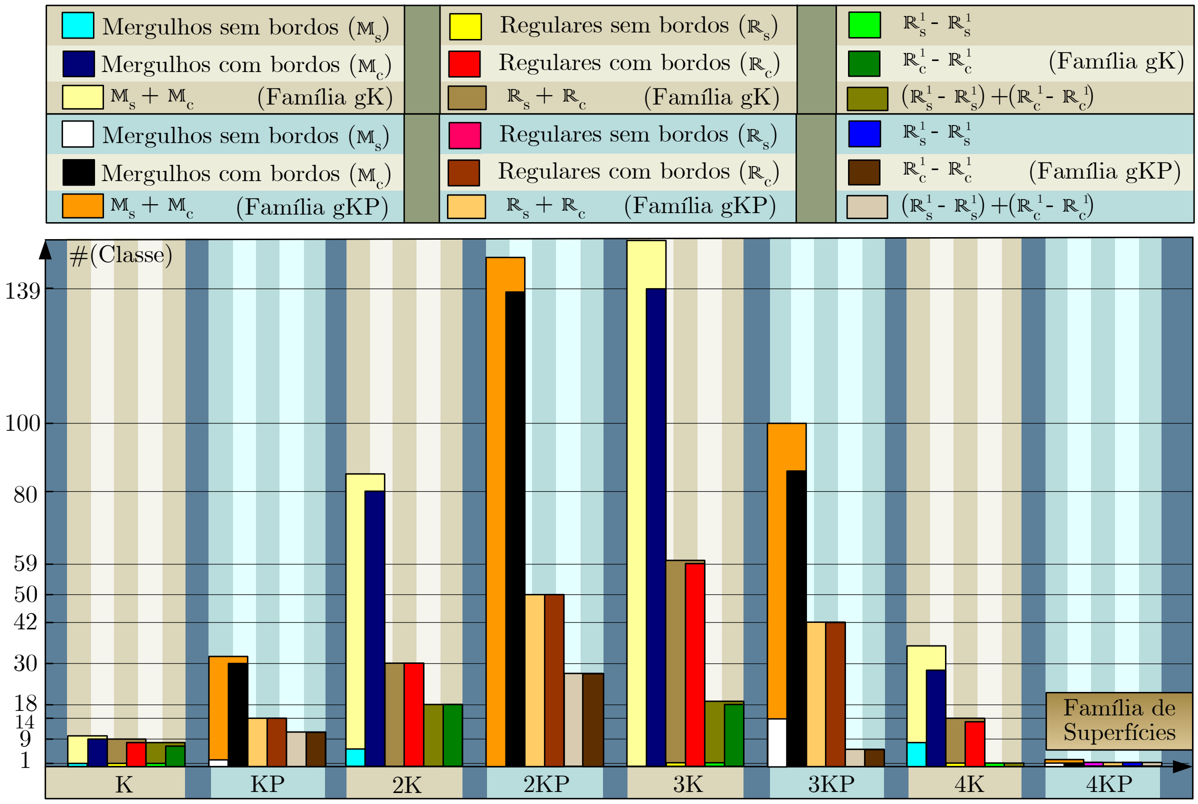


Figura 4.7.2: Gráfico em barras dos números de mergulhos não orientáveis de $K_{4,4}$: gerais, regulares e típicos de modulações.

Basicamente os mergulhos regulares não orientáveis de $K_{4,4}$ sobre gKP preservam as mesmas características em relação aos índices de existências e taxa de redução, dos mergulhos regulares orientáveis sobre gT (ou de gK). As variações podem ser melhores visualisadas através do gráfico de barras da Figura 4.7.2, contendo o número de modelos totais, modelos regulares e modelos regulares típicos de modulações.

Observamos que, com raríssimas exceções, o número de mergulhos com bordos é bem maior do que os mergulhos sem bordos, seja nos mergulhos gerais, regulares ou regulares típicos de modulações. Esta regra só não é válida no caso da familia $[4KP]$: são iguais no geral e nos dois outros casos, o número de mergulhos sem bordo supera o número de mergulhos com bordos.

Notamos ainda que sempre ocorre uma variação acentuada decrescente do número de mergulhos quando consideramos ordenadamente os casos geral, regular e regular típico de modulação. Novamente, $[4KP]$ é a única família que quase não ocorre este tipo de variação, pois contem 2, 1 e 1 mergulhos para este respectivos casos. Observamos ainda que a família $[K]$, apesar da variação ser decrescente, esta não é muito acentuada, pois apresenta valores 9, 8 e 7.

4.8 Análise Final sobre Mergulhos de $K_{n,n}$

Utilizemos agora os dados obtidos nas Tabelas 4.7.3 e 4.7.5 para fornecer, na Tabela 4.8.1, o número de todos os mergulhos do grafo completo bipartido $K_{4,4}$, destacando a incidência em cada família de superfícies, o número de modulações gerais, mergulhos regulares e modulações regulares.

	Geral			Modulações			Regulares			Mod. Regulares		
Ω	Ω	Ω_t	$Tot.$	Ω	Ω_k	$Tot.$	Ω	Ω_t	$Tot.$	Ω	Ω_t	$Tot.$
gT	27	248	275	27	155	182	3	109	112	3	42	45
gK	27	248	275	27	155	182	3	109	112	3	42	45
gKP	27	255	282	26	161	187	1	106	107	1	42	43
$\widetilde{g}P$	54	503	557	53	316	369	4	215	219	4	84	88
$Tot.$	81	751	832	80	471	551	7	324	331	7	126	133

Tabela 4.8.1: Números de mergulhos, gerais, modulações, regulares e modulações regulares não orientáveis de $K_{4,4}$

Como toda superfície não orientável da forma gK ou gKP pode ser colocada sob a forma $\widetilde{g}P$, a 5^a linha da Tabela 4.8.1 contém os dados referentes aos mergulhos não orientáveis de $K_{4,4}$. Obviamente que os valores da linha de $\widetilde{g}P$ são obtidos somando-se os respectivos valores das linha de gT e gKP. Concluímos portanto que 832 é o número de total dos mergulhos de $K_{4,4}$, sendo 551 modelos de modulações possíveis das quais 133 são regulares. Observe, na Tabela 4.8.1, que existem 324 mergulhos regulares, porém, somente 133 podem ser utilizados como projetos de modulações regulares.

Projetos de mergulhos regulares são muitos raros quando estes se encontram em superfícies, identificamos 133 vindos de um grafo relativamente pequeno, o grafo completo $K_{4,4}$. Somando-se aos 7 modelos de modulações regulares identificados nas famílias de mergulhos de $K_{2,2}$ e $K_{3,3}$ atingimos um total de 140 mergulhos regulares identificados neste trabalho, o que é um número bastante expressivo quando se trata da existência desse tipo especial de mergulho. Destes 140 mergulhos, apenas 4 encontram-se em superfícies sem bordos, com isso, a grande quantidade de mergulhos regulares existentes deve-se, sem sombra de dúvidas, aos mergulhos em superfícies com bordos. Quanto a existência de mergulhos orientáveis e não orientáveis, estes últimos sempre possuem aproximadamente o dobro dos mergullhos orientáveis (veja Corolário 4.5.5), qualquer que seja a categoria que façamos a comparação.

O nosso maior propósito em identificar mergulhos de grafos é utilizá-los como projetos de modulações para constelações de sinais sobre variedades riemannianas. O início do processo foi realizado nos Capítulos 3 e 4 para a família do grafo completo bipartido. Apesar do estudo estar concentrado na família particular do grafo completo bipartido da forma $K_{n,n}$, técnicas e processos de identificação eficientes foram desenvolvidos para serem aplicados a qualquer tipo de grafos.

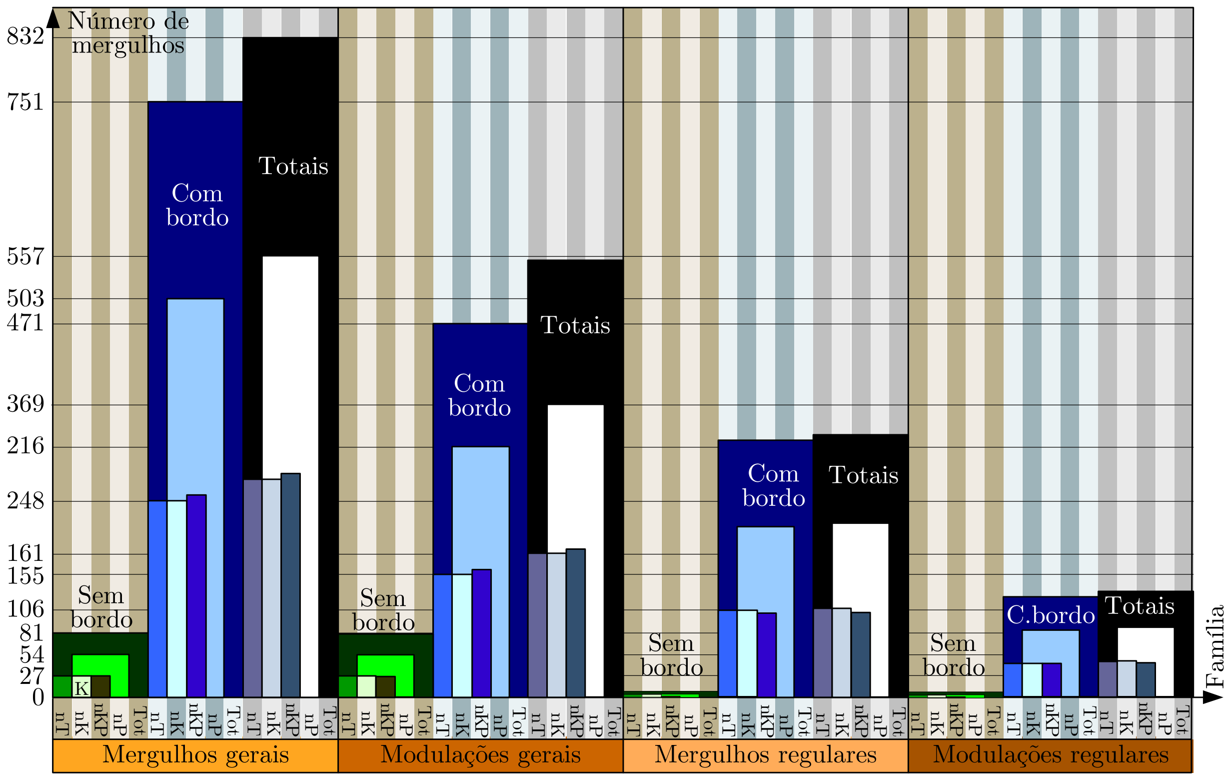


Figura 4.8.1: Gráficos em barras do número de mergulhos de $K_{4,4}$

Além disso, podemos observar durante os desenvolvimentos dos Capítulos 3 e 4, que os procedimentos e técnicas foram laureados de resultados importantes que permitem identificar, quantizar e predizer propriedades importantes que caracterizam o comportamento dos mergulhos dos grafos completos bipartidos, dando mais ênfaze ao caso orientável como também a questão da regularidade, fator muito importante quando o objetivo é utilizar estes mergulhos como modulações. Na verdade, o processo de identificação realizado não consta somente em identificar os modelos dos mergulhos de $K_{4,4}$, há todo um processo de descrição das propriedades locais de cada etapa, no sentido de predizer propriedade topológicas dos mergulhos, quantizar o número de elementos, especificar os tipos de mergulhos, exibir tabelas e gráficos dos resultados, no sentido de depurar a informação.

O problema da identificação de mergulhos de grafos se caracteriza pela existência de vários componentes, tais como as classes de famílias de superfícies (orientáveis e não orientáveis) para o mergulho do grafo, classes dos mergulhos com e sem bordos, e famílias de superfícies geradas por um mergulho sem bordo. Portanto foi necessário uma estratégia de definição desses componentes, apresentar resultados de cada um deles, fazer comparações e, no desfecho, juntar todas as informações de forma condensada para pode avaliar a existência desses componentes individualmente e como parte de um mesmo processo. Daí a necessidade de construção de várias tabelas e gráficos em barras. Estes contém os dados precisos sobre número de elementos em cada um dos componentes integrantes do processo.

O objetivo inicial de identificar as classes de mergulhos do grafo completo $K_{n,n}$ foi mais do que concluído nos Capítulos 3 e 4. Não podíamos desassociar o problema do caso não orientável, ao perceber semelhanças tão evidentes no processo de identificação, com isso, a partir da Seção 3.10, começamos a introduzir informações sobre o caso não orientável, e passamos então a estabelecer resultados equivalentes para os casos orientáveis e não orientáveis, estrapolando o objetivo incial de identificar somente o caso orientavel. Também não esperávamos obter tantos resultados gerais, esta foi uma outra grata surpresa do trabalho. Vale ressaltar aqui que os resultados do caso não orientável trata-se somente da questão da existência. Se este tiver o mesmo comportamento do caso orientável, o máximo que pode ocorrer seria a não existência e uma única classe. O que vai garantir a não existência dessa classe seria um algoritmo identificador de mergulhos não orientáveis, equivalente ao Algoritmo 2.8.1, usado para no processo de identificação das classes de mergulhos de $K_{4,4}$.

Durante o desenvolvimento do processo, as etapas foram formalizadas através de inúmeros resultados gerais, seguidos de suas devidas provas matemáticas, procedimentos que validam e estabelecem definitivamente a importância do método de identificação abordado neste capítulo. Para maior credibilidade do esforço despreendido nos Capítulos 3 e 4 vejamos, próximo capítulo, uma importante aplicação dos mergulhos de grafos no processo de transmissão digital de sinal.

CAPÍTULO 5

Mergulhos, Modulações e DMC

Com o intuito de introduzir o conceito de modulação sobre superfícies topológicas, recordemos alguns procedimentos básicos. No processo modulação/demodulação para uma constelação de n sinais, o procedimento usual consiste em distribuir os n sinais sobre um espaço topológico (Ω, d), onde d é uma métrica sobre um espaço métrico Ω, e definir as regiões de decisão de cada um dos n sinais. Para que se tenha, digamos assim, um aproveitamento de todo o espaço, a união das n regiões de decisão devem ser iguais a Ω, e para que não haja interferência simbólica a interseção entre duas regiões de decisão quaisquer deve ser o conjunto vazio. A princípio, qualquer partição sobre Ω que atenda esta condição é um projeto de modulação para uma constelação de n sinais sobre Ω.

O procedimento para construir o projeto geométrico de modulação é o mesmo que dividir um continente em países, de um estado em cidades. Tomando como analogia o primeiro caso, o continente seria o espaço topológico, os países seriam as regiões desse espaço e a distância em quilômetros entre dois quaisquer pontos do continente seria a métrica. E se considerássemos como vértices as interseções das linha que defininem as fornteiras dos países, estes poderiam ser consideradas regiões poligonais de α lados, se este fosse o número de interseções existentes. Olhando agora o continente C como uma grande região e os países como regiões poligonais que compõem o continente, temos uma partição sobre o continente C compostas de n regiões $R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, \cdots, R_{\alpha_n}$, tais que

$$\cup_{i=1}^{n} R_{\alpha_i} = C \;\text{ e }\; R_{\alpha_i} \cap R_{\alpha_j} = \varnothing, \forall\, i \neq j,\; i,j \in \{1,2,\cdots,n\}, \tag{5.1}$$

onde R_{α_i} é uma região aberta formada pelos pontos que estão no interior da região, ou seja, do ponto de vista da geometria, R_{α_i} é o conjunto de todos os pontos da região que não pertencem a sua fronteira $\partial(R_{\alpha_i})$. As condições em (5.1) definem o equivalente a um *espaço de Hausdorff* sobre o continente C, caso este fosse tomado como um superfície, condição essencial para tornar um projeto de modulação viável através da Geometria de Riemann.

A condição da partição ser uma espaço de Hausdorff é fundamental para os nossos propósitos, no entanto, podemos ter dois tipos especiais de partições sobre uma superfície: uma delas, a mais importante, denominada de *complexo simplicial*, é quando atende as duas condições: 1) o número de lados das regiões e os graus dos vértices são sempre ≥ 3; e 2) os lados das regiões nunca se encontram e quando o fazem, encontram-se somente sobre os vértices ou totalmente. Na Figura 5.0.1, ilustramos dois exemplos de recobrimento de uma região plana através de unidades (ou regiões poligonais) sendo uma delas um complexo simplicial e a outra não.

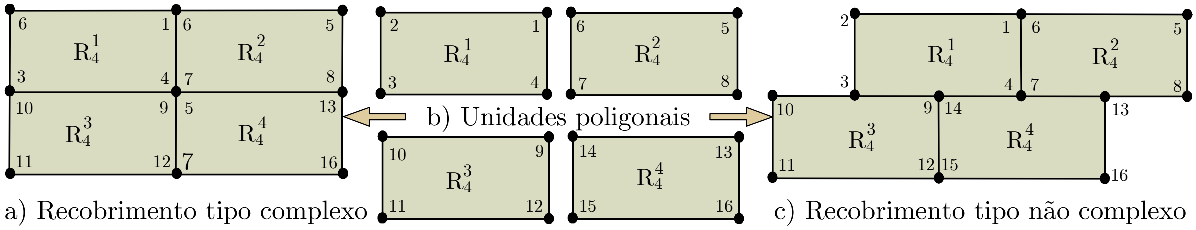


Figura 5.0.1: Recobrimentos distintos de superfícies por unidades poligonais

Um recobrimento sobre uma superfície Ω do tipo a) da Figura 5.0.1, atende a condição de complexo quando Ω é preenchida totalmente pelo recobrimento. Há uma grande vantagem em trabalhar com complexos, porque as relações entre números de vértices, lados e faces do complexo atendem a condição da caraterística de Eüler-Poincaré de Ω (veja fórmula (2.4)), relação de extrema importância neste trabalho, base para a obtenção da maioria dos resultados sobre mergulhos de grafo existentes nos Capítulos 3 e 4. Quanto ao recobrimento do tipo c), é suficiente dizer que as relações entre seus elementos básicos (vértices, lados e faces) não atendem a característica de Eüler, e com isso perdem-se muita informações matemáticas quando este tipo de recobrimento é adotado em um projeto geométrico de modulação sobre uma superfície.

Um primeiro resultado importante para a construção de projetos geométricos de modulações será, então, enunciado na forma da seguinte proposição.

Proposição 5.0.1 *Se $n \geq 3$, todo mergulho de grafo completo bipartido $K_{m,n}$ sobre uma superfície Ω é um complexo simplicial de Ω.*

Demonstração. *De fato, os vértices de $K_{m,n}$ têm graus ≥ 3, as regiões têm números pares de lados ≥ 4 e os lados de $K_{m,n}$ satifazem as condições de interseção.* ■

Voltando ao projeto topológico de modulação, há uma grande vantagem em optarmos pelos espaços de Hausdorff, pois assim podemos utilizar as ferramentas das Geometrias Diferencial e de Riemann para obter projetos de todas as naturezas, além do mais, se este é um complexo simplicial, temos a teoria dos Mergulhos de Grafos para projetar e identificar os modelos topológicos de modulações e a Topologia Algébrica para fornecer uma estrutura algébrica, o grupo de homologia da superfície, como elemento componente de um código corretor de erro compatível com o projeto de modulação, como mostra Lima em [21]. A vantagem ainda de adotar o mergulho de grafos como procedimentos para construção de projetos de modulações, é que se pode prever a existência deste antes de invertirmos na construção, que é uma etapa que exige muito esforço e nunca se sabe se vai conseguir concluir o mergulho topológico.

Em termos de partição, podemos considerar que, em ralação ao tipo de regiões, têm-se a unicidade do projeto topológico quando o mergulho obtido é de 2-células. Aém do mais contamos com a existência de projetos de modulações regulares nunca imanginado e nem explorados anteriormente.

5.1 Modulações QAMS

A idéia inicial do conceito de modulações sobre superfícies foi estabelecida inicialmente por Lima e Palazzo em 2002 [21], porém, a formalização matemática da definição foi introduzida anos depois (2009), por Lima e Luana [23] (Veja Definição 2.6.1). Devido a semelhança esta foi denominada de modulação QAMS (do inglês *Quadrature Amplitude Modulation on Surface* - Modulações sobre Superfícies em Amplitude e Quadratura). Como o conceito envolvia, de forma natural, tanto o mergulho do grafo quanto o seu dual, todo projeto identificado ou contruído de mergulho de grafo, resulta imediatamento em dois projetos de modulações distintos, são raríssimos os casos em que ambos são iguais.

Para situarmos melhor o problema, recordemos os procedimentos necessários para identificar algébricamente e construir os projetos topológicos das duas modulações QAMS, associadas a um mergulho de 2-células de um grafo $G(p,q)$ sobre uma superfície Ω da forma

$$G(\Theta) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}, \tag{5.2}$$

onde Θ é um sitema de rotações fixa de G. Como Θ é fixo e $G(\Theta) \hookrightarrow \Omega$ é um 2-células, a partição $\cup_{i+1}^{k} R_{\alpha_i}$ sobre Ω é única composta por k regiões. Se G é um gráfico suficientemente grande e conexo, o mergulho (5.2) define uma partição de Hausdorff do tipo complexo simplicial em k regiões de $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ lados. De imediato, temos um projeto topológico de modulação sobre Ω para uma constelação de k sinais, a qual é denotada por k-QAMS . Se todas as regiões R_{α_i} são do mesmo tipo, isto é, $\alpha_i = \alpha_j$ para todo $i \neq j$, k-QAMS é uma modulação para um e.s.g.u., pois o seu mergulho é regular. Neste caso, se $s_1, s_2, \cdots, s_k$ são os sinais da constelação, então cada região R_{α_k} de $\cup_{i+1}^{k} R_{\alpha_i}$ é a região de decisão do sinal s_k localizado no centro de R_{α_k}.

Por outro lado, pela Definição 2.6.3, o mergulho dual de G é da forma

$$G'(\Theta') \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{j=1}^{p} R_{\alpha_j}, \tag{5.3}$$

onde R_{α_j} é a região de G' que contém vértice v_j de grau α_j de G, no interior de R_{a_j}. Novamente, $v_1, v_2, \cdots, v_p$ são os vértices de G, o dual define uma partição de Hausdorff sobre Ω em p regiões, que atende as condições de interseção, e esta pode ser ou não um complexo simplicial. Então temos uma modulação sobre Ω, para uma constelação de p sinais, denotada de p-QAMS$'$. Os sinais destas são os vértices de G, onde R_{α_j} é região de decisão do sinal s_j correspondente ao vértice v_j de G e $\alpha_j = \deg v_j$. Na maioria das vezes p-QAMS$'$ será chamada de modulação dual.

As modulações k-QAMS e p-QAMS$'$ são ambas definidas a partir de mergulhos de G sobre Ω e podem ter regiões distintas ou não, ter número de sinias iguais ou não, entretanto estão relacionadas através do mergulho dual. Propriedades específicas sobre as modulações QAMS foram exaustivamente estabelecidas em [23].

Como podemos ver, o processo pelo qual foi definido a modulação QAMS é bastante natural e nenhuma de suas condições contradiz ou viola as regras usuais utilizadas para construir outro tipo de modulação existente. Na verdade, o conceito de modulação QAMS intodruzido em [21] e [23] é a formalização do conceito de modulação para espaços topológicos mais gerais, visto somente como uma expansão do conceito usual de modulação.

Vajamos então a descrição completa e construções topológica de um exemplo concreto de modulações QAMS associadas a um mergulho de um grafo.

A Figura 5.1.1 contém as etapas completas das construções do projeto topológico das modulações QAMS e QAMS′. Estes modelos foram construídos com o intuíto de provar que é possível realizar este tipo de construção em superfícies não orientadas e de gênero maior que 2, como é o caso da superfície KT (soma conexa da garrafa de Klein com o toro). O objetivo é mesmo construir um mergulho não trivial para validar todo o esforço despreendido no processo de identificação de mergulhos de grafos nos Capítulos 3 e 4

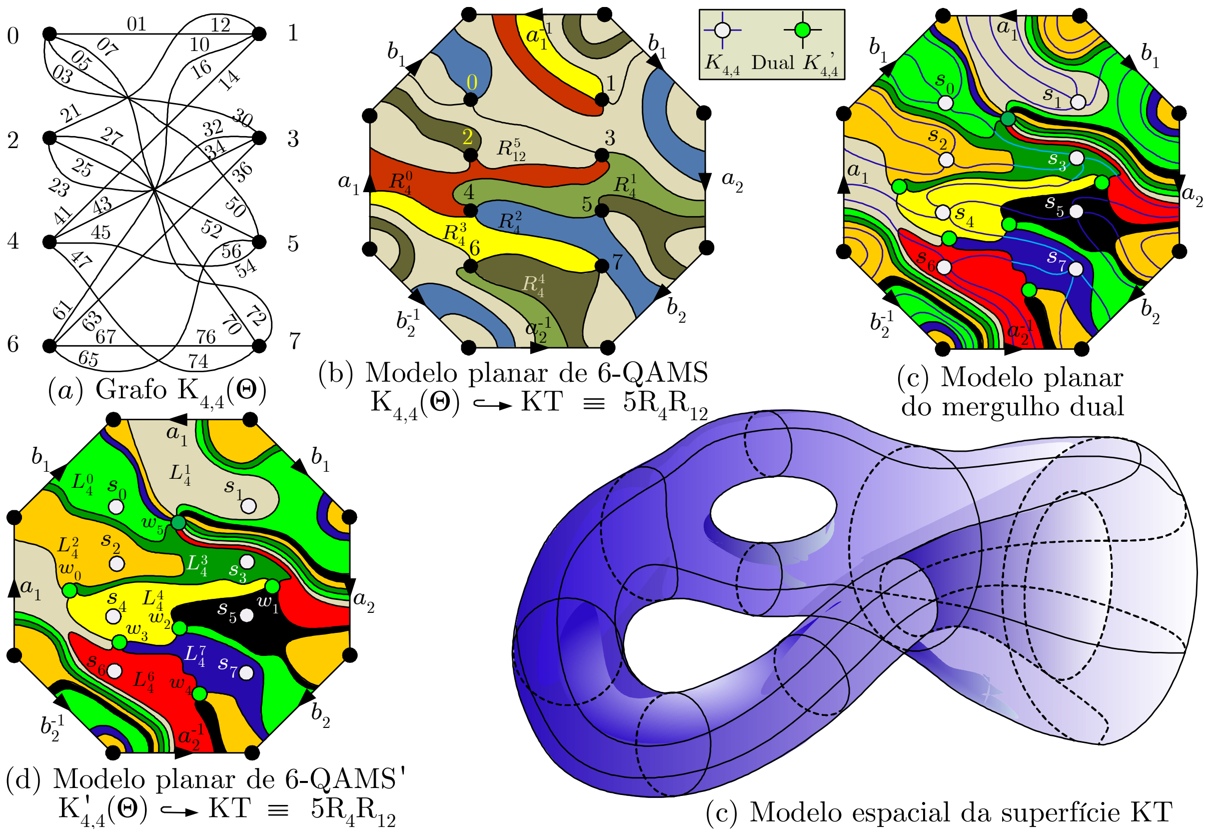


Figura 5.1.1: Etapas completas de um projeto topológico de modulações QAMS associadas a um mergulho de $K_{4,4}$ sobre a superfície não orientável KT

Apesar das construções topológicas da Figura 5.1.1 conterem os elementos topológicos necessários para identificar e construir os modelo topológicos das modulações QAMS e QAMS′ associadas ao mergulho do grafo, é necessário, para o entendimento dos nossos propósitos, fornecer mais informações e justificativas sobre este processo. Além do mais, trata-se de um problema multidisciplinar, envolvendo questões da geometria diferencial, topologia algébrica e mergulhos de grafos, sem falar que o propósito é usar este processo para projetar um sistema de modulação sobre uma superfície, ou de um modo mais geral, sobre uma variedade riemanniana.

5.2 Componentes Topológicos de QAMS e QAMS′

A primeira vista os esquemas de um grafo munido de um sistema rotação, do seu mergulho e dual parecem um amontoado de linhas e vértices sem nenhum significado, entretanto, cada construção da Figura 5.1.1 é muito importante para os objetivos deste trabalho, e por isso iremos descrever detalhadamente cada construção topológica ilustrados na Figura 5.1.1.

5.2.1 Grafo munido de rotação

O esquema de grafo representado na Figura 5.1.1(a) corresponde ao gráfico completo bipartido $K_{4,4}$ construído de forma a preservar o sistema de rotações fixo dado por

$$\Theta = \{0\,(1753)\,, 1\,(0246)\,, 2\,(1753)\,, 3\,(0642)\,, 4\,(1357)\,, 5\,(0462)\,, 6\,(1357)\,, 7\,(0246)\}\,,$$

sistema que irá definir, de modos únicos, a partição e a superfície sobre a qual $K_{4,4}\,(\Theta)$ está mergulhado como um 2-células. A escolha de $K_{4,4}$ e Θ irão desencadear um processo no qual os elementos seguintes são obtidos de modo único: do mergulho de $K_{4,4}$ (modulação QAMS), do merguho dual (modulação QAMS′) e do grafo associado, processo que será descrito adiante numa seção especial deste capítulo.

5.2.2 Modelo planar do mergulho

A Figura 5.1.1(b) representa o modelo planar do mergulho topológico não orientável de $K_{4,4}\,(\Theta)$ sobre a superfície KT, cuja partição é formada por 6 regiões quadrangulares (do tipo R_4) e uma região de 12-lados (do tipo R_{12}), mergulho cuja forma simplificada é dada por

$$K_{4,4}\,(\Theta) \hookrightarrow KT \equiv 5R_4R_{12}. \tag{5.4}$$

As regiões das partições são definidas, em termos de sequência orbital, através das seguintes sequências

$$\gamma_0 = (1432)\,,\gamma_1\,(3456)\,,\gamma_2 = (0745)\,,\gamma_3{=}\,(1674)\,,\gamma_4 = (2567)\,,\gamma_6 = (036103250127)\,,$$

onde γ_i é a sequência orbital da região R^i_α (veja que $\gamma_1 = (1432) = R^1_4$). O mergulho (b) será considerado aqui, o modelo planar da modulação para uma constelação de 6 sinais sobre a superfície KT. Como as regiões de decisão são as 6 regiões do mergulho (5.4), esta é a modulação 6-QAMS. Observe que $R^i_{\alpha_i}$ é a região de decisão do sinal s_i da constelação $\mathcal{A} = \{s_0, s_1, \cdots, s_5\}$. Note ainda que o mergulho (3.31) só não é regular devido a região R_{12}^{5}, esta é um 12-lados, diferente das demais, que são todas quadrangulares (ou 4-lados). Contudo, podemos dizer que 6-QAMS é uma modulação sobre uma superfície não orientável com um grau de regularidade alta, uma vez que 5 de suas 6 regiões são idênticas. É óbvio que, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, 6\}$, estamos considerando que s_i é o sinal correspondente ao ponto de KT que se encontra no centro da região $R_{\alpha_i}^{i}$.

5.2.3 O mergulho dual

O modelo da Figura 5.1.1(c) contém, além do mergulho de $K_{4,4}(\Theta)$, o mergulho dual destacando as regiões da partição dual obtido através da aplicação da Definição 2.6.3 diretamente sobre o modelo planar do mergulho (a). Observe que o dual é da forma

$$K'_{4,4}(\Theta') \hookrightarrow KT \equiv 8R_4.$$

Escrevemos $K'_{4,4}(\Theta')$ somente para representar o grafo dual de $K_{4,4}(\Theta)$, porém, devemos saber que o dual de um grafo completo bipartido $K_{4,4}$ depende do sistem rotações Θ atrelado a $K_{4,4}$ e, de um modo geral, $K'_{4,4}$ é completamente diferente de um grafo completo biparticionado, não preserva as condições da definição de grafo usual, pois o dual pode ter laços e multilados. Na verdade, o dual de $K_{4,4}$ é um grafo da forma $G[6, 16]$ ilustrado na Figura 5.2.1, tal que

$$\deg v_5 = 12, \text{ e } \deg v_i = 4, \text{ se } i \neq 5,$$

tem um laço no vértice v_5 e três lados duplos sobre os lados (v_2, v_5) e (v_3, v_5) e (v_4, v_5).

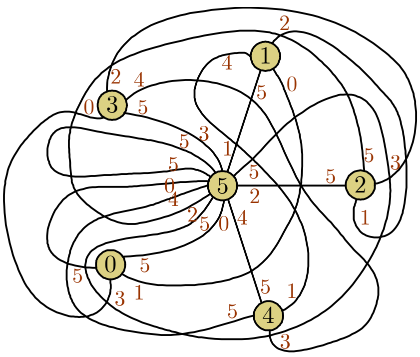


Figura 5.2.1: Grafo dual de $K_{4,4}(\Theta)$

No esquema do grafo dual de $K_{4,4}(\Theta)$, está bem claro que o sistema rotações de $K'_{4,4}$ é dado por

$$\Theta' = \{0\,(3551)\,, 1\,(0542)\,, 2\,(1553)\,, 3\,(0245)\,, 4\,(3551)\}\,.$$

É possível prever os graus dos vértices, os números de lados simples, duplos e de laços do grafo dual $K'_{4,4}$ a partir de $K_{4,4}$, mas é imprescindível conhecer o sistema de rotações Θ' de $K'_{4,4}$ para construir $K'_{4,4}(\Theta')$, do modo apresentado na Figura 5.2.1. Por enquanto ainda não é possível identificar, nem as regiões de $K'_{4,4}(\Theta') \hookrightarrow KT$ e nem do mergulho dual $K'_{4,4}(\Theta') \hookrightarrow KT$, utilizando somente o sistema de rotações Θ', como fazíamos nos casos dos mergulhos orientados. Isto se deve a ausência de um algoritmo identificador de mergulhos não orientáveis, como consequencia, os modelos planares dos mergulhos de $K_{4,4}$ em (b) e o de $K'_{4,4}$ em (d) da Figura 5.1.1, são indispensáveis para identificar os tipos de regiões do mergulho e seu dual sobre superfícies não-orientáveis. Segue então da Figura 5.1.1, que as regiões dos mergulho dual de $K_{4,4}$ são dadas por

$$\gamma'_0(5255), \gamma'_1(5530), \gamma'_2(0545), \gamma'_3(0155), \gamma'_4(0321), \gamma'_5(1254), \gamma'_6(3514), \gamma'_7(2345).$$

Observamos que o modelo planar (d) da Figura 5.1.1 corresponde ao projeto de modulação dual 8-QAMS′ para uma constelação de 8 sinais sobre a superfície não orientada KT. Veja que é uma constelação de sinais do tipo e.s.g.u., cujas regiões de decisão $L_4^0, L_4^1, \cdots, L_4^7$ indicam que todas são quadrangulares e, obviamente definidas pelo mergulho dual. Os sinais $s_0, s_1, \cdots, s_7$ em (d) são tomados como sendo os respectivos vértices $v_0, v_1, \cdots, v_7$ do grafo $K_{4,4}$.

Concluímos então para definir precisamente o projeto topológico da modulação dual é necessário dispor todas as informações acima. Observamos que tais informações definem, do ponto de vista topológico, univocamente a modulação dual. Certamente que as informações obtidas sobre a modulação dual permitirá realizar este projeto a nível de Geometria de Rieman, caso exista uma parametrização ou algum tipo de aplicação que defina a superfície KT.

5.2.4 O modelo espacial

Caso exista uma aplicação diferenciável de $\Psi : B \to \Omega$, onde B é um aberto de $\mathbb{R}^2$ é Ω é uma superfície, o mergulho de um grafo G e do seu dual, quando encontram-se sob as formas (b) e (d) da Figura 5.1.1, podem ser conduzidos para a superfície Ω, através da aplicação Ψ. Com isso os modelos de modulações são preservados sobre o modelo espacial de Ω, possibilitando então a realização do projeto de modulação utilizando as ferramentas das geometrias Diferencial e de Riemann.

Pode-se afirmar que existem uma quantidade relativamente grande de superfícies sobre as quais o projeto de modulação QAMS pode ser realizado. Para citar alguns exemplos, ilustramos os casos das seguintes superfícies: esfera, toro, catenóide, superfície de Enneper, Helicóide, faixa de Möbius e superfície de Klein.

O modelo espacial da Figura 5.1.1(e) não contém o modelo de mergulho de $K_{4,4}$ por questões óbvias, trata-se de um modelo complexo de superfície sobre a qual o modelo de mergulho pareceria uma profusão de linhas e vértices sem significado. Além disso, a superfície de Klein entra da composição de KT, e em determinados locais existem quatro camadas sobrepostas de superfícies, locais que tornariam confuso a representação do mergulho do grafo. Mas isso não nos impederia de costruir ambos os mergulhos sobre o modelo espacial utilizando o método desenvolvido por Lima em [21].

5.3 Quem Seriam as Modulações QAMS de $K_{4,4}$?

A princípio todos os projetos de modulações identificados nos Capítulos 3 e 4 seriam os candidatos naturais para modulações QAMS. Se não houvesse restrições para a quantidade de sinais, cada mergulho sem bordo resultaria em duas modulações, no entanto, iremos considerar somente projetos para modulações para constelações de dois ou mais sinais. Como consequência, deduzimos imediatamente que o número de modulações distintas provenientes de merugulhos do grafo $K_{4,4}$ será o dobro do número de elementos apresentados nos dados da Tabela 4.8.1. Porém, havemos de considera o caso das modulações duais, estas possuem particuaridades que as diferenciam das modulações QAMS .

Vimos em [24] que, independente do mergulho e da superfície em que se encontre, a modulação dual é sempre do mesmo tipo, ou seja, é uma modualção para uma constelação de sinais e.s.g.u. da forma

$$K'_{4,4}(\Theta) \hookrightarrow \Omega \equiv 8R_4,$$

qualquer que sejam

$$\Omega \in \mathbb{S}(K_{4,4}) = \{T, 2T, 3T, 4T, K, KP, 2K, 2KP, 3K, 3KP, 4K, 4KP\}$$

e o sistema de rotações Θ do grafo $K_{4,4}$. Então por que considerá-las todas distintas, se elas diferem somente do tipo de sequências orbitais? Como modulação, o que de fato interessa é o tipo de região e estas são sempre quadrangulares. No entanto, o desempenho de uma modulação é melhor quanto maior for o gênero da superfície em que ela se encontra [21], então devemos distinguir a modulação 8-QAMS$'$ sobre T da modulação 8-QAMS$'$ sobre $2T$, as de $2T$ das $3T$ e assim por diante. Mas pela Definição 4.2.1, cada superfície Ω de $8R_4(\Omega)$ gera o seguinte conjunto de modulaçõees duais

$$[8R_4(\Omega)] = \{8R_4(\Omega), 7R_4(\Omega_1), 6R_4(\Omega_2), 5R_4(\Omega_3), 4R_4(\Omega_4), 3R_4(\Omega_5), 2R_4(\Omega_6)\}$$

como $|\mathbb{S}(K_{4,4})| = 12$ e $|[8R_4(\Omega)]| = 7$, então existem 84 modulações duais vindas de mergulhos do grafo completo bipartido $K_{4,4}$. Recorrendo aos dados da Tabela 4.8.1, vemos então que os mergulhos de $K_{4,4}$ nos dão 551 modelos de modulações QAMS e 84 modulações QAMS$'$, totalizando 635 projetos de modulações vindos de mergulhos de $K_{4,4}$. Como as 84 modulações QAMS$'$ são todas regulares, acrescentando-se as 130 regulares da forma QAMS, o número de modulações regulares aumentaria para 214. Ocorre que as modulações regulares QAMS e QAMS$'$ de T e de K são do tipo $8R_4$, consequentemente, o número de modulações regulares diminuem para 200, o que corresponde a $31,496\%$ do total dos modelos topológicos de modulações vindas de mergulhos de $K_{4,4}$.

É bom que se saiba que todos os 80 modelos topológicos de modulações QAMS sobre as superfícies sem bordos são possíveis de serem construídos, caso haja uma disposição para atingir este objetivo. Esta tarefa é possível devido ao número relativamente pequeno de elementos do grafo completo $K_{4,4}$. Construídos estes 80 modelos, os seus duais também são obtidos pois são menos difíceis de obtê-los. Conseguido os mergulhos e seus duais, o método de construção de mergulhos com bordos desenvolvido por Lima e Palazzo [21], permite construir todos os mergulhos com bordos. Sendo assim, chagamos a conclusão de que é possíves construir o modelo topológico de modulação de qualquer um dos 653 modelos existentes em mergulhos de $K_{4,4}$.

A dificuldade de construir um mergulho de $K_{4,4}$ é relativamente a mesma dos mergulhos do grafo completo K_5, na verdade, é um pouco maior. Entrantanto, para cada representante de classe de mergulhos de $K_{4,4}$, foram construídos os modelos topológicos dos mergulhos planar e espacial. Acreditamos que possa ser feito o mesmo para o grafo $K_{4,4}$. O certo é que temos a plena convicção de que é possível construir os projetos topológicos de qualquer modulação de $K_{4,4}$, do modo que foi feito com o projeto ilustrado na Figura 5.1.1.

A ausência da maioria dos modelos topológicos das modulações de $K_{4,4}$ neste trablho, deve-se principalmente à questão do templo, é preciso investir nesta tarefa durante um período razoavel de tempo com um número maior de pessoas trabalhando, para se concluir a tarefa no prazo disponível exigido pelo curso de mestrado.

5.4 Modulação QAMS e Associação ao Canal DMC

Um dos principais objetivos visados no projeto integrado de transmissão de dados, no qual os sistemas codificação, modulação e canal são projetados de forma dependentes [23], é associar uma modulação a um modelo de canal DMC. Este processo de associação foi realizado para o caso particular do grafo completo K_n por Lima e Luana em [24]. Contudo, apesar de seu caráter generalizado, é uma solução para um tipo especial de grafo. Seria a solução apresentada por Lima e Luana uma solução genérica para o problema de associação de uma modulação QAMS a um canal DMC? Durante um período razoável de tempo analisamos o problema da associação e a conclusão que chegamos é que, de fato, a solução de Lima e Luana é uma solução genérica para o problema da associação de QAMS a um canal DMC. Apresentaremos a seguir uma análise das conclusões que chegamos e daremos exemplos desse processo de associação quando o mesmo é aplicado ao grafo completo bipartido, tomando como exemplos, as classes de mergulhos orientáveis de $K_{4,4}$ sobre a família do bitoro.

5.4.1 Associação QAMS-DMC, caso do grafo $K_{n,n}$

Um processo de associação entre uma modulação QAMS e um canal discreto sem memória, passa necessariamente por diversas questões, a distribuição de probabilidades condicionadas de transição de sinais do canal é uma delas, estas não podem deixar de existirem no modelo do canal associado. Outro fator importante no processo é a associação do canal ao grafo mergulhado, uma vez que todos as componentes do processo estão vinculadas ao grafo. Finalmente, um dos elementos importantes que também devem fazer parte é o número de sinais da constelação. Como consequência, o projeto de associação de QAMS a DMC deve preservar as características específicas de cada um dos componentes no sentido de: manter as probabilidades condicionadas inerentes ao canal, está relacionada com o grafo cujo mergulho produziu a modulação QAMS e está coerente com a constelação de sinais.

Como a origem do problema é sem dúvida o grafo completo bipartido $K_{m,n}$, devemos associar, em princípio, para cada mergulho

$$K_{m,n}(\Theta) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i},$$

um modelo de canal DMC que represente as probabilidades condicionadas de transição dos sinais da constelação. O conceito de canal geralmente é colocado, para um melhor entendimento, na forma de um grafo. Vejamos como se dá este processo.

Em geral o canal é projetado para transmitir um alfabeto de m símbolos. Se $\mathcal{A} = \{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$ é o conjunto destes m símbolos, o que se espera é a recuperação dos mesmo após a transmissão através do canal de comunicação. Mas como é sabido, os símbolos transmitidos são corrompidos pelo ruído existente no canal de comunicação e, consequentemente, a recuperação deste se dar por um processo estocático. Devemos ter em mente que durante a transmissão do símbolo s_i, este é associado a um vetor de um espaço, o receptor recebe um sinal $s_i' = s_i + s_e$, onde s_e é um vetor erro, e portanto $s_i' \neq s_i$. Além disto, o receptor não tem nenhuma informação de qual símbolo s_i de $\mathcal{A}$ foi transmitido e deve decidir, dentre os símbolos de $\mathcal{A}$, qual o símbolo mais provável que foi enviado. Esta tomada de decissão por parte do demodulador pode ocorrer de duas maneiras distintas, através de uma *decisão abrupta*, quando os símbolos na saída do modelo grafo do canal é a mesma dos símbolos enviados, como mostra o canal (a) da Figura 5.4.1; ou através de uma *decisão suave*, quando um símbolo enviado é representado por vários representantes na saída do canal como é o caso do canal (b) da Figura 5.4.1.

