UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
MESTRADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

FRANCISCO LEÔNARDO COSTA

# PROJETO E ANÁLISE DE MODULAÇÕES QAMS SOBRE O TORO VIA GEOMETRIA DIFERENCIAL.

MOSSORÓ – RN

2011

**FRANCISCO LEÔNARDO COSTA**

# PROJETO E ANÁLISE DE MODULAÇÕES QAMS SOBRE O TORO VIA GEOMETRIA DIFERENCIAL.

Dissertação apresentada ao Mestrado de Ciência da Computação – associação ampla entre a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte e a Universidade Federal Rural do Semiárido, para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. João de Deus Lima – UERN.

**MOSSORÓ – RN**

**2011**

**Catalogação da Publicação na Fonte.**

Costa, Francisco Leônardo.
Projeto e análise de modulações QAMS sobre o toro via geometria diferencial. / Francisco Leônardo Costa - Mossoró, RN, 2011

132f.
Orientador(a): Prof . Dr. João de Deus Lima

Dissertação (Mestre) -.Universidade Estadual do Rio Grande do Norte./ Universidade Federal Rural do Semiárido. Departamento de Engenharia da computação.

1. Sistema - Modulação- Monografia. 2. Modulação toroidal - Monografia. 3. Mergulho de grafo - Monografia. I. Lima, João de Deus.II. Universidade Estadual do Rio Grande do Norte. III. Universidade Federal Rural do Semiárido. IV. Título

UERN/BC CDD 004.6

Bibliotecário: Sebastião Lopes Galvão Neto CRB 15 / 486

# Projeto e Análise de Modulações QAMS Sobre o Toro Via Geometria Diferencial

**Francisco Leônardo Costa**

Dissertação de Mestrado apresentada em 20 de Junho de 2011

Prof. Dr. João de Deus Lima (Orientador) .......... DME/UERN

Rodrigo Gusmão Cavalcante

Prof. Dr. Rodrigo Gusmão Cavalcante .......... DEE/IFBA

Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues .......... DME/UFERSA

Prof. Dr. Harold Ivan Angulo Bustos .......... DI/UERN

# DEDICATÓRIA

Aos meus queridos sobrinhos Juvêncio Neto, Alison Kawai, Aylla Kawanny, Rhyanderson Felipe e Ávila Kaylanny.

## AGRADECIMENTOS

Grandes foram as lutas, maiores as vitórias. Sempre estiveste comigo. Muitas vezes pensei que este momento nunca chegaria, queria recuar, no entanto, Tu sempre estavas presente, fazendo da derrota uma vitória, da fraqueza uma força. Com a Tua ajuda venci. A emoção é forte. Não cheguei ao fim, mas ao início de outra caminhada. Por isso gostaria de dizer muito obrigado Meu Deus.

A vocês que devemos tudo o que somos hoje. Nos ensinamentos da vida, foram mestres. Na minha caminhada, ensinaram a agir com dignidade, honestidade e respeito. Como lição, aprendi ainda a ser responsável e humano. Com seus exemplos, aprendi a ser perseverante e justo. Com carinho, dedicação e amor, cresci e amadureci. Dificuldades foram ultrapassadas, vitórias foram ultrapassadas e alegrias divididas. Acreditaram em mim e hoje sou fruto dessa confiança. Uma etapa foi cumprida e uma nova fase se inicia. Futuras realizações estão por vir. Neste instante gostaria de parar e agradecer aos meus pais Josa Costa e Francisca Maria “Dona Nêga”, aos meus irmãos José Luciano, José Lucinaldo, Ana Kaliane e Ana Juciane. Em especial, gostaria de agradecer também a minha noiva e futura esposa Alciene Pereira pela compreensão que tem tido comigo e, principalmente, pela ajuda que tem dado a mim sem questionar as situações, por ter sofrido comigo nos momentos de angústia e por me dar forças para superar as dificuldades, “esse longo caminho percorrido lado a lado, nos bons e maus momentos, faz de nós dois um ser unificado pelos mais profundos e eternos sentimentos”. A José Lopes “Zé Neto” e Rita Rivonete “Dona Teté” somente Deus é capaz de recompensar o que fizeram por mim. Todos vocês me fazem sentir especial e me dão coragem para continuar enfrentando os obstáculos da vida.