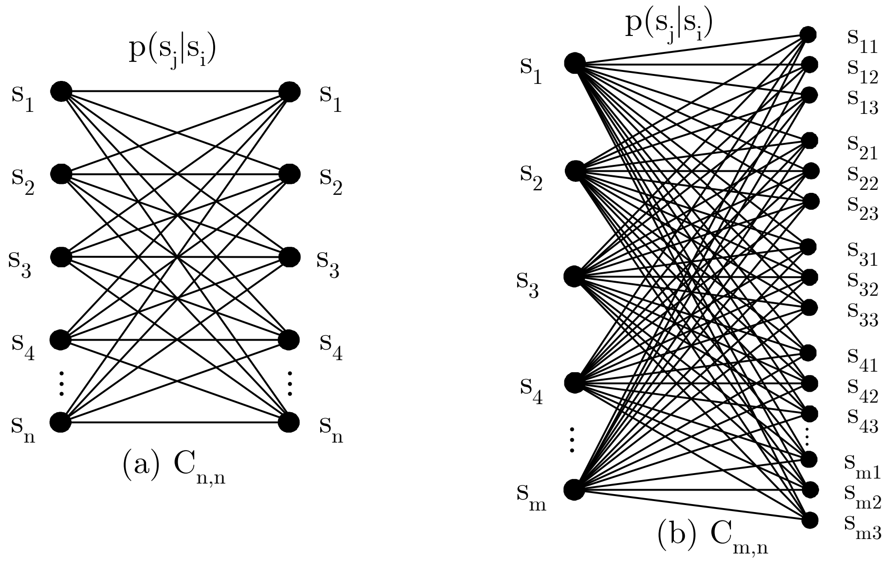


Figura 5.4.1: Rpresentações de canais de decisões abrupta e suave

Diz-se que o projeto de canal de decisão suave (b) na Figura 5.4.1 é um *quantizador* de nível 3 pois cada símbolo s_i do alfabeto de entrada possui três representantes no alfabeto de saída s_{i1}, s_{i2} e s_{i3}. No canal quantizado de nível n cada região de decisão do sinal s_i é particionada em n subregiões distintas $R_{i1}, R_{i_2}, \cdots, R_{in}$ sendo que R_{i_2} é a

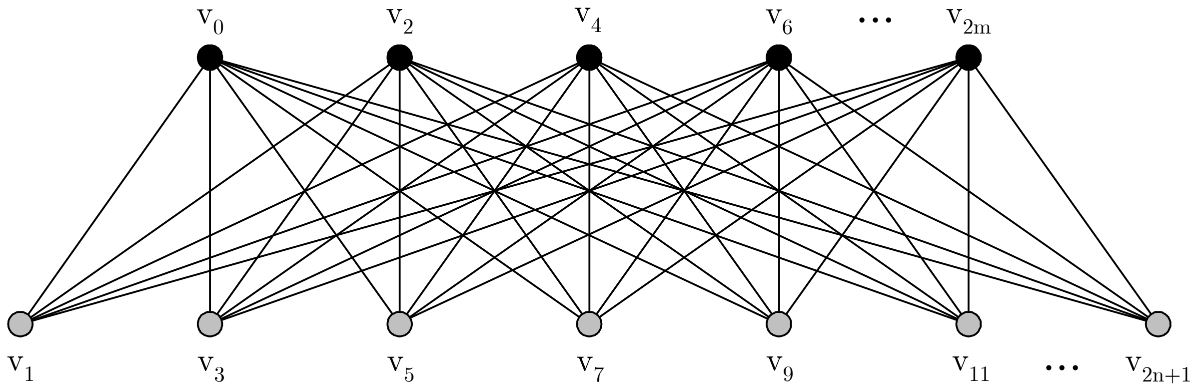


Figura 5.4.2: Grafo completo bipartido $K_{m,n}$, com rotulamento fixo

subregião do símbolo s_{ij} representante do símbolo s_i. Neste caso há uma destribuição de probabilidades $p\,(R_{ij})$ para cada subregião e, caso o sinal recebido pertença a R_{ij}, o demodulador computa a probabilidade $p\,(R_{ij})$ em prol do o sinal s_{ij}. Cálculos semelhantes são feitos para as demais regiões e o demodulador decide por aquela que expressa a maior probabilidade.

É um fato conhecido que o desempenho do sistema de transimissão é melhor à medida que aumenta o nível do quantizador e este atinge desempenho máximo quando $n = 8$, cujo ganho chaga a ser de 2 dbs. Atualmente todo os sistemas de transmissão utiliza canais com quantizadores.

Nas representação dos gráficos do DMC (a) da Figura 5.4.1, cada lado (s_i, s_j) de $C_{n,n}$ está associado a probabilidade condicionado do símbolo recebido ser s_j dado que s_i foi enviado, probabilidade indicada por $p\,(s_j|s_i)$. De modo análogo, cada lado (s_i, s_{jk}) de (b) está associado a probabilidade condicionada do símbolo recebido ser s_{jk} dado que s_i foi enviado. Se $p\,(s_j|s_i) = 0$, não faz sentido a existência do lado (s_i, s_j) na representação gráfica do canal $C_{m,n}$, neste caso, o lado (s_i, s_j) não fará parte da representação gráfica de $C_{m,n}$.

As informações sobre DMC acima nos ajudaram a entender melhor o processo de associação. Lembramos que o processo de associação que estamos objetivando envolve a codificação, a modulação e canal. Além disso, devemos considerar o grafo que gerou a modulação, porque tudo o mais depende deste, portanto, este será o elemento de origem do processo de associação.

Adotando o rotulamento de vértices da Seção 3.4, consideremos o grafo completo bipartido $K_{m,n}\,[A, B]$, onde $A = \{v_0, v_2, \cdots v_{2m-2}\}$ e $B = \{v_1, v_3, \cdots v_{2n-1}\}$ são os conjuntos de vértices de $K_{m,n}$. Observe na Figura 5.4.2, que com este rotulamento, o grafo completo bipartido possue exatamente m e n vértices em seus respectivos conjuntos A e B.

Consideremos ainda um mergulho de $K_{m,n}$ da forma

$$K_{m,n}\,(\Theta) \hookrightarrow \Omega \equiv \textstyle\bigcup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}. \tag{5.5}$$

Então, pelas Definições 2.6.1 e 2.6.3, as modulação QAMS e QAMS$'$ associadas ao mergulho são necessariamente das formas

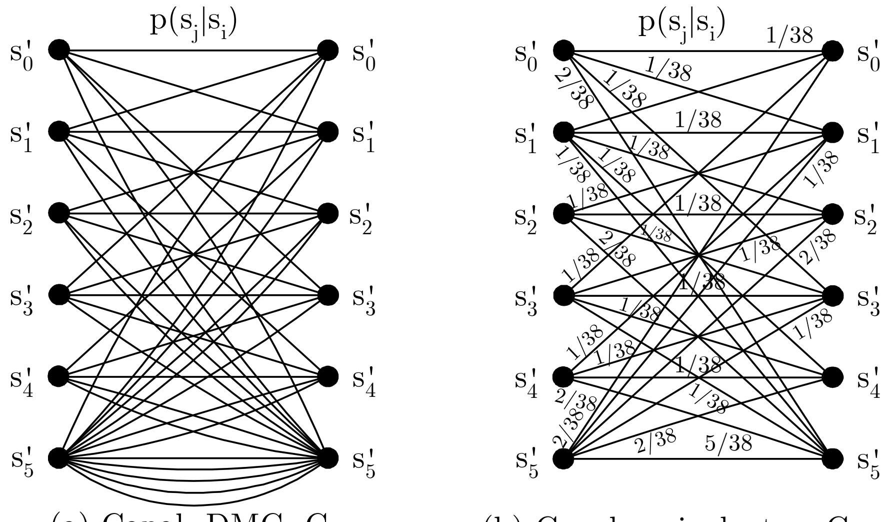
$$k\text{- QAMS} \equiv \bigcup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i} \quad \text{e} \quad (m+n)\text{- QAMS}' \equiv mR_n \cup nR_m. \tag{5.6}$$

Como se trata de um sistema integrado, devemos associar ainda um sistema de codificação a cada uma das modulações em (5.6). Primeiro consideremos a modulação k-QAMS, os sinais desta constelação são os k sinais correspondentes aos vértices do grafo dual. Seja $\mathcal{A} = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ os sinais da constelação k-QAMS. Evidentemente que o dual de $K_{m,n}$ depende somente de Θ.

A fim de analisarmos uma situação concreta, tomemos o exemplo do grafo dual $K'_{4,4}$ da Figura 5.2.1. Consideremos então um código génerico C sobre a modulação 6-QAMS vinda do mergulho (5.4). Se $v = (v_1, v_2, \cdots, v_s)$ é uma palavra código de C, então ela deve ter representação na trelissa do canal $C_{4,\lambda}$, onde $4 \leq \lambda$. Para efeito de simplificação, analisemos o caso em que $\lambda = 4$. Como o canal $C_{4,4}$ deve ser definido a partir do grafo $K'_{4,4}$, e as sequências orbitais do mergulho de $K'_{4,4}$ são definidas a partir do dígrafo (grafo orientado) sobre $K'_{4,4}$, devemos considerar as transições de $C_{4,4}$ como sendo as transições existentes no dígrafo $K'_{4,4}$. Neste caso, se $e = (v'_i, v'_j)$ é um lado de $K'_{4,4}$ então, como dígrafo, considera-se a existência de dois lados, $e = (v'_i, v'_j)$ e o lado de direção oposta $e^{-1} = (v'_j, v'_i)$. Consequentemente, o canal $C_{4,4}$ deve ter as transições (s_i, v_j) e (v_j, v_i) correspondendo as probabilidades condicionadas não nulas $p(s_j|s_i)$ e $p(s_i|s_j)$, onde s_i e s_j preservam os índices de v_i e v_j.

5.4.2 Canal equivalente e probabilidades de acertos

Usualmente o símbolo v_i de uma palavra código é representado sobre um lado $e = (v'_j, v'_i)$ da trelissa, sendo assim, o símbolo v_i só tem representavidade se o lado e existir.



(a) Canal DMC $C_{6,6}$ associado a 6-QAMS

(b) Canal equivalente a $C_{6,6}$ e Probabilidades condicionadas

Figura 5.4.3: Canal DMC $C_{6,6}$ associado à modulação 6-QAMS e equivalente em probabilidades condicionadas de acertos

Um excelente parâmetro para analisar a existência de um código associado ao mergulho de um grafo é o conjunto de sequência orbitais geradas pelo mergulho. Na Seção 3.2 foi realizado um estudo sobre as propriedades das sequências orbitais, e uma das conclusões que não foi colocada nesta seção é que, para todo lado e de um digrafo, existe uma sequência orbital que o contêm. Consequentemente, todos os lados do digrafo são os candidatos naturais representantes de símbolos do código C, por isso devem constar no modelo do canal $C_{4,4}$ associado à modulação 6-QAMS. Por outra parte, $C_{4,4}$ não deve ter transições estranhas a $K'_{4,4}$, porque assim, $C_{4,4}$ estaria associado a um outro tipo de grafo diferente de $K'_{4,4}$; logo, $C_{4,4}$ deve ter exatamente as transições de $K'_{k,k}$. Nestas condições, o modelo do grafo do canal associado à modulação 6-QAMS, oriunda do mergulho (5.4) , é o grafo completo bipartido $K_{6,6}$ ilustrado na Figura 5.4.3.

O canal (b) representado na Figura 5.4.3 é o canal equivalente a $C_{6,6}$ em relação as probabilidades condicionadas de acerto. Este conceito de canal equivalente em probabilidades condicionadas foi introduzido por Lima e Luana [24], após observarem que o número de transições recebidas por um sinal s_i está diretamente relacionado com o número de lados da região de decisão do sinal s_i. Para sermos mais exatos, se o número de transições recebido pelo sinal s_i é dado por t, então a região de decisão do sinal s_i é da forma R_{t-1}, isto é, a região de decisão de um sinal s_i com t transições possuem exatamente $t-1$ lados. Para efeito de comparação, consideremos que o projeto de modulação encontra-se em um plano e este é composto por regiões poligonais em que todos os lados são congruentes, então regiões com um maior número de lados possuem áreas maiores.

Em um projeto de modulações, regiões de decisões de áreas maiores ocorrem menos erros de transmissão e a taxa de erro diminui proporcionalmente com o aumento da área da região de decisão. Consequentemente, a região de área maior corresponde a maior probabilidade de acerto. O parâmetro de medida usado para definir a probabilidade de acerto $p(s_j|s_i)$ é o número de transições existentes em cada sinal. No caso do canal equivalente (b) da Figura 5.4.3, existem um total de 38 transições adjacentes ao conjunto de sinais $\mathcal{A}$, logo foi atribuido o valor $1/38$ para cada transição que chega a um sinal.

Por exemplo, denotando por $p_c(s_j|s_i)$ a *propabilidade de acerto* de que o sinal recebido foi s_j dado que s_i foi o sinal enviado, então, por existirem duas transições entre os sinais s_0 e s_5 foi atribuido o valor $p_c(s_5|s_0) = 2/38$; entretanto, $p_c(s_3|s_0) = 1/38$, uma vez que existe somente uma transição entre s_0 e s_3. As demais probabilidade indicadas no canal equivalente (b) tem significados equivalentes.

5.4.3 Matriz de probabilidades

Os procedimentos adotados acima para definir o canal equivalente podem ser utilizado para obter uma medida imediata da eficiência da modulação.

Iremos considerar a matriz de probabilidades de acertos da modulação 6-QAMS da

Figura 5.4.3 como sendo a matriz

$$M_c\left(C_{6,6}\right)=\begin{bmatrix} \frac{1}{38} & 0 & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & 0 & \frac{2}{38} \\ \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & 0 & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} \\ 0 & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & 0 & \frac{2}{38} \\ \frac{1}{38} & 0 & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} \\ 0 & \frac{1}{38} & 0 & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & \frac{2}{38} \\ \frac{2}{38} & \frac{1}{38} & \frac{2}{38} & \frac{1}{38} & \frac{2}{38} & \frac{5}{38} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

porque ela passa as informações sobre as transições do canal associado que estamos procurando. Lembramos que a matriz M_c não tem nada a ver com a matriz tradicional de probabilidades de erros. Se houver uma semelhança, não era a nossa intenção. O propósito aqui é somente usar M_c para fornecer uma medida coerente que estabeleça o desempenho de modulações de classes distintas.

Iremos agora nos aprofundarmos na questão da eficiência da modulação QAMS. Veremos qua a matriz M_c é um importante instrumento para fornecer respostas imediatas e coerentes sobre o desempenho da modulação, sem que se precise recorrer a um complexo processo de simulação. Pode até ser que a matriz M_c não fornceça uma medida de eficiência igual a obtida através de uma simulação. Lembramos que a simulação irá depender do modelo de partição obtido sobre a superfície. Mas podemos afirmar que dadas duas modulações distintas (partições distintas) as matrizes de probabilidades condicionadas de acertos dessas duas modulações irão dizer qual das duas é a mais eficiente, pois M_c baseia-se nos tipos de regiões e a medida de eficiência da modulação depende diretamente do tipo de regiões de Voronoi das modulações.

5.4.4 Lei de associação

As transições do canal $C_{6,6}$ da Figura 5.4.3(a) correspondem exatamente aos lados do digrafo do grafo dual $K'_{4,4}$ ilustrado na Figura 5.2.1 e foram obtidas a através da seguinte

Regra 1 *Suponha que* $K_{m,n}\left(\Theta\right) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ *seja um mergulho de 2-células e que* k-QAMS *seja a modulação vinda deste mergulho. Se* $C_{k,k}$ *é o canal associado a modulação dual* k-QAMS, *então,* (s'_i, s'_j) *é uma transição de* $C_{6,6}$ *se, e somente se,* (v'_i, v'_j) *é um lado do dígrafo* $K'_{k,k}$.

A Regra 1 garante que todo lado do digrafo $K'_{4,4}$ tem representante em $C_{6,6}$ e somente os lados deste. Quantos aos lados não existentes do canal estes não terão representantes no canal.

Lima e Luana [24], mostraram que é possível definir e construir uma transformação geométrica de um grafo completo K_n em um canal $C_{n,n}$. A transformação geométrica é importante para mostrar a relação do grafo e canal associado, pode ser usada para transformar o grafo $K'_{4,4}$ no canal (a) da Figura 5.4.3, contudo, as etapas desta construção dão um certo trabalho e não acrescenta nenhum praticidade na construção do canal associado. É bem mais prático construir o canal associado à modulação k-QAMS aplicando a condição equivalente da Regra 1.

A diferença entre transformação geométrica de Lima e Luana e a Regra 1, é que na tranformação geométrica, foram acrescentados laços em cada um dos vértices do grafo dual, para que as transições de acertos $(s_i|s_i)$ tivessem representatividades. Contudo, a operação de laços, além de acrescentar uma região de um lado R_1, no mergulho do grafo, para cada vértice deste, altera o número de lados da região do mergulho que contêm o laço em seu interior, em um lado a mais. Estas transformações, apesar do mergulho continuar na mesma superfície, descaracterizam totalmente o grafo e a estrutura do mergulho.

Levando em consideração que cada vértice v_i do grafo é transformado na transição de acerto $(s_i|s_i)$, isto é, cada ponto v_i do grafo é transformado em dois sinais emparelhados do canal s_i e s_i, esta separação deve ser representada por um lado sobre o canal com transição $(s_i|s_i)$. Isto se justifica porque ao separarmos um vértices v_i em dois vértices s_i e s_i do canal, estes devem manter a relação de dependência através do lado cuja indicado pela transição $(s_i|s_i)$, representando a relação natural de incidência da origem desses sinais. Afinal s_i e s_i encontravam-se sobrepostos sobre v_i, foram separados e portanto devem naturalmente ter um lado indicando que se encontravam unidos anteriormente.

5.4.5 Associação QAMS$'$-DMC, caso completo bipartido

No caso do canal associado à modulação dual QAMS$'$ a regra equivalente de associação entre canal e modulação é dada através da seguinte

Regra 2 *Suponha que $K_{m,n}(\Theta) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ seja um mergulho de 2-células e que $(m+n)$-QAMS seja a modulação dual vinda deste mergulho. Se $C_{m+n,m+n}$ é o canal associado a modulação dual $(m+n)$-QAMS, então, (s_i, s_j) é uma transição de $C_{m+n,m+n}$ se, e somente se, (s_i, s_j) é um lado do dígrafo $K_{m,n}$.*

Analisando a aplicação da Regra 2 ao caso particular do mergulho do grafo dual de $K_{4,4}$, em (5.4), vemos que o dual $K'_{4,4}$ particiona a superfície KT em 8 regiões quadrangulares; logo, a partição dual define uma modulação para uma constelação de 8 sinais compostos pelos vértices de $K_{4,4}$. Portanto a modulação dual é necessariamente da forma 8-QAMS$'$, e as transições do canal associado $C_{8,8}$ correspondem às transições do dígrafo $K_{4,4}$, ou o grafo $K_{4,4}$ com uma orientação, no qual todo lado $e = (v_i, v_j)$ possui um lado distinto de orientação inversa $e^{-1} = (v_j, v_i)$.

Considerando $\mathcal{A}' = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}$ como sendo o conjunto de sinais de 8-QAMS$'$ correspondentes aos vértices de $K_{4,4}$, e como o canal independe do sistema de rotação (veja [24]), então o canal $C_{8,8}$ associado à modulação 8-QAMS$'$ é obtido de um grafo completo bipartido $K_{4,4}$ qualquer, por exemplo do grafo (a) da Figura 5.4.4. Logo, pela Regra 2, $C_{8,8}$ é como o canal ilustrado na Figura 5.4.4(b). Obviamente que destes comentários resultam que todas os canais associados às modulações duais de $K_{4,4}$ são da forma $C_{8,8}$ e todos os vértices são de graus iguais 5, mas não garantem que os mesmos sejam isomorfos.

Observamos que o sinal s_i de $\mathcal{A}'$ preserva o rotulamento padrão utilizado no canal (a) da Figura 5.4.3, mas não é necessário preservar o sistema de rotações porque, para o canal, importa somente a existência da transição, é como se o canal não "enchergasse"a rotação fixa Θ de $K_{4,4}$. Segue imediantamente desta observação que o canal associado a uma modulação dual de um grafo é sempre único e independe do sistema de rotações. Com isso, todos as modulações duais em superfícies sem bordos orientáveis e não orientáveis de $K_{4,4}$ são do mesmo formato, isto é, são todas modulações da forma 8-QAMS$'$ e todas possuem, como canal associado, o canal (b) da Figura 5.4.4. Somente no caso orientável são 1 679 616 mergulhos com modulações iguais em termos de partições associadas ao único canal (b) da Figura 5.4.4.

Notamos ainda que, quando se trata da modulação dual p-QAMS$'$, o canal associado $C_{p,p}$ é idêntico ao canal equivalente e as probabilidades condicionadas de acertos de todas as transições do canal equivalente são iguais e podem ser estimadas através de uma fórmula matemática. Em particular, as probabilidades condicionadas de acertos do grafo completo bipartido $K_{n,n}$ são dadas através da seguinte fórmula geral

$$p_c\left(s_j|s_i\right) = \frac{1}{2n\left(n+1\right)}. \tag{5.8}$$

No caso do grafo completo bipartido $K_{m,n}$ a probabilidade condicionada de acerto será determinada mais adiante, quando do estudo de um caso particular de uma modulação do grafo completo bipartido $K_{4,8}$.

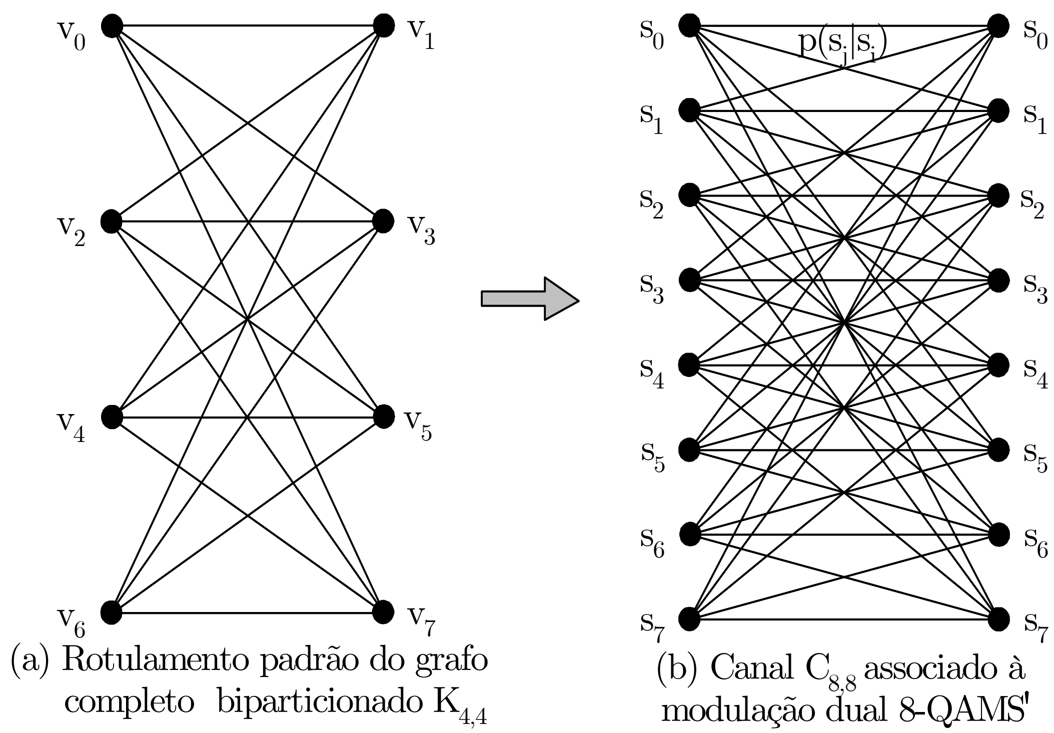


Figura 5.4.4: Rotulamento de $K_{4,4}$ e canal $C_{8,8}$ associado à modulação dual 8-QAMS$'$

No caso do canal $C_{8,8}$ associado à modulação 8-QAMS$'$ da Figura 5.4.4, a matriz de probabilidades condicionadas de acertos é dada por

$$M_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & 0 \\ 0 & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & 0 \\ 0 & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & 0 \\ 0 & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & 0 & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Observe que o total de transições que chegam ao conjunto de sinais transmitidos é igual a 40, e como não há múltiplas transições entre dois sinais s_i e s_j de $C_{8,8}$, todas as transições existentes têm probabilidades iguais a $\frac{1}{40}$.

Observação 5.4.1 *As transições não existentes de uma canal discreto sem memória compreendem as transições de acerto. São os casos em que a certeza que não irá ocorrer a trasoção. Iremos interpretá-la simplesmente como não existentes. Assumiremos então, que toda transição (s_i, s_j) não existente em um canal C tem probabilidade condicionada de acerto nula, isto é, $p_c(s_j, s_i) = 0$ se, e somente se, (s_i, s_j) não é uma transição de C.*

Até agora vimos o processo de associação para um canal da forma $K_{n,n}$. Este caso foi tratado também [24]. E como ficaria o caso geral? Para que o estudo seja menos complexo, vejamos o caso geral de associação entre canal e uma modulação vinda do mergulho de grafo completo bipartido $K_{m,n}$ em que $m \neq n$.

5.4.6 Associação DMC-Canal do grafo $K_{m,n}$

Quanto ao grafo completo bipartido $K_{m,n}$, vejamos um exemplo para tirarmos conclusões a respeito dos parâmetros envolvidos nos canais $C_{k,k}$ e $C_{m+n,m+n}$, associados as respectivas modulações k-QAMS e $(m+n)$-QAMS$'$.

Como não dispomos de um mergulho concreto de $K_{4,4}$ analisemos então o caso do canal associado à modulação dual vinda de um mergulho do grafo completo bipartido $K_{4,8}$.

Pelos comentários da Subseção 5.4.5, deduzimos que toda modulação dual vinda de um mergulho de $K_{4,8}$ está associada a um único canal DMC. Desde que toda partição dual de um mergulho de $K_{4,8}$ é da forma

$$K'_{4,8}(\Theta') \hookrightarrow \Omega \equiv 4R_8 \cup 8R_4, \tag{5.10}$$

segue que (5.10) é um modelo geométrico de uma modulação sobre Ω, vinda do mergulho dual do grafo completo bipartido $K_{4,8}$, para uma constelação de 12 sinais. Seja $\mathcal{A}' = \{s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{11}\}$ o alfabeto de símbolos desta constelação. Então, pela Regra 2, o ca-

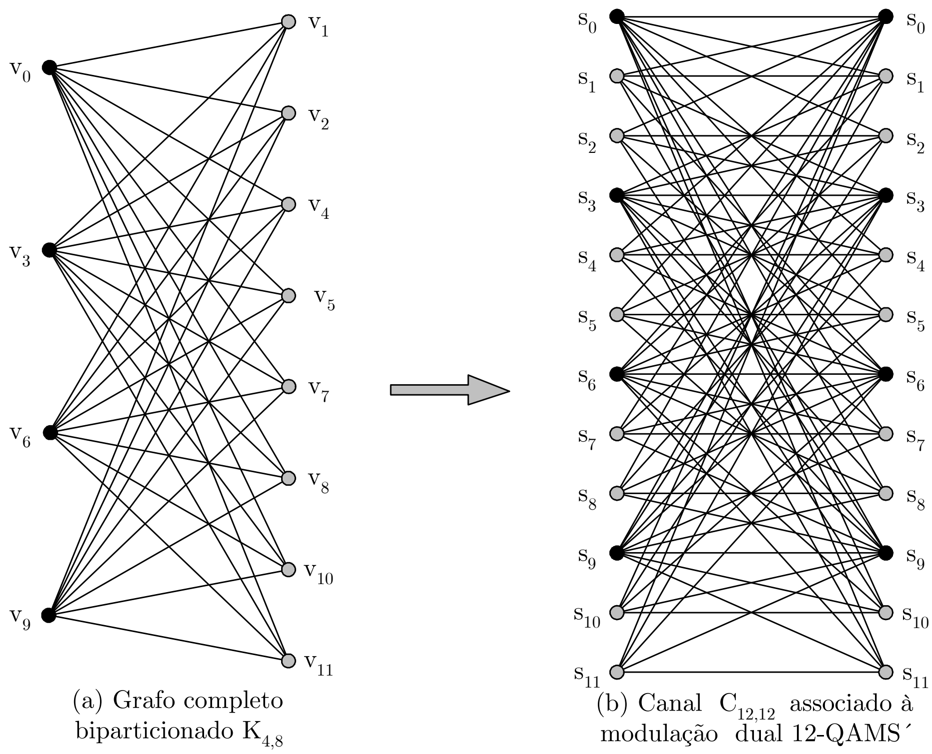


Figura 5.4.5: Grafo $K_{4,8}$ e canal $C_{12,12}$ associado à modulação dual 12-QAMS$'$

nal de decisão abrupta para $C_{12,12}$ associado à modulação dual 12-QAMS$'$ do modelo (5.10), é como o canal ilustrado na Figura 5.4.5(b).

Observamos, que na situação geral de um grafo completo bipartido $K_{m,n}\,[A,B]$, os vértices de A são todos de grau n e os vértices de B são de grau m, consequentemente, pela igualdade (3.40), os sinais correspondentes aos vértices de A, no canal $C_{m+n,m+n}$ associado à modulação dual, possuem $n+1$ transições, e os sinais correspondentes aos vértices de B possuem $m+1$ transições. Esta propriedade pode ser observada diretamente do modelo de canal $C_{12,12}$ ilustrado na Figura 5.4.5(b). Para destacar os sinais vindos dos vértices A e B de $K_{4,8}$ fizemos o seguinte: os vindos dos vértices de A foram representados por uma bolinha preta e aqueles vindos dos vértices de B foram representados por uma bolinha cinza.

Observamos ainda que, em um grafo completo bipartido $K_{m,n}$, o número de sinais da constelação dual é sempre constante e este é dado naturalmente por $m+n$. Este é um dado relevante para determinar a probabilidade condicionada de acerto de cada sinal: como em $K_{m,n}$ são m vértices de grau n, e n vértices de grau m, pelo parágrafo anterior concluímos que ao todo, $C_{m,n}$ possui

$$(n+1)\,m+(m+1)\,n=m+n+2mn \text{ transições.} \tag{5.11}$$

Podemos então determinar a probabilidade condicionada de erros das transições do canal associado a uma modulação dual vinda de um mergulho do grafo completo $K_{m,n}$, através da seguinte proposição.

Proposição 5.4.2 *Toda modulação dual vinda de um mergulho de um grafo completo bipartido $K_{m,n}$ é da forma*

$$K'_{m,n}(\Theta') \hookrightarrow \Omega \equiv mR_n \cup nR_m, \tag{5.12}$$

o canal associado à modulação dual é da forma $C_{m+n,m+n}$, e a probabilidade condicionda de acerto do símbolo enviado ser s_j, dado que s_i foi enviado, é dada por

$$p_c\left(s_j|s_i\right) = \begin{cases} 0, \; \textit{se } s_i \neq s_j \textit{ e } s_i, s_j \in A \textit{ ou } s_i, s_j \in B \\ \dfrac{1}{m+n+2mn}, \; \textit{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.13}$$

Demonstração. *De fato, o mergulho dual* (5.12) *particiona Ω em $m+n$ regiões, logo a modulação é para uma constelação de $m+n$ sinais, e consequentemente, o canal associado é da forma $C_{m+n,m+n}$. Pela Regra 2 podemos concluir que a transição $(s_i|s_j)$ de $C_{m+n,m+n}$ não existe se, e somente se, $s_i \neq s_j$ e $s_i, s_j \in A$ ou $s_i, s_j \in B$; logo pela Observação 5.4.1, nas condições anteriores, temos que*

$$p\left(s_j|s_i\right) = 0 \text{ se, e somente se, } s_i \neq s_j \text{ e } s_i, s_j \in A \text{ ou } s_i, s_j \in B.$$

Caso contrário, deduzimos de (5.11) *que $p_c\left(s_j|s_i\right)$ é como em* (5.13). ■

Pelos mesmos procedimentos utilizados nas matrizes de probabilidades condicionadas de acertos do canais associados às modulações QAMS e QAMS$'$ em (5.7) e (5.9), deduzimos que, no caso do canal $C_{12,12}$, a matriz de probabilidades condicionadas de acertos da modulação dual 12-QAMS$'$ da Figura 5.4.5, é dada por

$$M_c\left(C_{12,12}\right) = \begin{bmatrix}
\frac{1}{72} & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} \\
\frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 \\
\frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} \\
\frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 \\
\frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} \\
\frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 \\
\frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} \\
\frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{72} & 0 \\
\frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & \frac{1}{72}
\end{bmatrix}.$$

Quanto à modulação QAMS de um mergulho de $K_{4,8}$, somente podemos determinar o seu canal associado caso conheçamos o seu mergulho, seja na forma algébrica (conjuntos de seqüências orbitais) ou no formato geométrico. Certamente que o canal associado à modulação QAMS depende tanto do tipo de partição, quanto do formato de suas seqüências orbitais, pois o canal é associado vem do grafo dual e este depende do tipo de partição e do tipo de emaranhado das sequências orbitais. Mas não seria possível determinar algum canal associado a uma modulação de $K_{4,8}$? Bem, é possível quando os mergulhos são extremos, isto é, quando se trata de mergulhos mínimos, onde os seus emaranhados são conhecidos e, pela mesma razão, quando se trata de mergulhos máximos.

É possível construir $C_{n,n}$ sem conhecer a rotação?

O grafo completo $K_{4,8}$ é formado por 12 vértices, 32 lados. Então o número de lados de todas as regiões definidas por um mergulho de de $K_{4,8}$ é igual a 64. Pela Proposição 3.2.4, o mergulho de um grafo completo bipartido só produz regiões com um número par de lados maior ou igual a 4, então existe um modelo de mergulho mínimo de $K_{4,8}$ da forma

$$K_{4,8} \hookrightarrow \Omega \equiv 16R_4,$$

isto é, a partição do mergulho é composta por 16 regiões ($f = 16$). Por outro lado, pela característica de Eüler da superfície Ω, temos que

$$\chi(\Omega) = v - e + f = 12 - 32 + 16 = -\,4,$$

consequentemente, $\Omega = 3T$, e portanto é um mergulho mínimo da forma $K_{4,8} \hookrightarrow \Omega \equiv 16R_4$. Neste caso, todas as regiões são quadrangulares e portanto não emaranhadas. Temos então uma modulação para uma constelação de 16 sinais com regiões de decisões todas quandrangulares, logo o canal é da forma $C_{16,16}$. Como o grafo dual é da forma $K'_{4,8}[16, 32]$ e as regiões de $K_{4,8} \hookrightarrow \Omega$ são do tipo R_4, então $\deg v'_i = 4$, para todo $v'_i \in K'_{4,8}$. Portanto, no grafo correspondente ao canal $C_{16,16}$, $\deg s_i = 4$, para todo s_i de $\mathcal{A} = \{s_0, s_1, \cdots, s_{15}\}$. Neste caso, o que podemos afirmar é que o grafo correspondente ao canal $C_{16,16}$ é um subgrafo do grafo completo $K_{16,16}$ com transições simples, e todos os vértices são de grau 5. Podemos concluir ainda que $p(s_j|s_i) = 1/80$ para toda transição $(s_j|s_i)$ de $C_{16,16}$. Construir o canal, só mesmo contando com um sistema de rotações que gere um mergulho da forma $K_{4,8} \hookrightarrow \Omega \equiv 16R_4$.

Portanto a resposta é não para a interrogação da Subeseção 5.4.6

5.5 Canal Compatível com a Modulação

Os processos de associações definidos nas Regras 1 e 2 não aplicam-se somente ao caso do grafo completo bipartido $K_{m,n}$, são os mesmos processos de associações introduzidos para o caso particular do grafo completo K_n, por Lima e Luana [24]. A conclusão que chegamos é que este é um modo bastante coerente de associar um canal discreto sem memória a uma modulação QAMS .

Recordamos que um dos objetivos do sistema integrado de transmissão de dados, proposto por Lima e Palazzo [21], é definir um processo de associação entre uma modulação e um canal discreto sem memória. O objetivo aqui é fornecer uma definicão matemática para o processo de associação entre modulação QAMS e canal DMC, no caso particular do grafo completo bipartido $K_{m,n}$. Desde que os processos de associações introduzidos nas Regras 1 e 2 é um procedimento único, chegamos a conclusão de que é possível unificar estas regras em uma única definição de canal DMC associado a um modulação QAMS, com isso, chega-se a solução de um dos principais problemas do projeto de um sistema integrado, que é de obter uma definição geral de uma modulação compatível com um canal DMC.

Definição 5.5.1 *Se* $G(p,q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{a_1}$ *um mergulho de 2-células. Dizemos que o canal* $C_{k,k}$ (*o canal* $C_{p,p}$) *é* compatível *com a modulação* k-QAMS (*modulação dual* p-QAMS$'$) *se, e somente se,* $C_{k,k}$ ($C_{p,p}$) *é obtido do grafo dual* Ω' (*grafo* Ω) *através da Regra 1* (*Regra 2*).

As Regras 1 e 2 são praticamente a mesma, o que muda é o canal. A diferença é que a Regra 1 descreve o processo de associação para o grafo dual G' e a Regra 2 para o grafo G, consequentemente poderíamos eliminar uma das regras da Definição 5.5.1. A opção pelas duas é para deixar bastante claro que o canal $C_{k,k}$ associado a k-QAMS é o canal vindo da grafo dual G', enquando $C_{p,p}$, o canal associado à modulação dual é obtido do grafo G. Estes conceitos costumam ser confundidos fácilmente e quando este fato ocorre, o processo de associação entre canal e modulação nem sequer pode ser realizado.

5.5.1 Caracterização do canal associado

Observamos que o canal associado a uma modulação QAMS é sempre um grafo parecido com o grafo completo bipartido $K_{m,n}$. Considerando as notações fixadas na Definição 5.5.1 e denotando por C e C' os grafos associados as respectivas modulações QAMS e QAMS$'$, podemos caracterizar C e C', em termos do grafo completo bipartido $K_{m,n}$, através do seguinte

Teorema 5.5.2 *Se* $K_{m,n}[A,B] \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{a_1}$ *é um mergulho de 2-células, então:*

(i) C é sempre um subgrafo do grafo completo bipartido $K_{m+n,m+n}$, $\deg v = n+1$, para todo $v \in A$ e $\deg w = m+1$ para todo $w \in B$;

(ii) C' é um subgrafo do grafo completo bipartido $K_{m,n}$ se, e somente se, $w(R_{\alpha_i}) = \sigma(R_{\alpha_i}) = 0$, caso contrário, C' é um múltiplo grafo do subgrafo do multigrafo $K_{m,n}$.

Demonstração. *Suponha, por absurdo, que* $C = K_{m+n,m+n}$. *Como* $K_{m+n,m+n}$ *possui todas as transições possíveis entre seus vértices dados* $v_1, v_2 \in A$, *deduzimos da Regra 1, que* $K_{m,n}$ *tem um lado entre dois vértices distintos de* $K_{m,n}$, *o que é uma contradição; logo* C *é sempre um subgrafo do grafo completo bipartido* $K_{m+n,m+n}$. *As afirmações de que* $\deg v = n+1$ *e* $\deg w = m+1$ *é um condição necessária da lei de associação da Regra 1. Isto encerra a demonstração da afirmação* (i).

Para provar (ii), *vamos supor, por absurdo, que* $\sigma\left(R'_{\alpha_i}\right) \neq 0$ *(isto é,* R'_{α_i} *é um emaranhado linear). Então podemos supor, sem perda de genariladade, que existe um lado* $(v_i, w_j) \in K_{m,n}$ *tal que* (v_i, w_j) *e* (v_j, w_i) *pertencem a* $\left(R'_{\alpha_i}\right)$. *Mas pela Regra 2, existe uma dupla transição entre os sinais* s_i *e* s_j, *como também entre* s_j *e* s_i; *assim,* C' *seria um subgrafo de* $K_{m,n}$ *com múltiplos lados, e portanto* C' *não seria subgrafo de* $K_{m,n}$.

De modo análgo, prova-se que C' tem um lado duplo na transição (s_i, s_i), se $\deg v_i = 1$ *(o que implica $w(R_{\alpha_i}) \neq 0$), e novamente teríamos que C' não seria subgrafo de $K_{m,n}$. Estas contradições mostram que, se C' é um subgrafo do grafo completo bipartido $K_{m,n}$, então $\sigma(R_{\alpha_i}) = 0$.*

Para provar a recíprova, veja que as condições $w(R_{\alpha_i}) = \sigma(R_{\alpha_i}) = 0$ implicam necessariamente, pela Regra 2, que toda transição (s_i, s_j) de $C_{k,k}$ é simples, (não possui múltiplos lados). Além disso, a não existência do lado (v_i, v_j) de $K_{m,n}$ implica na não existência das transições (s_i, s_j) e (s_j, s_i) de C'; consequentemente, C' é um subgrafo do grafo completo bipartido $K_{m,n}$. ■

No caso particular do grafo completo bipartido da forma $K_{m,n}$, não há muita alteração nas condições das afirmações do Teorema 5.5.2, as únicas alterações são nos índices, $K_{2n,2n}$ em vez de $K_{m+n,m+n}$ e $\deg v = n + 1$ para todo $v \in K_{n,n}$.

Resta somente responder as perguntas: Qual a condição para que C seja o grafo completo bipartido $K_{m,n}$? E quando ocorre a condição $C' = K_{m,n}$? Bem, pela demonstração do Teorema 5.5.2, deduzimos que ambas as respostas são negativas: é impossivel associar canais completos bipartidos à modulações vindas de mergulhos de grafos completos bipartido.

Existiria um grafo em que o canal associado é o grafo completo bipartido? A resposta é sim, o grafo completo K_n, como foi provado em [24]. Na verdade, foi demonstrado que $C = K_{n,n}$ sempre que C está associado à k-QAMS vinda de $K_n \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ e $C' = K_{n,n}$ sempre que $K'_n = K_n$.

Concluímos então que canais associados à modulações do grafo completo K_n possuem mais representatividades de transições do que os canais vindos de mergulhos do grafo completo pipartido $K_{m,n}$. Deduzimos portanto que as modulações vindas dos grafos completos bipartidos são mais apropriadas para serem utilizadas para canais menos ruidosos. Podemos até controlar, através das escolhas adequadas dos parâmetros m e n de $K_{m,n}$, o quanto desejamos que estes canais sejam mais ou menos ruidosos. Levando em consideração que um canal é menos ruidoso, quanto maior for o número de transições com probabilidades condicionadas de acertos nulas, então, à medida que C apresenta um número maior de ausência de transições, C será um canal menor ruidoso. Mas o número de transições de C diminue com o aumento da diferença entre m e n, sendo assim, o decréscimo do ruido do canal C vindo de uma modulação de $K_{m,n}$ é mínimo quando $m - n = 0$, ou seja quando $m = n$.

Dos comentários acima cocluímos que é necessário definir precisamente uma taxa associada a diminição do ruído do canal. Esta deverá ter por base o grafo completo K_n e também deverá ser inversamente proporcional ao número de transições não existentes entre os vértices do grafo associado ao canal C. A comparação com K_n é porque este representa o canal que representa o número máximo de transições com probabilidaddes condicionadas de acerto diferente de zero.

5.6 Taxa do Ruído do Canal Associado

No sentido de colhermos informações que permitam definir uma taxa de diminuição do ruído do canal, analisemos os canais C e C' associados às modulações 6-QAMS e

8-QAMS$'$ ilustrados nas respectivas Figuras 5.4.3 e 5.4.4. Para diminuírmos a complexidade do processo, comparemos então o número de transições do canal $C_{n,n}$ com as transições de um canal que tem como grafo, o grafo completo K_n, neste caso o grafo completo bipartido $K_{n,n}$ é o grafo correspondente ao canal $C_{n,n}$ associado a modulação vinda de um mergulho de K_n.

Definição 5.6.1 *Dado um grafo $C_{n,n}$ diremos que $C_{n,n}$* difere *de $K_{n,n}$ na transição (s_i, s_j) se, e somente se, $p_c(s_j|s_i) = 0$ e (s_i, s_j) é a transição de $C_{n,n}$ correspondente ao lado (v_i, v_j) de $K_{n,n}$.*

Obviamente que as transições (s_i, s_j) e (s_j, s_i) de $C_{n,n}$ estão associados ao mesmo lado (v_i, v_j) de $K_{n,n}$. Admitindo uma orientação sobre $K_{n,n}$, (s_i, s_j) corresponderia ao lado (v_i, v_j) e (s_j, s_i), ao lado oposto (v_j, v_i) de $K_{n,n}$. Desse modo garantimos a unicidade da definição de difere.

Observação 5.6.2 *Independente do tipo de modulação, o canal associado $C_{n,n}$ é sempre simétrico, pois $p_c(s_j|s_i) = 0$ implica necessariamente em $p_c(s_i|s_j) = 0$. Além disso, pela Definição 5.6.1, $(s_i|s_j)$ e $(s_j|s_i)$ correspondem ao mesmo lado (v_i, v_j) de $K_{n,n}$; logo, não faz sentido fazer contagem dupla para as ausências das transições $(s_i|s_j)$ e $(s_j|s_i)$ quando o objetivo é definir um critério de comparação de $C_{n,n}$ com $K_{n,n}$, consequentemente, para cada par de transições $(s_i|s_j)$ e $(s_j|s_i)$ não existentes em $C_{n,n}$ será computado uma unidade na medida difere da Definição 5.6.1.*

Formalizemos portanto uma definição para a taxa de redução de mergulho de um canal DMC $C_{n,n}$ associados a uma modulação n-QAMS.

Definição 5.6.3 *Seja $C_{k,k}$ $(C_{p,p})$ o canal associado à modulação k-*QAMS *(p-*QAMS$'$*), vinda do mergulho $G(p,q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ $(G' \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{p} R'_{\alpha_i})$, chamaremos de* taxa de redução de ruído *do canal $C_{k,k}$ $(C_{p,p})$, a razão entre o número de lados d (d') de $C_{k,k}$ $(C_{p,p})$ que diferem de $K_{k,k}$ $(K_{p,p})$ e o número de lados de $K_{k,k}$ $(K_{p,p})$. Se r e r' são as respectivas taxas de ruídos de $C_{k,k}$ e $C_{p,p}$, então temos*

$$r = \frac{d}{k^2} \quad e \quad r' = \frac{d'}{p^2}. \tag{5.14}$$

Veremos em seguida que a Definição 5.6.3 estabelece uma medida única e coerente para a taxa de redução de ruído do canal $C_{n,n}$, associado a sua respectiva modulação, quando esta vem de um mergulho de um grafo complexo. É óbvio que se trata de uma definição geral e portanto pode ser aplicada a qualquer outro tipo de grafo.

Voltando aos exemplos dos canais $C_{6,6}$ e $C'_{8,8}$ das Figuras 5.4.3 e 5.4.4, segue da Observação 5.6.2, que os canais $C_{6,6}$ e $C'_{8,8}$ diferem de $K_{6,6}$ e $K_{8,8}$ por 8 e 24 lados, respectivamente. Como o número de lados do grafo completo $K_{n,n}$ é dado por

$$e(K_{n,n}) = n^2,$$

então os grafos completos K_6 e K_8 possuem 36 e 64 lados, respectivamente. Consequentemente, os lados de $C_{6,6}$ e $C'_{8,8}$ tiveram uma taxa de redução de $\frac{2}{9}$ e $\frac{3}{8}$ respectivamente, o que correspondem, pela Definição 5.6.3, as taxas de reduções de ruídos de $22,22\%$ e $37,5\%$, respectivamente. Neste caso, observamos que a taxa de redução do ruído do canal $C_{8,8}$ associado à modulação dual 8-QAMS$'$ é maior do que a taxa de redução do canal $C_{8,8}$ associado à modulação 6-QAMS$'$. Este fato é consequência direta do aumento de lados de $K_{8,8}$ em relação $K_{6,6}$.

A taxa de redução de ruido r da modulação $C_{k,k}$ depende do mergulho do grafo e só pode ser estimada quando forem conhecidos a partição do mergulho e o grafo dual, uma vez que $C_{k,k}$ depende somente do grafo dual. Entretanto, a taxa de redução do ruido r' do canal $C_{p,p}$ pode ser estimada, como será mostrado para o caso do grafo completo bipartido $K_{m,n}$.

Proposição 5.6.4 *A taxa de redução de ruído r' de $C_{p,p}$ associada à modulação dual p-QAMS$'$ de $K_{m,n}$ é dada por*

$$r' = \frac{m(m+1)+n(n+1)}{(m+n)^2}. \tag{5.15}$$

Demonstração. *De fato, pela Regra 2 $C_{p,p}$ é obtido $K_{m,n}[A,B]$. Logo: $p=m+n$, as transições de $C_{k,k}$ estão bem definidas pelos lados de $K_{m,n}$ e dependem dos graus dos vértices de $K_{m,n}$. Como $\deg v = n$, se $v \in A$ e $\deg w = m$, se $w \in B$, então $C_{p,p}$ é um canal da forma $C_{m+n,m+n}$, e portanto devemos verificar a relação difere entre $C_{m+n,m+n}$ e $K_{m+n,m+n}$. Por outra parte, pelo Teorema 5.5.2 , temos que*

$$\deg s_i = \deg v_i + 1 = \begin{cases} n+1, & se\ v_i \in A \\ m+1, & se\ v_i \in B. \end{cases}$$

Então deduzimos que existem $m[(m+n)-(n+1)]$ lados de $C_{p,p}$ que não pertencem a $K_{m+n,m+n}$, nas transições de $C_{p,p}$ associadas a vértices de A, e $n[(m+n)-(m+1)]$ lados de $C_{p,p}$ que não pertencem a $K_{m+n,m+n}$, nas transições de $C_{p,p}$ associadas a vértices de B. Ao todo, o número d' de lados de $C_{p,p}$ que não pertencem a $K_{m+n,m+n}$ é dado por

$$d' = m[(m+n)-(n+1)] + n[(m+n)-(m+1)] = m(m+1)+n(n+1).$$

Como $r' = d'/e(K_{m,n})$ e $e(K_{m,n}) = (m+n)^2$, segue a igualdade (5.15). ∎

Observamos que a taxa de redução de ruído r' em (5.15) , quando aplicada ao canal $C_{8,8}$ da Figura 5.4.4 nos dá

$$r' = \frac{m(m+1)+n(n+1)}{(m+n)^2} = \frac{4(4+1)+4(4+1)}{(4+4)^2} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8} = 37,5\% \tag{5.16}$$

o que coincide com o cálculo realizado acima. Como outro exemplo, vejamos o caso do canal $C_{12,12}$ associado à modulação dual 12-QAMS$'$ ilustrado na Figura 5.4.5. Neste caso, temos:

$$r' = \frac{m(m+1)+n(n+1)}{(m+n)^2} = \frac{4(4+1)+8(8+1)}{(4+8)^2} = \frac{92}{144} = \frac{23}{36} = 63,889\%,$$

o que representa uma alta taxa de redução do ruído do canal $C_{12,12}$, quando comparado como $K_{12,12}$. Este cálculo confirma a nossa afirmação acima de que a taxa de redução aumenta com o aumento da diferença $m-n$. Observe que a taxa de $C_{8,8}$ em (5.16) vem do mergulho de $K_{4,4}$ cuja diferença é $4-4=0$, enqunto a taxa de $C_{12,12}$ vem do mergulho de $K_{4,8}$ cuja diferença é $8-4=4$, superior a zero, a diferença em $K_{4,4}$.

O processo do cálculo da taxa de redução foi estabelecido basicamente através da diferença entre os lados do canal $C_{n,n}$ e do grafo completo bipartido $K_{n,n}$. Ocorre que os canais associados às modulações vindas de mergulhos máximos e próximos destes possuem canais cujos grafos são do tipo multigrafos do grafo completo $K_{n,n}$, neste caso, a taxa de redução deve ser estabelecida para $K_{n,n}$ em relação a $C_{n,n}$. Vejamos um exemplo do cáculo da taxa de redução em que o canal está associada a uma modulação vinda de um mergulho maximal.

Da saída do Algoritmo 2.8.1 aplicado ao caso dos mergulhos do grafo completo bipartido $K_{4,4}$ no Capítulo 3, a rotação $\Theta = aEAEAFbg$ nos dá um mergulho maximal orientado de $K_{4,4}$ da forma

$$K_{4,4}(\Theta) \hookrightarrow 4T \equiv R_{10}R_{22}, \tag{5.17}$$

onde as sequências orbitais relativas a R_{10} e R_{22} são dadas por

$$\gamma_1 = (7,0,5,2,7,4,1,6,5,4) \quad \text{e} \quad \gamma_2 = (0,7,6,3,0,1,2,3,4,5,0,3,2,5,6,7,2,1,4,3,6,1).$$

Por definição, o dual de $K_{4,4}$ é um grafo da forma $K'(2,32)$, pois o mergulho (5.17) é composto por duas regiões. Consequentemente, a modulação QAMS está definida para uma constelação de 2 sinais, e portanto é da forma 2-QAMS. Por outro lado, as transições do canal $C_{2,2}$ são definidas a partir do mergulho de $K_{n,n}$ e este depende do tipo de emaranhados das sequências orbitais γ_1 e γ_2 (veja [24]). Então precisamos classificar γ_1 e γ_2 quanto aos tipos de emaranhados pontual e linear, é o que faremos na tabela abaixo.

Seqüência orbital	Emaranhado	
	Pontual	Linear
γ_1	5	74
γ_2	5	76, 63, 30, 01, 12, 23, 34

A tabela acima diz que γ_1 tem um emaranhado pontual no vértice v_5 e um emaranhado linear no lado (v_7, v_4), enquanto γ_2 tem um emaranhado pontual no vértice v_5 e emaranhados lineares nos lados $(v_7,v_6),(v_6,v_3),(v_3,v_0),(v_0,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_3)$ e (v_3,v_4). Neste caso, os emaranhados são classificados em relação aos graus de emaranamentos como sendo: γ_1 é um emaranhado misto de graus

$$\varpi(\gamma_1) = \sigma(\gamma_1) = 1$$

e γ_2 também é um emaranhado misto de graus

$$\varpi(\gamma_1) = 1 \ \text{ e } \ \sigma(\gamma_2) = 7.$$

Sabemos de [24] que cada emaranhado linear de um lado (v_i, v_j) da região R^t_α do mergulho de $K_{4,4}(\Theta)$ corresponde a existência de um laço (v_t, v_t) no vértice v_t do grafo dual. Aplicando agora a Regra 1, o laço (v_t, v_t) irá compor duas transições (s_t, s_t) e (s_t, s_t) no canal associado $C_{2,2}$ correspondentes aos lados (v_i, v_j) e (v_j, v_i) que definem o emaranhado linear sobre (v_i, v_j). Já um lado simples (v_i, v_j) de R^t_a define um lado do dual (v_t, v_u), onde v_u é o vértice no cento da região R^u_β do mergulho de $K_{4,4}(\Theta)$ que tem como fronteira entre R^t_α e R^u_β o lado (v_t, v_u). Neste caso a Regra 1 define duas transições cruzadas no canal (s_t, s_u) e (s_u, s_t).

Para maior clareza os comentários acima serão traduzidos em formas de algoritmos de construções do dual, canal associado e canal equivalente probabilístico.

Algorítmo 5.6.5 (Construção do Dual) *Sejam $G(p,q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R^i_{\alpha_i}$ um mergulho de 2-células e $\gamma_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots v_{i_{\alpha_i}})$ a sequência orbital da região R_{α_i}. Então o grafo dual G', no plano, é construído através das seguintes etapas:*

D1 Para cada região R_{α_i} de $\cup_{i=1}^k R^i_{\alpha_i}$, construa um vértice v'_i correspondente ao vértice do dual no interior de $R^i_{\alpha_i}$;

D2 Para cada v'_i percorra a sequência γ_i de $R^i_{\alpha_i}$, e para cada subesequência $\left(v_{i_t}, v_{i_{t+1}}\right)$ de γ_i construa:

a) um laço em v'_i, $l_{i_t,i_{t+1}} = (i_t i_{t+1})$, se $\left(v_{i_t}, v_{i_{t+1}}\right)$ e um emaranhado linear de $R^i_{\alpha_i}$ (neste caso γ_i contem a subsequência $\left(v_{i_{t+1}}, v_{i_t}\right)$ e esta corresponde a orintação ao laço oposto $l_{i_{t+1},i_t} = (i_{t+1} i_t)$);

b) dois lados (v'_i, v'_j) e (v'_j, v'_i) sempre que a subsequência $\left(v_{i_{t+1}}, v_{i_t}\right)$ for um lado simples de γ_i e $R^i_{\alpha_i} \cap R^i_{\alpha_i} = \left(v_{i_{t+1}}, v_{i_t}\right)$.

Independente da modulação, o canal associado é construído a partir de um grafo, porém, para ver melhor a relação entre o canal e o grafo mergulhado vejamos o algoritmo de construção do canal associado à modulação dual, o qual é construído a partir do grafo dual. Iremos considerar na descrição da regra seguinte a notação utilizada no Algoritmo 5.6.5.

Algorítmo 5.6.6 (Construção do Canal) *O canal associado à modulação k-QAMS é construído através das seguintes etapas:*

C1 Duplique os vértices $v'_0, v'_1, \cdots, v'_{k-1}$ do dual dispostos em duas colunas verticais do grafo dual e rotule dois vértices alinhados horizontamente com o mesmo símbolo s_i associado a vértice v'_i do canal (veja Figura 5.6.1(b));

C2 Para cada par de vértices s_i alinhados horizontalmente construa:

a) a transição ii referente à transição de acerto do símbolo enviado s_i;

b) para cada laço em v'_i, $l_{i_t,i_{t+1}} = (i_t, i_{t+1})$ contrua duas transições (i_t, i_{t+1}) e (i_{t+1}, i_t) entre os dois vértices alinhados horizontalmente rotulados por s_i;

C3 Para cada $i, j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ e cada um dos t lados múltipos (v_{i_t}, v_{j_t}) entre os vértices v_i' e v_j' do dual, contrua um par de transições (s_i, s_j) e (s_j, s_i) com rótulos $i_t j_t$ e $j_t i_t$, respectivamente (como as transições entre s_0 e s_i da Figura 5.6.1(b));

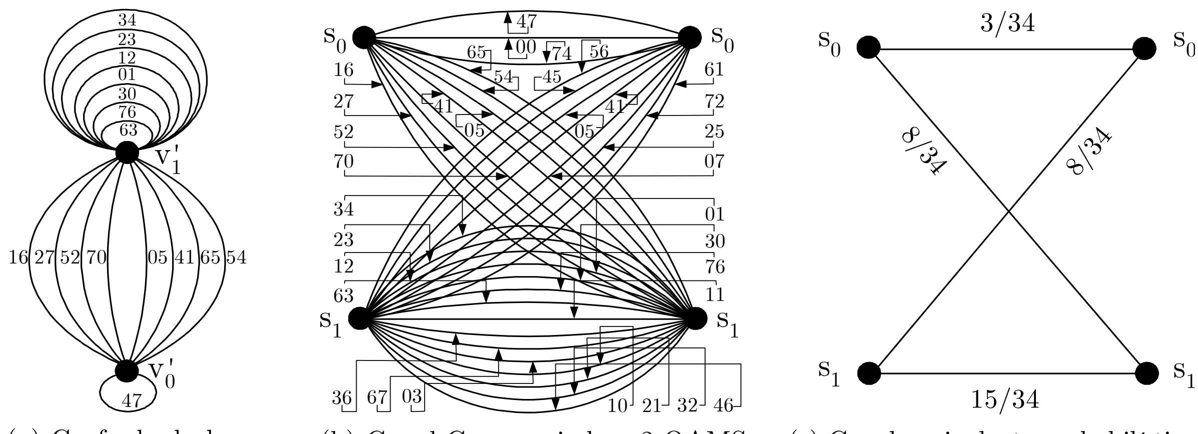
O canal equivalente probabilístico refere-se ao canal com as probabilidades condicionadas de acerto e sua construção é realizada colocando-se uma única transição entre os sinais s_i e s_j se, e somente se, existe pelo menos uma transição entre s_i e s_j no canal associada $C_{k,k}$, do contrário, a transição não é colocada, consequentemente, é natural que assumamos que esta probabilidade seja nula. A probabilidade condicionada de acerto é definida por

$$p_c\left(s_j|s_i\right) = \frac{n\left(s_j\right)}{N\left(C_{k,k}\right)}, \tag{5.18}$$

onde $n\left(s_j\right)$ é o número de transições de s_j e $N\left(C_{k,k}\right)$ é o número total de transições do canal $C_{k,k}$.

A Figura 5.6.1 mostra as etapas completas das construções dos canais associados à modulação 2-QAMS vinda do mergulho máximo (3.45): a figura (a) é o grafo dual $K'(2, 32)$ de $K_{4,4}(\Theta)$ com rotulamento dos lados de $K_{4,4}(\Theta)$ que definem as transições de $K'(2, 32)$, construção obtida através do Algoritmo 5.6.5; a figura (b) ilustra o canal associado à modulação 2-QAMS, o qual é construído a partir do grafo dual planar (a) através do Algorítmo 5.6.6 e; a figura (c) representa o canal equivalente probabilístico, construído com base nas transições do canal associado (b), com as instruções do parágrafo anterior.

Apesar das etapas de construções do Algorítmo 5.6.6 dizer respeito a construção do canal associado à modulação k-QAMS, cujas regras de construções são aplicadas sobre o grafo dual, não significa que o mesmo não possa ser aplicado a outro tipo de grafo. Pelo contrário, o Algorítmo 5.6.6 aplica-se a qualquer canal, desde que se conheça, a nível de sequências orbitais, o mergulho do grafo dual da modulação associada. Lembramos que no caso da modulação dual p-QAMS$'$ o canal é definido sobre o dual do grafo dual de G que é o próprio grafo G.



(a) Grafo dual planar (b) Canal $C_{2,2}$ associado a 2-QAMS (c) Canal equivalente probabilístico

Figura 5.6.1: Etapas da construção do canal 2-ário $C_{2,2}$ associado à modulação 2-QAMS de um mergulho máximo de $K_{4,4}$

De um modo geral, a escolha de G para obter as modulações QAMS's tem sido um grafo normal (sem laços e multilados), como são os casos dos grafos completos e dos grafos completos bipartidos. A aplicação do Algoritmo 5.6.6 em grafos simples é até relativamente menos complexa quando comparado com a complexidade do grafo dual. Daí um dos motivos por termos optado pelo grafo dual G', em vez de G, para descrever a construção do canal associado. Se conseguimos construir o canal associado a partir do grafo dual G', então iremos conseguir construir, até com uma certa facilidade, o canal associado a partir de G.

Os Algoritmos 5.6.5 e 5.6.6 podem ser usados para construir qualquer canal associado à modulações QAMS's sobre superfícies orientáveis e não orientáveis sem bordos, não é nem necessário que se conheça os mergulhos topológicos. Utilizando também o Algoritmo 2.8.1, basta escolher então um grafo e fixar um sistema de rotações, que os três algarismos dão conta das identificações do mergulho, das modulações QAMS's, das contruções do duais, dos canais associados e canais equivalentes probabilísticos. Veremos a seguir que estes elementos obtidos pelos Algoritmos 5.6.5, 5.6.6 e 2.8.1 podem ser usados para fornecer os equivalentes elementos vindos de superfícies com bordos.

5.7 Canais Associados a Modulações com Bordos

Veremos aqui alguns exemplos de como os canais associados a modulações em superfícies sem bordos podem ser utilizados para construir os canais associados as modulações em superfícies com bordos, oriundas do mergulho sem bordo. Desde que as modulações em superfícies com bordos são definidas a partir de uma modulação em superfície sem bordo, é natural que a construção parta do canal associado à modulação sobre a superfície sem bordo.

Tomemos, por exemplo, o mergulho sobre o bitoro dada pela seguinte saida do Algoritmo 2.8.1

```
1. a E A E c F C e
2. 4 4 4 4 4 12
3. 7 0 5 2
4. 0 7 6 1
5. 0 3 2 5 6 3 0 1 2 3 4 5
6. 1 4 7 2
7. 1 6 5 4
8. 3 6 7 4
```

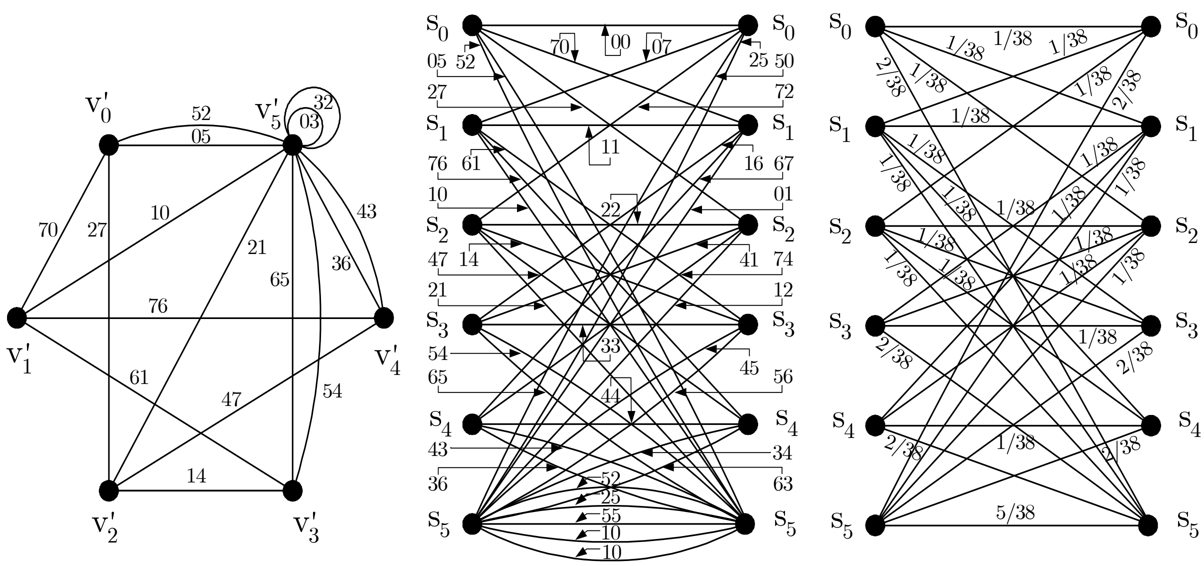
Observe que se trata de um mergulho de $K_{4,4}$ sobre o bitoro da forma

$$K_{4,4}\,(aEAEcFCe) \hookrightarrow 2T \equiv 5R_4R_{12},$$

cujas sequências orbitais serão denotadas por

$$\gamma_0 = (7052)\,, \gamma_1 = (0761)\,, \gamma_2 = (1472)\,, \gamma_3 = (1654)\,, \gamma_4 = (3674)\,, \gamma_5 = (032563012345)\,.$$

Aplicando os mesmos procedimentos utilizados nas construções da Figura 5.6.1, o grafo dual, o canal associado e o canal equivalente probabilístico, são obtidos conforme mostram as ilustrações apresentadas na Figura 5.7.1.



(a) Dual $K_{4,4}$(aEAEcFCe) (b) Canal associado $C_{6,6}$ (b) Canal equiprovável $C_{6,6}$

Figura 5.7.1: Grafo dual, canal associado e canal equiprovável associados a modulação vinda do mergulho de $K_{4,4}\,(aEAEcFCe)$

Os grafos ilustrados na Figura 5.7.1 são os componentes que definem a modulação 6-QAMS associada ao mergulho $K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T \equiv 5R_4R_{12}$. É uma modulação para uma constelação de 6 sinais sobre o bitoro, vinda de um mergulho de $K_{4,4}$. O grafo dual (a) define as transições do canal associado $C_{6,6}$ em (b) e (c) é o canal equivalente equiprovável que define o conjunto de probabilidades condicionadas de acerto das transições do canal $C_{6,6}$, segundo a fórmula (5.18).

Observamos que para determinar as construções da Figura 5.7.1 não é necessário recorrer a nenhum tipo de construção geométrica do mergulho de $K_{4,4}\,(aEAEcRCe)$, basta usar a definição do dual e o conjunto de sequência orbitais, conforme as instruções contidas nos passos do Algoritmo 5.6.5.

A matriz de probabilidades condicionadas de acerto do canal equiprovável é então dada por

$$M\left(C_{6,6}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & 0 & 0 & \frac{2}{38} \\ \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & 0 & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} \\ \frac{1}{38} & 0 & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} \\ 0 & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & 0 & \frac{2}{38} \\ 0 & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & 0 & \frac{1}{38} & \frac{2}{38} \\ \frac{2}{38} & \frac{1}{38} & \frac{1}{38} & \frac{2}{38} & \frac{2}{38} & \frac{5}{38} \end{bmatrix}$$

e representa um dado muito importante, porque exibe imediatamente o comportamento do canal, sem termos que apelar para uma simulação. Os dados contidos na matriz $M\left(C_{6,6}\right)$ é suficiente para decidirmos pela modulação mais eficiente. As informações contidas são bastante confiáveis, pois as probabilidade condicionadas estão coerentes com a medida da área de cada uma das regiões de decisão dos sinais da modulação (maior área recebe proporcionalmente maior probabilidade condicionada), e também com relações de transições entre os sinais (número maior de transição também recebe proporcionalmente maior probabilidade).

Devemos ter em mente que as construções da Figura 5.7.1 definem os componentes da modulação sobre a superfície sem bordo, construções que são suficientes para estabelecer os componentes equivalentes de qualquer modulação em superfície com bordo, gerada por operações de exérese, aplicada no mergulho sem bordo $K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T \equiv 5R_4R_{12}$.

Em seguida faremos um estudo detalhado sobre os canais associados a modulações sobre superfícies com bordos, tomando como referência as modulações distintas oriundas do mergulho sem bordo $K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T \equiv 5R_4R_{12}$.

5.7.1 Modulações com uma componente de bordo

Pela Definição 2.4.1, uma modulação em superfície com uma componente de bordo é obtida escolhendo-se uma região $R^i_{\alpha_i}$ da partição $5R_4R_{12}$ e aplicando-se a operação de exérese sobre $R^i_{\alpha_i}$. Mas pela Definição 2.6.3, o vértice v'_i do dual encontra-se no interior de $R^i_{\alpha_i}$, logo a operação de exérese elimina o vértice v'_i, e consequentemente os lados do dual adjacentes a v'_i também são eliminados. Portanto, para construir os esquemas do grafo dual, basta eliminar o vértice v'_i juntamente com os lados adjacentes a v'_i e nos canais associado e equivalente, eliminar os dois sinais alinhados de rótulos s_i, juntamente com as suas transições. De um modo geral, as contruções que definem a modulação com bordos são obidas através das etapas descritas a seguir.

Algorítmo 5.7.1 *Dado um mergulho $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$, o grafo dual, canal associado e canal equiprovável de uma modulação com b componentes de bordos, $1 \leq b \leq k-2$, são construídos do seguinte modo:*

D1 Escolha b regiões $R_{i_1}, R_{i_2}, \cdots R_{i_b}$ da partição $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$;

D2 Para construir o dual de $G \hookrightarrow \Omega_b \equiv \cup_{i=1}^{k-b} R_{\alpha_i}$ elimine todos os vértices $v'_{i_1}, v'_{i_2}, \cdots, v'_{i_b}$ do dual de G e os lados adjacentes a estes vértices;

D3 Para construir o canal associado e o canal equiprovável elimine todos os sinais $s_{i_1}, s_{i_2}, \cdots, s_{i_b}$ dos canais associado e equivalente da modulação k-QAMS vinda de $G \hookrightarrow \Omega$, juntamente com as transições que contêm um destes sinais.

Utilizando o Algoritmo 5.7.1, as construções do dual, canais associado e equivalente tornam-se simples e só dependem das construções equivalentes do mergulho sem bordo.

As modulações com uma componente de bordo vinda do mergulho de $K_{4,4}\,(\Theta)$ serão obtidas observando-se os graus de cada vértice do grafo dual e as múltiplas conexões entre os vértices de $K'_{4,4}$. Pela Figura 5.7.1, vemos que os vértices do dual $K'_{4,4}$ possuem os seguintes graus

$$\deg v'_0 = \deg v'_1 = \deg v'_2 = \deg v'_4 = \deg v'_4 = 4 \text{ e } \deg v'_5 = 12.$$

5.7.2 Opções de escolhas distintas para modulações com bordos

Se fôssemos levar em consideração somente o grau, teríamos duas escolhas diferentes, escolhíamos um vértice de grau 4 ou um vértice da grau 12 e assim teíamos somente dois mergulhos com uma compontente de bordo distintos. Contudo, se levarmos em consideração as múltiplas coneções temos três opções de escolhas distintas: 1) um vértice que não tem conexões duplas, seria v_1' ou v_2'; 2) um vértice com dupla conexão, como os casos de v_3' e v_4' e; 3) o vértice v_5' por ser de grau 12 e várias conexões múltiplas.

Decidindo pelas modulações com bordos cujas operações de exéreses serão aplicadas nas regiões R_4^1, R_4^0 e R_{12}^5 então, para obtermos os duais das três modulações com uma componente de bordo, o Algoritmo 5.7.1 deverá ser aplicado sobre os vértices v_1', v_0' e v_5' do dual (a) da Figura 5.7.1. Por outro lado, os canais associado e equivalente devem ser obtidos, aplicando-se o Algoritmo 5.7.1 nos sinais s_1, s_0 e s_5.

A Figura 5.7.2 ilustra as construções do grafo dual, canal associado e canal equiprovável, dos grafos que definem as modulações com uma componente de bordo, obtidas da operação de exérese aplicada nas regiões R_4^1, R_4^0 e R_{12}^5 do mergulho $K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T \equiv 5R_4R_{12}$.

Os grafos (a), (b) e (c) correspondem à modulação 5-QAMS sobre o bitoro com uma componente de bordo definida pela associação

$$\text{5- QAMS} \leftrightarrow K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_1 \equiv 4R_4R_{12} \equiv 5R_4R_{12}\backslash\{R_4^1\}$$

onde $4R_4R_{12}\backslash\{R_4^1\}$ indica a partição $4R_4R_{12}$ menos a região R_4^1. De modo análogo, os grafos (d), (e) e (f) correspondem a modulação

$$\text{5- QAMS} \leftrightarrow K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_1 \equiv 4R_4R_{12} \equiv 5R_4R_{12}\backslash\{R_4^0\}$$

e os grafos (d), (e) e (f) correspondem a modulação

$$\text{5- QAMS} \leftrightarrow K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_1 \equiv 5R_4 \equiv 5R_4R_{12}\backslash\{R_4^5\}.$$

Observe que a última associação corresponde a uma modulação regular sobre o bitoro com uma componente de bordo, portanto um exemplo de modulação para uma constelação de sinais u.s.g.u. sobre uma superfícies com bordo.

Na Figura 5.7.2 foi utilizada a notação $C_{5,5}^1$, para indicar que o canal esta associado à modulação cuja operação e exérese foi aplicada na região R_4^1 da partição $4R_4R_{12}$ do mergulho sem bordo $K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_1$. Evidentemente que estamos adotando o rotulamento fixado acima para as sequências orbitais deste mergulho.

Já dá para perceber que as três modulações ilustradas na Figura 5.7.2 parecem ser bem diferentes, apesar de todas elas virem de um mesmo mergulho, apresentarem o mesmo número de componentes de bordos e de sinais.

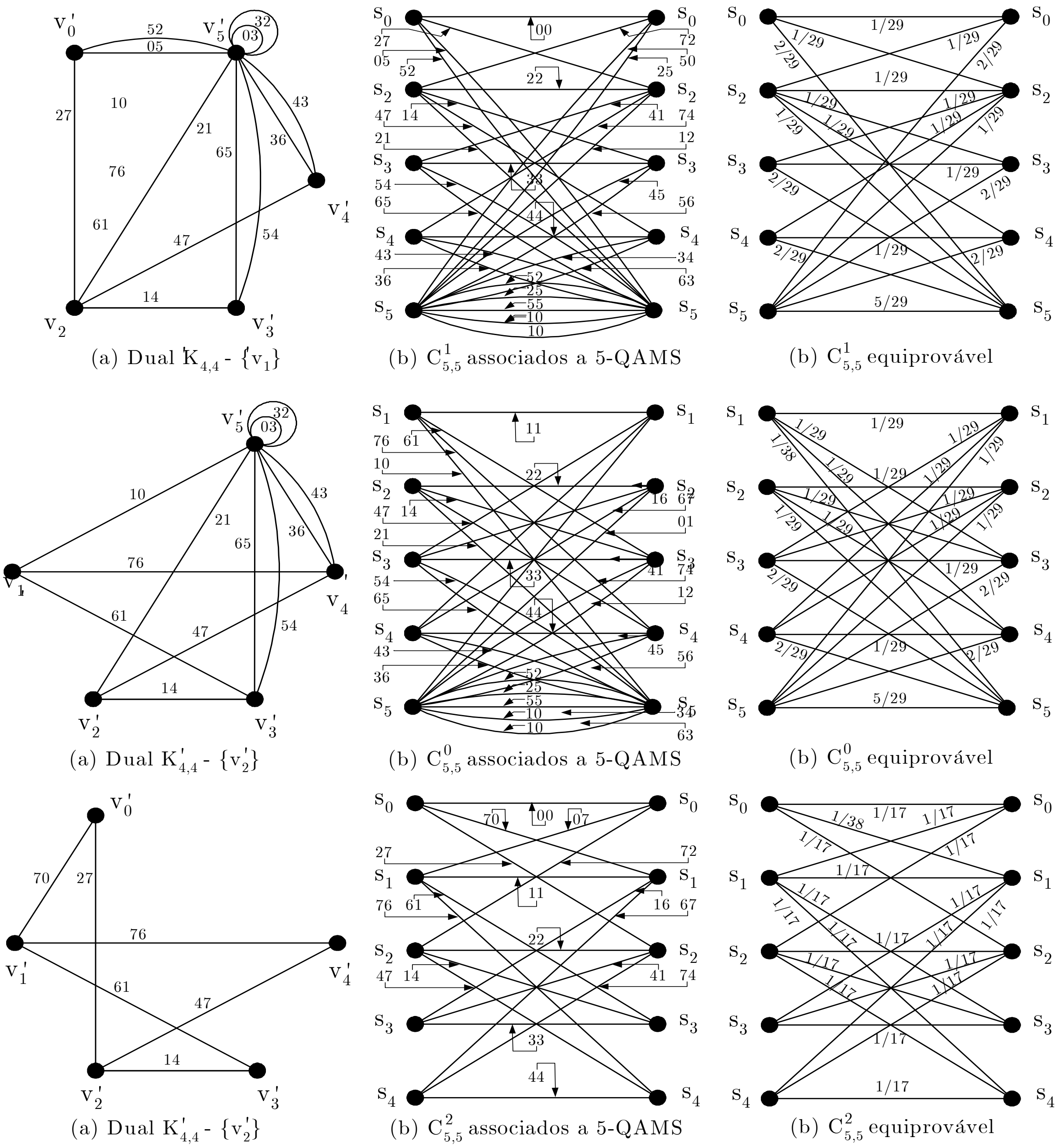


Figura 5.7.2: Grafos correspondentes aos duais, canais associados e canais equiprováveis de modulações em superfícies com uma componente de bordo

A melhor opção de perceber claramente os diferentes desempenhos entre as três modulações com uma componente de bordo sobre o bitoro, associadas aos grafos da Figura 5.7.2, é comparar as matrizes de probabilidades condicionadas de acertos. Para este propósito, consideremos a matriz M_i como sendo a matriz de probabilidades condicionadas de acertos da modulação com uma componente de bordo, cuja região R^i_α de $4R_4R_{12}$ sofreu a operação de exérese. Pelos canais equivalentes probabilísticos (c), (f) e

(i) da Figura 5.7.2, deduzimos que

$$M_1\colon \begin{bmatrix} \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & 0 & 0 & \frac{2}{29} \\ \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & \frac{1}{29} \\ 0 & \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & 0 & \frac{2}{29} \\ 0 & \frac{1}{29} & 0 & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} \\ \frac{2}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & \frac{2}{29} & \frac{5}{29} \end{bmatrix}, M_0 : \begin{bmatrix} \frac{1}{29} & 0 & \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} \\ 0 & \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & \frac{1}{29} \\ \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & 0 & \frac{2}{29} \\ \frac{1}{29} & \frac{1}{29} & 0 & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} \\ \frac{2}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & \frac{2}{29} & \frac{5}{29} \end{bmatrix}, M_5 : \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & \frac{1}{17} & \frac{1}{17} & 0 & 0 \\ \frac{1}{17} & \frac{1}{17} & 0 & \frac{1}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{1}{17} & 0 & \frac{1}{17} & \frac{1}{17} & \frac{1}{17} \\ 0 & \frac{1}{17} & \frac{1}{17} & \frac{1}{17} & 0 \\ 0 & \frac{1}{17} & \frac{1}{17} & 0 & \frac{1}{17} \end{bmatrix}.$$

De imediato vemos que M_5 é diferente de M_1 e de M_0, porém, M_1 e M_0 não parecem tão distintas assim, porque possuem os mesmos valores. Entretanto, se compararmos as probabilidades nulas nas linhas das matrizes M_1 e M_0, vemos que existem $2, 0, 2, 2$ e 0 probabilidades nulas nas linhas de M_1 e $1, 1, 1, 1$ e 0 nas linhas de M_0, consequentemente $M_1 \neq M_0$, e portanto as três matrizes de probabilidade são distintas duas a duas. Concluímos então que os três conjuntos de grafos da Figura 5.7.2 correspondem a modulações de desempenhos diferentes, duas a duas distintas, sobre o bitoro com uma componente de bordo.

5.7.3 Modulações com duas componente de bordos

As instruções para construir o grafo dual, canal associado e canal equivalente já foram dadas na subeseção anterior. Então começemos a identificar as modulações distintas, usando o critério de opções de escolhas de duas regiões do mergulho $K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T \equiv 5R_4R_{12}$, que apresentam vértices do dual e existência de múltiplas ligações diferentes. Neste caso, temos as seguintes opções de escolhas diferentes:

1^a) v_1 e v_2, pois $\deg v_1 = \deg v_2 = 4$ e não apresentam múltiplas ligações;

2^a) v_1 e v_3, pois $\deg v_1 = \deg v_2 = 4$, v_2 apresenta e v_1 não apresenta múltiplas ligações;

3^a) v_1 e v_5, pois $\deg v_1 \neq \deg v_5$, v_5 apresenta e v_1 não apresenta múltiplas ligações;

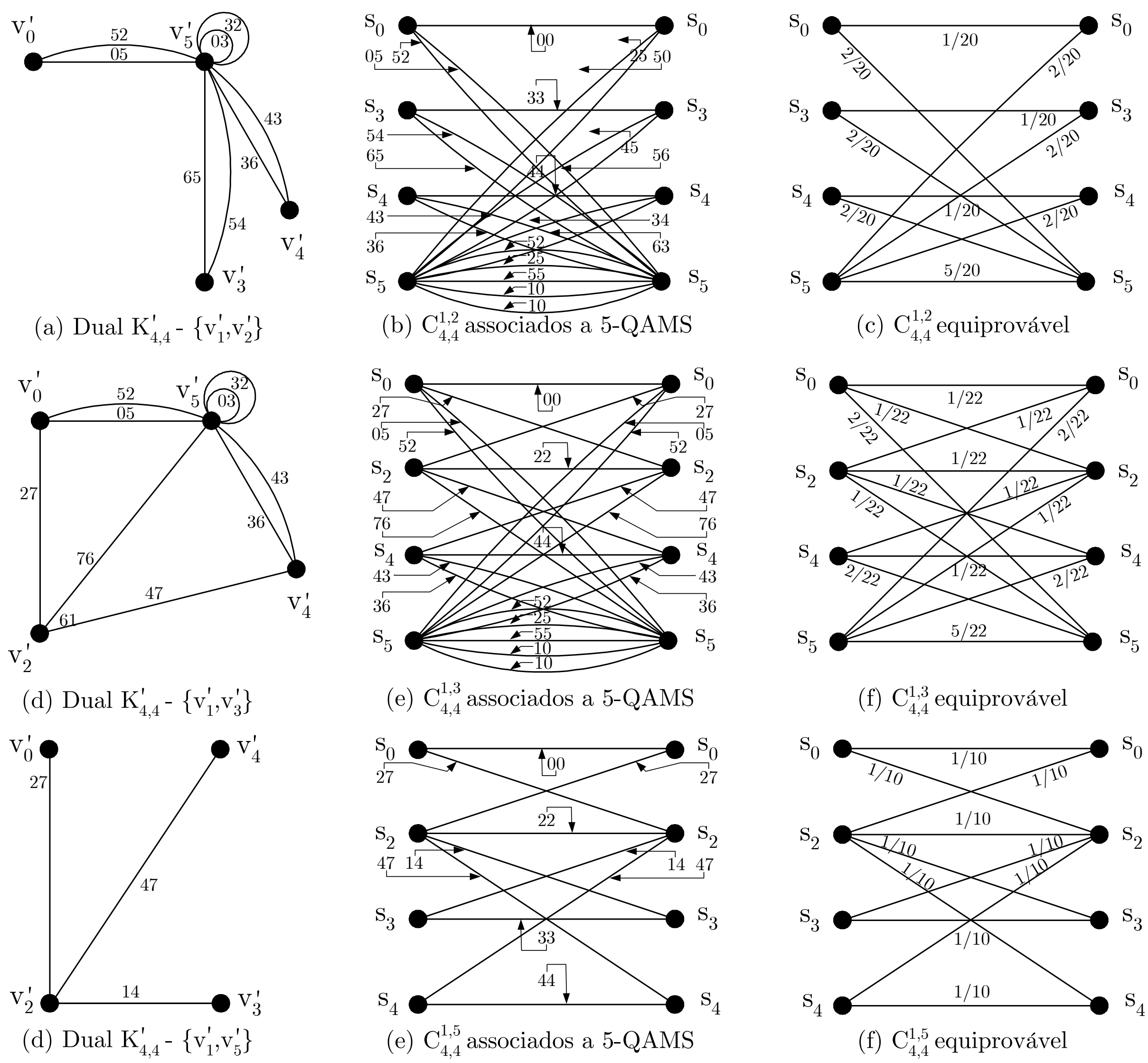
4^a) v_3 e v_4, pois $\deg v_1 = \deg v_2 = 4$ e ambos apresentam 2 múltiplas ligações;

5^a) v_3 e v_5, pois $\deg v_3 = \deg v_5$ e ambos apresentam múltiplas ligações distintas.

As três primeiras opções de escolhas irão definir as seguintes modulações sobre o bitoro com duas componentes de bordos:

$$\begin{aligned} 1^a)\ K_{4,4}\,(aEAEcRCe) &\hookrightarrow 2T_2 \equiv 3R_4R_{12} \equiv 5R_4R_{12} \backslash \left\{R_4^1, R_4^2\right\}, \\ 2^a)\ K_{4,4}\,(aEAEcRCe) &\hookrightarrow 2T_2 \equiv 3R_4R_{12} \equiv 5R_4R_{12} \backslash \left\{R_4^1, R_4^3\right\}, \\ 3^a)\ K_{4,4}\,(aEAEcRCe) &\hookrightarrow 2T_2 \equiv 4R_4 \equiv 5R_4R_{12} \backslash \left\{R_4^1, R_4^5\right\}. \end{aligned}$$

Observe que a 3^a) opção corresponde a uma modulação regular e portanto para uma constelação de sinais do tipo geometricamente uniforme. O grafo dual, canal associado e canal equiprovável destas três modulações estão ilustrados na Figura 5.7.3.