Vários foram os momentos em que passamos juntos. Muitas vezes estava apreensivo para ir embora, outrora louco para ouvir um pouco mais de suas sábias palavras. Houve momentos em que deixavam de ser professores e passavam a ser amigos e até mesmo pais. A vocês agradecemos não só a aprendizagem teórica, mas o prazer de tê-los comigo. Nada do que possamos dizer traduzirá a importância de vocês nessa vitória, muito obrigado meus professores por tudo. Em especial gostaria de agradecer a Dr. João de Deus Lima pelo apoio incondicional dado em minha carreira acadêmica e por tornar possível o meu sonho de mestre, muito obrigado.

Gostaria de agradecer aos membros da banca Rodrigo, Walter, Harold e a todos que compõem a coordenação do Mestrado Ciência da Computação da UERN e UFERSA pelas orientações direcionadas ao mestrado.

A CAPES, pelo respaldo financeiro e apoio irrestrito durante todo o período do mestrado.

Aos colegas da segunda turma do Mestrado de Ciência da Computação - UERN/UFERSA.

# RESUMO

Um sistema de transmissão de dados, denominado de sistema integrado foi sugerido por Lima-Palazzo [17]. Neste, a codificação, modulação e canal são projetados de forma dependentes sobre uma variedade Riemanniana bidimensional. Posteriormente, este sistema foi aperfeiçoado por Lima-Lima-Matias ([23], [25]), onde chegou-se à conclusão de que códigos e modulações podem ser associadas a canais discretos sem memória e estes construídos em variedades Riemannianas topológicas, utilizando a técnica de mergulho de grafos. Apesar do problema da modulação ter sido resolvido do ponto de vista algébrico, as construções geométricas encontram-se ainda no plano topológico. Neste trabalho mostraremos que é possível realizar o projeto via geometria diferencial ou de Riemann. Usando um exemplo de modulação toroidal uniforme identificado por Lima-Lima [23], provaremos que este modelo pode ser realizado sobre o toro como uma modulação do tipo geometricamente uniforme ou não, utilizando a geometria diferencial. Neste trabalho serão analisados vários projetos de modulações toroidais. Um dos objetivos é verificar se é possível construir o modelo de modulação geometricamente uniforme sobre essa superfície. Além disso, iremos verificar se uma modulação de um sistema integrado precisa ser necessariamente uniforme para ter um bom desempenho. Caso seja comprovada a possibilidade da construção da modulação não uniformemente geométrica, e o bom desempenho dessa, qualquer mergulho de grafo poderá ser utilizado para projetos de duas modulações de um sistema integrado.

Palavras-Chave: modulação toroidal, mergulho de grafo, superfície parametrizada, modulação toroidal sobre geodésica máxima, modulação toroidal por curvas paralelas.

# ABSTRACT

A data transmission system named as integrated system has been suggested by Lima-Palazzo [17]. At this, the coding, modulation and channel are designed on dependent forms over a two-dimensional Riemannian manifold. Thereafter, this system has been improved by Lima-Lima-Matias ([23], [25]), which has been concluded that codes and modulations can be associated to discrete channels without memory, and these were constructed in topological Riemannian's manifold using the technique of graph embeddings. In spite of the modulation problem have been solved from the algebraical point of view, geometric constructions are still in the topological plan. In this work, we will show that it is possible to carry out the project by means of differential geometry or Riemann. Using an example of uniform toroidal modulation identified by Lima-Lima [23], we will prove that this model can be performed on the torus as a modulation of the geometrically uniform type or not, using the differential geometry. In this work, it will be analyzed too many toroidal modulation projects. One of the goals is to verify if the modulation geometrically uniform does exist over that surface. In addition, we will verify if the modulation of an integrated system needs to be necessarily uniform to have a good performance. In case of be proved the possibility construction of the non uniformly geometric modulation, and its good performance, any embedding of graph could be used for projects of two modulations in an integrated system.



**Keywords:** toroidal modulations, embedding graph, parametric surface, toroidal modulations on max geodesic, toroidal modulations by parallel curves.