(a) Dual $K'_{4,4}$ - $\{v'_1, v'_2\}$ (b) $C^{1,2}_{4,4}$ associados a 5-QAMS (c) $C^{1,2}_{4,4}$ equiprovável

(d) Dual $K'_{4,4}$ - $\{v'_1, v'_3\}$ (e) $C^{1,3}_{4,4}$ associados a 5-QAMS (f) $C^{1,3}_{4,4}$ equiprovável

(d) Dual $K'_{4,4}$ - $\{v'_1, v'_5\}$ (e) $C^{1,5}_{4,4}$ associados a 5-QAMS (f) $C^{1,5}_{4,4}$ equiprovável

Figura 5.7.3: Grafos correspondentes aos duais, canais associados e canais equiprováveis de modulações em superfícies com duas componentes de bordo

Observando os canais equiprováveis (c), (f) e (i) da Figura 5.7.3, constatamos de imediato que os conjuntos de probabilidades condicionadas de acertos são todos diferentes. Mais exatamente, as matrizes de probabilidades destes canais são dadas por

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 & \frac{2}{20} \\ 0 & \frac{1}{20} & 0 & \frac{2}{20} \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} & \frac{2}{20} \\ \frac{2}{20} & \frac{2}{20} & \frac{2}{20} & \frac{5}{20} \end{bmatrix}, \; M_{13} = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} & \frac{1}{22} & 0 & \frac{2}{22} \\ \frac{1}{22} & \frac{1}{22} & \frac{1}{22} & \frac{1}{22} \\ 0 & \frac{1}{22} & \frac{1}{22} & \frac{2}{22} \\ \frac{2}{22} & \frac{1}{22} & \frac{2}{22} & \frac{5}{22} \end{bmatrix} \text{ e } M_{15} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

A diferença fica bastante evidenciada quando observamos os denominadores das frações de probablidades, estes são iguais em cada matriz, porém diferentes nas três matrizes. No entanto não podemos nos deixar levar pelas aparências das matrizes, e sim recorrer a algum processo de média para tirar conclusões mais confiáveis. Iremos utilizar as matrizes M_{12}, M_{13} e M_{15} para definir, de forma precisa, uma medida de eficiência de uma modulação QAMS .

Antes, porém gostariamos de observar que as demais modulações distintas com duas componentes de bordos serão apresentadas no Apêndice C.

5.7.4 Medida da eficiência da modulação QAMS

Apresentaremos uma análise das matrizes de probabilidades de modulações com o intuito de obter uma medida para a eficiência de uma modulação QAMS . Inicialmente iremos utilizar o valor mínimo das probabilidades não nulas da matriz de probababilidades condicionadas de acertos.

Tomando como base o valor mínimo das probabilidades das matrizes M_{13}, M_{12} e M_{15} chagamos a conclusão de que $\frac{1}{22} < \frac{1}{20} < \frac{1}{10}$, então podemos concluir que as modulações sobre o bitoro com 2 componentes de bordos 4-QAMS$_{12}$, 4-QAMS$_{13}$ e 4-QAMS$_{15}$ associadas aos canais $C^{12}_{4,4}$, $C^{13}_{4,4}$ e $C^{15}_{4,4}$ apresentam a seguinte relação de eficiência

$$\varepsilon\left(4\text{- QAMS}_{13}\right) < \varepsilon\left(4\text{- QAMS}_{12}\right) < \varepsilon\left(4\text{- QAMS}_{15}\right) \tag{5.19}$$

onde $\varepsilon\left(k\text{- QAMS}_{ij}\right)$ é a medida da eficiência da modulação k-QAMS$_{ij}$ baseada nas probabilidades condicionadas de acertos não nulas mínimas das transições do canal equiprovável $C^{ij}_{k,k}$ associada à modulação k-QAMS$_{ij}$.

Um outro fator que também contribue para avaliar o desempenho da modulação, e que se apresenta de forma bem explícita na matriz de probablilidades de acerto M_{ij}, é a existência dos elementos nulos $m_{ij} = m_{ji} = 0$, os quais representa as ausências das transições $(s_i|s_j)$ e $(s_j|s_i)$. Já que a ausência de cada transição $(s_j|s_i)$ implica na certeza de que o símbolo recebido ser s_j dado que s_i foi enviado, não ocorre, então o canal é mais eficiente quanto maior for o número de elementos nulos da matriz M_{ij}. Observe que as probabilidades não nulas de M_{13} e M_{12} estão relacionadas pela relação de desigualdade

$$p^{13}\left(s_j|s_i\right) = \frac{1}{22} < \frac{1}{20} = p^{12}\left(s_j|s_i\right),$$

e que os elementos nulos também estão relacionados pela relação de desigualdade

$$n\left(M_{13}\right) = 2 < 6 = n\left(M_{12}\right).$$

Como ambos os fatores de eficiências de M_{12} são superiores aos respectivos fatores de M_{13}, daí a conclusão de que a modulação 4-QAMS$_{12}$ é mais eficiente do que 4-QAMS$_{13}$, o que prova a primeira desigualdade de (5.19) . Por outra parte, das matrizes M_{12} e M_{15} deduzimos que

$$p^{12}\left(s_j|s_i\right) = \frac{1}{20} < \frac{1}{10} = p^{15}\left(s_j|s_i\right)$$

e

$$n\left(M_{12}\right) = 6 = n\left(M_{15}\right).$$

Consequentemente, as matrizes M_{12} e M_{15} possuem os mesmos número de elementos nulos, entretanto, as probabilidades de acertos não nulas de M_{15} é duas vezes maior do que as de M_{12}. Concluímos então que a modulação 4-QAMS$_{15}$ é mais eficiente do que 4-QAMS$_{12}$, o que prova a segunda desigualdade de (5.19).

A analise anterior foi bastante produtiva pois resultou num modo simples e objetivo de auferir a eficiência de uma modulação. Nos casos das três modulações da forma 4-QAMS's analisadas, o processo foi mais simples ainda, uma vez que as matriz M_{13}, M_{12} e M_{15} apresentavam números muito grandes de probabilidades $\frac{1}{22}$, $\frac{1}{20}$ e $\frac{1}{10}$. Mas quando os conjuntos das probabilidades das matrizes apresentam uma variação muito grande de valores, é evidente que a comparação pelo valor mínimo da probabilidade não nula não garante a relação correta de eficiências das modulações. Neste caso, devemos utilizar a média das probabilidades dos elementos não nulos das matrizes de probabilidades condicionadas. Nos casos das matrizes M_{13}, M_{12} e M_{15}, temos as seguintes médias

$$\begin{aligned} m(M_{12}) &= \frac{3\cdot\frac{1}{20}+6\cdot\frac{2}{20}+\frac{5}{20}}{10}=\frac{1}{10}, \\ m(M_{13}) &= \frac{9\cdot\frac{1}{22}+4\cdot\frac{2}{22}+\frac{5}{22}}{14}=\frac{1}{14} \\ m(M_{15}) &= \frac{10\cdot\frac{1}{10}}{10}=\frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Observe que em vez das relações de desigualdades (5.19), temos as seguintes relações entre as médias

$$m(M_{13}) < m(M_{12}) = m(M_{15}).$$

Então, pelos valores das médias, deduzimos que as modulações 4-QAMS$_{12}$ e 4-QAMS$_{15}$ têm a mesma eficiência e estas são maiores do que a eficiência de 4-QAMS$_{13}$. Se a análises parasse aqui teríamos uma conclusão um pouco diferente das desigualdades (5.19), no entanto há outros fatores que tornam uma modulação mais eficiente, um deles também muito importante é o grau de regularidade da modulação. Como M_{15} é a matriz do canal equiprovável de um modulação regular cuja partição é $4R_4$ e M_{13} vem de uma modulação com um grau menor de regularidade ($3R_4R_{12}$), a conclusão é decidir pelas relações de desigualdades (5.19) como sendo a mais apropriada para definir os desempenhos das modulações 4-QAMS$_{12}$, 4-QAMS$_{13}$ e 4-QAMS$_{15}$.

Após as conclusões acima, iremos definir uma medida para o desempenho de uma modulação QAMS$_{15}$ utilizando os dois maiores fatores que contribuem para a sua performance: as probabilidades condicionadas de acertos e o grau de regularidade da modulação o qual será definido a seguir.

Definição 5.7.2 *Seja* k-QAMS $\equiv \sum_{i=1}^{s}\beta_i R_{\alpha_i}$, $\sum_{i=1}^{s}\beta_i = k$, *a partição da modulação* k-QAMS, *chamaremos de* grau de regularidade da modulação k-QAMS *o número real definido pela igualdade*

$$\xi(k\text{-}\,\mathrm{QAMS}) = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\beta_i \log \alpha_i, \tag{5.20}$$

Desde que s é o número de regiões distintas do modelo da modulação, na fórmula do grau de regularidade (5.20), o fator $1/s$ tem a função de reduzir o grau das modulações com um número maior de regiões e consequentemente valorizar as modulações que apresentam graus de regularidades maiores. Os fatores β_i e $\log \alpha_i$, têm como objetivo, fornecer o número de regiões com os mesmos números de lados α_i e não deixa de ser os fatores relacionados com o grau de regularidade da modulação.

Definição 5.7.3 *Seja $M_{k,k}$ a matriz de probabilidades condicionadas de acertos do canal equiprovável $C_{k,k}$ associado à modulação k-QAMS. Denominaremos de* medida de eficiência da modulação k-QAMS, *o número real positivo dado pela igualdade*

$$\varepsilon = m\xi. \tag{5.21}$$

O objetivo da fórmula (5.21) é introduzir a medida de eficiência da modulação k-QAMS através do fator m, o qual fornece as informações das probabilidades condicionadas de acertos do canal $C_{k,k}$, e o do fator ξ da regularidade do modelo Ξ da modulação k-QAMS. Com isso, todas as informações essenciais dos principais componentes da modulação estão incomporada na medida da eficiência da modulação k-QAMS, valorizando aquelas que apresentam os maiores graus de regularidades.

Como exemplos de cálculos de medidas de eficiências de modulações usando a Definição 5.7.3, as eficiência de M_{12}, M_{13} e M_{15} são dadas por

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12} &= m\left(M_{12}\right)\xi\left(4\text{- QAMS}_{12}\right) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}\left(3\log 4 + \log 12\right) = 0,332\,19, && \text{(5.22a)}\\
\varepsilon_{13} &= m\left(M_{13}\right)\xi\left(4\text{- QAMS}_{13}\right) = \frac{1}{14}\cdot\frac{1}{2}\left(3\log 4 + \log 12\right) = 0,237\,28, && \text{(5.22b)}\\
\varepsilon_{15} &= m\left(M_{12}\right)\xi\left(4\text{- QAMS}_{15}\right) = \frac{1}{10}\left(4\log 4\right) = 0,554\,52. && \text{(5.22c)}
\end{aligned}$$

Neste caso, as medidas de eficiências das modulações 4-QAMS_{12}, 4-QAMS_{12} e 4-QAMS_{12} satisfazem as relações de desigualdades

$$\varepsilon_{13} < \varepsilon_{12} < \varepsilon_{15},$$

mesmo tipo de relações de desigualdades (5.19).

Um outro exemplo mostrando o processo do cálculo da medida da eficiência de uma modulação QAMS será efetuado nas modulações 5-QAMS's, com uma componente de bordo, apresentadas na Subseção 5.7.1. Utilizando as matrizes de probabilidades M_0, M_1 e M_5 das modulações sobre $2T_2$

$$5\text{- QAMS}_1 \equiv 4R_4R_{12},\ 5\text{- QAMS}_0 \equiv 4R_4R_{12} \text{ e } 5\text{- QAMS}_5 \equiv 4R_4R_{12},$$

obtemos as respectivas probabilidades médias

$$\begin{aligned}
m\left(M_1\right) &= \frac{12\cdot\frac{1}{29} + 6\cdot\frac{2}{29} + \frac{5}{29}}{19} = 0,0526,\\
m\left(M_0\right) &= \frac{14\cdot\frac{1}{29} + 6\cdot\frac{2}{29} + \frac{5}{29}}{21} = 0,0509,\\
m\left(M_5\right) &= \frac{17\cdot\frac{1}{17}}{17} = 0,0588,
\end{aligned}$$

que atendem as seguintes relações de desigualdades

$$m(M_0) < m(M_1) < m(M_5)$$

Pela fórmula (5.21) as medidas de eficiências das modulações 5-QAMS$_1$, 5-QAMS$_0$ e 5-QAMS$_5$ são dadas por

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= m(M_1)\,\xi(\text{4- QAMS}_{12}) = 0,0526 \cdot \frac{1}{2}(4\log 4 + \log 12) = 0,211\,19, \\
\varepsilon_2 &= m(M_0)\,\xi(\text{4- QAMS}_{13}) = 0,0509 \cdot \frac{1}{2}(4\log 4 + \log 12) = 0,204\,37, \\
\varepsilon_5 &= m(M_5)\,\xi(\text{4- QAMS}_{12}) = 0,0588\,(5\log 4) = 0,407\,57.
\end{aligned}$$

Neste caso temos as seguintes relações de desigualdades

$$\varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_5,$$

e como podemos verificar, relações preservadas também pela probabilidades médias.

Uma observação que nos chamou muito a nossa atenção é o fato das modulações com duas componentes de bordos apresentarem medidas de desempenhos melhores do que as modulações com uma componente de bordo. Note que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= 0,211\,19 < 0,237\,28 = \varepsilon_{13}, \\
\varepsilon_1 &= 0,204\,37 < 0,332\,19 = \varepsilon_{13}, \\
\varepsilon_5 &= 0,407\,57 < 0,554\,52 = \varepsilon_{15}.
\end{aligned}$$

Os dados acima mostram que a fórmula da medida de eficiência ε definida em (5.21) dão informações muito precisas e coerentes em relação as performances de modulações QAMS, inclusive quando estas se encontram em superfícies diferentes com componentes de bordos. Este é mais um resultado deste trabalho que nos deixa muito motivados quanto a sua aplicabilidade. Não foi fácil obter uma fórmula que nos desse informações tão confiáveis e coerentes entre modulações de classes de superfícies diferentes. Uma tentativa de obter uma fórmula equivalente consta em [24]. Além de mais complexa é menos eficiente do que (5.21) . A fórmula da eficiência apresentada por Lima e Luana em [24], para o caso do grafo completo K_n, além de sua complexidade maior, não funciona para medir o desempenho de modulações que se encontram em famílias de superfícies distintas, nem nos casos das superfícies que diferem somente por componentes de bordos. Pela sua simplicidade e capacidade de mostrar os desempenhos de modo coerente, entre modulações que se encontram em família de superfícies distintas, podemos dizer que (5.21) representa um grande avanço na tentativa de encontrar uma medida eficiente para o desempenho de modulações QAMS's.

Vale ressaltar que a medida de eficiência ε introduzido nesta subseção aplica-se a qualquer tipo de modulação e pode ser utilizada para medir a eficiencia de todas as modulações identificadas neste trabalho. Fica aqui, então, mais uma sugestão para trabalhos futuros.

5.7.5 Modulações com três componentes de bordos

Utilizando o mesmo processo de identificação e construção da Subseção 5.7.3, deduzimos que as possíveis modulações distintas com três componentes de bordo são aquelas cujas operações de exéreses são aplicadas nas três regiões do mergulho $K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T \equiv 5R_4R_{12}$ cujos vértices do dual são:

1^a) v_0, v_1 e v_2, pois $\deg v_0 = \deg v_1 = \deg v_2 = 4$, v_1 e v_2 não apresentam duplas ligações e v_0, sim;

2^a) v_0, v_1 e v_3, pois $\deg v_0 = \deg v_1 = \deg v_3 = 4$, v_1 não apresentam duplas ligações, porém, v_0 e v_3, sim;

3^a) v_0, v_3 e v_4, pois $\deg v_0 = \deg v_1 = \deg v_3 = 4$, e todas apresentam duplas ligações;

4^a) v_1, v_2 e v_5, pois $\deg v_1 = \deg v_2 = 4$, $\deg v_5 = 5$, v_1 e v_2 não apresentam duplas ligações e v_5 apresenta múltiplas ligações;

5^a) v_0, v_1 e v_5, pois $\deg v_0 = \deg v_1 = 4$, $\deg v_5 = 5$, v_1 não apresentam duplas ligações, v_0 sim e v_5 apresenta múltiplas ligações;

6^a) v_0, v_3 e v_5, pois $\deg v_0 = \deg v_3 = 4$, $\deg v_5 = 5$, v_0 e v_3 apresentam duplas ligações e v_5 apresenta múltiplas ligações;

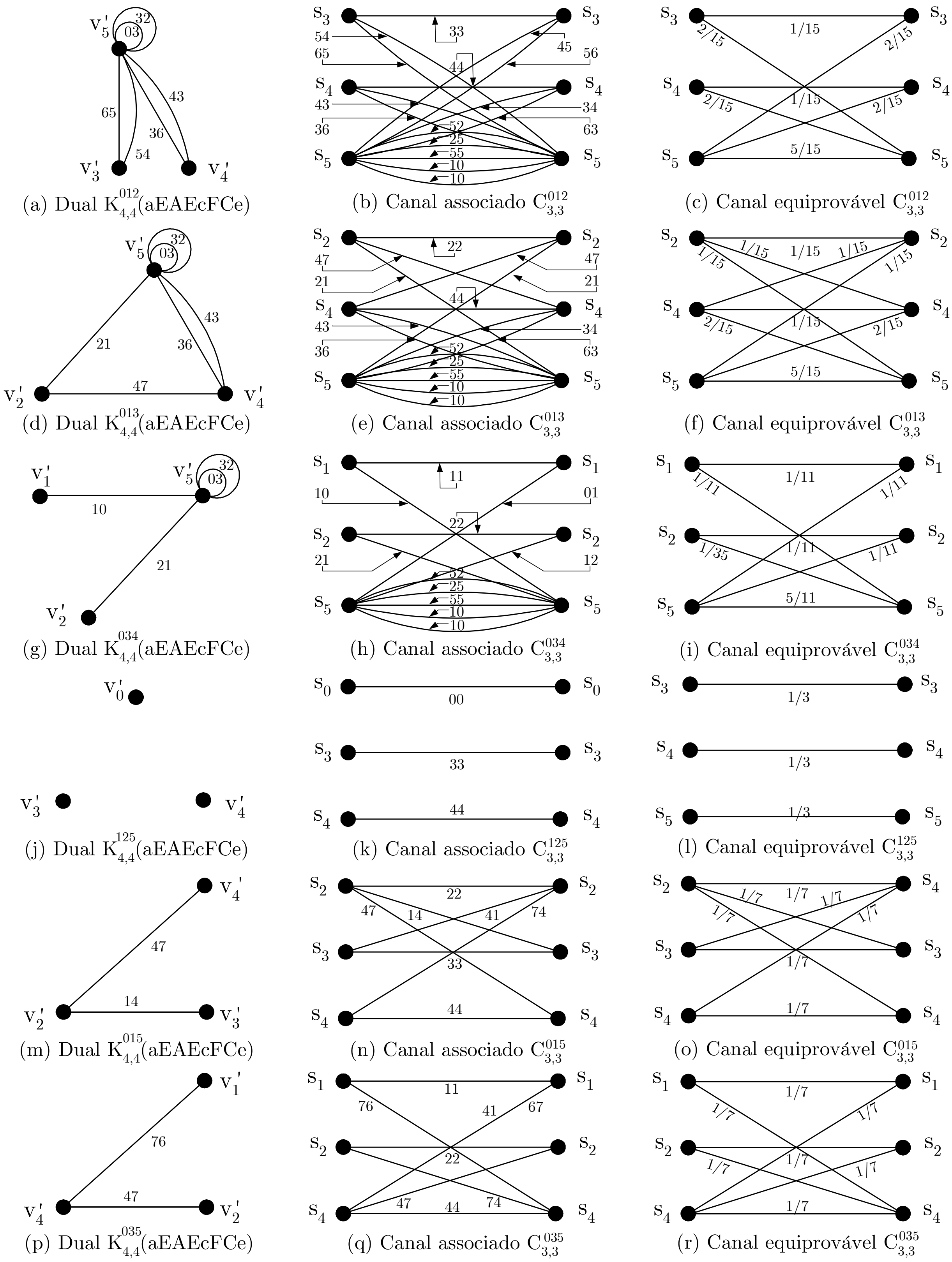
Consequentemente, temos seis opções de escolhas distintas com três componentes de bordos, todas para constelações de três sinais, definidas pelas seguintes partições

$$\begin{array}{lcl}
3\text{-}\,\mathrm{QAMS}_{012} & : & K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_3 \equiv 2R_4R_{12} = 5R_4R_{12}\backslash\left\{R_4^0, R_4^1, R_4^2\right\}, \\
3\text{-}\,\mathrm{QAMS}_{013} & : & K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_3 \equiv 2R_4R_{12} = 5R_4R_{12}\backslash\left\{R_4^0, R_4^1, R_4^3\right\}, \\
3\text{-}\,\mathrm{QAMS}_{034} & : & K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_3 \equiv 2R_4R_{12} = 5R_4R_{12}\backslash\left\{R_4^0, R_4^3, R_4^4\right\}, \\
3\text{-}\,\mathrm{QAMS}_{125} & : & K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_3 \equiv 2R_4R_{12} = 5R_4R_{12}\backslash\left\{R_5^1, R_4^2, R_{12}^5\right\}, \\
3\text{-}\,\mathrm{QAMS}_{015} & : & K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_3 \equiv 2R_4R_{12} = 5R_4R_{12}\backslash\left\{R_5^0, R_4^1, R_{12}^5\right\}, \\
3\text{-}\,\mathrm{QAMS}_{035} & : & K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_3 \equiv 2R_4R_{12} = 5R_4R_{12}\backslash\left\{R_5^0, R_4^3, R_{12}^5\right\}.
\end{array}$$

As construções dos grafos duais, canais equivalentes e canais equiprováveis das seis modulações acima estão ilustradas na Figura 5.7.4. Uma breve inspeção nos grafos mostra que pelo menos duas das modulações possuem desempenhos iguais, 3-QAMS_{015} e 3-QAMS_{035}. Note que os grafos correspondentes aos duais, aos canais associados e canais equivalentes são todos isomorfos entre si.

Para mostrar que o isomorfismo entre os grafos correspondentes existe, basta fazê-lo nos grafos duais: definamos a função $f\,(m) \to (p)$ entre os vértices dos duais de (m) e (p), através das igualdades:

$$f\,(v_2') = f\,(v_4')\,,\ f\,(v_3') = f\,(v_2') \quad \text{e}\ f\,(v_4') = f\,(v_1')\,.$$



(a) Dual $K_{4,4}^{012}$(aEAEcFCe) (b) Canal associado $C_{3,3}^{012}$ (c) Canal equiprovável $C_{3,3}^{012}$

(d) Dual $K_{4,4}^{013}$(aEAEcFCe) (e) Canal associado $C_{3,3}^{013}$ (f) Canal equiprovável $C_{3,3}^{013}$

(g) Dual $K_{4,4}^{034}$(aEAEcFCe) (h) Canal associado $C_{3,3}^{034}$ (i) Canal equiprovável $C_{3,3}^{034}$

(j) Dual $K_{4,4}^{125}$(aEAEcFCe) (k) Canal associado $C_{3,3}^{125}$ (l) Canal equiprovável $C_{3,3}^{125}$

(m) Dual $K_{4,4}^{015}$(aEAEcFCe) (n) Canal associado $C_{3,3}^{015}$ (o) Canal equiprovável $C_{3,3}^{015}$

(p) Dual $K_{4,4}^{035}$(aEAEcFCe) (q) Canal associado $C_{3,3}^{035}$ (r) Canal equiprovável $C_{3,3}^{035}$

Figura 5.7.4: Grafos correspondentes aos duais, canais associados e canais equiprováveis de modulações em superfícies com três componentes de bordo como f é bijetora, então os grafos duais são isomorfos. Se o grafos duais são isomorfos então os grafos correspondentes aos canais equivalentes e aos canais equiprováveis certamente o serão, pois estes preservam as conexões e portanto o isomorfismos também.

Uma propriedade imediata que observamos diretamente da inspeção dos últimos conjuntos de grafos de Figura 5.7.4, é a condição de igualdade entre o os grafos correspondentes ao canal associado $C^a_{k,k}$ e o canal equivalente $C^e_{k,k}$.

Proposição 5.7.4 *$C^a_{k,k} = C^e_{k,k}$ se, e somente se, $C^a_{k,k}$ não contem múltiplos lados.*

Demonstração. *De fato, se $C^a_{k,k}$ tivessem múltiplos lados entre dois vértices s_i e s_j.* Logo *$C^e_{k,k}$ teria uma única transição entre s_i e s_j, logo $C^a_{k,k}$ seria diferente de $C^e_{k,k}$, isto prova que se $C^a_{k,k}$ não contém múltiplos lados, então $C^a_{k,k} = C^e_{k,k}$. A recíproca é óbvia.* ■

Observamos ainda, nos grafos da Figura 5.7.4, as existências de canais equiprováveis que atingem os dois extremos: grafos completos bipartidos, como é o caso do canal (f); e o outro extremo, que é o caso do canal perfeito, o qual possuem somente as transições de acertos, como é o caso do canal (l).

A conclusão acima é muito importante porque mostra que muitos dos canais $C_{k,k}$ têm representantes através do método do mergulho do grafo. É evidente que não há todas as representações possíveis, uma vez que a quantidade de canais gerada pelo processo do mergulho de um determinado $K_{m,n}$ é finito, porém, devemos ter em mente que os mesmos tipos de canais podem ser gerados por infinitos representantes de $K_{m,n}$, às vezes com números de vértices menores, às vezes com números de vértices maiores. Sendo assim, seria pouco provável que uma determinada composição de regiões não tivesse representatividade através do processo do mergulho de dados. Se não for através do mergulhos do grafo completo biparticionado, certamente o será através do grafo completo. Esta conclusão será enunciada na forma da seguinte afirmação.

Conjectura 5.7.5 (Conjectura de Lima) *Se $C_{k,k}$ é o canal associado a uma modulação k-*QAMS *cuja partição é do tipo $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ então existe um grafo G e uma superfície Ω tal que $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ é um mergulho de 2-células.*

Observação 5.7.6 *A Conjectura 5.7.5 pode ser provada usando somente os mergulhos do grafo completo K_n e do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$, observando-se que as regiões R_{α_i}'s da partição $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$, ou são todas pares (nos referimos a paridade do número de lados α_i da região R_{α_i} da partição $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$), ou contém regiões ímpares. No primeiro caso, basta mostrar que, se $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ não for de um mergulho do grafo completo K_n, então deve ser de um mergulho de $K_{m,n}$. No segundo caso (onde α_i é ímpar) devemos mostrar que existe um mergulho do grafo completo K_n que contém uma subpartição $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ em sua composição. Se o mergulho é da forma $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$, então a modulação encontra-se sobre uma superfície sem bordo; caso contrário, se $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ está contido em $\cup_{i=1}^{t} R_{\alpha_i}$, $t > k$, isto é, $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ é parte de um mergulho $G \hookrightarrow \Omega' \equiv \cup_{i=1}^{t} R_{\alpha_i}$, então a modulação k-*QAMS *vem do mergulho sobre a superfície com b componentes bordos*

$$G \hookrightarrow \Omega_b \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i},$$

nos quais os parâmetoros b, t e k estão relacionados pela igualdade $t - b = k$.

Provavelmente, no caso em que todos os α_i's são pares, a Conjectura de Lima pode ser provada usando somente os mergulhos do grafo completo bipartido, utilizando o mesmo procedimento do caso ímpar descrito acima.

Este é mais uma proposto para trabalhos futuros que dão continuidade a este trabalho de monografia.

Para finalizar esta subseção, apresentemos o desempenho das modulações k-QAMS relacionadas na Figura 5.7.4, cujas matrizes de probabilidades dos canais equiprováveis são dadas por:

$$M_{012} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & \frac{2}{15} \\ 0 & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & \frac{5}{15} \end{bmatrix}, \quad M_{013} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{5}{15} \end{bmatrix}, \quad M_{034} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \end{bmatrix},$$
$$M_{125} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad M_{015} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}, \quad M_{035} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Calculando a probabilidade média das matrizes acima, temos que:

$$\begin{aligned}
m_{012} &= \frac{2 \cdot \frac{1}{15} + 4 \cdot \frac{2}{15} + \frac{5}{15} + \frac{2}{15}}{7} = 0,161\,90, \\
m_{013} &= \frac{6 \cdot \frac{1}{15} + 4 \cdot \frac{2}{15} + \frac{5}{15}}{9} = 0,140\,74, \\
m_{034} &= \frac{6 \cdot \frac{1}{11} + \frac{5}{11} + \frac{2}{11}}{7} = 0,168\,83, \\
m_{125} &= \frac{3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{3}}{7} = 0,428\,57, \\
m_{015} &= \frac{7 \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{7}}{7} = 0,183\,67, \\
m_{035} &= \frac{7 \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{7}}{7} = 0,183\,67,
\end{aligned}$$

neste caso, as médias satisfazem as seguintes relações de desigualdades

$$m_{013} < m_{012} < m_{034} < m_{015} = m_{035} < m_{125}. \tag{5.23}$$

Por outra parte, a medida da eficiência das modulações são dadas por

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{012} &= m_{012}\xi\left(3\text{- QAMS}_{012}\right) = 0,16190 \cdot \frac{1}{2}\left(2\log 4 + \log 12\right) = 0,425\,59, \\
\varepsilon_{013} &= m_{013}\xi\left(3\text{- QAMS}_{013}\right) = 0,14074 \cdot \frac{1}{2}\left(2\log 4 + \log 12\right) = 0,369\,97, \\
\varepsilon_{034} &= m_{034}\xi\left(3\text{- QAMS}_{034}\right) = 0,168\,83\left(3\log 4\right) = 0,702\,14, \\
\varepsilon_{125} &= m_{125}\xi\left(3\text{- QAMS}_{125}\right) = 0,428\,57\left(3\log 4\right) = 1,782\,4, \\
\varepsilon_{015} &= m_{015}\xi\left(3\text{- QAMS}_{015}\right) = 0,183\,67\left(3\log 4\right) = 0,763\,86, \\
\varepsilon_{035} &= m_{012}\xi\left(3\text{- QAMS}_{035}\right) = 0,183\,67\left(3\log 4\right) = 0,763\,86,
\end{aligned}$$

as quais estão relacionadas pelas seguintes relações de desigualdades

$$\varepsilon_{013} < \varepsilon_{012} < \varepsilon_{034} < \varepsilon_{015} = \varepsilon_{015} < \varepsilon_{125},$$

relações que preservam a mesma ordem de desigualdades das médias em (5.23).

Novamente foi comprovada a coerência dos resultados com aquilo que esperávamos dos desempenhos das modulações: houve uma acentuada melhora nos dempenhos das modulação 3-QAMS's calculados acima, quando comparado com os desempenhos das modulações 4-QAMS (Para uma comparação veja (5.22a),(b),(c)). Constatamos a coerencia na ordem dos desempenhos dos cálculos das modulações 3-QAMS's e 4-QAMS's apresentadas acima, quando da análise das probabilidades de acertos, graus de regularidades e componentes de bordos.

Observamos que a probabilidade média do canal equiprovável definida como sendo a soma de todas as probabilidades não nulas da matriz de probabilidades dividido pelo número de probabilidades não nulas, do jeito que foi definido, resulta nas igualdades

$$m(M) = \frac{\sum p(s_j|s_i)}{n(p(s_j|s_i))} = \frac{1}{n(p(s_j|s_i))}, \tag{5.24}$$

onde $p(s_j|s_i) \neq 0$ e $n(p(s_j|s_i))$ é o número de probabilidades não nulas de M. Desse modo, todos as modulações, cujas matrizes de probabilidades M, têm o mesmo número de probabilidades nulas, teriam a mesma média $m = \frac{1}{n(p(s_j|s_i))}$. O problema é que, definido desse modo, a média m não contribui para a medidade de eficiência ε quando as matrizes apresentam os mesmos números de probabilidades não nulas. Na verdade, m só depende do número de transições nulas, quanto mais transições nulas menor é o número de probabilidades nulos $n(p(s_j|s_i))$, e com isto o valor da média m e majorada pela majoração de $n(p(s_j|s_i))$.

O modo utilizado para majorar as probabilidades nulas de M, e ter um numerador diferenciado para a fórmula (5.24), foi através da adicão, no numerador de (5.24), do termo extra

$$\frac{n(p(s_j|s_i) = 0)}{n(s_j|s_i)}$$

onde $n(p(s_j|s_i) = 0)$ é o número de probabilidades nulas de M e $n(s_j|s_i)$ é o número de transições do canal associado $C^a_{k,k}$. Foi utilizada, para determinar a probablilidade média dos canais equiprováveis associados às modulações com três componentes de bordos da Figura 5.7.4, a seguinte média alternativa

$$m = \frac{\sum p(s_j|s_i) + \frac{n(p(s_j|s_i)=0)}{n(s_j|s_i)}}{n(p(s_j|s_i))}. \tag{5.25}$$

Como o objetivo aqui é somente relacionar a eficiência das modulações em uma ordem de grandeza, foi constatado que as fórmulas (5.24) e (5.25) dão resultados equivalentes no que diz respeito a posição da modulação na relação de ordem de eficiência. A fórmula (5.25) passa mais informações, valoriza mais ainda as transições nulas e adequa-se melhor as modulações que apresentam números iguais de probabilidades nulas. Por estas propriedades recomendamos o uso da média (5.25) no cálculo da eficiência de uma modulação QAMS.

5.7.6 Modulações com quatro componentes de bordos

Hipoteticamente, podemos propor modulações k-QAMS para qualquer conjunto de k sinais, mas na prática não faz sentido projetar modulações para um constelação de um e zero sinais, então iremos encerrar aqui o nosso trabalho de construção dos componentes gráficos de uma modulação, porque atingimos a quantidade de dois sinais nas modulação de $K_{4,4}$ sobre o bitoro com quatro componentes de bordos.

Utilizando os mesmos procedimentos da Subseção 5.7.3, deduzimos que as modulações distintas com quatro componentes de bordos vindas de mergulhos de $K_{4,4}$ sobre o bitoro, devem ser escolhidas através das seguintes condições de vértices do grafo dual de $K_{4,4}\,(aEAEcFCe)$:

1^a) v_0, v_1, v_2 e v_3, pois $\deg v_0 = \deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = 4$, v_1 e v_2 não apresentam duplas ligações e v_0 e v_3, sim;
2^a) v_0, v_1, v_3 e v_4, pois $\deg v_0 = \deg v_1 = \deg v_3 = \deg v_3 = 4$, v_1 não apresentam duplas ligações, porém, v_0, v_3 e v_4, sim;
3^a) v_0, v_1, v_2 e v_5, pois $\deg v_0 = \deg v_1 = \deg v_2 = 4$, $\deg v_5 = 5$, v_1 e v_2 não apresentam duplas ligações, v_0 sim e v_5 apresenta múltiplas ligações;
4^a) v_0, v_1, v_3 e v_5, pois $\deg v_0 = \deg v_1 = \deg v_4 = 4$, $\deg v_5 = 5$, v_1 não apresentam duplas ligações, v_0 e v_3 sim e v_5 apresenta múltiplas ligações;
5^a) v_0, v_3, v_4 e v_5, pois $\deg v_0 = \deg v_3 = \deg v_3 = 4$, $\deg v_5 = 5$, v_0, v_3 e v_4 apresentam duplas ligações e v_5 apresenta múltiplas ligações;

As modulações correspondentes as cinco opções de escolhas acima são:

$$
\begin{aligned}
2\text{- QAMS}_{0123} &: K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_4 \equiv R_4R_{12} = 5R_4R_{12}\backslash\left\{R_4^0, R_4^1, R_4^2, R_4^3\right\},\\
2\text{- QAMS}_{0134} &: K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_4 \equiv R_4R_{12} = 5R_4R_{12}\backslash\left\{R_4^0, R_4^1, R_4^3, R_4^4\right\},\\
2\text{- QAMS}_{0125} &: K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_4 \equiv 2R_4 = 5R_4R_{12}\backslash\left\{R_4^0, R_4^1, R_4^2, R_4^5\right\},\\
2\text{- QAMS}_{0135} &: K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_3 \equiv 2R_4 = 5R_4R_{12}\backslash\left\{R_5^0, R_4^1, R_{12}^3, R_4^5\right\},\\
2\text{- QAMS}_{0345} &: K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_3 \equiv 2R_4 = 5R_4R_{12}\backslash\left\{R_5^0, R_4^3, R_{12}^4, R_4^5\right\},
\end{aligned}
$$

Observe que as três últimas modulações 2-QAMS$_{0125}$, 2-QAMS$_{0135}$ e 2-QAMS$_{0345}$ são modulações regulares binárias, e portanto do tipo e.s.g.u.

A Figura 5.7.5 ilustra os grafos correspondentes aos duais, canais associados e canais equivalentes das cinco modulações sobre o bitoro com quatro componentes de bordos, relacionados acima. São todas modulações para constelações de dois sinais, utilizada para transmição com um alfabeto binário.

Uma rápida inspeção nestes grafos mostra que só existem dois tipos de canais equiprováveis das modulações binárias, o grafo completo biparticionado $K_{2,2}$ e o subgrafo do grafo $K_{2,2}$ que contém somente as duas transições do tipo $(s_i|s_i)$, equivalente as transições de acertos.

Das cinco modulações apresentadas na Figura 5.7.5, o conjunto de probabilidades das respectivas matrizes de probabilidades só coincide em duas delas. Sob este aspecto, concluímos que quatro das cinco modulações são distintas, no entanto, devido a pouca quantidade de dados e a coincidência dos grafos, pois só existem dois tipos, a fórmula da eficiência da modulação (5.21) não detecte esta diferença. Só teremos certeza desta suposição após os cálculos da eficiência ε de cada modulação. Então determinemos as matrizes de probabilidades de cada canal.

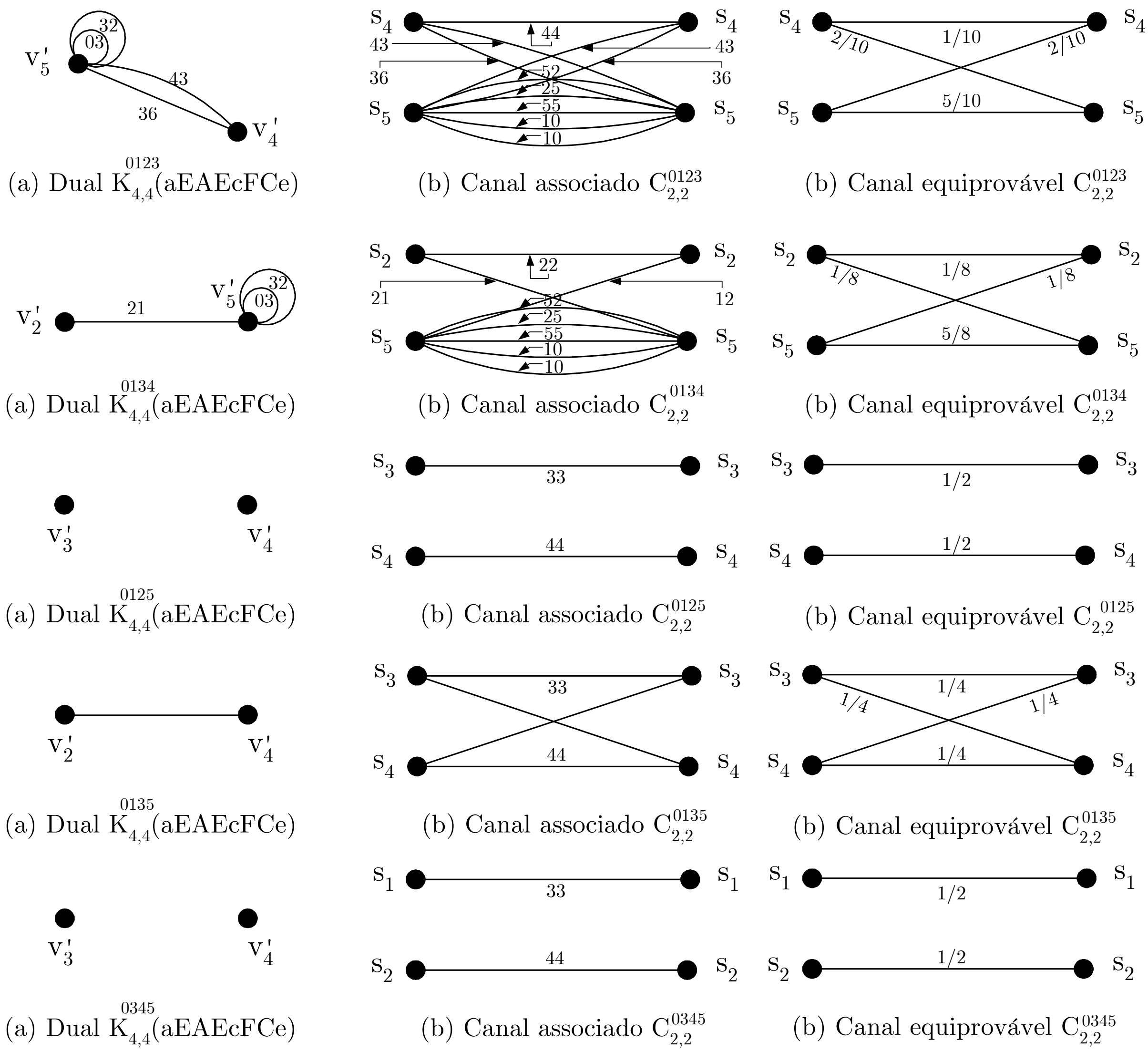


Figura 5.7.5: Grafos correspondentes aos duais, canais associados e canais equiprováveis de modulações em superfícies com três componentes de bordo

As matrizes de propabilidades dos canais equiprováveis da Figura 5.7.5 são dadas por

$$M_{0123} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{5}{10} \end{bmatrix}, \quad M_{0134} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}, \quad M_{0125} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$
$$M_{0135} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad M_{0345} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Evidentemente, que se aplicarmos a fórmula (5.24) , as matrizes M_{0123} e M_{0134} terão probabilidades médias iguais. Mas isso vai de encontro aos conjuntos de probabilidades destas matrizes, pois estes são completamente diferentes. Então, para espressar esta diferença, calculemos a probabilidade média usando os elementos da diagonal e acima da diagonal da matriz, pois estes representam os elementos que podem ter probabilidades distintas. Redefinindo a fórmula da média (5.24) , de tal modo que a estimativa seja realizada somente nos elementos da diagonal e parte superior das matriz $M_{k\times k}$, obtemos a seguinte fórmula para a probabilidade média

$$m = \frac{\sum m_{ij} + \frac{n(p(s_j|s_i)=0)}{n(s_j|s_i)}}{\sum_{h=1}^{k} h}, \text{ para todo } i \leq j. \tag{5.26}$$

Aplicando a fórmula (5.26) nas matrizes de probabilidades dos canais equiprováveis da Figura 5.7.5, obtemos as seguintes probabilidades médias

$$\begin{aligned}
m_{0123} &= \frac{\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{5}{10}}{3} = 0,266\,67, \\
m_{0134} &= \frac{\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{5}{8}}{3} = 0,333\,33, \\
m_{0125} &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}{3} = 0,666\,67, \\
m_{0135} &= \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{3} = 0,25, \\
m_{0345} &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}{3} = 0,666\,67,
\end{aligned}$$

as quais estão relacionada pelas seguintes relações de igualdade e desigualdades

$$m_{0135} < m_{0123} < m_{0134} < m_{0125} = m_{0345}. \tag{5.27}$$

Aplicando a fórmula da eficiência da modulação (5.21), obtemos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{0123} &= m_{0123}\xi_{0123} = 0.26667 \cdot \frac{1}{2}(\log 4 + \log 12) = 0,516\,17 \\
\varepsilon_{0134} &= m_{0134}\xi_{0134} = 0.33333 \cdot \frac{1}{2}(\log 4 + \log 12) = 0,645\,19 \\
\varepsilon_{0125} &= m_{0125}\xi_{0125} = 0.66667 \cdot 2\log 4 = 1,848\,4 \\
\varepsilon_{0135} &= m_{0135}\xi_{0135} = 0.25 \cdot 2\log 4 = 0,693\,15 \\
\varepsilon_{0345} &= m_{0345}\xi_{0345} = 0.66667 \cdot 2\log 4 = 1,848\,4,
\end{aligned}$$

cujas relações de desigualdades das eficiências são dadas por

$$\varepsilon_{0123} < \varepsilon_{0134} < \varepsilon_{0135} < \varepsilon_{0125} = \varepsilon_{0345}, \tag{5.28}$$

relações que não obedecem a mesma ordem estabelecida em (4.9) .

Embora a ordem das relações de desigualdades (5.28) não preservarem a ordem da probabilidades médias (5.27) , a coerência das relações de desigualdades (5.28) é muito mais lógica em relação aos desempenhos das modulações, quando analisamos o conjunto de probabilidades das matrizes. Note que, em média, o conjunto de probabilidades de M_{0134} é bem maior do que o conjunto de probabilidades de M_{0123}, daí a relação de eficiência $\varepsilon_{0123} < \varepsilon_{0134}$ ser coerente. Observamos ainda que as três últimas modulações são regulares para dois sinais, então todas devem serem mais eficientes do que as modulação 2-QAMS$_{0123}$ e 2-QAMS$_{0134}$, uma vez que estas são irregulares. Novamente, ocorre este tipo de coerência em (5.27). Por último, as modulações 2-QAMS$_{0125}$ e 2-QAMS$_{0345}$ representam a eficiência máxima por representarem um canal sem ruído. Note que essas possuem eficiências iguais, máximas e portanto há coerência nas relações (5.28).

Apesar das relações (5.27) não preservarem a ordem de (5.28), notamos que esta ordem está coerente com os conjuntos de probabilidades das matrizes de probabilidades dos canais equiprováveis. Por essas razões a fórmula da probabilidade média (5.26) dá muito mais informações do que a fórmula (5.25). Não há nem dúvida do que (5.26), a fórmula aprimorada da probabilidade média (5.25), é uma média que dar uma estimativa correta do conjunto de probabilidades das transições do canal. Finalmente, após um árduo percurso, conseguimos uma definição confiável para designar a probabilidade média das transições e medir de forma coerente, a eficiência de uma modulação k-QAMS.

5.8 Subclasses de Canais

Nos Algoritmos 5.6.5 e 5.6.6 constatamos que as construções dos canais associados às modulações QAMS's dependem exclusivamente do tipo de emaranhamento das regiões dos mergulhos do grafo e seu dual. A pergunta é até que ponto os emaranhados afetam os canais associados a modulações QAMS?

A princípio, não vemos diferença alguma entre duas modulações com os mesmos tipos de partições: são modulações para uma mesma constelação de sinais e, para cada sinal s_i de uma constelação que se encontra numa região de decisão R^i_α de uma das modulações, existe um sinal s_j da outra constelação que se encontra no mesmo tipo de região de decisão de s_i. Deste ponto de vista elas seriam equivalentes.

Partições idênticas são muito comuns nos mergulhos de um grafo. Em relação ao número de mergulhos, podemos dizer que o número de partições distintas é muito pequeno. Um exemplo enconstra-se no Capítulo 3: dentre os 1 679 616 mergulhos de $K_{4,4}$ encontramos somente 27 partições distintas. É um número relativamente pequeno quando comparado com 1 679 616. Sob este aspecto, seria até um disperdício utilizar somente 27 mergulhos como projetos de modulações e descartar os 1 679 589 mergulhos restantes. Veja por exemplo na Tabela 3.10.2, que no caso das partições do tipo $3R_4R_{20}$ de $K_{4,4}$ sobre o tritoro, são 2 096 mergulhos distintos para desfrutarmos somente um dos modelos como projeto de modulação, descartando os 2 095 mergulhos restantes. Parece um grande desperdício, são poucos modelos distintos a escolher dentre um universo extraordinariamente grande.

A idéia então é analisar os mergulhos com um mesmo tipo de partição para descobrir alguma diferença sutil que caracterize projetos de modulações com performances diferentes. Se esta diferença existe, então o número de modulações em superfícies orientáveis sem bordo será superior a 27 e não estaríamos descartando tantos mergulhos neste processo.

Esta não é a primeira tentativa de identificar modulações de desempenhos diferentes dentre mergulhos com o mesmo tipo de partição. Lima e Luana [24] mostraram que modulações vindas de mergulhos com o mesmo tipo de partição possuem desempnhos diferentes quando possuem canais associados não isomorfos. Tal relação resultou na definição de canais equivalentes, que são aqueles que estão associados a grafos isomorfos (veja Definição 2.6.2). Um estudo mais detalhado das condições de canais equivalentes pode ser visto em [24].

Se canais associados a modulações com o mesmo tipo de partição podem ter desempenhos diferentes, então há um subdivisão nas classes de modulações de um mergulho de um grafo. Por exemplo, cada uma das 27 classes de modulações de K_5 podem ser subdivida em subclasses de modulações com performances distintas e, estas subclasses, quando incorporadas as 27 classes, aumentariam o número de modulações. No caso de K_5 foram encontradas 6 subclasses o que resultou na elevação do número de modulações de K_5 para 33 modulações. Parece pouco, mas já é um indicativo de que devemos investigar com mais precisão as propriedades dos mergulhos no sentido de dectetar novas classes de modulações com desempenhos diferentes.

Para melhor fixarmos as idéias, definamos precisamente as classes de modulações.

Definição 5.8.1 *Seja* $\mathbb{M}(G) = \left\{G(p,q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}^{i}\right\}$, *o conjunto de todos os mergulhos de* G. *Chamaremos de* classe de modulações QAMS (QAMS′) *de* G *o conjunto* Ξ *de todas as modulações* k-QAMS (p-QAMS′) *que possuem o mesmo tipo de partição. Chamaremos de* subclasse de modulações *de* Ξ *o subconjunto de* Ξ *cujas modulações estão associadas a canais que pertencem a uma mesma classe de isomorfismo.*

O conceito de classe e subclasses de modulações da Definição 5.8.1 não é diferente dos conceitos introduzidos em [24], foi colocado aqui para maior clareza.

Neste trabalho iremos somente identificar subclasses de modulações distintas usando o conceito de isomorfismos entre os canais associados. Ao contrário do número reduzido de subclasses encontradas nos mergulhos de K_5, foram 6 modulações, o caso $K_{4,4}$ é diferente e o processo de identificação é bem mais complexo. Por falta de um algoritmo, a busca foi realizada visualmente em um dos 36 arquivos gerados pelo Algoritmo 2.8.1, o qual contém 46 656 mergulhos cada. Lembramos que cada mergulho é identificado através da seqûencia representante do sistema de rotações, de uma sequência de identificação do tipo de partição e do conjunto de sequências orbitais. Trata-se de um arquivo extremamente grande e que tornou a busca muito exigente em relação à concentração e o tempo gasto na identificação do isomorfismo. Como era impossível concluir a procura nos 46 656, a identificação de uma subclasse parava quando começavamos a obter resultados repetidos. Isto não garante que nos restates do 46 656 mergulhos investigado, não existam mais subclasses, sem falar que nos outros 35 subconjuntos de mergulhos, todos com 46 656 elementos, também não podemos garantir a não existência de outras subclasses.

Como era impossível realizar uma busca nos 36 conjuntos, através da inspeção direta dos elementos de identificação do mergulho, então o nosso esforço neste trabalho é identificar o maior número possível de subclasses.

Voltando ao processo de construção do canal associado à modulação QAMS, vimos nas construções da Figura 5.6.1, que este depende do tipo de emaranhados lineares dos mergulhos. Se dois mergulhos de uma mesma partição possuem emaranhados lineares distintos então necessariamente os canais são diferentes, principalmente os canais equivalentes probabilísticos. Com isso, o processo de identificação de subclasses distintas de modulações resume em identificar os emaranhados lineares distintos.

Durante a identificação é importante estarmos atentos a toda e qualquer propriedade que venha garantir o número preciso do conjunto das subclasses, caso desejemos identificar completamente os elementos da subclasse. Este não vai ser o nosso caso devido ao número expressivo de subclasses de canais existentes. Mas para ter uma idéia de como este processo pode ser realizado, veja [24].

5.8.1 Identificação de modulações

Para sermos mais precisos, o processo utilizado para identificar se modulações de uma mesma classe (partições do mesmo tipo) pertencem a subclasses distintas, descreveremos a seguir um caso particular de mergulho.

Suponha que a classe de modulação a ser identificada seja $2R_4 2R_{12}$ do mergulho de $K_{4,4}$ sobre o tritoro. Então digitamos, usando a função ⟨`Localizar`⟩ do Word, a sequência

$$4\ 4\ 12\ 12.$$

Imediatamente localizamos, no arquivo de saída do Algorítmo 2.8.1, os seguintes componentes do mergulho $K(\Theta) \hookrightarrow 3T \equiv 2R_4 2R_{12}$:

```
1. a E A E A E A e
2. 4 4 12 12
3. 7 0 5 2
4. 0 7 6 1
5. 0 3 2 5 4 7 2 1 4 3 6 5
6. 0 1 2 3 4 5 6 7 4 1 6 3
```

onde o sistema de rotações de $K_{4,4}$ é dado na primeira linha 1 por $\Theta = aEAEAEAe$, a sequência 4 4 12 12 corresponde à partição $2R_4 2R_{12}$ e as sequência nas linhas 3,4,5 e 6 correspondem as sequências orbitais do mergulhos. Neste instante, devemos identificar os emaranhados de cada região, denotemos então as sequências 3,4,5 e 6 por

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (7,0,5,2)\,, & \gamma_3 &= (0,3,2,5,4,7,2,1,4,3,6,5)\,, \\ \gamma_2 &= (0,7,6,1)\,, & \gamma_4 &= (0,1,2,3,4,5,6,7,4,1,6,3)\,. \end{aligned}$$

Entretanto, pela Proposição 3.3.2, somente as regiões R_α, $\alpha > 8$, podem ser emaranhados lineares. Então verifiquemos as regiões do tipo R_{12} em 5 e 6.

A região R_{12} não é tão grande assim, mas devemos lembrar que mergulhos de $K_{4,4}$ possuem regiões até de 28 lados, neste caso, a identificação direta dos emaranhados torna-se praticamente impossível. O jeito foi destacar os emaranhados com cores diferentes. Basicamente este método de identificação constrói um esquema de cores da forma ilustrada ilustrado na Figura 5.8.1.

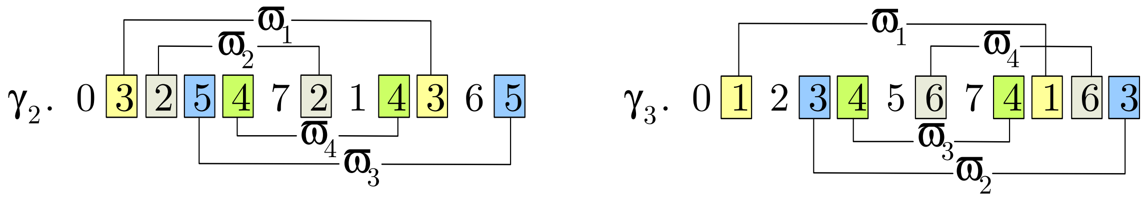


Figura 5.8.1: Identificação dos dois emaranhados de $K_{4,4}(\Theta)$

Após a construção do esquema de cores da Figura 5.8.1 deduzimos que ambas as sequências 5 e 6 do mergulho de $K_{4,4}(\Theta)$ possuem os mesmos tipos de emaranhados: são quatro emaranhados pontuais em cada sequência.

Um emaranhado pontual sobre um vértice v_i de uma sequência orbital γ de $G \hookrightarrow \Omega$ se caracteriza pela existência de uma subsequência do tipo $(\cdots, i, \cdots, i, \cdots)$ em γ e indica que a fronteira da região definida por γ possui uma autointerseção no vértice v_i. Com o propósito de caracterizar cada emaranhado pontual, definamos uma distância entre os dois vértices v_i que determinam o emaranhado pontual em v_i, através da *distância de Lee* na sequência γ entre os pares de vértices v_i.

No caso das sequência γ_3 e γ_4, podemos ver diretamente da Figura 5.8.1 que todos os emaranhados pontuais possuem distâncias de Lee iguais a 4.

Observe que os emaranhados pontuais de γ_3 são dados por

$$\varpi_1 = v_3, \quad \varpi_2 = v_2, \varpi_3 = v_5 \quad \text{e} \quad \varpi_4 = v_4$$

e as distância de Lee entre os pares de vértices de γ_3 que definem os emaranhados pontuais é contante, isto é:

$$d(\varpi_1) = d(\varpi_2) = d(\varpi_3) = d(\varpi_4) = 4.$$

De modo análogo, concluimos que os emaranhados pontuais de γ_4 são

$$\varpi_1 = v_1, \quad \varpi_2 = v_3, \varpi_3 = v_4 \quad \text{e} \quad \varpi_4 = v_6$$

e todos possuem distâncias de Lee constantes iguais a 4. Consequentemente, as duas regiões R_{12} do mergulho de $K_{4,4}(\Theta)$ são emaranhados de grau 4 escrevemos

$$\varpi\left(R_{12}^3\right) = \varpi\left(R_{12}^4\right) = 4 \quad \text{ou} \quad \varpi(\gamma_3) = \varpi(\gamma_4) = 4.$$

Além disso o mergulho $K(\Theta) \hookrightarrow 3T \equiv 2R_4 2R_{12}$ é classificado como sendo um emaranhado pontual de grau 8 e escrevemos

$$\varpi(K(\Theta)) = 8.$$

Para efeito de simplificação de notação, escreveremos i^d se a sequência γ possui um emaranhado pontual no vértice v_i com distância de Lee d. Esta notação será utilizada nas tabelas de identificação das subclasses de canais apresentadas na seção seguinte. Observe que, com esta notação, os reticulados de γ_3 seriam denotados simplesmente por: $3^4, 2^4, 5^4$ e 4^4.

5.9 Modulações Distintas vindas de Partições Idênticas

Concluída a identificação dos emaranhados do mergulho $K_{4,4}(\Theta)$ acima, o passo seguinte no processo de identificação é continuar na busca do próximo mergulho da forma $K_{4,4}(\Phi) \hookrightarrow 3T \equiv 2R_4 2R_{12}$, e identificar os tipos de emaranhados das duas regiões de 12 lados. Novamente a função $\langle$`Localizar`$\rangle$ é acionada e realizamos os mesmos procedimentos acima para $K_{4,4}(\Phi)$. Se as regiões de 12 lados de $K_{4,4}(\Phi)$ forem dos mesmos tipos do emaranhado $K_{4,4}(\Theta)$, nada é computado, e continuamos com o processo até encontrar um mergulho $K_{4,4}(\Theta_1) \hookrightarrow 3T \equiv 2R_4 2R_{12}$ com emaranhados distintos de $K_{4,4}(\Theta)$.

No nosso caso o emaranhado diferente de $K_{4,4}(\Theta)$ encontrado veio da rotação $\Theta_1 = aEAEAEce$ através do mergulho $K_{4,4}(\Theta_1) \hookrightarrow 3T \equiv 2R_4 2R_{12}$:

```
1. a E A E A E c e
2. 4 4 12 12
3. 7 0 5 2
4. 0 7 6 3 0 1 2 3 4 5 6 1
5. 0 3 2 5 4 7 2 1 4 3 6 5
6. 1 6 7 4
```

Logo, do mesmo modo que foi feito para os emaranhados de $K_{4,4}(\Theta)$ deduzimos que os emaranhados a serem identificados são

$$\gamma_2 = (0,7,6,3,0,1,2,3,4,5,6,1) \quad \text{e} \quad \gamma_3 = (0,3,2,5,4,7,2,1,4,3,6,5).$$

Fazendo o esquema de cores para os emaranhados γ_2 e γ_3 obtemos os esquemas mostrados na Figura 5.9.1.

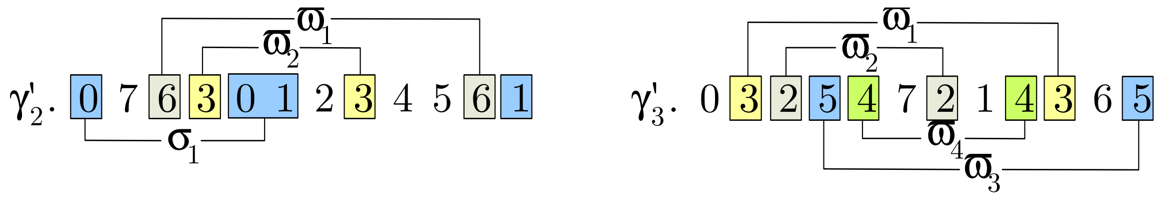


Figura 5.9.1: Identificação dos emaranhados γ_1 e γ_2 do mergulho de $K_{4,4}(\Theta_1)$

Recordemos que um emaranhado linear sobre o lado (v_i, v_j) de uma sequência orbital γ, se caracteriza pela existência de duas subsequências separadas de γ da forma $(\cdots, i, j \cdots, j, i, \cdots,)$. Consequentemente, concluímos dos esquemas de cores da Figura 5.9.1, que γ_2 possui dois emaranhados pontuais sobre os vértices v_6 e v_3 e um emaranhado linear sobre o lados (v_0, v_1), emaranhados denotados por

$$\varpi_1 = v_6, \quad \varpi_2 = v_3 \quad \text{e} \quad \sigma_1 = (v_0, v_1),$$

cujas distâncias de Lee entre as subsequências que definem estes emaranhados são dadas por

$$d(\varpi_1) = d(\varpi_2) = d(\sigma_1) = 4,$$

e portanto γ_2 é um emaranhado misto de distância constante igual a 4 e de graus

$$\varpi(\gamma_2) = 2 \text{ e } \sigma(\gamma_2) = 1.$$

Ou podemos dizer ainda que γ_2 é um emaranhado de misto de distância 4 e grau 3 e escrevemos

$$\eta(\gamma_2) = 3$$

e o mergulho é um emaranhado de grau 7 de distância 4, isto é,

$$\eta(K_{4,4}(\Theta_1)) = 7.$$

Pela Figura 5.9.1, podemos ver que γ_3 de $K_{4,4}(\Theta_1)$ possue os quatro emaranhados pontuais seguintes

$$\varpi_1 = v_3, \quad \varpi_2 = v_2, \quad \varpi_3 = v_5 \text{ e } \varpi_4 = v_2$$

todos de distância constante 4

$$d(\varpi_1) = d(\varpi_2) = d(\varpi_3) = d(\varpi_4) = 4,$$

logo é um emaranhado pontual de grau e distância 4, do mesmo tipo dos dois emaranhados de $K_{4,4}(\Theta)$. Desse modo, temos que:

$$\eta(\gamma_3) = 4,$$

consequentemente, os mergulhos $K_{4,4}(\Theta)$ e $K_{4,4}(\Theta_1)$ são emaranhados distintos, pois apresentam graus de emaranhados diferentes, isto é,

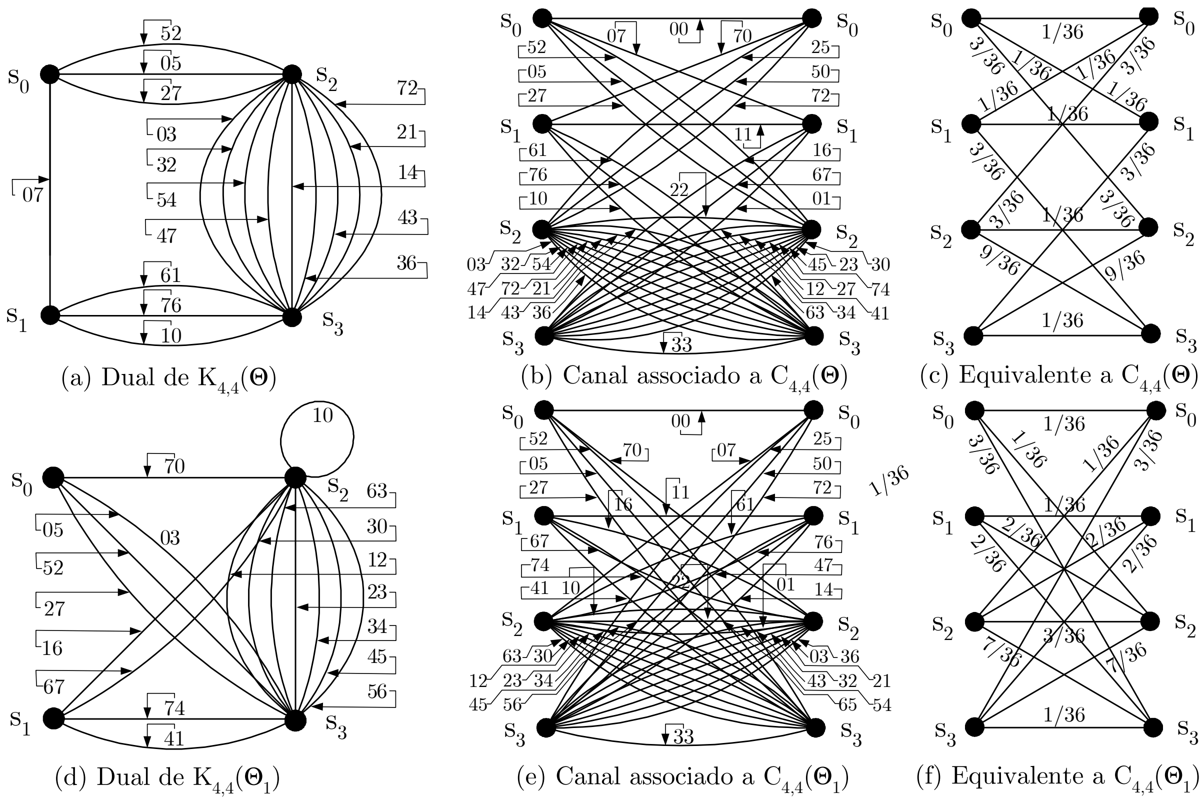
$$\eta(K_{4,4}(\Theta)) = 8 \text{ e } \eta(K_{4,4}(\Theta_1)) = 7.$$

Neste caso, construiremos agora, na Figura 5.9.2, os grafos duais, os canais associados e canais equivalentes probabilísticos da cada um dos mergulhos

$$K_{4,4}(\Theta), K_{4,4}(\Theta_1) \hookrightarrow 3T \equiv 2R_4 2R_{12},$$

com o objetivo de analisarmos, com maior profundidade, as diferenças existentes nas modulações 4-QAMS's vindas destes mergulhos, quanto ao aspecto da matriz de probababilidades.

A princípio, observamos que há diferenças nos três segmentos comparados: grafos duais, canais associados e canais equivalentes equiprováveis. Mas em termos de desempenhos, as modulações 4-QAMS $\leftrightarrow K_{4,4}(\Theta)$ e 4-QAMS $\leftrightarrow K_{4,4}(\Theta_1)$ seriam diferentes? E se a resposta é positiva o que justifica tal conclusão? (Usamos a notação 4-QAMS $\leftrightarrow K_{4,4}(\Theta)$ para significar que a modulação 4-QAMS vem do mergulho de $K_{4,4}(\Theta) \hookrightarrow 3T \equiv 2R_4 2R_{12}$ onde $\Theta = aEAEAEAe$ e 4-QAMS $\leftrightarrow K_{4,4}(\Theta_1)$ tem significado equivalente).



(a) Dual de $K_{4,4}(\Theta)$ (b) Canal associado a $C_{4,4}(\Theta)$ (c) Equivalente a $C_{4,4}(\Theta)$

(d) Dual de $K_{4,4}(\Theta_1)$ (e) Canal associado a $C_{4,4}(\Theta_1)$ (f) Equivalente a $C_{4,4}(\Theta_1)$

Figura 5.9.2: Grafos duais, canais associados e canais equivalentes equiprováveis correspondentes a modulações 4-QAMS dos mergulhos $K_{4,4}(\Theta), K_{4,4}(\Theta_1) \hookrightarrow 3T \equiv 2R_4 2R_{12}$

Se fôssemos tirar conclusões sobre os desempenhos das 2 modulações 4-QAMS's da Figura 5.9.2, usando como parâmetros os grafos duais e canais equivalentes, a conclusão óbvia seria de que se trata de modulações completamente distintas, pela diferença apresentados por estes dois pares de elementos. Além disso, podemos constatar ainda que os canais equivalentes equiprováveis

$$M_{C_{4,4}(\Theta)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & 0 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & 0 & \frac{3}{36} \\ \frac{3}{36} & 0 & \frac{1}{36} & \frac{9}{36} \\ 0 & \frac{3}{36} & \frac{9}{36} & \frac{1}{36} \end{bmatrix} \text{ e } M_{C_{4,4}(\Theta_1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} & \frac{3}{36} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{2}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{7}{36} \\ \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{7}{36} & \frac{1}{36} \end{bmatrix}$$

apresentam conjuntos de probabilidades distintos, e portanto as modulações assoicadas possuem performances diferentes.

Então a melhor maneira de identificar modulações QAMS's distintas é através das matrizes de probabilidades de acertos dos canais equivalentes e quiprováveis. Não é fácil a identificação através de isomorfismos de grafos duais ou canais associados.

Vimos que os grafos duais e canais assocados distintos de duas modulações QAMS's com um mesmo tipo de partição Ξ, resultaram em modulações de desempenhos diferentes, ou modulações de subclasses distintas de Ξ. Veja que a condição grafos duais distintos implica necessariamente canais associados distintos e vice-e-versa. Então a condição para que duas modulações QAMS's de partições iguais Ξ, pertençem a subclasses distintas, é suficiente terem grafos duais distintos (ou canais associados distintos)? Isto não é verdade, iremos ver um exemplo em que duas modulações QAMS's com um mesmo tipo de partição Ξ pertencem a mesma subclasses, e no entanto possuem grafos duais diferentes.

Considere a modulação 4-QAMS, cuja partição é da forma $2R_4 2R_{12}$ e apresenta o seguinte mergulho

```
1. a E A E A G A g
2. 4 4 12 12
3. 7 0 5 4
4. 0 7 6 1
5. 0 3 2 5 6 7 2 1 4 3 6 5
6. 0 1 2 3 4 5 2 7 4 1 6 3
```

Se γ_2'' e γ_3'' são as respectivas sequências orbitais de comprimento 12 das linhas 5 e 6, e $\Theta_2 = aEAEAGAg$ o sistema de rotações do mergulho acima, então o esquema de cores destas sequências são como os da Figura 5.9.3.

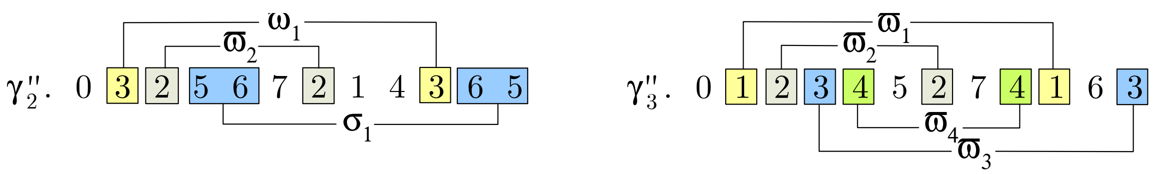


Figura 5.9.3: Identificação dos emaranhados de $K_{4,4}(\Theta_2)$

Pelos esquemas de cores da Figura 5.9.3, vemos que os emaranhados de γ_2'' são dados por

$$\varpi_1 = v_3, \varpi_2 = v_2 \quad \text{e} \quad \varpi_3 = (v_5, v_6),$$

portanto são dois emaranhados pontuais e um linear, todos de distância 4, consequentemente, γ_2'' é um emaranhado misto de grau 3, caracterizado por

$$\varpi(\gamma_2'') = 2, \; \sigma(\gamma_2'') = 1 \text{ e } \eta(\gamma_2'') = 3.$$

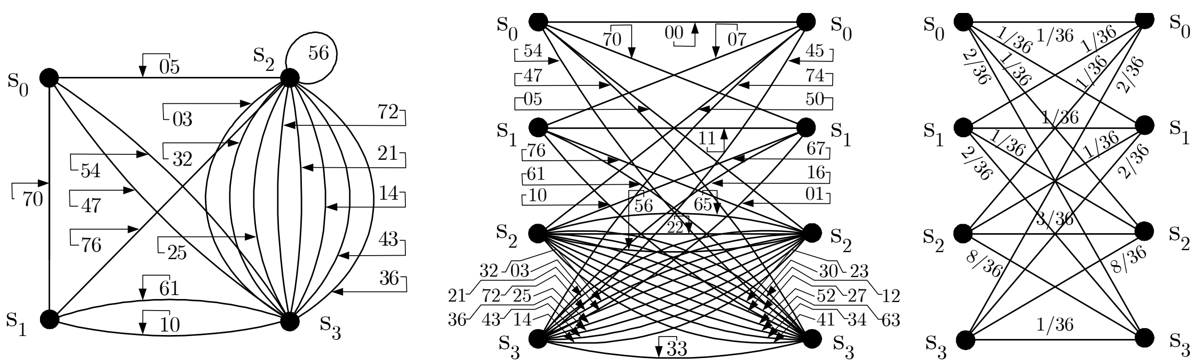
Por outro lado, os emaranhados de γ_3'' são dados por

$$\varpi_1 = v_1, \varpi_2 = v_2, \varpi_3 = v_3 \quad \text{e} \quad \varpi_4 = v_4,$$

ou seja, são todos pontuais, e portanto γ_3'' é um emaranhado pontual de grau e distância iguais a 4, caracterizados pelos seguintes graus

$$\varpi(\gamma_3'') = 4 = \eta(\gamma_3'').$$

Neste caso é dito que o mergulho de $K_{4,4}(\Theta_2)$ é um emaranhamento de grau 7, do mesmo tipo do mergulho de $K_{4,4}(\Theta_1)$, inclusive com o mesmo tipo de emaranhados. Porém, como podemos deduzir dos grafos da Figura 5.9.4, o mergulho de $K_{4,4}(\Theta_2)$ possue grafo dual, canal associado e canal equivalente diferentes do mergulho de $K_{4,4}(\Theta_1)$.



(a) Dual de $K_{4,4}(\Theta_2)$ (b) Canal associado a $C_{4,4}(\Theta_2)$ (c) Equivalente a $C_{4,4}(\Theta_2)$

Figura 5.9.4: Grafo dual, canal associado e canal equivalente da modulação 4-QAMS do mergulho de $K_{4,4}(\Theta_2)$.

A questão agora é saber se as modulações 4-QAMS's associadas aos canais $C_{4,4}(\Theta_1)$ e $C_{4,4}(\Theta_2)$ possuem ou não o mesmo desempenho. Nas análises das modulações associadas a $K_{4,4}(\Theta)$ e $K_{4,4}(\Theta_1)$ foi visto que elas diferem por que os emaranhados são distintos e esta é uma propriedade geral para caracterizar modulações de desempenhos distintos com o mesmo tipo de partições. Mas as modulações $K_{4,4}(\Theta_1)$ e $K_{4,4}(\Theta_2)$ possuem os mesmos emaranhados e vêm de mergulhos com o mesmo tipo de partição, então os seus desempenhos são equivalentes? Isto não é verdades, podemos comprovar através da matriz de probabilidades condicionadas de acertos do canal equivalente equiprovável de

$$M_{C_{4,4}(\Theta_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{2}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{2}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{8}{36} \\ \frac{2}{36} & \frac{2}{36} & \frac{8}{36} & \frac{1}{36} \end{bmatrix}.$$

Observe que $M_{C_{4,4}(\Theta_2)}$ é bem diferente de $M_{C_{4,4}(\Theta_1)}$ em termos de conjuntos de probabilidades. Levando em consideração este fato consideramos as modulações 4-QAMS's associadas aos canais $C_{4,4}(\Theta_1)$ e $C_{4,4}(\Theta_2)$ de desempenhos diferentes. Chegamos a uma conclusão análogos se compararmos $C_{4,4}(\Theta_2)$ com $C_{4,4}(\Theta_1)$, consequentemente, todas as modulações 4-QAMS's associadas aos canais $C_{4,4}(\Theta)$, $C_{4,4}(\Theta_1)$ e $C_{4,4}(\Theta_2)$ são distintas, apesar das partições serem idênticas $2R_4 2R_{12}$.

A análise concluída acima sobre modulações distintas prova que as modulações vindas do grafo completo bipartido tem propriedades bem diferentes das modulações vindas do grafo completo. Lima e Luana [24] verificaram, nos mergulhos de K_n, $n = 2, 3, 4$ e 5, que é verdadeira a seguinte afirmação.

Afirmação 5.9.1 *Duas modulações k-QAMS e k-QAMS$'$ de K_n de mesmas partições possuem desempenhos distintos quando vem de emaranhados do mesmo tipo.*

Após o aprofundamento da análise acima do caso do grafo completo bipartido, gostaríamos de saber se a Afirmação 5.9.1 é verdadeira para valores de n maiores que 5. A grande complexidade do problema de identificar os mergulhos de K_n, para $n > 5$, fez com que Lima e Luana concluíssem somente a análise do caso K_5. Tudo leva a crer que, apesar da complexidade deste caso, não foi suficiente concluir propriedades mais gerais devido a falta de exemplos que viessem provar que a Afirmação 5.9.1 não é verdadeira. Este é um problema típico de grafo, não basta analisar casos inciais para se deduzir fatos mais gerais. A análise do grafo completo $K_{m,n}$ prova que não devemos restringir o estudo a casos iniciais quando se trata de grafos, o problema deve ser trabalhado em grafos maiores, caso desejemos tirar conclusões mais genéricas ou equivalentemente, saber se os grafos associados aos canais devem ser isomorfos.

Esta é mais uma contribuição deste trabalho, validar propriedades mais gerais dos mergulhos de grafos, muitas delas deduzidas do comportamento dos mergulhos dos primeiros grafos completo em [24].

Voltando a questão da identificação de modulações QAMS's vindas de partições idênticas, concluímos que somente o fato de duas modulações terem emaranhados idênticos, não garante que estas possuam desempenhos idênticos, é preciso satisfazer uma condição a mais: as matrizes de contatos devem ser iguais ou, equivalentemente, os grafos correspondentes aos canais devem ser isomorfos. Lima e Luana mostram em [24], como recuperar o canal a partir de um canal isomorfo e também mostram como recuparar a matriz de probabilidade condicionada do canal equivalente a partir da matriz de probabilidades de um canal com grafo isomorfo.

Um estudo detalhado de isomorfismos de canais foi realizado em [24]. As informações deste trabalho são extremamente importantes para definirmos aqui as subclasses de canais equivalentes. A princípio, comprovamos que a Afirmação 5.9.1, válida para identificar subclasses de K_n, $n \leq 5$, é a única em [24] qua não vale para identificar as subclasses de canais de $K_{m,n}$. Este fato nos deixa muito entusiasmado em relação aos resultados obtidos neste trabalho. A razão é porque o número de modulações de desempenhos distintas é muito maior do que aquele imaginado no início deste trabalho. Não imaginávamos sequer a existência de novas modulações ao iniciarmos este trabalho. Tudo indica que estas novas modulações venham também existir nos mergulhos dos grafos completos K_n, para valores de $n > 5$, o que justifica uma busca por estes elementos em mergulhos dos grafos completos e biparticionados para valores maiores do que os abordados neste trabalho e em [24].

Pelo estudo e análises realizados acima sobre os grafos duais, canais associados e canais equivalentes equiprováveis de uma modulação QAMS, chegamos a conclusão que o processo de identificação de subclasses de modulações distintas vindas de mergulhos do grafo completo bipartido $K_{m,n}$ é bem mais laborioso do que o realizado em [24], para o caso do grafo completo K_n. Não basta somente identificar quantos mergulhos de emaranhados distintos existem em uma classe de mergulhos de $K_{m,n}$, é preciso ainda verificar a condição de isomorfismo de canal. Isto torna o trabalho mais complexo. Diante desta inesperada surpresa, não faremos aqui a identificação de todas as modulações distintas de $K_{m,n}$, mas somente apresentaremos, a classificação dos emaranhados de $K_{4,4}$ que obtivemos.

De antemão avisamos que não se trata de uma busca completa no conjunto dos mergulhos de $K_{4,4}$, apenas um busca parcial em um dos 36 subconjuntos de mergulhos obtido através do Algoritmo 2.8.1. Não podemos garantir sequer se os mergulhos identificados no Apêndice C contêm todos os tipos de emaranhados distintos. Por razões justificadas anteriomente, não foi possível fazer uma busca sistemazida, mas entendemos que a maioria dos emaranhados distintos foram identificados. É óbvio que ainda falta identificar as modulações de emaranhados idênticos com canais não isomorfos. Esta etapa será realizada em um outro trabalho continuado.

5.9.1 Propriedades elementares dos emaranhados

Apesar da análises superficial realizada nos emaranhados de $K_{4,4}$ relacionados nas Tabelas 5.10.1, 5.10.2, 5.10.4 e 5.10.5, já dar para perceber a existência de algumas propriedades elementares importantes dos emaranhados de $K_{4,4}$.

Proposição 5.9.2 *Se m ou n é diferente de $4s+1$ e $4s+3$, então todo mergulho mínimo de $K_{m,n}$ é um emaranhado de grau zero.*

Demonstração. *A hipótese de m ou n ser diferente de $4s+1$ e $4s+3$ implica necessariamente que um dos valores de m e n tem que ser um número par. Se ambos são pares, isto é, Se $m = 2p$ e $n = 2q$ então o número de vértices e lados das regiões do mergulho mínimo de $K_{m,n}$ são dados respectivamente por*

$$\begin{aligned} v &= m + n = 2p + 2q = 2(p+q) \\ e &= mn = 4pq. \end{aligned}$$

Como v e e são ambos números pares, então segue da característica de Eüler de gT, que o número de regiões do mergulho mínimo $f_{\min}$ deve ser par. Como este deve possuir o maior número possível de regiões quadrangulares e

$$2mn = 4pq$$

então o mergulho mínimo de $K_{m,n}$ é necessariamente da forma

$$K_{m,n} \hookrightarrow \gamma T \equiv pqR_4, \tag{5.29}$$

isto é, $f_{\min} = pq$ deve ser um número par, consequentemente, p ou q deve ser par, o que implica que m ou n é diferente de $4s+1$ e $4s+3$. De (5.29), deduzimos que todas as regiões de mergulhos mínimo de $K_{4,4}$ são quadrangulares, e portanto o mergulho mínimo é um emaranhado de grau zero.

Se $m = 2p$ e $n = 2q+1$, então o número de vértices de $K_{m,n}$ é dado por

$$v = m + n = 2p + 2q + 1 = 2(p+q) + 1,$$

isto é, v é ímpar. O número de lados de $K_{m,n}$ é dado por

$$e = 2p(2q+1) = 2p + 4pq = 2(p + 2pq),$$

logo e é um inteiro par. Além do mais, o número de regiões do mergulho mínimo de $K_{m,n}$ deve possuir o maior número possível de regiões quadrangulares, e como

$$2mn = 2(2p + 4pq) = 4p + 8pq = 4(p + 2pq),$$

então o mergulho mínimo de $K_{m,n}$ é necessariamente da forma

$$K_{m,n} \hookrightarrow \gamma T \equiv (p + 2pq) R_4. \tag{5.30}$$

Mas a característica de Eüler de γT é par, isto é,

$$\chi(\gamma T) = v - e + (p + 2pq)$$

deve ser um número par.

Como v é ímpar e e é par, então p+2pq deve ser ímpar, ou seja, p é obrigatóriamente um número ímpar, logo m deve ser da forma $4s + 1$ ou $4s + 3$. Se $m = 2p + 1$ e $n = 2q$ chegamos a conclusão, de modo análogo, de que n é da forma $4s+1$ ou $4s+3$. Portanto, por (5.30), a partição do mergulho mínimo só tem regiões de 4 lados, logo, são todas emaranhados de grau zero, o que prova a afirmação. ■

Proposição 5.9.3 *O mergulho máximo de $K_{m,n}$ é um emranhado linear de grau mn se, e somente se, m ou n é ímpar.*

Demonstração. *O emaranhado de um mergulho máximo de $K_{m,n}$ é único quando a partição é formada por uma única região R_{2mn}, neste caso R_{2mn} é um emaranhado linear de grau mn (veja Teorema 3.3.4). Mas são duas as condições para que o mergulho máximo possua uma única região:*

i) Se m e n são pares, pela demonstração da Proposição 5.9.2, v e e são pares; logo, $f_{\min} = 2mn$ também deve ser par, consequentemente, o mergulho máximo deve ter duas regiões e, consequentemente, o grau do emaranhado linear é menor do que mn. Neste caso o mergulho maximal é da forma

$$K_{m,n} \hookrightarrow \gamma_M T \equiv R_\alpha R_\beta.$$

ii) Se m e n têm paridades diferentes, isto é, então v é ímpar e e é par, logo f deve ser ímpar, consequentemente, o mergulho máximo é da forma

$$K_{m,n} \hookrightarrow \gamma_M T \equiv R_{2mn} \tag{5.31}$$

e o grau do emaranhado é mn.

Se m e n são ímpares então v é par e e é ímpar, logo f é ímpar; daí o mergulho máximo é da forma (5.31), e novamante o grau do emaranhado é mn.

Cocluímos então que o mergulho máximo de $K_{m,n}$ é um emaranhado linear de grau mn se, e somente se, m ou n é ímpar. ■

Para a demonstração da próxima afirmação, iremos precisar do conceito de distância de Lee de um emaranhado, o qual será formalizado através da seguinte definição.

Definição 5.9.4 *Seja $R_a = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_\alpha)$ uma sequência orbital de um mergulho de G. A* distância de Lee *entre x_i e x_j de R_α é a menor das distâncias $d^+_{\text{Lee}}(x_i)$ e $d^-_{\text{Lee}}(x_i)$, onde $d^+_{\text{Lee}}(v_i)$ é o número de elemnetos percorridos à direita de x_i em R_α até chegar ao vértice x_j, e $d^-_{\text{Lee}}(v_i)$ é o número de vértices percorridos à esquerda de x_i em R_α até chegar ao vértice x_j. Em notação matemática temos que*

$$d_{\text{Lee}}(x_i, x_j) = \min\left\{d^+_{\text{Lee}}(x_i), d^-_{\text{Lee}}(x_j)\right\}. \tag{5.32}$$

Em um emaranhado pontual no vértice v_i se os rótulos x_i e x_j de R_a são iguais, então a distância de Lee do emaranhado pontual *v_i é dada por $d_{\text{Lee}}(x_i, x_j)$, isto é,*

$$d_{\text{Lee}}(v_i) = d_{\text{Lee}}(x_i, x_j).$$

Em um emaranhado linar sobre um lado (v_i, v_j) de G existem subsequência (x_i, x_{i+1}) e (x_j, x_{j+1}) de R_α tais que

$$x_i = x_{j+1} \text{ e } x_{i+1} = x_j,$$

neste caso, a distância de Lee do emaranhado linear *(v_i, v_j) é definida como a menor das distâncias de Lee entre os vértices de rótulos x_i e x_j, isto é,*

$$d_{\text{Lee}}(v_i, v_j) = \min\{d_{\text{Lee}}(x_i, x_{j+1}), d_{\text{Lee}}(x_{i+1}, x_j)\}. \tag{5.33}$$

Se o emaranhado pontual ocorre nos vértices x_i e x_j de R_α, a igualdade (5.32) é equivalente a

$$d_{\text{Lee}}(v_i) = d_{\text{Lee}}(x_i, x_j) = \min\{x_j - x_i, \alpha - x_j + x_i\}. \tag{5.34}$$

Se o emaranhado linear (v_i, v_j) ocorre nos vértices (x_i, x_{i+1}) e (x_j, x_{j+1}) de R_a então, pela igualdade (5.34), a distância de Lee de (v_i, v_j) pode ser determinada pela fórmula

$$\begin{aligned} d_{\text{Lee}}(v_i, v_j) &= \min\{d_{\text{Lee}}(x_i, x_{j+1}), d_{\text{Lee}}(x_{i+1}, x_j)\} \\ &= \min\{x_{j+1} - x_i, \alpha - x_{j+1} + x_i, x_j - x_{i+1}, \alpha - x_j + x_{i+1}\}. \end{aligned}$$

Lema 5.9.5 *Se o lado (v_i, v_j) de G é um emaranhado linear de R_α, $d_{\text{Lee}}(v_j) = k$ e $\alpha = 2k$, então vale a igualdade*

$$d_{\text{Lee}}(v_i) + d_{\text{Lee}}(v_j) = \alpha - 2. \tag{5.35}$$

Demonstração. De fato, se $d_{\text{Lee}}(v_j) = k$ e por ser R_{2k} uma região de $2k$ lados, então é fácil ver que

$$d^+_{\text{Lee}}(v_i) = k + 2 \text{ e } d^-_{\text{Lee}}(v_i) = k - 2,$$

logo

$$d_{\text{Lee}}(v_i) = \min\{k + 2, k - 2\} = k - 2.$$

Consequentemente

$$d_{\text{Lee}}(v_i) + d_{\text{Lee}}(v_j) = k + k - 2 = 2k - 2 = \alpha - 2,$$

o que prova o desejado ■

Teorema 5.9.6 *Se* (v_i, v_j) *é um lado emaranhado de* R_a *e* $d_{\text{Lee}}(v_i, v_j) = k$, *então* $a \geq 2k$.