# Sumário

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Lista de Símbolos

# Lista de Siglas

| | |
|---|---|
| AM: | Modulação de Amplitude - *Amplitude Modulation* |
| AWGN: | Ruído Gaussiano Branco Aditivo - *Additive White Gaussian Noise* |
| DMC: | Canal Discreto sem Memória - *Discrete Memoryless Channel* |
| e.s.g.u. | Espaço de Sinais Geometricamente Uniforme |
| MET: | Modulação sobre Expirais do Toro |
| MUGMT: | Modulação Uniforme sobre a Geodésica Máxima do Toro |
| MUCPT: | Modulação Uniforme sobre as Curvas Paralelas do Toro |
| MURCPT: | Modulação Uniforme Rotacionada sobre as Curvas Paralelas do Toro |
| PSK: | Chave de Mudança de Fase - *Phase Shift Key* |
| QAM: | Modulação em Amplitude e Quadratura - *Quadrature Amplitude Modulation* |
| QAMS: | Modulação em Amplitude e Quadratura sobre a Superfície - *Quadrature Amplitude Modulation on Surface* |
| SNR: | Relação Sinal Ruído - *Signal-to-Noise Ratio* |

Capítulo 1

# Introdução

Este capítulo apresenta o histórico do problema que deu origem a este trabalho, a definição da proposta, as contribuições e a organização.

## 1.1 Contextualização

Com o objetivo de obter um sistema de transmissão de dados mais eficiente do que os usuais, Lima-Palazzo [17] propuseram um sistema no qual os principais blocos codificação, modulação e canal fossem projetados de forma dependente de modo que haja um casamento entre eles. Posteriormente, Lima-Lima [23] o aperfeiçoaram e o denominaram de sistema integrado. O diagrama de blocos típico de sistema de comunicação digital integrado é apresentado na Figura 1.1.1.

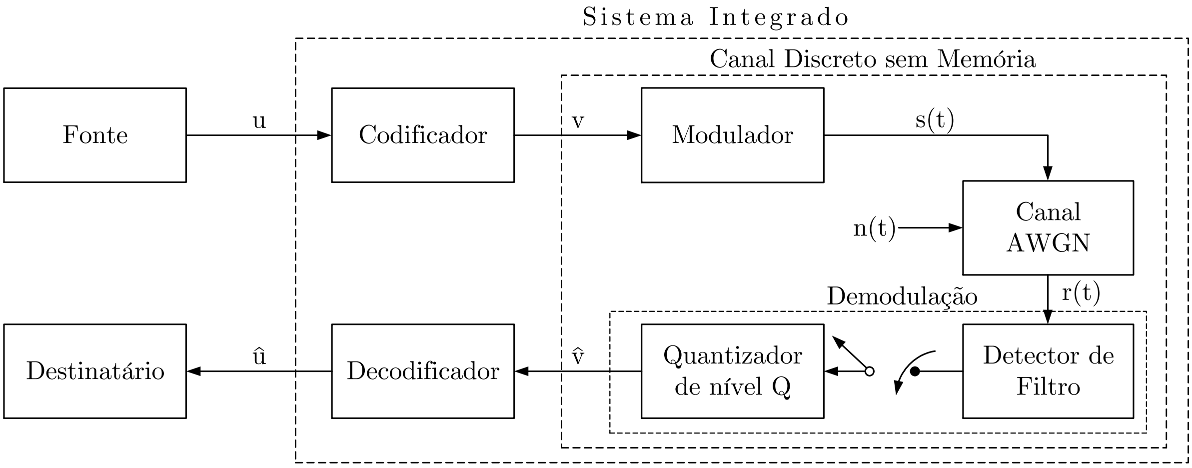



Figura 1.1.1: Diagrama de blocos de um sistema integrado.

As ideias básicas para estabelecer as definições do sistema integrado foram introduzidas por Lima-Lima [23]. Neste trabalho, será proposta, uma modulação QAMS (do inglês *Quadrature Amplitude Modulations on Surface* - Modulação em Amplitude e Quadratura sobre a Superfície), um código linear corretor de erros $C$ definido a partir do grupo de homologia da superfície e definido um canal associado às estruturas de QAMS e $C$. No entanto, os componentes do sistema integrado, codificação, modulação e canal, só foram definidos definitivamente por Lima em ([15], [16]), o qual apresentou exemplos de projetos geométricos de modulação com padrões do sistema integrado, mostrando que este tipo de modulação pode ser realizado sobre qualquer tipo de variedade Riemanniana: orientável, não-orientável, com ou sem bordos.