Demonstração. *Suponha, que* $d_{\text{Lee}}(v_i, v_j) < k$ *e que* $\alpha < 2k$, *isto é,* $\alpha = 2k - 1$. *Suponha agora, por absurdo, que* $d_{\text{Lee}}(v_i, v_j) = d_{\text{Lee}}(v_j)$. *Então, por* (3.53), *temos que*

$$d_{\text{Lee}}(v_i) = \alpha - 2 - d_{\text{Lee}}(v_j) = 2k - 1 - 2 - k = k - 3.$$

Mas $d_{\text{Lee}}(v_i) = k - 3 < k = d_{\text{Lee}}(vj)$, *sendo assim*

$$d_{\text{Lee}}(v_i, v_j) = \min\{d_{\text{Lee}}(v_i), d_{\text{Lee}}(v_j)\} = d_{\text{Lee}}(v_i) = k - 3$$

$d_{\text{Lee}}(v_j)$ *não seria o mínimo do conjunto* $\{d_{\text{Lee}}(v_i), d_{\text{Lee}}(v_j)\}$, *o que contradiz a hipótese* $d_{\text{Lee}}(v_i, v_j) = d_{\text{Lee}}(v_j)$, *consequentemente,* $a \geq 2k$. ■

Gostaríamos ainda de fazer uma ressalva em relação ao processo de identificação de emaranhados. A identificação de emaranhados distintos, apesar de ser muito trabalhosa quando é feita por inspeção direta das sequências orbitais, processo usado neste trabalho, pode ser realizado através de um algoritmo, o que irá tornar o processo de identificação de absoluta confiança. Entretanto, quando se trata de identificar as classes de isomorfismos distintos, este processo é bem mais complexo. Até a nível de algoritmo, não temos conhecimento de que existe um que realize este tipo de tarefa. Contudo, na nossa opinião, este tipo de identificação pode ser realizado para o caso de $K_{4,4}$, já que este não é um grafo muito complexo. O problema é sempre o grande número de elementos existentes no conjunto dos mergulhos de um grafo. O $K_{4,4}$ apresenta 1 679 616 mergulhos, o $K_{5,5}$ têm 63 403 380 965 376 mergulhos distintos. A nossa dúvida é, seria possível inspecionar um conjunto dessa natureza no sentido de identificar emaranhados distintos e classes de isomorfismos, utilizando os recursos computacionais disponíveis? Acreditamos piamente que com a continuação deste trabalho, novas propriedades matemáticas relacionadas aos mergulhos de grafos venham a ser descobertas e possam facilitar este processo de identificação.

Identificar algumas das propriedades de mergulhos e obter procedimentos para construções dos elementos que definem a modulação, já foi um avanço significativo conseguido neste trabalho. Esperamos que a análise de casos mais complexos venham fornecer os elementos desejados para que se possamos avançar neste processo de identificação.

Os resultados obtidos com os mergulhos de $K_{4,4}$ nos deixou, deveras, muito animados com relação ao uso de modulação sobre variedades riemannianas vindas de mergulhos do grafo completo bipartido. As identificações das modulações de desempenhos distintos, realizado nesta seção, foram feitas somente utilizando uma das classes de mergulhos. Como podemos constatar, são muitas as subclasses de modulações distintas identificadas. Não há garantia de que o processo utilizado identificou todas as subclasses de modulações de desempenhos diferentes da classe abordada. Este problema só será elucidado de vez com uma análise minuciosa nos grafos correspondentes aos canais equiprováveis, no sentido de identificar todas as classes de isomorfismos, problema que não foi abordado neste trabalho, o qual fica sugerido aqui como mais uma proposta para futuros trabalhos.

5.10 Classificação dos Emaranhados de $K_{4,4}$

Os emaranhados identificados nas tabelas a seguir são todos vindos dos mergulhos relacionados no arquivo AE, a primeira saída do Algoritmo 2.8.1, de todos os sistemas de rotações do grafo completo bipartido $K_{4,4}$ que fixam a rotações A do vértice v_0 de $K_{4,4}$ e a rotação E do vértice v_1 de $K_{4,4}$.

Os vértices de $K_{4,4}$ foram fixados através do rotulamento de vértices do grafo de $K_{4,4}$ ilustrado na Figura 3.6.1. Para saber quem são as rotações correspondentes aos rótulos usados para representar uma rotação Θ de $K_{4,4}$, veja a Seção 3.6.

Nas tabelas abaixo, as notações tem os seguintes significados: 1) o elemento i^d na coluna ϖ representa o emaranhado pontual no vértice v_i de $K_{4,4}$ de distância de Lee d; 2) o símbolo ij^d na coluna σ representa o emaranhado linear sobre o lado (v_i, v_j) de distância de Lee d; 3) o número inteiro ϖ_R indica o grau do emaranhado pontua da região, este é igual ao número de elementos existentes i^d na coluna ϖ; 4) o número inteiro ϖ_R indica o grau do emaranhado linear da região, este é igual ao número de elementos existentes ij^d na coluna ϖ e; 5) o inteiro ϵ é o grau de emaranhado do mergulho, neste caso $\epsilon = \varpi_R + \sigma_R$.

5.10.1 Emaranhados de $K_{4,4}$ sobre o toro

A família do toro é a única das famílias de mergulhos de $K_{4,4}$ que possui um único tipo de emaranhado. Este fato ocorre porque todos os mergulhos de $K_{4,4}$ sobre o toro possuem o mesmo tipo de partição $8R_4$, e como todo R_4 é uma região não emaranhada (ou simples), a classe de modulações do toro é formada por uma única modulação regular para uma constelação de 8 sinais, com regiões de decisões quadrangulares. Veja a identificação de um mergulho do toro em termos de emaranhado na Tabela 5.10.1.

Tabela 5.10.1: Classificação dos emaranhados de $K_{4,4} \hookrightarrow T$

Classe	Rotação	R_α	Sequências Orbitais	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ
$8R_4$	AEaeAEae	R_α	1036, 0127, 0523, 0765, 1432, 1674, 2547, 3456	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	0

Por enquanto não podemos dar nenhuma garantia de que esta é a única subclasse de modulação do toro, somente uma análise nos grafos duais poderá dizer se existe ou não subclasses distintas de modulações. Provavelmente devem existir as modulações de desempenhos distintos.

5.10.2 Emaranhados de $K_{4,4}$ sobre o bitoro

O conjunto de mergulhos de $K_{4,4}$ sobre o bitoro é composto de 5 classes de mergulhos distintos. Analisando a composição das partições das classes do bitoro na Tabela 3.10.2, verificamos que existem classes com regiões de até 12 lados. Então, podemos afirmar com absoluta certeza que existem mais subclasses de modulações de desempenhos distintos no bitoro do que no toro. Na Tabela 5.10.2 identificamos o maior número possível de emaranhados distintos.

Só para esclarecimento, quando as regiões de um mesmo tipo e o seu número de lados for inferior a 8, estas serão relacionadas numa mesma linha, pois, como se sabe, são todas emaranhados de grau zero ou regiões simples.

Tabela 5.10.2: Classificação dos emaranhados de $K_{4,4} \hookrightarrow 2T$

Classe	Rotação	R_α	Seqûencia orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ
$R_{4,4,4,4,4,12}$	AEAGagaG	R_{12}	103416701236	$1^4, 3^4$	$01^4, 16^4$	2	2	4
		R_4	0563,0745,2543,1472,2765	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAgCGae	R_{12}	012347214527	4^4	$12^4, 72^4$	1	2	3
		R_4	1036,0543,0765,1674,2563	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAeagaG	R_{12}	012305634167	$0^4, 1^4, 6^4$	$\varnothing$	3	0	3
		R_4	1036,0745,1472,2543,2765	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAgaGae	R_{12}	012341674527	$2^4, 1^4, 4^4, 7^4$	$\varnothing$	4	0	4
		R_4	1036,0543,0765,1472,2563	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEBfCecF	R_{12}	103470123056	$\varnothing$	$10^4, 03^4$	0	2	2
		R_4	0725,1452,1674,2763,3654	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{4,4,4,4,6,10}$	AEcfbGBe	R_{10}	1034163256	3^4	16^4	1	1	2
		R_4	0127, 0765, 1452, 3674	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		R_6	054723	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEcfbGae	R_{10}	1034167436	$\varnothing$	$16^4, 03^4$	0	2	2
		R_4	0127, 0765, 1452, 2563	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		R_6	054723	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEcgAFaf	R_{10}	0741672345	$7^4, 4^4$	$\varnothing$	2	0	2
		R_4	1036, 0127, 2563, 4765	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		R_6	052143	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AECeAEaF	R_{10}	0721432765	$\varnothing$	72^4	0	1	1
		R_4	1036, 0523, 1674, 3456	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		R_6	012547	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{4,4,4,4,8,8}$	AEaEAEae	R_8	10321436	$3^4, 1^4$	$\varnothing$	2	0	4
		R_8	05234563	$3^4, 5^4$	$\varnothing$	2	0	
		R_4	0127, 0765, 1674, 2547	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	

Continua na próxima página

Tabela 5.10.2 − Continuação da página anterior

Classe	Rotação	R_α	Seqûencia orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ
$R_{4,4,4,4,8,8}$	AEaEAeaF	R_8	10321436	$3^4, 1^4$	$\varnothing$	2	0	3
		R_8	01276547	7^4	$\varnothing$	1	0	
		R_4	0563, 0725, 1674, 2345	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEaEceCE	R_8	10321476	1^4	$\varnothing$	1	0	2
		R_8	01274367	7^4	$\varnothing$	1	0	
		R_4	0563, 0725, 1654, 2345	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEbeBGag	R_8	01256347	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	0
		R_8	05416723	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		R_4	1036, 0765, 2745, 1432	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{4,4,4,6,6,8}$	AEAEBeCg	R_8	10325076	0^4	$\varnothing$	1	0	1
		R_6	012347, 143672	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		R_4	0563, 1654, 2745	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAFaGBG	R_8	07452765	$7^4, 5^4$	$\varnothing$	2	0	2
		R_6	103256, 012367	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		R_4	1634, 0543, 1472	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAGceCG	R_8	10345276	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	0
		R_6	012367, 074325	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		R_4	0563, 1472, 1654	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{4,4,6,6,6,6}$	AEcgAEbf	R_6	074165, 254763 052143, 234567	$\varnothing$	$\varnothing$	R_0	R_0	0
		R_4	0127, 1036	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	

Uma inspeção na Tabela 5.10.2 nos mostra que a única classe de $2T$ que não possui emaranhados distintos é a $2R_4 4R_6$, isto porque o número de lados de suas regiões são todos menores que 8. As demais classes de $2T$ apresentam pelo menos uma região de 8 lados, e como esta região pode apresentar até três tipos de emaranhados diferentes, estas classes possuem emaranhados distintos.

Em relação ao número de emaranhados distintos das classes de mergulhos de $K_{4,4}$, a Tabela 5.10.3 mostra a quantidade de elementos de classe.

Classes	$R_{4,4,4,4,4,12}$	$R_{4,4,4,4,6,10}$	$R_{4,4,4,4,8,8}$	$R_{4,4,4,6,6,8}$	$R_{4,4,6,6,6,6}$
Número de elementos	5	4	4	3	1

Tabela 5.10.3: Numero de emaranhados distintos das classes de mergulhos $K_{4,4} \hookrightarrow 2T$

Observamos, na Tabela 5.10.3, que o número de emaranhados distintos é maior nas classes que apresentam regiões com o maior número de lados e diminui à medida que o número de lados das regiões vai decresce.

5.10.3 Emaranhados de $K_{4,4}$ sobre o tritoro

O conjunto de mergulhos de $K_{4,4}$ sobre o tritoro é composto de 16 modelos de classes distintas, sendo um deles o modelo da classe $R_{6,8,8,10}$, o qual não corresponde a um mergulho orientado, como foi provado no Lema 3.9.1. Entretanto, iremos incluir o estudo desta classe no processo de identificação de emaranhados distintos porque provavelmente esta seja uma classe de um mergulho não orientado.

Analisando a composição das partições das classes do tritoro na Tabela 3.10.2, verificamos que existem 15 classes com regiões de até 20 lados, valores que superam o número máximo de lados (12) e número de classes (5) do toro, o que torna o tritoro a superfície que irá fornecer o maior número de emaranhados distintos.

Na Tabela 5.10.2 identificamos o maior número possível de emaranhados distintos existentes no arquivo AE, da saída do Algoritmo 2.8.1, o qual contém 36 656 mergulhos.

Tabela 5.10.4: Classificação dos emaranhados de $K_{4,4}$ sobre o tritoro

Classe	Rotação	α	Sequência orbital	σ	ϖ	ϖ_R	σ_R	ϵ
$R_{4,4,4,20}$	AEAEAgaF	20	10325470123450721436	$\varnothing$	$01^6,07^6,12^6,23^6,34^6,45^6$	0	6	6
		4	0563, 1674, 2765	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAEagCG	20	10325436701234165276	$\varnothing$	$01^8,16^6,23^8,25^6,34^6,67^8$	0	6	6
		4	0563, 0745, 1472	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAFaGag	20	10325634167214701236	7^2	$01^4,16^8,14^4,12^4,23^4,36^6$	1	6	7
		4	0543, 0765, 2745	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAGagae	20	10341674507652701236	$3^2,2^2,4^2,5^2$	$01^4, 17^4, 16^4, 67^4$	4	4	8
		4	0563, 1472, 2543	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAeBFbG	20	01230527634721432567	0^2	$12^8,23^6,27^4,25^8,34^4,67^8$	1	6	7
		4	1036, 0745, 1654	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAeCgae	20	01230563472145076527	$4^2, 3^2$	$07^4,05^8,12^8,27^8,56^8$	2	5	7
		4	1036, 2543, 1674	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		20	01230527650745634167	$0^3, 1^2, 2^2$	$05^4, 56^4, 67^8$	3	3	6
	AEAeaEaG	4	1036, 1472, 2543	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAfAGae	20	10345270123054721436	$\varnothing$	$01^6,03^8,12^6,34^4,45^4,27^8$	0	6	6
		4	1674, 0765, 2563	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAgcFae	20	10345270123054721436	$1^2, 2^2$	$07^6, 05^8, 34^8, 454, 67^4$	2	5	7
		4	1036, 1472, 2563	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	

Continua na próxima página

Tabela 5.10.4 – Continuação da página anterior

Classe	Rotação	α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ
$R_{4,4,4,20}$	AEBEbeaf	20	10327012341672507436	$\varnothing$	$01^4, 07^8, 16^8, 23^4, 27, 34^8$	0	6	6
		4	0563, 1452, 4765	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEBFCeaF	20	10327654305634701236	$7^2, 4^2, 3^3, 6^3$	$01^4, 03^6, 23^4, 56^4$	4	4	8
		4	0725, 1452, 1674	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEBeBFbG	20	01230521432763472567	$0^2, 5^2$	$12^4, 23^6, 27^4, 34^4, 67^6$	2	5	7
		4	1036, 0745, 1654	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEBfCGae	20	10347256327012305436	$2^3, 5^2$	$01^8, 03^6, 27^4, 34^4, 36^8$		25	7
		4	0765, 1452, 1674	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AECFaFBG	20	10327654305236701256	$\varnothing$	$01^4, 03^6, 23^6, 25^6, 56^6, 67^8$	0	6	6
		4	1634, 0745, 1472	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AECeaEaG	20	01254327650745634167	$1^2, 2^2$	$07^8, 34^8, 45^8, 56^4, 67^8$	2	5	7
		4	1036, 0523, 1472	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AECfBFcG	20	10347214365416701256	7^2	$01^4, 12^8, 14^4, 16^6, 34^4, 56^8$	1	6	7
		4	0523, 0745, 2763	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AECgAeaF	20	01250721430563276547	$4^2, 3^2$	$07^4, 05^6, 12^4, 27^7, 56^4$	2	5	7
		4	1036, 1674, 2345	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEaFBgAf	20	10321430567254163476	$2^2, 5^2$	$03^4, 16^4, 14^8, 34^8, 67^8$	2	5	7
		4	0127, 0745, 2365	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{4,4,6,18}$	AEafcFbE	18	103450725670127436	$6^2, 5^2$	$01^6, 07^4, 27^6, 34^4$	2	4	6
		4	0523, 1654	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		6	147632	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEafcGAf	18	103452305416321476	$\varnothing$	$03^4, 16^6, 14^4, 23^6, 45^4$	0	5	5
		4	0127, 2567	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		6	074365	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEafcGbf	18	103452305416507436	$\varnothing$	$03^4, 16^6, 05^4, 34^4, 45^4$	0	5	5
		4	0127, 2567	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		6	147632	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEafcebE	18	103452305670127436	$2^2, 5^2, 6^2, 7^2$	$01^6, 03^4, 34^4$	4	3	7
		4	0725, 1654	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		6	147632	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEagCfBf	18	103672507416321456	$2^2, 5^2, 0^2, 7^2$	$16^6, 36^8, 14^4$	4	3	7
		4	0127, 0543	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		6	234765	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEbEbgBF	R_{18}	103214507234163056	$\varnothing$	$14^4, 05^8, 03^4, 16^4, 23^6$	0	5	5
		4, 4	2765, 3674	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		6	012547	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	

Continua na próxima página

Tabela 5.10.4 – Continuação da página anterior

Classe	Rotação	α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ
$R_{4,4,6,18}$	AEbFcEag	18	103214701254167236	7^2	$16^4, 01^6, 12^4, 14^6, 23^4$	1	5	6
		4	$0765, 3456$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		6	052743	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEbgcFbg	18	012567234507632147	$4^2, 5^2$	$07^6, 12^4, 23^6, 67^4$	2	4	6
		4	$1036, 1654$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		6	052743	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEbgcebE	18	012507234527430567	$0^3, 7^3$	$05^6, 25^6, 27^4, 34^4$	4	2	6
		4	$1036, 1654$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		6	147632	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEcfafbe	18	103416521472305436	$6^2, 5^2, 2^2, 1^3$	$01^6, 07^4, 27^6, 34^4$	4	2	6
		4	$0127, 4567$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		6	076325	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAeCfbf	18	012305432507416527	$2^3, 1^2$	$07^6, 05^4, 23^4, 52^6$	4	2	6
		4	$1036, 3476$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		6	145672	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{4,4,8,16}$	AEAeCgbG	16	0741652763472145	$5^2, 6^2$	$14^4, 27^4, 47^4$	3	2	6
		4	$1036, 2543$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	01230567	0^2	$\varnothing$	1	0	
	AEAeagAE	16	1036527450721476	$1^2, 5^2, 6^2, 0^2$	$27^4, 47^6$	4	2	7
		4	$2543, 1634$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	01230567	0^2	$\varnothing$	1	0	
	AEAfaEae	16	1034167456325436	$\varnothing$	$16^4, 34^4, 36^4, 45^4$	4	0	6
		4	$0765, 1472$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	01230527	$0^2, 2^2$	$\varnothing$	2	0	
	AEAgafAG	16	0123416325074567	$1^2, 5^2, 6^2, 4^2$	$07^4, 23^4$	4	2	7
		4	$0543, 1472$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	10365276	$\varnothing$	6^2	1	0	
	AEBEAeae	16	1032701234521436	$\varnothing$	$01^4, 12^4, 23^4, 34^4$	4	0	6
		4	$0563, 1674$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	07654725	$5^2, 7^2$	$\varnothing$	2	0	
	AEBFbeBe	R_{16}	1032701236743056	$5^2, 7^2$	$01^4, 03^4, 23^4$	2	3	7
		$4, 4$	$1452, 1634$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	07654725	$5^2, 7^2$	$\varnothing$	2	0	

Continua na próxima página

Tabela 5.10.4 − Continuação da página anterior

Classe	Rotação	R_α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ_R
$R_{4,6,10,12}$	AEAFCGcG	R_{12}	012365074167	$1^2, 7^2, 6^2, 0^2$	$\varnothing$	4	0	6
		R_{10}	1452763472	4^2	27^4	1	1	
		R_4/R_6	0543/103256	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAGBFcG	R_{12}	103472143256	$1^2, 2^2$	34^4	2	1	5
		R_{10}	0123654167	$1^2, 6^2$	$\varnothing$	2	0	
		R_4/R_6	0745/052763	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAGbeCf	R_{12}	012367214527	$\varnothing$	$21^4, 72^4$	0	2	4
		R_{10}	1034165476	4^2	16^4	1	1	
		R_4/R_6	0563/074325	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEBEAgCF	R_{12}	012345072547	2^2	$07^4, 45^4$	1	2	5
		R_{10}	1436741652	6^2	41^4	1	1	
		R_4/R_6	0563/103276	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{4,8,8,12}$	AEAEAeCe	R_{12}	143674165472	6^2	$74^4, 14^4$	1	2	5
		R_8	10325076	0^2	$\varnothing$	1	0	
		R_8	01234527	2^2	$\varnothing$	1	0	
		R_4	0563	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAFBeAg	R_{12}	012365416347	$1^2, 4^2$	36^4	2	1	4
		R_8	10325076	0^2	$\varnothing$	1	0	
		R_8	05672143	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		R_4	2745	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAFBfAe	R_{12}	054163472143	$\varnothing$	$14^4, 34^4$	0	2	4
		R_8	10325076	0^2	$\varnothing$	1	0	
		R_8	01236527	2^2	$\varnothing$	1	0	
		R_4	4567	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAeAEce	R_{12}	103650763456	$0^2, 5^2, 6^3$	36^4	3	1	8
		R_8	01230527	$0^2, 2^2$	$\varnothing$	2	0	
		R_8	14325472	$4^2, 2^2$	$\varnothing$	2	0	
		R_4	1674	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAebfAF	R_{12}	072145674325	$2^2, 4^2, 5^2, 7^2$	$\varnothing$	4	0	6
		R_8	10365276	6^2	$\varnothing$	1	0	
		R_8	01230547	0^2	$\varnothing$	1	0	
		R_4	1634	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	

Continua na página seguinte

Tabela 5.10.4 – Continuação da página anterior

Classe	Rotação	α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ_R
$R_{4,4,8,16}$	AEBGcFAg	16	0123654163052147	$5^2, 0^2$	$12^4, 14^4, 36^4$	2	3	6
		4	$2743, 2567$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	10345076	0^2	$\varnothing$	1	0	
	AEBeCecf	16	1036543270123056	$\varnothing$	$01^4, 03^4, 23^4, 56^4$	0	4	5
		4	$1452, 3476$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	07416725	7^2	$\varnothing$	1	0	
	AEBebGcg	16	1036507634167256	$7^2, 0^2$	$16^4, 36^4, 56^4$	1	3	5
		4	$1452, 2743$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	01230547	0^2	$\varnothing$	1	0	
	AEBfCeAG	16	1034725074163276	$7^3, 0^2, 3^2, 2^2$	$16^4, 47^4$	4	2	7
		4	$1452, 3654$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	01230567	0^2	$\varnothing$	1	0	
	AECEAEae	16	1032701254721436	$3^2, 4^2, 1^3, 2^3$	$01^4, 27^6$	4	2	8
		4	$0765, 1674$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	05234563	$3^2, 5^2$	$\varnothing$	2	0	
	AECGagcf	16	1034167214763056	$1^3, 6^3$	$03^4, 14^4, 67^4$	2	3	6
		4	$0745, 2365$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	01254327	2^2	$\varnothing$	1	0	
	AEAeCEbe	16	0763472145674165	$\varnothing$	$14^4, 74^6, 56^4, 67^6$	0	4	5
		4	$1036, 2543$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	01230527	2^2	$\varnothing$	1	0	1
	AEAfagAG	16	1034163254365276	$6^3, 3^3$	$16^4, 52^4, 34^6$	2	3	6
		4	$0745, 1472$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	01230567	0^2	$\varnothing$	1	0	
	AEAgbGaE	16	0547650721452743	$7^3, 4^3$	$05^4, 45^6, 72^4$	2	3	6
		4	$1036, 2563$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		8	01234167	1^2	$\varnothing$	1	0	
$R_{4,4,10,14}$	AEAgbGaF	14	01234167430547	$0^4, 1^4$	$43^4, 74^4$	2	2	6
		10	0721452765	5^4	72^4	0	2	
		4	$1036, 2563$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAgbGaf	14	01234167214527	7^6	$12^6, 41^4$	1	2	5
		10	0547650743	0	$05^4, 47^4$	0	2	
		4	$1036, 2563$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	

Continua na página seguinte

Tabela 5.10.4 – Continuação da página anterior

Classe	Rotação	α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ_R
		14	01234167214527	7^6	$12^6, 41^4$	1	2	
	AEAgbeaf	10	0563250743	3^4	05^4	1	1	5
		4	$1036, 4765$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		14	01234167430547	$1^4, 0^4$	$34^4, 47^4$	2	2	
	AEAgbfaF	10	0721456325	$5^4, 2^4$	$\varnothing$	2	0	6
		4	$1036, 2765$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		14	01234567430527	$2^2, 0^2, 5^2, 7^2$	34^4	4	1	
	AEAgcEbe	10	0763254165	$5^2, 6^2$	$\varnothing$	2	0	7
		4	$1036, 1472$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		14	01234507430527	2^2	$07^6, 34^4, 50^4$	1	3	
	AEAgcFCf	10	1036721476	1^2	67^4	1	1	6
		4	$1654, 2563$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{4,4,10,14}$		14	01234507430527	2^2	$07^6, 05^4, 34^4$	1	3	
	AEAgcFaf	10	1476541672	$\varnothing$	$67^4, 14^4$	0	2	6
		4	$2563, 1036$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		14	10367012345276	$2^2, 3^2$	$01^4, 67^4$	2	2	
	AEAgcGCG	10	0541650743	4^4	05^4	1	1	6
		4	$1472, 2563$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		14	01234527632567	$\varnothing$	$52^4, 67^4, 23^6$	0	3	
	AEAgcGbG	10	0541650743	4^2	05^4	1	1	5
		4	$1036, 1472$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		14	05472563452143	$\varnothing$	$25^4, 34^4, 45^6$	0	3	
	AEBFAGae	10	1032701236	$\varnothing$	$01^4, 23^4$	0	2	5
		4	$0765, 1674$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		12	103250721436	$1^2, 0^2, 2^2, 3^2$	$\varnothing$	4	0	
	AEAEAeaF	12	012345276547	$2^2, 7^2$	45^4	2	1	7
		4	$0563, 1674$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		12	103256305436	5^2	$06^4, 63^4$	1	2	
$R_{4,4,12,12}$	AEAEaGag	12	012341672147	7^2	$12^4, 14^4$	1	2	6
		4	$0765, 2745$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		12	103254701236	$\varnothing$	$01^4_3, 23^4_3$	0	2	
	AEAFAEaF	12	052765072143	$\varnothing$	$05^4, 27^4$	0	2	4
		4	$1674, 3456$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	

Continua na página seguinte

Tabela 5.10.4 – Continuação da página anterior

Classe	Rotação	α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ_R
$R_{4,4,12,12}$	AEAFBGbE	12	103256701236	6^2	$01^4, 23^4$	1	2	5
		12	054165072143	$\varnothing$	$05^4, 14^4$	0	2	
		4	$2745, 3476$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAGaeaE	12	103416701236	3^4	$01^4, 61^4$	1	2	7
		12	072147654325	$7^4, 2^4, 4^4, 5^4$		4	0	
		4	$0563, 2745$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAgaGAG	12	103650745276	$5^2, 0^2, 6^2, 7^2$	$\varnothing$	4	0	6
		12	012341632567	$1^2, 6^2$	32_5^3	1	1	
		4	$0543, 1472$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AECEaeAe	12	103270125076	2^2	$10^4, 70^4$	1	2	7
		12	056745234163	$5^2, 3^2, 6^2, 4^2$	$\varnothing$	4	0	
		4	$1472, 3654$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{4,6,6,16}$	AEcFAECG	16	1032547236701276	7^3	$01^4, 23^4, 67^4$	1	3	4
		6	$052143, 074165$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		4	3456	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEcFBEAF	16	1032541634701276	$2^2, 3^2, 7^2, 4^2$	$01^4, 16^6$	4	2	6
		6	$052143, 072365$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		4	4567	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEcFBEcE	16	1032541670127456	$7^2, 2^2$	$01^6, 16^6, 45^6$	2	3	5
		6	$052143, 072365$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		4	3476	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEcFBFBG	16	0127654163472367	$1^2, 4^2$	$36^6, 27^6, 67^4$	2	3	5
		6	$103256, 052143$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		4	0745	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEcFBFBe	16	0765416347236745	$\varnothing$	$36^4, 47^4, 45^4, 67^4$	4	4	4
		6	$103256, 052143$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		4	0127	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEcGCGAE	16	0127416305432567	$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 0^2$	$\varnothing$	0	0	8
		6	$103476, 072365$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		4	1452	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEcGbFAe	16	1034163052145076	$\varnothing$	$16^4, 03^4, 05^4, 14^6$	0	4	4
		6	$236547, 256743$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		4	0127	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	

Continua na página seguinte

Tabela 5.10.4 − Continuação da página anterior

Classe	Rotação	α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ_R
		16	1034167012743256	$7^2, 2^2$	$16^4, 01^6, 43^6$	2	3	
	AEcGbGcE	6	$054763, 072365$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	5
		4	1452	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{4,6,6,16}$		16	1034567416325076	$3^2, 4^2, 5^2, 0^2$	$16^6, 67^6$	4	2	
	AEcfAfAe	6	$054723, 143652$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	6
		4	0127	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		14	10365472145076	$1^2, 6^2, 7^2, 0^2$	54^4	4	1	
	AEAebFAe	8	01230527	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	5
		$4, 6$	$1634, 256743$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		14	01230527432567	$0^2, 7^2$	$52^4, 23^6$	2	2	
	AEAebFbE	8	16547634	$4^2, 6^2$	$\varnothing$	2	0	6
		$4, 6$	$1036, 072145$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		14	05274167214563	$5^2, 6^2$	$27^4, 14^4$	2	2	
	AEAECEag	8	10325436	3^2	$\varnothing$	1	0	5
		$4, 6$	$0765, 012347$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{4.6.8.14}$		14	01234165274367	$1^2, 6^2, 7^2, 2^2$	34^6	4	1	
	AEAEbgCE	8	10325476	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	5
		$4, 6$	$0563, 072145$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		14	01236741630547	$0^2, 1^2$	$47^6, 36^4$	2	2	
	AEAGAfBF	8	07214325	2^2	$\varnothing$	1	0	5
		$4, 6$	$2765, 103456$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		14	05416507432563	$3^2, 4^2$	$56^6, 05^4$	2	2	
	AEAGcGCG	8	10345276	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	4
		$4, 6$	$1472, 012367$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		12	012347214367	7^2	$12^4, 34^4$	1	2	
	AEAEBFBG	10	0527654163	$5^2, 6^2$	$\varnothing$	2	0	5
		$4, 6$	$0745, 103256$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		12	103250765436	$3^2, 5^2, 6^2, 0^2$	$\varnothing$	4	0	
$R_{4,6,10,12}$	AEAECeag	10	1452741672	$\varnothing$	$14^4, 27^4$	0	2	6
		$4, 6$	$0563, 012347$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		12	103250763056	6^2	$30^4, 50^4$	1	2	
	AEAECecg	10	1452741672	$\varnothing$	$14^4, 27^4$	0	2	5
		$4, 6$	$3654, 012347$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	

Continua na página seguinte

Tabela 5.10.4 – Continuação da página anterior

Classe	Rotação	R_α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ_R
$R_{4,8,8,12}$	AEcecEAe	R_{12}	163456743254	6^2	$34^4, 45^4$	1	2	6
		R_8	10365076	$0^2, 6^2$	$\varnothing$	2	0	
		R_8	05214723	2^2	$\varnothing$	1	0	
		R_4	0127	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{4,8,10,10}$	AEAECgaf	R_{10}	0123476527	$2^2, 7^2$	$\varnothing$	2	0	5
		R_{10}	0741672145	7^2	14^4	1	1	
		R_8	10325436	3^2	$\varnothing$	1	0	
		R_4	0563	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAFaeCe	R_{10}	0123674527	$2^2, 7^2$	$\varnothing$	2	0	5
		R_{10}	0563416543	$\varnothing$	$34^4, 56^4$	0	2	
		R_8	10325076	0^2	$\varnothing$	1	0	
		R_4	1472	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAGCeag	R_{10}	1034701236	3^2	01^4	1	1	5
		R_{10}	1452741672	$\varnothing$	$14^4, 27^4$	0	2	
		R_8	07654325	5^2	$\varnothing$	1	0	
		R_4	0563	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAeCEBf	R_{10}	1036721456	$1^2, 6^2$	$\varnothing$	2	0	6
		R_{10}	0741634765	6^2	47^4	1	1	
		R_8	01230527	$0^2, 2^2$	$\varnothing$	2	0	
		R_4	2543	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEBecFaF	R_{10}	0123052147	0^2	12^4	1	1	5
		R_{10}	1674327654	4^2	67^4	1	1	
		R_8	07256345	5^2	$\varnothing$	1	0	
		R_4	1036	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{6,6,6,14}$	AEAEBFBg	R_{14}	05274507654163	$6^2, 7^2$	$05^4, 45^4$	2	2	4
		$R_6/R_6/R_6$	103256/012347/143672	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEBFBGCG	R_{14}	05416507452143	$\varnothing$	$05^4, 45^6, 14^4$	0	3	3
		$R_6/R_6/R_6$	103276/012367/256347	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{4,8,8,12}$	AEbfCGCf	R_{12}	012563214527	$\varnothing$	$12^4, 52^4$	0	2	3
		R_8	05436723	3^2	$\varnothing$	1	0	
		R_6/R_6	103476/074165	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	

Continua na página seguinte

Tabela 5.10.4 − Continuação da página anterior

Classe	Rotação	R_α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ_R
$R_{6,6,8,12}$	AEbfcGAGf	R_{12}	054163214723	$\varnothing$	$41^4, 23^4$	0	2	2
		R_8	10345276	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		R_6/R_6	012567/074365	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEcEAfcE	R_{12}	103250723456	$0^2, 5^2$	32^4	2	1	4
		R_8	01274167	1^2	$\varnothing$	1	0	
		R_6/R_6	054763/143652	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEcFAEAE	R_{12}	012741634567	$1^2, 4^2, 6^2, 7^2$	$\varnothing$	4	0	4
		R_8	10325476	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		R_6/R_6	052143/072365	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEcgAgcE	R_{12}	103652143056	1^2	$30^4, 56^4$	1	2	4
		R_8	01274167	1^2	$\varnothing$	1	0	
		R_6/R_6	072345/254763	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAEBEcF	R_{12}	103254167456	$1^2, 6^2$	54^4	2	1	3
		R_8	07214365	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
		R_6/R_6	012347/052763	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAGCGCG	R_{12}	103472145276	$1^2, 4^2$	72^4	2	1	5
		R_8	05432563	$3^2, 5^2$	$\varnothing$	2	0	
		R_6/R_6	012367/074165	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAfcEcf	R_{12}	147632541672	2^2	$41^4, 67^4$	1	2	5
		R_8	01230527	$3^2, 5^2$	$\varnothing$	2	0	
		R_6/R_6	103456/074365	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
$R_{6,6,10,10}$	AEAfcfcE	10	0123054167	$0^2, 1^2$	$\varnothing$	2	0	4
		10	0721476325	$2^2, 7^2$	$\varnothing$	2	0	
		6/6	274365/103456	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEBFBEaf	10	1032701236	$\varnothing$	$01^4, 23^4$	0	2	4
		10	0745634765	$\varnothing$	$56^4, 47^4$	0	2	
		6/6	052143/167254	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEBFcgcg	10	1032743056	$\varnothing$	03^4	0	1	2
		10	0123652147	$\varnothing$	21^4	0	1	
		6/6	076345/167254	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AECfAeBg	10	1034523056	5^2	03^4	1	1	
		10	0125076547	5^2	07^4	1	1	4
		6/6	143672/163274	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	0
$R_{6,8,8,10}$	$\varnothing$	10/8/8/6	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	0

Continua na página seguinte

Tabela 5.10.4 – Continuação da página anterior

Classe	Rotação	R_α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ_R
$R_{8,8,8,8}$	AEaEAEaE	R_8/R_8	10321436/01274167	$3^2, 1^2/1^2, 7^2$	$\varnothing$	2/2	0	8
		R_8/R_8	05234563/07254765	$3^2, 5^2/7^2, 5^2$	$\varnothing$	2/2	0	
	AEAFBfAe	R_8/R_8	10327436/01254167	$3^2/1^2$	$\varnothing$	1/1	0	5
		R_8/R_8	05234563/07214765	$3^2, 5^2/7^2$	$\varnothing$	2/1	0	
	AEBEcEbE	R_8/R_8	10327436/01234567	$3^2/\varnothing$	$\varnothing$	1/0	0	2
		R_8/R_8	05214763/07254165	$\varnothing/5^2$	$\varnothing$	0/1	0	
	AEAeAeAE	R_8/R_8	10365476/01230567	$6^2/0^2$	$\varnothing$	1/1	0	4
		R_8/R_8	07214325/16345274	$2^2/4^2$	$\varnothing$	1/1	0	

Continua na página seguinte

Podemos comprovar, nos emaranhados identificados da Tabela 5.10.4, que a família dos mergulhos de $K_{4,4}$ sobre o $3T$ possui um número razoável de emaranhados distintos. Outra particularidade obervada é que as distâncias de Lee dos emaranhados assumem valores $4, 6$ e 8, enquanto na família do bitoro, as distâncias de Lee são constantes iguais a 4. Como 4 é o menor valor que a distância de Lee pode assumir, então os mergulhos de $K_{4,4}$ sobre $2T$ só produzem emaranhados de distância mínima.

A Tabela 5.10.5 contém o número de emaranhados distintos identificados em cada classe de mergulho de $K_{4,4}$ sobre o tritoro com as seus respectivas distâncias de Lee mínima e máxima, indicada por $d_{\min,\max}$.

Classe	$R_{4,4,4,20}$	$R_{4,4,6,18}$	$R_{4,4,8,16}$	$R_{4,4,10,14}$	$R_{4,4,12,12}$	$R_{4,6,6,16}$	$R_{4,6,8,14}$	$R_{4,6,10,12}$
Distintas	18	11	15	10	7	9	6	7
$d_{\min,\max}$	$4-8$	$4-8$	$4-8$	$4-6$	$4-6$	$4-4$	$4-6$	$4-6$
Classe	$R_{4,8,8,12}$	$R_{4,8,10,10}$	$R_{6,6,6,14}$	$R_{6,6,8,12}$	$R_{6,6,10,10}$	$R_{6,8,8,10}$	$R_{8,8,8,8}$	
Distintas	6	5	2	8	4	$\varnothing$	4	
$d_{\min,\max}$	$4-4$	$4-4$	$4-6$	$4-4$	$4-4$	$\varnothing$	$4-4$	

Tabela 5.10.5: Número e distância de Lee de emaranhados distintos das classes de mergulhos de $K_{4,4}$ sobre o tritoro

Observamos ainda na Tabela 5.10.5, que os emaranhados de distância máxima de $K_{4,4}$ das classes do tritoro, isto é, aqueles com $d_{\text{Lee}} = 8$, ocorrem somente nas regiões que tem pelo menos 16 lados, neste caso, as regiões de 16 e 18 lados. Já os emaranhados com $d_{\text{Lee}} = 6$, somente são encontrados nas regiões com pelo menos 12 lados. Note que são 112 emaranhados distintos identificados na família de mergulhos do toro. Como são 14 classe distintas, então foi identificado 98 novos modelos de modulações com desempenhos diferentes, o que representa um número 7 vezes maior em relação aos 14 modelos esperados. Lembramos que este número deverá ter um aumento considerável, quando forem acrescentadas as modulações associadas a canais com grafos não isomorfos.

5.10.4 Emaranhados de $K_{4,4}$ sobre o 4-toro

A família de mergulhos de $K_{4,4}$ sobre o 4-toro é composta de 7 classes de mergulhos, todos formados por duas regiões. Estas são as classes de mergulhos máximos de $K_{4,4}$, e com a identificação de seus emaranhados, conclui-se o processo de identificação de emaranhados distintos.

Antes de apresentarmos, na Tabela 5.10.6, a relação de emaranhados distintos identificados, gostaríamos de observar que os emaranhado de $K_{4,4}$ sobre $4T$ são os que apresentam os maiores graus de emaranhados dentre os emaranhados de $K_{4,4}$. Isto se deve ao fato de que os mergulhos de $4T$ possuem regiões de 4 até 28 lados e região de maior lado do mergulho pode ter, no mínimo, 16 lados. Por estas particularidades, os emaranhados de $K_{4,4}$ sobre o 4-toro são os que apresentam a maior quantidade de emaranhados distintos, mas também são os mais trabalhosos de serem identificados.

Iremos observar ainda nos emaranhados de $K_{4,4}$ a existência de emaranhados com distância de Lee maiores do as demais famílias de mergulhos de $K_{4,4}$. O fato desta família representar as classes de mergulhos máximos de $K_{4,4}$, muitas das propriedades sobre máximos são típicas dos mergulhos máximos.

Por exemplo, quando se trata da família de mergulhos máximos de $K_{4,4}$, nos deparamos com várias propriedades maximais. É sobre $4T$ que encontramos: o maior número de mergulhos de $K_{4,4}$, o maior número de emaranhados distintos quando comparado com o número de classes, os emaranhados com as maiores distâncias de Lee, regiões com os maiores números de lados, e os emaranhados pontuais e lineares com os maiores números de graus. Sem falar ainda que o 4-toro é a superfície com maior número de gênero na qual $K_{4,4}$ possui um mergulho de 2-células.

Os mergulhos máximais só não maximizam o número de classes de mergulhos de uma superfície (esta é realizadas por $3T$) e o número de regiões (realizada pelo mergulho mínimo sobre T). Quanto ao número de classes de mergulhos do grafo completo bipartido $K_{m,n}$, este é mínimo, quando o mergulho é formado por uma única região e nem é máximo nem mínimo quando $K_{m,n}$ possui duas regiões, como é o caso de $K_{4,4}$. Já o número de regiões de um mergulho máximo de um grafo é sempre mínimo. Em termos de modulações, Lima e Palazzo [21] apresentaram fortes justificativas de que o desempenho de um sistema de transmissão de dados é melhor à medida que a modulação encontra-se sobre um superfície de gênero maior. Com isso, as modulação do 4-toro, vindas de mergulhos de $K_{4,4}$, são as que apresentam os melhores desempenhos, dentre todas as modulações de $K_{4,4}$. Daí a grande importância das identificações dos mergulhos máximos de um grafo.

Todas as identificações realizadas neste trabalho são extremamente importantes. Dos mergulhos mínimos até os máximos, encontramos projetos de modulações das mais variadas espécies. A quantidade de sinais da constelação é fixada pela escolha da superfície, o mergulho mínimo contém as constelações com o maior número de sinais e este número caí de 2 em 2 unidades, até chegar ao mergulho máximo, cujas modulações atingem o número mínimo de regiões. A partição depende da classe de mergulhos e a eficiência da modulação dependem do tipo de emarnhanado linear e das classes de isomorfismos dos canais. Isto é o resumo das conclusões localizadas por todo o trabalho, enfatizá-lo justifica plenamente o esforço despreendido no processo de identificação dos emaranhados.

Tabela 5.10.6: Classificação dos emaranhados de $K_{4,4} \hookrightarrow 4T$

Classe	Rotação	R_α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ_R
R_4R_{28}	AEAEAEBe	28	10325472143674 16305270123456	$\varnothing$	$01^6, 03^{12}, 12^{12}, 25^{12}, 16^{12}, 14^4$ $23^6, 27^{12}, 47^6, 45^6, 34^{12}, 36^4$	0	12	12
		4	0765	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAECfBG	28	10325074163054 36701234721456	$\varnothing$	$21^4, 36^4, 05^6, 34^6, 16^8, 30^8$ $10^{10}, 70^{10}, 41^{10}, 32^{10}, 74^{12}, 45^{12}$	0	12	12
		4	2765	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAEaeBg	28	10325076543672 14701234163056	$\varnothing$	$03^4, 16^4, 12^4, 67^4, 05^6, 14^6$ $65^8, 10^{10}, 70^{10}, 34^{10}, 32^{10}, 36^{12}$	0	12	12
		4	2745	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	
	AEAFCebE	28	10325072145274 16543056701236	$\varnothing$	$10^4, 41^4, 32^4, 56^4, 27^4, 52^6$ $54^6, 03^{10}, 07^{10}, 21^{10}, 05^{12}, 16^{12}$	0	12	12
		4	3476	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	0	
	AEAFaeaE	28	10325072147654 30563416701236	$\varnothing$	$10^4_{21}, 34^4, 32^4, 56^4, 61^6, 36^8$ $05^{10}, 07^{10}, 21^{10}, 41^{10}, 36^{10}, 01^{12}$	0	12	12
		4	2745	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAFceae	28	10325076541674 30563452701236	$\varnothing$	$10^4, 34^4, 32^4, 67^4, 56^8, 36^8$ $05^{10}, 07^{10}, 16^{10}, 25^{10}, 45^{10}, 03^{12}$	0	12	12
		4	1472	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAGaeAg	28	10341630567214 70123654325076	$\varnothing$	$30^4, 16^4, 12^4, 32^4, 14^8, 34^8$ $05^{10}, 07^{10}, 65^{10}, 67^{10}, 01^{12}, 36^{12}$	0	12	12
		4	2745	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAGcFAG	28	10345074325670 12365416305276	$\varnothing$	$43^4, 63^4, 70^6, 03^6, 16^6, 23^6$ $65^6, 50^8, 01^{12}, 25^{12}, 45^{12}, 67^{12}$	0	12	12
		4	1472	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAeceCg	28	10367214701230 56345274325076	$\varnothing$	$12^4, 25^4, 34^4, 67^4, 01^8, 30^{10}$ $70^{10}, 50^{10}, 32^{10}, 72^{12}, 36^{12}, 74^{12}$	0	12	12
		4	1654	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAeagcE	28	10365274507214 76341670123056	$\varnothing$	$03^4, 14^4, 27^4, 65^4, 67^4, 61^8$ $10^6, 70^{10}, 50^{10}, 12^{10}, 47^6, 63^{12}$	0	12	12
		4	2543	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAebebe	28	01230567432507 63416547214527	$\varnothing$	$27^4, 45^4, 14^6, 50^6, 12^6, 23^6$ $34^6, 67^6, 07^{12}, 25^{12}, 47^{12}, 65^{12}$	0	12	12
		4	1036	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	

Continua na próxima página

Tabela 5.10.6 − Continuação da página anterior

Classe	Rotação	R_α	γ	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ_R
R_4R_{28}	AEAGbGae	28	10341674325630 54721452701236	$\varnothing$	$10^4, 16^4, 27^4, 43^4, 45^4, 47^8$ $12^5, 03^{10}, 23^{10}, 25^{10}, 14^{12}, 63^{12}$	0	12	12
		4	0765	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAeBFCF	28	10367450721432 56347012305276	$\varnothing$	$34^4, 67^4, 03^6, 50^{10}, 01^8, 23^8$ $70^{10}, 12^{10}, 72^{10}, 52^{10}, 47^{12}, 63^{12}$	0	12	12
		4	1654	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
R_6R_{26}	AEAEAEBf	26	1032547650741 6305270123456	$\varnothing$	$74^4, 10^6, 05^6, 32^6, 54^6$ $70^8, 65^8, 30^{12}, 16^{12}, 25^{12}$	0	10	10
		6	143672	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAEAgBf	26	1032547652701 2345074163056	$\varnothing$	$03^4, 16^4, 25^4, 07^5, 05^6$ $56^8, 01^{10}, 23^{10}, 45^{10}, 47^{12}$	0	10	10
		6	143672	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAEBGAe	26	1032567452701 2347214365076	$\varnothing$	$12^4, 52^4, 43^4, 72^6, 67^6$ $56^8, 47^8, 01^{10}, 23^{10}, 07^{12}$	0	10	10
		6	054163	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAEBfAf	26	1032507456721 4365270123476	$\varnothing$	$67^{10}, 10^6, 27^6, 32^6, 65^6$ $12^8, 34^8, 74^8, 25^{12}, 07^{12}$	0	10	10
		6	054163	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAECgcE	26	1032543652741 6701234763056	$\varnothing$	$03^4, 25^4, 47^8, 76^6, 65^8$ $16^{12}, 10^{10}, 32^{10}, 36^{10}, 34^{12}$	0	10	10
		6	072145	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAEcFcg	26	0123450763052 7436541672147	$\varnothing$	$05^4, 12^4, 14^4, 07^6, 36^6$ $72^8, 43^{10}, 74^{10}, 45^{12}, 67^{12}$	0	10	10
		6	103256	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAFBGBF	26	0123674527650 7214305416347	$\varnothing$	$41^4, 72^4, 76^4, 34^6, 36^6$ $05^6, 61^6, 72^{10}, 34^{12}, 56^{12}$	0	10	10
		6	103256	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAFCFCG	26	0123674527650 7214305416347	$\varnothing$	$41^4, 03^6, 25^6, 74^6, 54^6$ $05^8, 61^8, 72^{10}, 34^{12}, 56^{12}$	0	10	10
		6	143672	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	
	AEAFbFcG	26	0123654721450 7430527634167	$\varnothing$	$05^4, 67^4, 45^4, 12^6, 74^6$ $34^6, 36^8, 27^{10}, 14^{12}, 07^{12}$	0	10	10
		6	103256	$\varnothing$	$\varnothing$	0	0	

Continua na próxima página

Tabela 5.10.6 – Continuação da página anterior

Classe	Rotação	R_α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ_R
R_8R_{24}	AEAFbGbe	24	103256743054721452701236	6^2	$10^4, 32^4, 27^4, 47^4$ $45^6, 30^6, 12^6, 25^{10}$	1	8	10
		8	07634165	6^2	$\varnothing$	1	0	
	AEAGAFAe	24	012365472143256741630527	0^2	$72^8, 32^8, 52^8, 36^8$ $74^8, 56^8, 21^6, 41^6$	1	8	10
		8	10345076	0^2	$\varnothing$	1	0	
	AEAGBfcE	24	103476305416701236527456	2^2	$30^4, 56^4, 47^6, 67^6$ $10^{10}, 36^{10}, 54^{10}, 16^{10}$	1	8	10
		8	07214325	2^2	$\varnothing$	1	0	
	AEAGcGaE	24	103452743256305416701236	7^2	$10^4, 25^4, 43^4, 61^6$ $30^{10}, 32^{10}, 36^{10}, 54^{10}$	1	8	10
		8	07214765	7^2	$\varnothing$	1	0	
	AEAeAGBE	24	103670123054765072143256	4^2	$50^4, 01^4, 30^6, 76^8$ $56^8, 23^{10}, 21^{10}, 07^{10}$	1	8	10
		8	16345274	4^2	$\varnothing$	1	0	
	AEAeAfcg	24	103652741672143250763456	0^2	$14^4, 72^4, 34^6, 65^4$ $76^8, 16^8, 25^{10}, 36^6$	1	8	10
		8	01230547	0^2	$\varnothing$	1	0	
	AEAFbGbe	24	103256743054721452701236	$0^2, 2^2$	$41^4, 43^4, 56^4, 47^4$ $61^{10}, 63^{10}, 67^{10}, 54^{10}$	1	8	10
		8	01230527	0^2	$\varnothing$	1	0	
	AEAebfCg	24	103672145634165274325076	0^2	$41^4, 25^4, 67^4, 65^4$ $63^6, 43^6, 27^{10}, 16^{10}$	1	8	10
		8	01230547	0^2	$\varnothing$	1	0	
	AEAfCfBf	24	103476527012305436721456	$\varnothing$	$45^6, 65^6, 01^8, 21^8$ $76^8, 03^{10}, 72^{10}, 34^{10}$	0	8	9
		8	07416325	$\varnothing$	$\varnothing$	1	0	0
	AEAgaEcE	24	103650721476325430527456	1^2	$52^4, 65^4, 45^6, 36^8$ $03^{10}, 50^{10}, 72^{10}, 74^{10}$	1	8	10
		8	01234167	1^2	$\varnothing$	1	0	
	AEBEaFbF	24	103276305214701234165436	0^2	$30^4, 61^4, 12^4, 43^4$ $41^6, 63^6, 32^{10}, 10^{10}$	1	8	10
		8	07256745	0^2	$\varnothing$	1	0	

Continua na próxima página

Tabela 5.10.6 – Continuação da página anterior

Classe	Rotação	R_α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ_R
$R_{10}R_{22}$	AEBEaGAe	22	1032701234163054365076	$\varnothing$	$01^4, 23^4, 50^4, 36^4, 70^6$ $03_9^9, 16_9^9, 34^6$	0	8	10
		10	1472567452	$\varnothing$	$25^4, 47^4$	0	2	
	AEBEbfAe	22	1032701234163054725076	4^2	$01^4, 50^4, 23^4, 70^4, 27^8$ $16_9^9, 03_9^9$	1	7	10
		10	1456743652	4^2	56^4	1	1	
	AEBFagbE	22	1032745072543056701236	6^2	$10^4, 72^4, 32^4, 05^8, 70^8$ $54^5, 03_9^9$	1	7	10
		10	1476341652	6^2	14^4	1	1	
	AEBFcfbg	22	1032743054165214701236	5^2	$10^4, 14^4, 30^4, 12^4, 32^4$ $47^{10}, 16^{10}$	1	7	10
		10	0763456725	5^2	67^4	1	1	
	AEBGaGcE	22	1034725674521432701236	6^2	$10^4, 52^4, 23^4, 74^4, 12^6$ $34^{10}, 27^{10}$	1	7	10
		10	1472567452	6^2	05^4	1	1	
$R_{12}R_{20}$	AEBGbEAf	20	10341630521456725476	$\varnothing$	$30^4,16^4,54^4,76^4,14^6,25^6$	0	6	8
		12	012365074327	$\varnothing$	$70^4, 32^4$	0	2	
	AEBGcEAG	20	10345670123650743276	$\varnothing$	$01^6, 07^6,32^6,34^6,65^6,67^6$	0	6	8
		12	052147254163	$\varnothing$	$25^4, 41^4$	0	2	
	AEBeAFBe	20	10367416345076547256	0^2	$36^4,54^4,56^4,16^4,74^8,67^8$	1	6	10
		12	012305214327	0^2	$21^4, 23^4$	1	2	
	AEBeAgAg	20	10365214327416345076	0^2	$41^4, 61^6, 34^6, 36_9^7$	1	4	9
		12	012305672547	$5^2, 0^2$ $7^2, 2^2$	$\varnothing$	4	0	
	AEBeCFBE	20	10367012305214507256	6^2	$01^4,50^4,21^4,25^6,30^6,70_9^7$	1	6	10
		12	163476543274	6^2	$47^4, 43^4$	1	2	
	AEBfBECG	20	10347254165074563276	$0^2, 3^2$	$56^4, 72^6, 45^6, 16^8, 74^8$	2	5	10
		12	012305214367	$3^2, 0^2$	21^4	2	1	
	AEBfCEAG	20	10347254365074163276	$0^2, 5^2$	$61^4, 72^6, 63^6, 43^4, 74^8$	2	5	10
		12	012305214567	$5^2, 0^2$	21^4	2	1	
	AEAEAgBe	20	10325472143674163056	$2^2, 5^2$	$03^4, 61^4, 41^4, 63^4, 47^6$	2	5	10
		12	012345076527	$5^2, 2^2$	70^4	2	1	
	AEAEBGCG	20	10325630541650745276	7^2	$03^4,45^6,25^6,50^4,61^8,65^6$	1	6	10
		12	012347214367	$4^2, 7^2$	21^4	2	1	

Continua na próxima página

Tabela 5.10.6 – Continuação da página anterior

Classe	Rotação	R_α	Sequência orbital	ϖ	σ	ϖ_R	σ_R	ϵ_R
$R_{14}R_{18}$	AEAEBGaf	18	103256305416721436	$2^2, 5^2$	$20^4, 14^4, 61^6, 63^6$	2	4	10
		14	01234765074527	$2^2, 5^2$	$70^4, 74^{46}$	2	2	
	AEAEaGCF	18	103256305436745276	$\varnothing$	$30^4, 36^4, 45^4, 67^4, 25^6$	0	5	8
		14	01234165072147	$\varnothing$	$70^4, 21^4, 14^6$	0	3	
	AEAEbECg	18	103254701234165076	$4^2, 5^2$	$61^4, 07^4, 01^6, 23^6$	2	4	10
		14	05274367214563	$5^2, 4^2$	$27^4, 35^6$	2	2	
	AEAEbgBg	18	103254701234163056	$4^2, 5^2$	$03^4, 61^4, 01^6, 23^6$	2	4	10
		14	07652743672145	$5^2, 4^2$	$72^4, 76^6$	2	2	
$R_{16}R_{16}$	AEAFagbE	16	1032543056701236	$5^2, 6^2$	$10^4, 32^4, 30^4$	2	3	10
		16	0721476341652745	$2^2, 3^2$	$41^4, 72^4, 47^6$	2	3	
	AEAGBGCF	16	1034701236745276	$2^2, 3^2$	$01^4, 76^4, 74^6$	2	3	10
		16	0541650721432563	$2^2, 3^2$	$50^4, 14^6, 56^6$	2	3	
	AEAGCfBg	16	1034701236721456	$4^2, 3^2, 6^2, 7^2$	$01^4, 21^4$	4	2	12
		16	0543250765274163	$4^2, 3^2, 6^2, 7^2$	$50^4, 52^4$	4	2	
	AEAeAEAE	16	1036507214325476	$0^2, 1^2, 2^2, 3^2$ $4^2, 5^2, 6^2, 7^2$	$\varnothing$	8	0	16
		16	0123052741634567	$0^2, 1^2, 2^2, 3^2$ $4^2, 5^2, 6^2, 7^2$	$\varnothing$	8	0	
	AEAeCeCe	16	1036741654325076	$4^2, 3^2, 0^2, 5^2$	$67^4, 16^6$	4	2	12
		16	0123056347214527	$4^2, 3^2, 0^2, 5^2$	$27^4, 12^6$	4	2	
	AEAfBeaf	16	1034765416721436	$\varnothing$	$14^4, 34^4, 67^4, 61^6$	0	4	8
		16	0123056325074527	$\varnothing$	$05^4, 32^4, 07^4, 52^4$	0	4	
	AEAgaEAf	16	1036507456721476	$0^2, 1^2$	$56^4, 76^4, 47^6$	2	4	12
		16	0123416325430527	$1^2, 0^2$	$25^4, 32^4, 43^6$	2	4	
	AEBEaECe	16	1032701234165076	$\varnothing$	$01^4, 23^4, 61^4, 50^6$	0	4	8
		16	0521472543674563	$\varnothing$	$25^4, 63^4, 45^4, 47^6$	0	4	
	AEBGCFaf	16	1034765432701236	$6^2, 7^2$	$10^4, 23^4, 43^4$	2	4	12
		16	0521450741672563	$6^2, 7^2$	$50^4, 41^4, 52^4$	2	4	
	AEBeaECe	16	1036745634165076	$0^2, 4^2$	$61^4, 63^4, 65^4, 67^4$	2	4	12
		16	0123052147254327	$0^2, 4^2$	$21^4, 23^4, 25^4, 27^4$	2	4	

Nos emaranhados relacionados na Tabela 5.10.6, constatamos que a família de $4T$ contém os maiores graus de emaranhados de mergulhos de $K_{4,4}$. A razão é porque os mergulhos máximos de $K_{4,4}$ possuem as regiões com o maior número de lados. Veja, por exemplo, que todos os mergulhos da Tabela 5.10.6 da forma $K_{4,4} \hookrightarrow 4T \equiv R_4R_{28}$ são emaranhados linares de grau 12, o valor máximo assumido diante dos demais emaranhados lineares de $K_{4,4}$.

Observamos ainda que as duas regiões R_{16} do mergulho

$$K_{4,4}\,(AEAeAEAE) \hookrightarrow 4T \equiv 2R_{16} \tag{5.36}$$

são emaranhados pontuais, ambos de grau 8, o máximo de valor atingido por um emaranhado pontual de $K_{4,4}$. Como consequência, o mergulho maximal (5.36) é um emaranhado pontual de grau 16, o máximo valor atingido por um emaranhado pontual, e também maior do que os graus máximos dos emaranhados misto, cujo máximo é de grau 10, e do emaranhado linear, cujo máximo é de grau 12.

A Tabela 5.10.7 mostra os graus dos emaranhados dos mergulhos máximos de $K_{4,4}$ e as distâncias de Lee mínima e máxima encontradas em cada classe de emaranhado.

Classe	$R_{4,28}$	$R_{6,26}$	$R_{8,24}$	$R_{10,22}$	$R_{12,20}$	$R_{14,18}$	$R_{16,16}$
Distintas	13	9	11	5	9	4	10
$d_{\min,\max}$	$4-12$	$4-12$	$4-10$	$4-10$	$4-8$	$4-6$	$4-6$

Tabela 5.10.7: Número e distância de Lee de emaranhados distintos das classes de mergulhos de $K_{4,4}$ sobre o tritoro

Notamos que os emaranhados distintos das classes de mergulhos de $K_{4,4}$ sobre $4T$, identificados na Tabela 5.10.7, foram 61 em 7 classes. Portanto, o número de emaranhados distintos de $4T$ são $8,714$ maior que o número de classes, o que vem confirmar a nossa afirmação anterior de que a classe de $4T$ é a que contem o maior número de incidência de emaranhados distintos. (Lembramos que a incidência da classe de $3T$ é de 7 vezes maior).

Observamos que todas as distâncias de Lee mínima e máxima, $d_{\min,\max} = d_{\min}$-$d_{\max}$, não só da Tabela 5.10.7, como também da Tabela 5.10.5, é uma estimativa das distâncias de Lee dos emaranhados lineares. Se fosse realizada sobre os emaranhados pontuais a distância mínima $d_{\min}$ seria sempre 4, mas a distância máxima poderia ultrapassar o $d_{\max}$ dos emaranhados lineares. Esta é apenas uma hipótese que pode ser confirmada posterioremente, entretanto, não temos certeza da existência de emaranhado pontual com $d_{\max}$ superior ao $d_{\max}$ do emaranhado linear, uma vez que as estimativas das distâncias de Lee dos emaranhados pontuais não foram realizadas nas Tabelas 5.10.1 - 5.10.6.

5.10.5 Comentários Finais

Para termos uma idéia mais precisa da variação do número de emaranhados distintas das classes de modulações, nas famílias de superfícies de mergulhos de $K_{4,4}$, unificaremos os dados das Tabelas 5.10.1, 5.10.3, 5.10.5 e 5.10.7, acrescentando os índices de incidências, para compor a Tabela 5.10.8.

Utilizamos a seguinte simbologia na Tabela 5.10.8: o símbolo # indica o número de emaranhados existente em cada classe Ξ; I^+ representa quantas vezes mais emaranhados existem na família de superfície gT, $g = 1, 2, 3, 4$, em relação ao número de classes de gT; as letras maiúsculas E e N indicam o número total de emraranhados identificados na família gT e o número de novos emaranhados encontrados, respectivamente. Mais exatamente, $N = T - |\Xi_{gT}|$, onde $|\Xi_{gT}|$ é igual ao número de classes da superfície gT. Com esta notação, o índice I^+ é obtido através da relação $E = I^+ N$.

<table>
<tr><td colspan="9">Emaranhados da classe do toro</td><td>E</td><td>N</td><td>I^+</td></tr>
<tr><td>Ξ</td><td colspan="8">$R_{4,4,4,4,4,4,4,4}$</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>#</td><td colspan="8">1</td></tr>
<tr><td colspan="9">Emaranhados da classe do bitoro</td><td>E</td><td>N</td><td>I^+</td></tr>
<tr><td>Ξ</td><td>$5R_4R_{12}$</td><td>$4R_4R_6R_{10}$</td><td colspan="2">$3R_42R_8$</td><td colspan="2">$3R_42R_6R_8$</td><td colspan="2">$2R_44R_6$</td><td rowspan="2">17</td><td rowspan="2">12</td><td rowspan="2">$3,4$</td></tr>
<tr><td>#</td><td>5</td><td>4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td colspan="9">Emaranhados da classe do tritoro</td><td>E</td><td>N</td><td>I^+</td></tr>
<tr><td>Ξ</td><td>$3R_4R_{20}$</td><td>$R_{4,4,6,18}$</td><td>$R_{4,4,8,16}$</td><td>$R_{4,4,10,14}$</td><td>$R_{4,4,12,12}$</td><td>$R_{4,6,6,16}$</td><td>$R_{4,6,8,14}$</td><td>$R_{4,6,10,12}$</td><td rowspan="4">112</td><td rowspan="4">98</td><td rowspan="4">$8,0$</td></tr>
<tr><td>#</td><td>18</td><td>11</td><td>15</td><td>10</td><td>7</td><td>9</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Ξ</td><td>$R_{4,8,8,12}$</td><td>$R_{4,8,10,10}$</td><td>$R_{6,6,6,14}$</td><td>$R_{6,6,8,12}$</td><td>$R_{6,6,10,10}$</td><td>$R_{6,8,8,10}$</td><td colspan="2">$R_{8,8,8,8}$</td></tr>
<tr><td>#</td><td>6</td><td>5</td><td>2</td><td>8</td><td>4</td><td>$\varnothing$</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td colspan="9">Emaranhados da classe do 4-toro</td><td>E</td><td>N</td><td>I^+</td></tr>
<tr><td>Ξ</td><td>$R_{4,28}$</td><td>$R_{6,26}$</td><td>$R_{8,24}$</td><td>$R_{10,22}$</td><td>$R_{12,20}$</td><td>$R_{14,18}$</td><td colspan="2">$R_{16,16}$</td><td rowspan="2">61</td><td rowspan="2">54</td><td rowspan="2">$8,7$</td></tr>
<tr><td>#</td><td>13</td><td>9</td><td>11</td><td>5</td><td>9</td><td>4</td><td colspan="2">10</td></tr>
</table>

Tabela 5.10.8: Número e distância de Lee de emaranhados distintos das classes de mergulhos de $K_{4,4}$ sobre o tritoro

Para termos uma idéia mais aproximada da distribuição de classes de emaranhados obtidos nesta seção, o gráfico em barras da Figura 5.10.1, ilustra o número de emaranhados de cada classe (barra mais larga à esquerda) da família de modulações sobre a superfície gT e a distância de Lee máxima alcançada pelos emaranhados lineares desta classe (barra mais estreita em cor escura).

Observamos que as barras mais largas em cada classe representam o total de emaranhados distintos e a barra mais estreita logo à direita indica a distância de Lee máxima desta classe. Veja que a classe $R_{6,8,8,10}$ de $3T$ é representada por dois traços sobre linha inferior do gráfico, situada no marco zero, para representar que esta classe não contém emaranhados, pois este mergulho não existe, e portanto não existe $d_{\text{Lee}} \max$.

Caso haja alguma dificuldade para vizualizar os dados de uma classe, indicamos, na parte superior do grafo, a partição correspondente a cada classe. Esta se encontra exatamente no alinhamento superior das divisórias das duas barras que fornecem o número de emaranhados e a $d_{\text{Lee}} \max$.

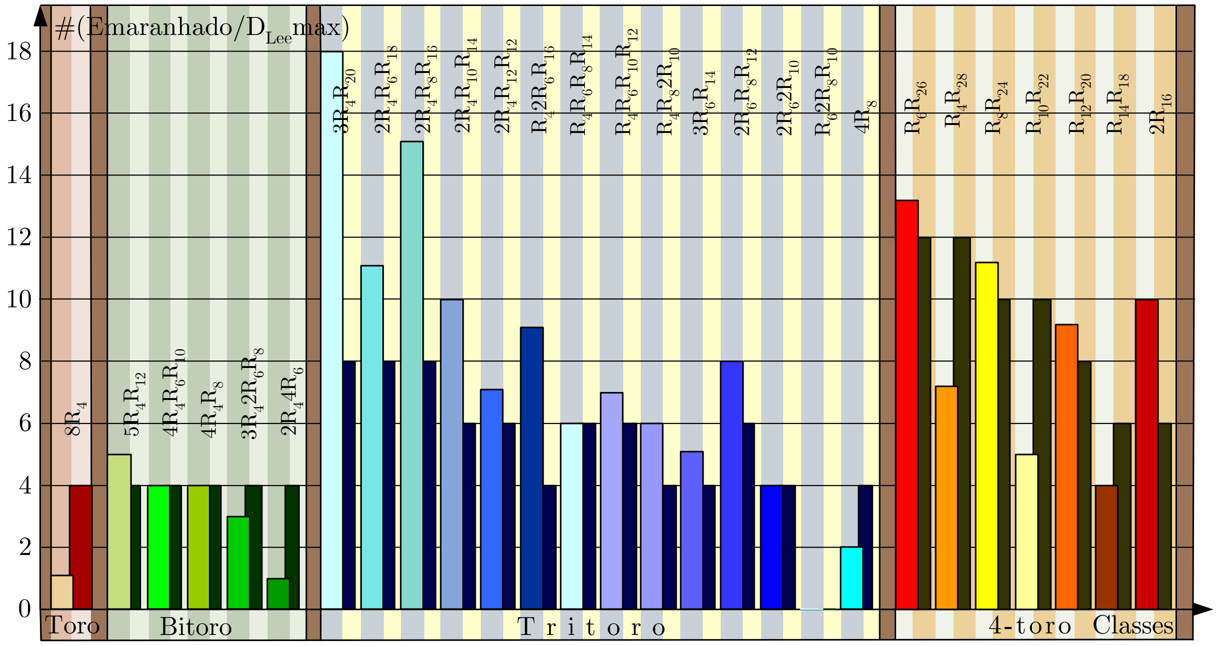


Figura 5.10.1: Gráfico em barras do número de emaranhados distintos de cada classe de mergulho da superfície gT e seu respectivo d_{lee} max.

A classificação dos emaranhados realizada na Seção 5.10 corresponde somente aos mergulhos orientáveis de $K_{4,4}$. A princípio não sabemos se estes resultados são os mesmos para os mergulhos não orientáveis de $K_{4,4}$. Vimos que as partições dos mergulhos orientáveis e não orientáveis de $K_{4,4}$ são parcialmente idênticas, (lembre que gT e gK têm os mesmos tipos de partições). Acreditamos que, de um modo geral, não há muita diferença de graus e distâncias de Lee entre os emaranhados dos mergulhos orientáveis e não orientáveis de $K_{4,4}$.

Este mesmo tipo de classificação foi realizado para o grafo completo K_5 (veja [24]). A diferença é que na classificação de emaranhados distintos de $K_{4,4}$ foi utilizado um elemento a mais para distinguir um emaranhado do outro: as distâncias de Lee entre os emaranhados. Para que fique mais claro o critério de classificação, iremos formalizar, em seguida, as suas condições que distinguem um emaranhado do outro.

Definição 5.10.1 *Suponhamos que Θ_1 e Θ_2 sejam dois sistemas de rotações distintos de G e que*

$$\Xi_1 = G(\Theta_1) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{a_i}^{i} \equiv \Omega \hookleftarrow G(\Theta_2) = \Xi_1$$

sejam dois mergulhos distintos de G sobre Ω com o mesmo tipo partição. Diremos que as modulações k_1-QAMS e k_2-QAMS associadas aos merguhos Ξ_1 e Ξ_2 são ***equivalentes,*** *ou que pertencem a uma mesma classe de modulação se, e somente se, os graus e os conjuntos de distâncias de Lee dos emaranhados pontuais e lineares de Ξ_1 e Ξ_2 são iguais e escrevemos:*

$$\Xi_1 \simeq \Xi_2 \Leftrightarrow \varpi(\Xi_1) = \varpi(\Xi_2)\,, \quad \sigma(\Xi_1) = \sigma(\Xi_2)$$

e se existe uma bijeção $b : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ *que leva uma sequência orbital* γ_i^j *em uma sequência orbital* γ_k^h *de* Γ_2*, tal que:*

$$\begin{array}{rl} i) & |\gamma_i^j| = \left|\gamma_k^h\right|; \\ ii) & \varpi(\gamma_i^j) = \varpi\left(\gamma_k^h\right) \ \ e\ \sigma(\gamma_i^j) = \sigma\left(\gamma_k^h\right); \\ iii) & \{d_{\text{Lee}}\varpi(\gamma_i^j)\} = \left\{d_{\text{Lee}}\varpi(\gamma_h^k)\right\} \ \ e\ \{d_{\text{Lee}}\sigma(\gamma_i^j)\} = \left\{d_{\text{Lee}}^s(\gamma_h^k)\right\} \end{array}$$

onde $\{d_{\text{Lee}}\varpi(\gamma_i^j)\}$ *e* $\{d_{\text{Lee}}\sigma(\gamma_i^j)\}$ *são os conjuntos de distâncias de Lee dos emaranhados pontuais e lineares de* γ_i^j*.*

Não iremos prolongar muito a discussão sobre o efeito da Definição 5.10.1 em relação aos desempenhos das modulações Ξ_1 e Ξ_2. Teríamos que verificar se os canais equivalentes probabilísticos associados a Ξ_1 e Ξ_2 têm conjuntos de probabilidades diferentes. Como esta análise passa pela questão de identificar a existência ou não de isomorfismos entre os grafos correspondentes aos respectivos canais equivalentes, e este é um processo que não foi explorado neste trabalho, deixamos a Definição 5.10.1 para ser discutida com mais profundidade em um trabalho futuro.

Por enquanto é apenas uma especulação, mas acreditamos que modulações de partições idênticas que não satisfazem as condições da Definição 5.10.1, pertencem a classes distintas de modulações, ou seja, possuem conjuntos de probabilidades de acertos diferentes, ou matrizes de probabilidades de acertos diferentes.

O motivo de introduzirmos a definição depois da apresentação das tabelas de classificação é por que a idéia de modulações equivalentes só ficou bem definida após a conclusão e inspeção das Tabelas Tabelas 5.10.1, 5.10.2, 5.10.4 e 5.10.5. Antes disso, não tinhamos segurança em relação as condições necessárias para definir precisamente modulações equivalentes. Após a análises das tabelas é que chegamos a conclusão que duas modulações para serem equivalentes teriam que satisfazer, no mínimo, todas as condições da Definição 5.10.1.

As conclusões apresentadas antes e depois de cada tabela de classificação da Seção 5.10, vêm de uma rigorosa inspeção, porém parcial do conjunto de mergulhos de $K_{4,4}$ que fixam as rotações A e E, subconjunto que contém somente $1/36$ dos elementos do conjunto dos mergulhos de $K_{4,4}$. Acreditamos que iríamos obter resultados análogos, caso tivéssemos utilizados outro qualquer dos 36 subconjuntos. Além disso o método da inspeção direta falha de vez em quando, pois é exigido um nível de concentração muito elevado. Apesar de não ser o método apropriado para obter resultados mais precisos, achamos que os mesmos estão coerentes com o que esperávamos. Isto mostra que os resultados da Seção 5.10 foram suficientes e de extrema relevância para as conclusões apresentadas.

É claro que o uso de um algoritmo identificador de classes de modulações irá fornecer informações bem mais precisas, mas não tira o mérito das conclusões obtidas neste trabalho. A nossa sugestão é que começemos a etapa de classificação trabalhando nas construções de algorítmos de identificações de emaranhados e de isormorfismos entre canais, pois não há como garantir que dois emaranhados que satifazem a Definição 5.10.1 possuam grafos isomorfos. Esta é outra tarefa que precisa ser desenvolvida na continuação deste trabalho.

Voltamos a ressaltar que os resultados obtidos neste capítulo tornam os mergulhos dos grafos completos biparticionados componentes muito importantes para serem transformados em projetos de modulações. Além dos algoritmos sugeridos acima, apontamos os projetos de modulações QAMS vinda de mergulhos de $K_{m,n}$, como fonte promissora de novas tecnologias para tornar os sistemas de telecomunicações mais eficientes. Além da variedade incrivelmente grande de projetos de modulações existentes nesta família de grafo, contamos ainda com um grande número de casos de regularidades, nunca antes imaginado, a maioria deles nem sequer foram identificados. Sem falar ainda do suporte matemático que dispomos para realizar este tipo de projeto, a nível de implementação, provenientes da Geometrias Diferencial, Geometria de Riemann e Geometria Algébrica. Enfim, há uma grande área de pesquisa a ser explorada nesta direção, a qual foi iniciada através do trabalho inicial introduzido por Lima e Palazzo [21], seguido de Lima e Luana [24] e, finalmente, dos resultados deste trabalho.

CAPÍTULO 6

Conclusões

Com o propósito de apresentar as conclusões deste trabalho de monografia recodemos que o objetivo inicial deste trabalho é:

> *Desenvolver um projeto de modulação sobre uma variedade riemannian, associada a um canal discreto sem memória, vinda de um mergulho do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$, no contexto das modulações* QAMS *estabelecidadas por Lima e Luana [24].*

A estratégia inicial era seguir toda trajetoria do desenvolvimento do problema equivalente do grafo completo K_n, realizado por Lima e Luana em [24], no entanto, as características diferentes do grafo completo bipartido $K_{m,n}$ fez com que este trabalho de monografia, apesar de atingir a maioria dos objetivos em [24], seguiu um percurso diferentes em algumas de suas partes.

Algumas vezes foram introduzidas estratégias bem diferentes das que foram utilizadas em [24], como foi o caso da abordagem da partição homogênea utilizada no conjunto dos sistemas de rotações de $K_{m,n}$, a qual nos premiou com uma partição composta somente por uma fração de $\frac{1}{36}$ dos elementos dos mergulhos de $K_{4,4}$, que continham todas as classes de merguhos e preservava todos os tipos de emaranhados. A redução do espaço amostral foi um procedimento que nos deixou bastante motivados para prosseguir no problema da identificação de casos mais complexos.

Uma outra estratégia que se mostrou muito eficiente foi o processo utilizado para mostrar a não existência da única classe de meruglhos orientáveis $R_{6,8,8,10}$ de $K_{4,4}$ sobre o tri-toro. As análises sobre os possíveis caminhos gerados pelo grafo de árvore mostrou-se muito eficiente, simplificando o processo de identificação o qual só era possível com o auxilio de um equipamento robusto que realizasse uma pesquisa em todos as sequências orbitais do mergulhos de $K_{4,4}$, obtidos pelo Algoritmo 2.8.1. Provavelmente este método possa auxiliar no processo de identificação de emaranhados e elucidar a questão da não existência de mergulhos de casos mais complexos.

A identificação e estudo dos mergulhos não orientáveis introduzidos no Capítulo 3 também não fazia parte do objetivos inciais deste trabalho. Durante o processo de identificação dos mergulhos orientáveis de $K_{n,n}$, percebemos que as identificações das partições dos mergulhos não orientáveis não seria muito diferente e que metade dos modelos de mergulhs já teriam sido identificados uma vez que as superfícies da forma gT apresentavam os mesmos tipos partições das superfícies não orientáveis da forma gK. Este é um estudo que não foi realizado em [24] o qual, para a nossa surpresa, mostrou que o processo de identificação também poderá ser aplicado no caso não orientável. Evidentemente que o processo é bem mais complexo e requer novas estratégias para resolver o problema e de um novo algoritmo identificador de mergulhos não orientáveis.

O importante é que ao identificarmos os mergulhos não orientáveis constatamos que estes contém o dobro do número de projetos de modulações do que nos mergulhos orientáveis, supera também o número de modulações regulares, de modulações com bordos e também nos tipos de emaranhados. Mostramos ainda que é possível construir os modelos topológicos planar e espacial de meruglhos não orientáveis, o que nos deixou muito motivados para trabalhar neste tipo de modulações, uma prioridade para os próximos trabalhos de monografia.

Foi muito gratificante ainda confirmar que os mergulhos de $K_{4,4}$ poderiam ser identificados e de termos obtidos inumeros resultados gerais sobre propriedades inerentes à família do grafo completo biparticionado $K_{m,n}$, principalmente aquelas relacionadas com os mergulhos regulares.

O Capítulo 4 também foi uma outra grata surpresa deste trabalho, porque mostrou a importância dos meruglhos com bordos, incluindo uma importante classe de superfícies no contexto de espaçõs métricos para projetos de modulações.

Finalmente, nos agradou muito os resultados obtidos no Capítulo 5, pois, além de resolver o problema definitivo da definição de uma modulação compatível com o canal, mostrou ainda que o processo de associação apresentava ferramentas que identificavam um número muito grande de novas classes de modulações, resultado este que realmente nos surpreende, e que nos deixou muito animados para identificar estes novos tipos de modulações e saber o valor exato de seus elementos em um trabalho futuro.

Ficamos realmente muito satisfeitos com o desempenho da fórmula de eficiência introduzida no Capítulo 5, e muito supresos por a mesma dar informções coerentes sobre modulações em classes de superfícies com bordos distintas e de gênero constante. Nos contetávamos somente com uma fórmula que avaliasse o desempenho de modulações de uma mesma classe de superfícies. Uma análise desta medida de eficiência será o objetivo de um próximo trabalho, vizando aprimorar a fórmula de eficiência da modulação, de modo que esta possa quantizar, de maneira coerente, não somente as eficiências de classes de modulações distintas de famílias de superfícies com bordos de mesmo gênero, mas também das famílias de superfícies de gêneros diferentes.

As conclusões e sugestões para futuros trabalhos relacionadas acima, são as de maiores pesos deste trabalhos, porém sugestões de problemas localizados podem ser encontrados em todos os capítulos desta monografia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARTIN, E., BRAUN, H., *Introduction to Algebraic Topology*, 1st ed., Charles E. Merrill Publishing Company, Columbus, Ohio, 1969.

[2] BARBOSA, J. L. M., COLARES, A. G., *Minimal Surfaces in* R^3, 1st ed., Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, Rio de Janeiro.

[3] CAVALCANTE, R. C., *Uma Análise da Influência da Curvatura do Espaço em Sistemas de Comunicação*, Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2008.

[4] CAVALCANTE, R. C., *Análise de Desempenho de Constelação de Sinais em Variedades Riemanianas*, Tese de Mestrado, FEEC-UNICAMP, 2002.

[5] MORALES, W. J.C., Uma caracterização de grafos imersíveis. Pesqui. Oper., Rio de Janeiro, v. 25, n. 1, abr. 2005 .

[6] Do CARMO, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, 1st ed., Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[7] COSTA, J. C., *Funções Elípticas, Algébricas e Superfícies Mínimas.* 1^a ed., Instituto de Matemática Pura e Aplica, IMPA, Rio de Janeiro, 1991.

[8] COSTELLO Jr,D. J. and LIN , S. Error Coding: Fundamentals and Applications. Englend Cliffs, Nj, USA: Prentice-Hall, First ed., 1983.

[9] DIERKES, U., HILDEBRANDT, S., KÜSTER, A., WOHLRAB, O., *Minimal Surfaces I*, 1st ed., Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[10] DUKE, R., The genus, regional number, and Betti number of a graph, *Canad., J. Math*, Vol.18(1966), p. 817-822.

[11] FIRBY, P. A., GARDINER, C. F., *Surface Topology*, 2nd ed., Ellis Horwood Limited, England, 1991.

[12] FORNEY Jr., G. D., Geometrically Uniform Codes, *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. **37**, p. 1241-1260, Sept. 1991.

[13] GILBERT, W. J., *Modern Algebra with Applications*, 1st ed., John Wiley & Sons, New York, 1976.

[14] GREENBERG, M. J., *Lectures on Algebraic Topology*, 1st ed., W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.

[15] GUSTIN, W. Orientable embedding of Cayley graphs**,** *Bull. Amer. Math. Soc.* **69**, 272-275 (1963).

[16] HOFFMAN, D., KARCHER, H., *Complete Embedded Minimal Surfaces of Finite Total Curvature*, no. 35, Berkeley, 1995.CNPq, Rio de Janeiro, 1993.

[17] KÖNIG, D., *Theirue der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Leipzig, 1936, (Reprinted, Chelsea, New York, 1950).

[18] KOSNIOWSKI, C., *Introduzione Alla Topologia Algebrica*, prima edizione, N. Zanichelli Editore, Bologna, 1988.

[19] LAWSOM Jr., H. B., *Lectures on Minimal Submanifolds*, Vol. I., 1st ed., Perish Inc. Berkeley, 1980.

[20] Lima, J. D., Lima, L. P. R. C. and Melo, W. C. Modulation for Large Signal Constellation Coming from Emdding of Complet Graph, International Telecommunication Symposium, ITS, 2010, Manaus, Brazil, 2010.

[21] LIMA, J. D., *Identificação e Estrutura Algébrica das Superfícies Compactas com e sem Bordos, Provenientes de Mergulhos de Canais Discretos sem Memória*, Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2002.

[22] LIMA, J. D. e PALAZZO Jr., R., Projetos de modulações sobre superfícies via sistema integrado de transmissão de dados**,** Tend. Mat. Apl. Vol 9, 3(2008), 405-416.

[23] ________, and LIMA, L. P. R. C., Topological projects of modulations on surfaces, *Congresso Nacional de Matemática aplicada e Computacional - CNMAC*, (2008).

[24] LIMA, L. P. R. C., Projeto de modulação sobre superfícies topológicas associadas a canais discretos sem memória: uma solução para o sistema integrado, Tese de Mestrado, UERN-UFERSA, 2009.

[25] LIN, S., COSTELO Jr., D. J., *Error Constrol Coding*, Prentice-Hall, Inc., 1983.

[26] LOELIGER, H. A., Signal Sets Matched to Groups, IEEE Trans, Inform. Theore, Vol. **37**, n. 6, p. 1675-1682, Nov. 1991.

[27] LOCKWOOD, E. H., MACMILLAN, R. H., *Geometric Symmetry.* 1st ed., Cambridge University Press, London, 1978.

[28] MacWILLIAMS, F. J., SLOANE, N. J. A., *The Theory of Error Correting Codes*, North-Holland Publishing Company, 1977.

[29] MASSEY, W. S., *Algebraic Topology: An Introduction*, 5th ed. Springer Verlag, New York, 1977.

[30] MONTEIRO, L. H. J., *Elementos de Álgebra*, 2^a ed., Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

[31] MUNKRES, J. R., *Elements of Algebraic Topology*, 7th ed. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1993.

[32] NORDHAUS, E. A., STEWART, B. M., and WHITE, A. T., On the maximum genus of a graph K_n, *J. Combinatorial Theory*, B 11 (1972), pp. 256-267.

[33] NYKULIN, V. V., SHAFAREVICK, I. R., *Geometries and Groups*. 1st ed., Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[34] OSSERMAN, R., *A Survey of Minimal Surfaces*, 1st ed., Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1969.

[35] PETERSON, W.W., WELDON Jr., E. J., *Error Correting Codes*, 2nd ed., Cambridge, Mass: MIT Press, 1972.

[36] RINGEISEN, R. D., Determining all compact orientable 2-manifolds upon which $K_{m,n}$ has 2-cels embeddings. *Journal Combinatorial Theory*, Vol. **12** (1972) 101-104.

[37] ________, Survey of results on the maximum genus of a graph. *Journal of Graph Theory*, Vol. **3** (1979) 1-13.

[38] RINGEL, G., *Map Color Theorem*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1974.

[39] ________, Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol. **28** (1965), p. 139-150.

[40] ________,Der vollstandige paare Graph auf nichotorientierbaren Flächen. *J. Reine Angew. Math.* **220**, (1967), 88-93.

[41] ________, and YOUNGS, J. W. T., Solutions of the Heawood map-coloring, *Proc, Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, Vol. **60** (1968), p. 438-445.

[42] RUSNING, T. B., *Topological Embeddings*, 1st ed., New York, Academic Press, 1973.

[43] SEIFERT, H., THRELFALL, W. *Leciones de Topologia*, Madrid, 1951.

[44] SHEN, C. C., SIMÕES, P. A Q., *Superfícies Mínimas do* R^n, 1^a ed. Unicamp, CNPq, FAPESP, SBM, Campinas, 1980.

[45] SLEPIAN, D., Groups Codes for the Gaussian Channel, *Bel Sist. Tech. J.*, Vol. **37**, p. 575-602, 1968.

[46] STAHL, S., The Embeddings in a Graph - A Survey. *Journal of Graph Theory*, Vol. **2** (1978) 275-298.

[47] UNGERBOECK, G., Chanel Coding With Multilevel/phase Signals**,** *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. **I** T-28, pp. 55-67, Jan. 1982.

[48] VITERBI, A. J., Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm, *IEEE Trans. Inf. Theory.* IT-**13**, p. 260-269, April 1967.

[49] WHITE, A. T., Orientable Embeddings of Cayley Graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*

[50] ________The genus of the complete tripartite graph $K_{mn,n,n}$. *J. Combinatorial Theory,* **7** (1969), 283-285.

[51] WOZENCRAFT, J. M., JACOBS, I. M., *Principles of Comunication Engineering***,** 1st ed. New York, 1965.

APÊNDICE A

Final da Prova do Lema 3.9.1

Devido a grande quantidade de casos a serem analisados e por serem todas semelhantes, tornando a demonstração enfadonha, resolvemos colocar neste apêndice o resto da demonstração do Lema 3.9.1.

Demonstração. *(Continuação da Demonstração do Lema 3.9.1) Na demonstração do Lema 3.9.4 foi provado que as escolhas das regiões* $R_8 = (10325436)$ *e* $R_{10} = (0123476527)$, *na formação de sistemas de rotações parciais de mergulhos de* $K_{4,4}$, *ou gera um mergulho da forma* $K_{4,4}(\Theta_1) \hookrightarrow 3T \equiv R_{4,8,10,10}$, *ou um da forma* $K_{4,4}(\Theta_2) \hookrightarrow 3T \equiv R_{4,4,8,16}$. *Veja que ambas as partições dos mergulhos diferem de* $R_{6,8,8,10}$. *Neste caso combinamos um emaranhado pontual* R_8 *de grau 1 com um emaranhado pontual* R_{10} *de grau 2. Consideremos agora, os emaranhados* $R_8^1 = (07652745)$ *e* $R_{10}^1 = (1032543056)$. *Note que* $\varpi(R_8^1)$ *é de grau 2 e* $\varpi(R_{10}^1) = 1 = \sigma(R_{10}^1)$. *Portanto,* R_8^1 *é um emaranhado pontual de grau 1 e* R_{10}^1 *é um emaranhado mixto de grau 2. Estamos assim em um caso diferente dos emaranhados* R_8 *e* R_{10}. *Construindo os sistemas de rotações parciais a partir de* R_8^1 *e* R_{10}^1, *obtemos:*

$$\Theta_8^1 = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 7 & & \\ & & & \\ 5 & 7 & & \\ & & & \\ 7 & 5 & & \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & & \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \Theta_{8,10}^1 = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & & \\ 5 & 7 & & 3 \\ 0 & 2 & & 4 \\ 7 & 5 & 3 & \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

portanto resulta necessariamente na rotação de $K_{4,4}$ da forma

$$\Theta^1_{8,10} = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & & \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, há duas possibilidades para o sistema de rotações:

$$\widetilde{\Theta}^1_{8,10} = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \widehat{\Theta}^1_{8,10} = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Algoritmo 2.8.1, obtemos os respectivos conjuntos de sequências orbitais dos mergulhos $K_{4,4}(\widetilde{\Theta})$ e $K_{4,4}(\widehat{\Theta})$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\widetilde{\Theta}} &= \{(50765274), (7012367214), (1032543056), (4163)\} \text{ e} \\ \Gamma_{\widehat{\Theta}} &= \{(50765274), (7014), (1032543056), (4123672163)\}, \end{aligned}$$

logo, ambos são mergulhos da forma $K_{4,4}(\widetilde{\Theta}) \hookrightarrow 3T \equiv R_{4,8,10,10} \equiv 3T \hookleftarrow K_{4,4}(\widehat{\Theta})$, com partições diferentes de $R_{6,8,8,10}$.

Observe ainda que $R^2_8 = (01236527)$ e $R^2_{10} = (1032543056)$ são sequências que satisfazem a Proposição 3.2.3. Como $\varpi(R^2_8) = 1$, $\varpi(R^2_{10}) = 1$ e $\sigma(R^2_{10}) = 1$, então R^2_8 é um emaranhado pontual de grau 1 e R^2_{10} é um emaranhado mixto de grau 2; logo, emaranhados diferentes dos dois casos analisados anteriormente. Construindo os sistemas de rotações parciais a partir de R^2_8 e R^2_{10}, obtemos:

$$\Theta^2_8 = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} \begin{bmatrix} 7 & 1 & & \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & & \\ 2 & 6 & & \\ & & & \\ 6 & 2 & & \\ 3 & 5 & & \\ 2 & 0 & & \end{bmatrix} \text{ e } \Theta^2_{8,10} = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & & \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & \\ 2 & 0 & & \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, os sistemas de rotações possíveis de $K_{4,4}$, cujos mergulhos contêm

R_8^2 e R_{10}^2, são dados por:

$$\Theta_1^2:\begin{bmatrix}7&1&3&5\\0&2&4&6\\1&3&5&7\\2&6&4&0\\5&3&1&7\\6&2&4&0\\3&5&1&7\\2&0&4&6\end{bmatrix},\Theta_2^2:\begin{bmatrix}7&1&3&5\\0&2&4&6\\1&3&5&7\\2&6&4&0\\5&3&1&7\\6&2&4&0\\3&5&1&7\\2&0&6&4\end{bmatrix},\Theta_3^2:\begin{bmatrix}7&1&3&5\\0&2&4&6\\1&3&5&7\\2&6&4&0\\5&3&7&1\\6&2&4&0\\3&5&1&7\\2&0&4&6\end{bmatrix},\Theta_4^2:\begin{bmatrix}7&1&3&5\\0&2&4&6\\1&3&5&7\\2&6&4&0\\5&3&7&1\\6&2&4&0\\3&5&1&7\\2&0&6&4\end{bmatrix}.$$

Aplicando o Algoritmo 2.8.1, obtemos os respectivos conjuntos de sequências orbitais:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\Theta_1^2} &= \{(70123652),(1032543056),(5074),(2147634167)\},\\ \Gamma_{\Theta_2^2} &= \{(70123652),(1032543056),(5076341674),(2147)\},\\ \Gamma_{\Theta_3^2} &= \{(70123652),(1032543056),(5074167214),(2365)\},\\ \Gamma_{\Theta_4^2} &= \{(70123652),(1032543056),(5076347214),(7416)\},\end{aligned}$$

cujos mergulhos correspondentes são todos da mesma forma, ou seja:

$$K_{4,4}(\Theta_i^2) \hookrightarrow 3T \equiv R_{4,8,10,10},$$

para todo $i = 1,2,3,4$. Portanto, um mergulho com partição diferente de $R_{4,8,10,10}$. Como só existem as três combinações de tipos de regiões R_8 e R_4 distintas possíveis de compor mergulhos de $K_{4,4}$, está provado a afirmação do Lema 3.9.1. ■

Apesar da demonstração do Lema 3.9.1 ser feita usando somente um par de representantes de regiões R_8 e R_{10} para cada tipo de combinação possível, verificamos outros casos, e como não poderia ser diferente, foi obtido resultados análogos.

Na verdade, dá para concluir da demonstração do Lema 3.9.1 que: todo mergulho de $K_{4,4}$ que contêm as regiões R_8 e R_{10}, só pode ser um mergulho da forma $K_{4,4} \hookrightarrow 3T \equiv R_{4,8,10,10}$.

APÊNDICE B

Final da Prova do Teorema 3.9.2

Usando as mesmas técnicas aplicadas na demonstração do Teorema 3.9.2, serão apresentadas as conclusões das análises dos três casos $R_8^1 R_{10}^3$, $R_8^1 R_{10}^4$ e $R_8^3 R_{10}^1$, no sentido de mostrar que estes emaranhados existem simultaneamente em mergulhos orientados do grafo $K_{4,4}$. Para isso, iremos dividir a análise em três afirmações.

Proposição B.0.2 *Não existe mergulhos orientados de $K_{4,4}$ contendo emaranhados simultâneos dos tipos R_8^1 de R_{10}^3*

Demonstração. *Suponha que exista um mergulho de $K_{4,4}$ com um emaranhado R_{10}^3 mixto de grau 2. Sem perda de generalidade podemos supor que $R_{10}^3 = (1032543056)$ (veja que $\varpi(R_{10}^3) = 1 = \sigma(R_{10}^3)$). Então, o sistema de rotação parcial de $K_{4,4}$ contendo R_{10}^3 é da forma*

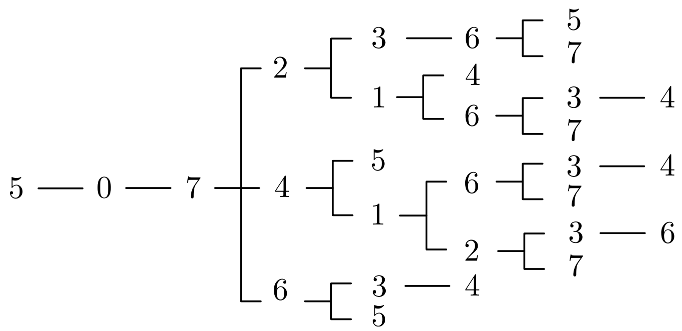
$$\Theta_{R_{10}^3} = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & \\ 6 & 0 & & \\ 3 & 5 & & \\ 0 & 2 & & 4 \\ 5 & 3 & & \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & & \\ & & & \end{array}\right], \qquad \text{(ap1)}$$

Preenchendo a matriz $\Theta_{R_{10}^3}$ em (3.25), com todas as possibilidades possíveis de rotações de $K_{4,4}$ munido do rotulamento fixado na Figura 3.6.1, concluímos que as subsequências da rotação de cada vértice v_i de $K_{4,4}$ que podem contribuírem para a formação de um emaranhado R_8^1 de grau zero, deve ter necessariamente uma das formas de subsequências de vértices seguintes

$$\begin{aligned} 0 &: 57, 71, \\ 1 &: 02, 24, 46, 04, 42, 26, \\ 2 &: 51, 17, 73, 57, 71, 13, \\ 3 &: 26, 64, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 &: 31, 17, 75, 37, 71, 15, \\ 5 &: 40, 62, \\ 6 &: 13, 37, 75, 17, 73, 35, \\ 7 &: 02, 24, 46, 60, 26, 64, 40, 04, 42, 20, 06, 62 \end{aligned}$$

Observe que ao escrevermos $0 : 57, 71$, *pelo Algorítmo 2.8.1, implicam que existem sequências orbitais de mergulhos de* $K_{4,4}$, *que passam pelo vértice* v_0 *e que contêm as subsequências* (507) *e* (701). *As listas de pares seguintes têm os mesmo significado para os demais vértices do grafo completo* $K_{4,4}$. *Suponha, então, que o emaranhado seja da forma* $R_8^1 = (507\cdots)$; *logo, todas as possibilidades para regiões do tipo* $(507\cdots)$, *dado que* R_{10}^3 *seja uma região de um mergulho de* $K_{4,4}$, *são dadas pelo diagrama de árvore*



O diagrama acima resulta nas seguintes sequências

$\gamma_1(5072365\cdots), \gamma_2(5072367\cdots), \gamma_3(507214\cdots), \gamma_4(50721634), \gamma_5(5072167\cdots), \gamma_6(50745\cdots),$
$\gamma_7(50741634), \gamma_8(5074167\cdots), \gamma_9(50741236), \gamma_{10}(5074127\cdots), \gamma_{11}(507634\cdots), \gamma_{12}(50765\cdots).$

Todas as sequências acima são de regiões de mergulhos de $K_{4,4}$, γ_9 *é o único emaranhado de grau zero e as demais são todas emaranhados do primeiro grau. Logo* γ_9 *é o emaranhado do tipo procurado. No entanto, podemos verificar que, se* $R_8' = (50741236\cdots)$ *é a região definida por* γ_9, *então, o sistema parcial de rotação de* $K_{4,4}$ *contendo a região* R_{10}^3 *e* R_8' *não existe. De fato, se existisse, a matriz de rotação implicaria em duas rotações de* $K_{4,4}$ *distintas da forma*

$$\Theta_{R_{10}^3 R_8'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & & 3 \\ 0 & 4 & & \end{bmatrix} \Rightarrow \Theta_{8,10}^1 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } \Theta_{8,10}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pelo Algoritmo 2.8.1, a região $R_8' = (50741236\cdots)$ *não seria um outro lado. De fato, são regiões da forma* $R_{22} = (5074123652763472167014)$ *em* $\Theta_{8,10}^1$ *e* $R_{14} = (50741236527014)$ *em* $\Theta_{8,10}^2$.

Analisemos a existência $R_8 = (701\cdots)$ *de modo análogo ao caso* $R_8 = (507\cdots)$. *Construíndo do diagrama de árvore de todas as subsequências orbitais, geradas a partir da subsequência* $(701\cdots)$, *contendo regiões com pelo menos oito lados, obtemos o seguinte diagrama*

$$
7 - 0 - 1 \left\{ \begin{array}{l} 2 \left\{ \begin{array}{l} 3 - 6 \left\{ \begin{array}{l} 5 - 2 \\ 7 \end{array} \right. \\ 7 \end{array} \right. \\ 4 \left\{ \begin{array}{l} 5 - 0 \\ 7 \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

o qual só produz somente emaranhados de grau pelo menos iguais a um. Logo não existe um emaranhado $R_8 = (701\cdots)$ *de grau zero em mergulhos de* $K_{4,4}$ *contendo* R^3_{10}.

Outro caso analisado, a existência de $R_8 = (012\cdots)$, *resulta no diagrama de árvore*

$$
0 - 1 - 2 \left\{ \begin{array}{l} 3 - 6 \left\{ \begin{array}{l} 5 - 2 \\ 7 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 2 \\ 4 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 5 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\ 7 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 4 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 5 - 0 \end{array} \right. \\ 6 \left\{ \begin{array}{l} 3 - 4 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 7 \end{array} \right. \\ 5 - 2 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

o qual produz um único emaranhado de grau zero $R''_8 = (01236745)$. *Na construção da rotação parcial de* $K_{4,4}$ *a partir de* R_8 *e* R^3_{10}, *chegamos as mesmas conclusões do caso incial* $R'_8 = (50741236\cdots)$*: de que* $R''_8 = (01236745\cdots)$ *trata-se de uma sequência de comprimento maior do que 8. De fato, se* $(01236745\cdots)$ *fosse uma sequência de comprimento 8, teríamos necessariamente o seguinte sistema de rotações parciais e suas implicações*

$$
\Theta_{R^1_{10}R''_8} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & \\ 6 & 0 & 2 & \\ 3 & 5 & & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & & \end{bmatrix} \Rightarrow \Theta^1_{8,10} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ou } \Theta^2_{8,10} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Assim, as regiões de $\Theta^1_{8,10}$ *e* $\Theta^2_{8,10}$ *contendo a subseqûencia* 012 *seriam de comprimento 14, respectivamente dadas por*

$$
R_{14} = (01236745072147) \text{ e } R_{14} = (01236745076527).
$$

O problema é encontrar uma sequência γ *de comprimento 8 que seja um emaranhado de grau zero e que componha um sistema de rotação parcial com* R^3_{10}. *Como é um emaranhado de grau zero,* γ *tem que passar obrigatoriamente por todos os vértices de* $K_{4,4}$ *uma única vez; logo passa pelo vértice* v_1 *de* $K_{4,4}$. *Pelo sistema de rotações parciais* $\Theta_{R^3_{10}}$

em (ap1), $\gamma = (507\cdots)$ é uma sequência de comprimento 8, o que é um absurdo supor que existe um emaranhado R_8 de grau zero. Logo, esta provado que não há mergulho de $K_{4,4}$ contendo emaranhados simultâneos dos tipos R_8^1 e R_{10}^3. ∎

A análises um pouco prolongada na demonstração da Proposição B.0.2 deve-se ao de ser uma primeira abordagem do problema da não existência. Foi necessária para assimilarmos as conclusões e adquirirmos a confiança para o desfecho da demonstração. Tal aprendizagem irá tornar as demonstrações dos casos seguintes mais enxutas.

Observamos que os diagramas de árvores existentes neste apêndice são construidos vizando analisar a existência de emaranhado R_8. Por isso, a profundidade da árvore atingem, no máximo, comprimento 8. Além disso, o emaranhado precisa ser de grau zero, então a ramificação da árvore é truncada quando gera um elemento da sequência aparece repetido pela primeira vez, pois, a subsequência proveniente não poderia ser de um emaranhado de grau zero.

Proposição B.0.3 *Não existe mergulhos orientados de $K_{4,4}$ contendo emaranhados simultâneos dos tipos R_8^1 de R_{10}^4.*

Demonstração. *Suponhamos que existe um meruglho de $K_{4,4}$ com um emaranhado de grau zero, R_8^1, e um emaranhado linear de grau 2, R_{10}^4. A menos de rotulamento e rotações cíclicas, podemos supor que $R_{10}^4 = (0765416745)$. (Observe que $(7,6)$ e $(5,4)$ são lados duplos[1] de R_{10}^4, daí, $\sigma(R_{10}^4) = 2$). O sistema de rotações parcial de $K_{4,4}$ contendo R_{10}^4 é da forma*

$$\Theta_{R_{10}^4} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 7 & & \\ 4 & 6 & & \\ & & & \\ & & & \\ 5 & 1 & & 7 \\ 6 & 4 & 0 & \\ 7 & 5 & & 1 \\ 0 & 6 & 4 & \end{bmatrix}$$

Preenchendo a matriz $\Theta_{R_{10}^4}$ em (3.25), com todas as possibilidades possíveis de rotações de $K_{4,4}$ munido do rotulamento fixado na Figura 3.6.1, concluímos que as subsequências da rotação de cada vértice v_i de $K_{4,4}$ que podem contribuírem para a formação de um emaranhado R_8^1 de grau zero, deve ter necessariamente uma das formas de subsequências de vértices dada por

$$\begin{array}{lcl} 0 & : & 71, 13, 35, 73, 31, 15 \\ 1 & : & 60, 02, 24, 62, 20, 04 \\ 2 & : & 13, 35, 57, 71, 37, 75, 51, 15, 53, 31, 17, 73, \\ 3 & : & 02, 24, 46, 60, 26, 64, 40, 04, 42, 20, 06, 62, \\ 4 & : & 13, 37, \end{array}$$

[1] Um lado $e = (i, j)$ de um emaranhado R_α se diz um *lado duplo* quando dois lados da fronteira de R_α se interceptam totalmente, neste caso, a sequência orbital de R_α é da forma $\gamma = (, \cdots, i, j, \cdots, j, i, \cdots,)$
.

$$
\begin{aligned}
5 &: 02, 26,\\
6 &: 53, 31,\\
7 &: 42, 20.
\end{aligned}
$$

Poderíamos analisar, como foi feito na conclusão da Proposição B.0.2, somente um caso, para concluir que não existe mergulho de $K_{4,4}$ com emaranhados simultâneos dos tipos R_8^1 e R_{10}^4, porém, com o intuito de verificar a validade do método do absurdo usado na proposição anterior, analisaremos todas as subsequências que passam pelos vértices v_4, v_5, v_6 e v_7. É obvio que faltam verificar os 24 casos das subsequência dos vértices v_2 e v_3 e os 12 casos dos vértices v_0 e v_1. Ao todo são 44 casos. Analisaremos somente 8 casos, que já representa uma significante redução dos casos que teríamos que analisar.

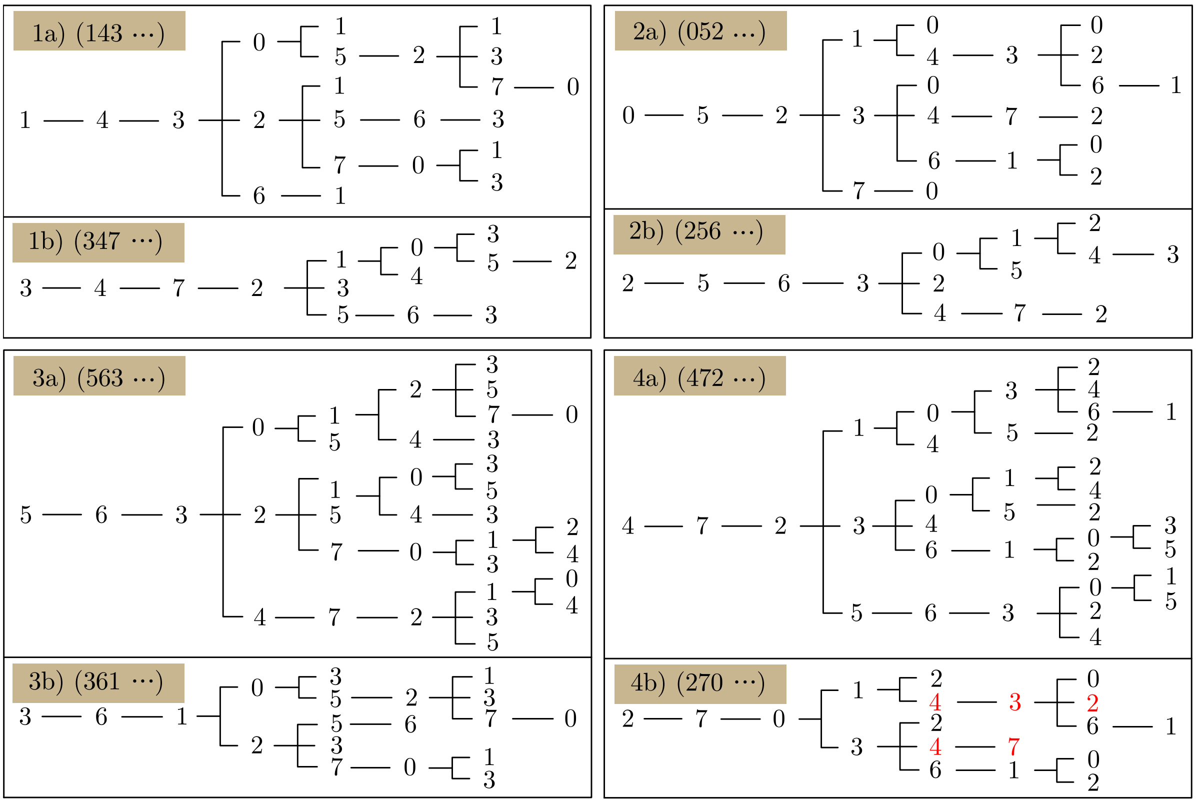


Figura B.0.1: Diagrama de árvores geradores de sequências orbitais de mergulhos de $K_{4,4}$ que fixam os três primeiros elementos da sequência

Novamente, a estratégia se justifica porque, em um emaranhado R_8 de grau zero, este tem que passar obrigatóriamente por todos os vértices, logo, pelos vértices v_4, v_5, v_6, e v_7. Se isto não ocorre, a conclusão é que não existem mergulhos com este tipo de emaranhados.

Na Figura B.0.1, relacionamos todos os diagramas de árvores geradores de sequências que passam pelos vértices v_4, v_5, v_6, e v_7 da rotação de $K_{4,4}$ e que contém a sequência $R_{10}^4 = (0765416745)$. Analisando todos as sequências orbitais que passam pelos vértices v_1, v_2, v_3, e v_4 da rotação de $K_{4,4}$ dos diagramas da Figura B.0.1, verificamos que *somente as sequências* $\gamma_1\,(56327014)$ *e* $\gamma_2\,(56347210)$, *vindas do diagrama 3a), e as sequências* $\gamma_3\,(47236105)$ *e* $\gamma_4\,(47256301)$, *vindas do diagrama 4a), poderiam ser emaranhados de grau zero. Porém, os sistemas de rotações parciais de* $K_{4,4}$ *contendo* R_{10}^4 *estas sequências são dados pelos seguintes sistemas (nos espaços em branco das matrizes só podem assumir valores que atendam os sitemas de rotações fixos de* $K_{4,4}$ *adotados na Subseção 3.7.1):*

$$\Phi_1\colon \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & \\ 4 & 6 & & 0 \\ 3 & 7 & & \\ 6 & 2 & & \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 0 & \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \Phi_2\colon \begin{bmatrix} 5 & 7 & & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & & \\ 6 & 4 & & \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \Phi_3\colon \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 7 & & 1 \\ 4 & 6 & 0 & \\ 7 & 3 & & \\ 2 & 6 & & \\ 5 & 1 & & 7 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \Phi_4\colon \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & & 0 \\ 7 & 5 & & \\ 6 & 0 & & \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

mostram que estas sequências seriam da forma

$$\gamma_1\,(563270143\cdots), \gamma_2\,(5634721052\cdots), \gamma_3\,(472361052\cdots) \text{ e } \gamma_4\,(4725630143\cdots),$$

todas sequências de comprimentos maiores que 9, emranhados com graus diferentes de zero, e portanto, não poderiam ser emaranhados de 8 lados de grau zero, isto é, do tipo R_8^1*; consequentemente, não existe mergulho de* $K_{4,4}$ *com emaranhados simultâneos dos tipos* R_8^1 *e* R_{10}^4*, o que prova a nossa afirmação.* ∎

Verificado, na demonstração da Proposição B.0.3, que o método do absurdo aplicado na demonstração da Proposição B.0.2 funciona, usaremos este método para simplificar a demonstração do último caso de combinações de emaranhados.

Fica aqui a sugestão de realizar uma demonstração computacional para este tipo de problema. Para isto, evidentemente que temos que implementar uma algoritmo para exaurir todas as possibilidades.

Proposição B.0.4 *Não existe mergulhos orientados de* $K_{4,4}$ *contendo emaranhados simultâneos dos tipos* R_8^3 *e* R_{10}^1.

Demonstração. *Suponhamos que existe um meruglho de* $K_{4,4}$ *com um emaranhado pontual de grau 2,* R_8^3*, e um emaranhado linear de grau 1,* R_{10}^1*. A menos de rotulamento e rotações cíclicas, podemos supor que* $R_{10}^1 = (0567214763)$*. (Observe que* $(6,7)$ *é um lado duplo de* R_{10}^1*, daí,* $\sigma\,(R_{10}^4) = 1$*). O sistema de rotações parcial de* $K_{4,4}$ *contendo* R_{10}^4 *é da forma*

$$\Theta_{R_{10}^1} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 5 & & \\ 2 & 4 & & \\ 7 & 1 & & \\ 6 & 0 & & \\ 1 & 7 & & \\ 0 & 6 & & \\ 5 & 7 & 3 & \\ 6 & 2 & & 4 \end{bmatrix}.$$

Preenchendo a matriz $\Theta_{R^4_{10}}$ *em* (3.25) *, com todas as possibilidades possíveis de rotações de* $K_{4,4}$ *munido do rotulamento fixado na Figura 3.6.1, concluímos que as subsequênicias da rotação de cada vértice* v_i *de* $K_{4,4}$ *que podem contribuírem para a formação de um emaranhado* R^1_8 *de grau zero, deve ter necessariamente uma das formas de subsequências de vértices dada pelos seguintes pares de sequências*

$$\begin{array}{rcl}
0 & : & 51, 17, 73, 57, 71, 13, \\
1 & : & 40, 06, 62, 46, 60, 02, \\
2 & : & 13, 35, 57, 15, 53, 37, \\
3 & : & 02, 24, 46, 04, 42, 26, \\
4 & : & 73, 35, 51, 75, 53, 31, \\
5 & : & 62, 24, 40, 64, 42, 20, \\
6 & : & 31, 15, \\
7 & : & 20, 04.
\end{array}$$

Se existe um emaranhado R^3_8 *que passa pelo vértice* v_6 *ele deve assumir necessariamante uma das formas dada pelo diagrama de árvore da Figura B.0.2. Analisando todas as sequências, é*

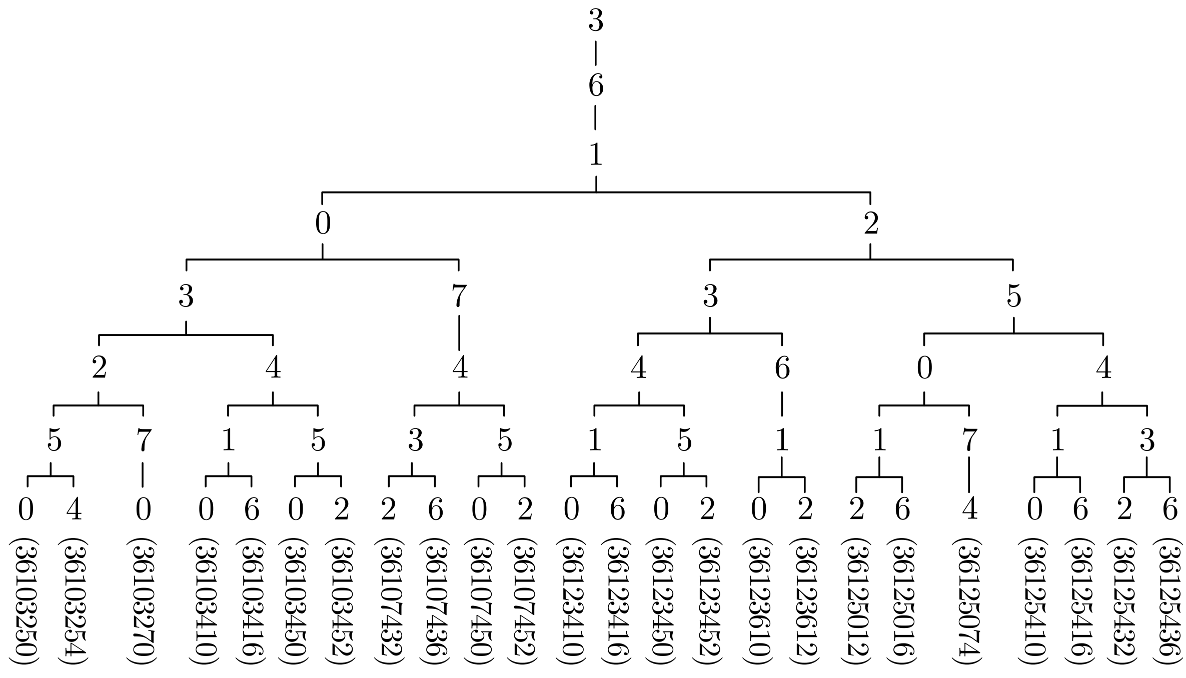


Figura B.0.2: Diagrama de árvore de seqûencias que passam pelo vértice v_6 de $K_{4,4}$

fácil concluir que as únicas que podem ser um emaranhado pontual de grau 2 são as sequências

$$\gamma_1 = (36123410) \text{ e } \gamma_2 = (36123610). \tag{ap2}$$

Veja, por exemplo, que: (36125432) *é um emaranhado pontual de grau 2, mas não atende a condição da Proposição 3.2.3;* (36125012) *também é um emaranhado pontual de grau 2, mas de um mergulho não orientável. As demais sequências da Figura B.0.2, ou não são emranhados pontuais de grau 2, ou pertencem a um mergulo não orientável. Bem, determinemos, então, as rotações parciais de $K_{4,4}$ contendo $R^1_{10} = (0567214763)$ e uma das sequências em* $(ap2)$*:*

$$\Theta_{R^1_{10}\gamma_1} = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 5 & & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 3 & \\ 6 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & & 3 \\ 0 & 6 & & \\ 5 & 7 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta_{R^1_{10}\gamma_2} = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 5 & & \\ 2 & 4 & & 6 \\ 7 & 1 & 3 & \\ 6 & 0 & & 2 \\ 1 & 7 & & \\ 0 & 6 & & \\ 5 & 7 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & & 4 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, as sequências γ_1 e γ_2 seriam necessariamente das formas

$$\gamma_1 = (36123410325\cdots) \text{ e } \gamma_2 = (3612361?0)$$

onde γ_1 é uma sequência de comprimento maior que e γ_2 não pode, sequer, compor um sistema de rotações de $K_{4,4}$ juntamente com R^1_{10}. Em ambos os casos, conclímos que não existem mergulhos de $K_{4,4}$ contendo emaranhados simultâneos dos tipos R^3_8 e R^1_{10}.

■

APÊNDICE C

Modulações com Duas Componentes de Bordos

Na Subseção 5.7.3 foram apresentadas três modulações distintas com duas componentes de bordos provenientes do mergulho $K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T \equiv 5R_4R_{12}$. Existiriam outras? Mostraremos neste apêndice que sim.

Faltou investigar na Subseção 5.7.3 os dois últimos casos, além destes, iremos analisar mais dois casos:

4^a) v_3 e v_4, pois $\deg v_1 = \deg v_2 = 4$ e ambos apresentam 2 múltiplas ligações;
5^a) v_3 e v_5, pois $\deg v_3 = \deg v_5$ e ambos apresentam múltiplas ligações diatintas;
6^a) v_0 e v_1, pois $\deg v_0 = \deg v_3$, v_0 apresenta dupla ligação e v_1, não;
7^a) v_0 e v_3, pois $\deg v_3 = \deg v_5$ e ambos apresentam duplas ligações;

Para sermos mais precisos, as quatro opções correspondem às seguintes modulações de $K_{4,4}$ sobre o bitoro com duas componentes de bordos

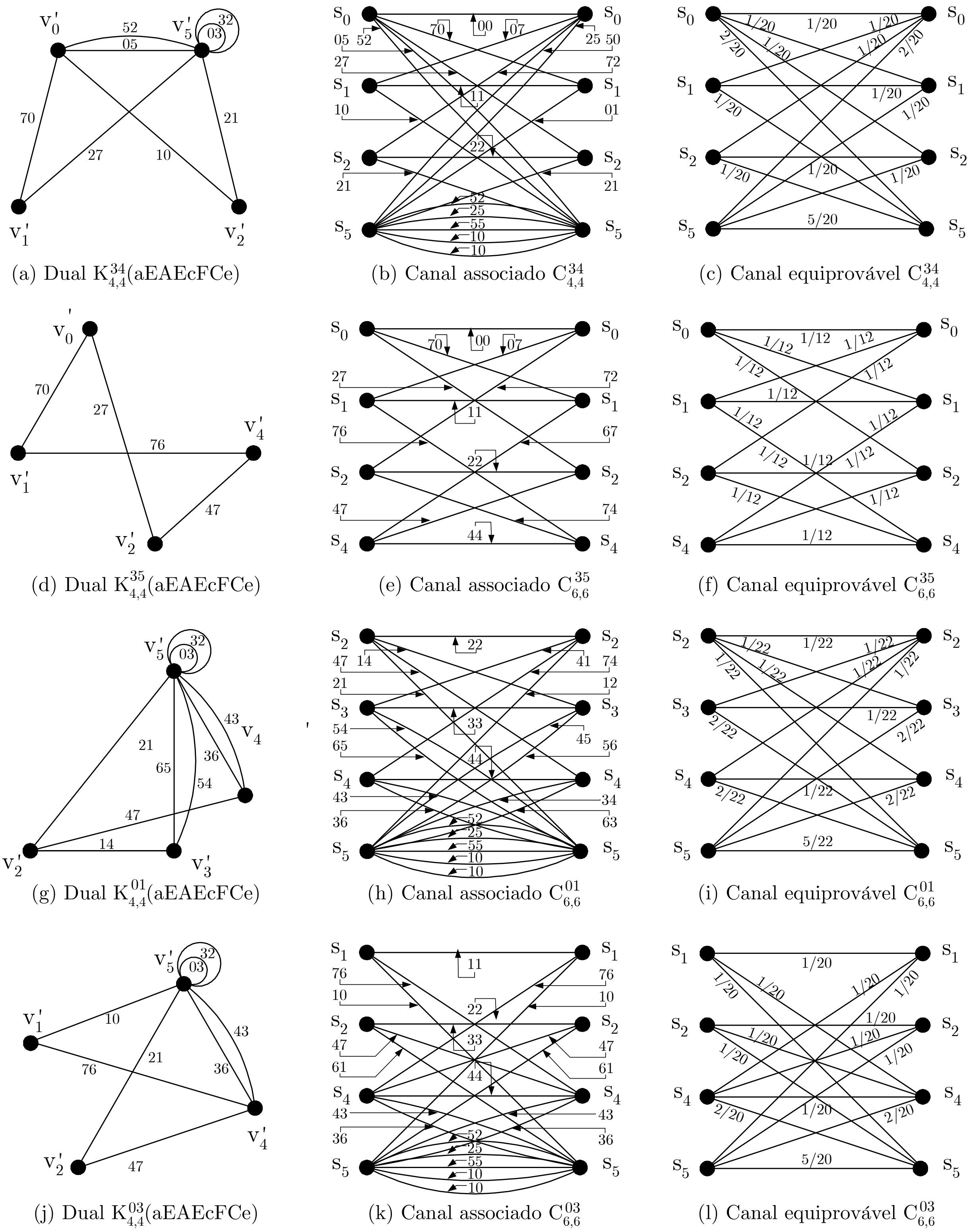
$$\begin{array}{rcl}
4^a)\ 4\text{-}\mathrm{QAMS} & : & K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_2 \equiv 3R_4R_{12} \equiv 5R_4R_{12} \backslash \left\{R_4^3, R_4^4\right\}, \\
5^a)\ 4\text{-}\mathrm{QAMS} & : & K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_2 \equiv 4R_4 \equiv 5R_4R_{12} \backslash \left\{R_4^3, R_{12}^5\right\}, \\
6^a)\ 4\text{-}\mathrm{QAMS} & : & K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_2 \equiv 3R_4R_{12} \equiv 5R_4R_{12} \backslash \left\{R_4^0, R_4^1\right\}, \\
7^a)\ 4\text{-}\mathrm{QAMS} & : & K_{4,4}\,(aEAEcRCe) \hookrightarrow 2T_2 \equiv 3R_4R_{12} \equiv 5R_4R_{12} \backslash \left\{R_4^0, R_4^3\right\},
\end{array}$$

De imediato vemos que somente a 5^a) modulação é regular, as demais são irregulares, e portanto espera-se que a 5^a) modulação apresente o melhor desempenho dentre as quatros.

Analisando a probabilidade de transições dos canais equiprováveis, esperamos ainda as eficiências das quatro modulações satisfaçam a seguinte relação de desigualdades

$$\varepsilon_{01} < \varepsilon_{34} = \varepsilon_{35} < \varepsilon_{03}. \tag{Ap4.1}$$

Se estas relações foram satisfeitas diremos que a fórmula utilizada para calcular a eficiência está coerente com o nosso prognóstico prévio. Com o intuito de verificar a relação



(a) Dual $K^{34}_{4,4}$(aEAEcFCe) (b) Canal associado $C^{34}_{4,4}$ (c) Canal equiprovável $C^{34}_{4,4}$

(d) Dual $K^{35}_{4,4}$(aEAEcFCe) (e) Canal associado $C^{35}_{6,6}$ (f) Canal equiprovável $C^{35}_{6,6}$

(g) Dual $K^{01}_{4,4}$(aEAEcFCe) (h) Canal associado $C^{01}_{6,6}$ (i) Canal equiprovável $C^{01}_{6,6}$

(j) Dual $K^{03}_{4,4}$(aEAEcFCe) (k) Canal associado $C^{03}_{6,6}$ (l) Canal equiprovável $C^{03}_{6,6}$

Figura C.0.1: Grafos correspondentes aos duais, canais associados e canais equiprováveis de modulações em superfícies com duas componentes de bordo de desigualdades Ap4.1, calculemos as matrizes de probabilidades dos respectivos canais equiprováveis da Figura C.0.1. Estas são dadas por

$$M_{34} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{2}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & 0 & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{5}{20} \end{bmatrix}, \qquad M_{35} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix},$$

$$M_{01} = \begin{bmatrix} \frac{1}{22} & \frac{1}{22} & \frac{1}{22} & \frac{1}{22} \\ \frac{1}{22} & \frac{1}{22} & 0 & \frac{2}{22} \\ \frac{1}{22} & 0 & \frac{1}{22} & \frac{2}{22} \\ \frac{1}{22} & \frac{2}{22} & \frac{2}{22} & \frac{5}{22} \end{bmatrix}, \qquad M_{03} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{2}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{2}{20} & \frac{5}{20} \end{bmatrix}.$$

Aplicando a fórmula da probabilidade média $(4.8a)$ resulta que

$$m_{34} = \frac{\sum_{i<j} m_{ij} + \frac{n(p(s_j|s_i)=0)}{n(s_j|s_i)}}{\sum_{h=1}^{k} h} = \frac{14 \cdot \frac{1}{20} + \frac{2}{16}}{10} = 0.0825,$$

$$m_{35} = \frac{\sum_{i<j} m_{ij} + \frac{n(p(s_j|s_i)=0)}{n(s_j|s_i)}}{\sum_{h=1}^{k} h} = \frac{8 \cdot \frac{1}{12} + \frac{4}{16}}{10} = 0.091667,$$

$$m_{01} = \frac{\sum_{i<j} m_{ij} + \frac{n(p(s_j|s_i)=0)}{n(s_j|s_i)}}{\sum_{h=1}^{k} h} = \frac{15 \cdot \frac{1}{22} + \frac{2}{16}}{10} = 0.080682,$$

$$m_{03} = \frac{\sum_{i<j} m_{ij} + \frac{n(p(s_j|s_i)=0)}{n(s_j|s_i)}}{\sum_{h=1}^{k} h} = \frac{14 \cdot \frac{1}{20} + \frac{2}{16}}{10} = 0.0825.$$

Finalmente, pela fórmula (4.2) , as medidas das eficiênica das modulação 4-QAMS's da Figura C.0.1 são dadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{34} &= m_{34}\xi_{34} = 0.0825 \cdot \frac{1}{2}(3\log 4 + \log 12) = 0.274\,06, \\ \varepsilon_{35} &= m_{35}\xi_{35} = 0.091667 \cdot 4\log 4 = 0.508\,31, \\ \varepsilon_{01} &= m_{01}\xi_{01} = 0.080682 \cdot \frac{1}{2}(3\log 4 + \log 12) = 0.268\,02, \\ \varepsilon_{03} &= m_{03}\xi_{03} = 0.0825 \cdot \frac{1}{2}(3\log 4 + \log 12) = 0.274\,06, \end{aligned}$$

consequentemente, temos a seguinte relação de desigualdades

$$\varepsilon_{01} < \varepsilon_{34} < \varepsilon_{35} = \varepsilon_{03},$$

e portanto, a mesma relação de ordem esperada $(Ap4.1)$ prognosticada anteriormente. Concluímos então que as três modulações ε_{01}, ε_{34} e ε_{35} apresentam desempenhos diferentes. Para saber se exite alguma destas modulações cujos desempenhos são diferentes das três modulações distintas identificadas na Subeseção 5.7.3, devemos calcular as eficiências de 4-QAMS$_{12}$, 4-QAMS$_{13}$ e 4-QAMS$_{15}$ aplicando as mesmas fórmulas usadas nos cálculos das modulações 4-QAMS$_{01}$, 4-QAMS$_{34}$ e 4-QAMS$_{35}$.

Utilizando as matrizes de probabilidades dos canais equiprováveis das modulações 4-$QAMS_{12}$, 4-$QAMS_{13}$ e 4-$QAMS_{15}$, estabelecidas na Subseção 5.7.3, obtemos as seguintes probabilidades médias dos canais equiprováveis das modulações 4-$QAMS_{12}$, 4-$QAMS_{13}$ e 4-$QAMS_{15}$:

$$
\begin{aligned}
m_{12} &= \frac{14 \cdot \frac{1}{20} + \frac{6}{16}}{10} = 0.1075, \\
m_{13} &= \frac{15 \cdot \frac{1}{22} + \frac{2}{16}}{10} = 0.080682, \\
m_{01} &= \frac{7 \cdot \frac{1}{10} + \frac{6}{16}}{10} = 0.107\,5.
\end{aligned}
$$

Aplicando agora a fórmula (4.2) , as medidas das eficiênica das modulação 4-QAMS's da Figura 5.7.3 são dadas por

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{12} &= m_{12}\xi_{12} = 0.1075 \cdot \frac{1}{2}(3\log 4 + \log 12) = 0,332\,19, \\
\varepsilon_{13} &= m_{13}\xi_{13} = 0.080682 \cdot \frac{1}{2}(3\log 4 + \log 12) = 0,237\,28, \\
\varepsilon_{15} &= m_{15}\xi_{15} = 0.107\,5\,(4\log 4) = 0.596\,110.
\end{aligned}
$$

Comparando as eficiências das modulações da Figura 5.7.3 com as modulações da Figura C.0.1, concluímos que as mesmas estão relacionadas através da seguinte relação de ordem

$$\varepsilon_{13} < \varepsilon_{01} < \varepsilon_{34} = \varepsilon_{03} < \varepsilon_{12} < \varepsilon_{35} < \varepsilon_{12},$$

consequentemente, foi identificado 6 modulações distintas para constelações de 4 sinais, vindas de mergulhos do grafo completo $K_{4,4}$, sobre o bitoro com duas componentes de bordo, a saber:

$$4\text{- QAMS}_{13}, 4\text{- QAMS}_{01},\ 4\text{- QAMS}_{34}, 4\text{- QAMS}_{12}, 4\text{- QAMS}_{35}\ \text{ e } 4\text{- QAMS}_{15}\,.$$

Existiriam outras modulações? Só saberíamos responder esta questão com absoluta segurança, caso nos aprofundemos nas análises dos isomorfismos dos grafos dos canais equiprováveis, questão não explorada neste trabalho. Fica aqui então mais uma sugestão para os futuros trabalhos.

ÍNDICE REMISSIVO