Apesar do projeto de modulação para o sistema integrado já ter sido estabelecido por Lima ([15], [16]), devemos saber que estes ainda encontram-se a nível de projetos topológicos e de identificação algébrica. O projeto final, aquele que irá ser aplicado, de fato, em um sistema de transmissão de dados, tem que ser realizado a nível de geometria diferencial ou da geometria de Riemann, problema este que será abordado neste trabalho.

## 1.2 Proposta da Pesquisa

O objetivo deste trabalho é verificar a possibilidade de projetar um modulação 5-QAMS sobre o toro, independente desta ser uniforme ou não. Apesar do modelo utilizado ser geometricamente uniforme do ponto de vista da topologia, pois trata-se de um projeto de mergulho sobre o toro com 5 regiões, todas de 4 lados, a realização desse projeto sobre os modelos planar e espacial não se apresenta na forma uniforme. Como modificar estes modelos de maneira que os mesmos sejam uniformes, seja no modelo planar ou espacial, é o principal objetivo deste trabalho. Se conseguirmos este objetivo, este é o caso ótimo. Porém a realização de um projeto de uma modulação QAMS vinda de um mergulho qualquer de um grafo $G$ sobre um superfície $\Omega$ trata-se de uma grande contribuição, porque ampliaria o universo dos espaços de modulações para as variedades Riemannianas. Com isto, todo projeto de modulação seria visto como um projeto sobre uma variedade Riemanniana, e poderíamos usufruir de todo o manancial matemático disponibilizado por esta área do conhecimento.

Se existir uma modulação mais eficiente do que as utilizadas na atualidade, provavelmente esta deverá se encontrar sobre um espaço métrico ainda não devidamente utilizado, como por exemplo, uma variedade Riemanniana, já que este é o espaço mais geral que contém todos os espaços métricos conhecidos, pelo menos do ponto de vista topológico.

Sob o ponto de vista do exposto acima, o propósito deste trabalho será projetar uma modulação sobre a superfície de um toro, utilizando as ferramentas da geometria diferencial, conforme as condições estabelecidas pelo seguinte problema.

**Problema 1.2.1** *Dado um mergulho topológico de um grafo $G$ sobre uma superfície $\Omega$,*

$$G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}^{i}, \tag{1.1}$$

*onde $\cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}^{i}$ é a partição sobre $\Omega$ em $k$ regiões de 2-células e $R_{\alpha_i}^{i}$ é a i-ésima região com $\alpha_i$-lados. Se $\Pi_p$ e $\Pi_\varepsilon$ são os modelos planar e espacial, respectivamente dos mergulhos topológicos de $G$ sobre $\Omega$ correspondente a* (1.1)*, então projetar, utilizando a equação paramétrica da superfície $\Omega$, uma modulação $k$-*QAMS *para uma constelação de $k$ sinais sobre $\Omega$. Caso* (1.1) *seja uniforme, projetar a modulação para uma constelação de sinais do tipo geometricamente uniforme.*

No projeto de uma modulação que atenda as condições do Problema 1.2.1, é essencial que se disponha dos modelos topológicos planar e espacial de mergulho. Construir um modelo de modulação sobre o toro de nada adiantaria, para o processo de cálculo de área e regiões de decisões de sinais, se não conhecêssemos precisamente as curvas que definem as fronteiras da região de decisão de cada sinal da constelação. Portanto, é impossível realizar o projeto da modulação que estamos propondo sem o conhecimento do mergulho topológico planar. Por essa razão, será utilizado para neste trabalho, um raro exemplo de mergulho mínimo do grafo completo $K_5$ encontrado por Lima-Lima [23].

## 1.3 Contribuições da Proposta

Foram realizados vários projetos de modulação utilizando um mesmo mergulho de grafo. Após análises dos projetos esperamos contribuir com as seguintes propostas:

- Estabelecer critérios de distribuição de vértices e lados do grafo $G$ sobre o modelo planar do mergulho de modo a obter o projeto de modulação QAMS que mais se adequa às características da partição do mergulho, no sentido de distribuir as regiões em áreas proporcionais ao número de lados da região. Por exemplo, se o mergulho é da forma $G \hookrightarrow \Omega \equiv R_4 R_6 R_{10}$, então devemos particionar $\Omega$ em três regiões de forma que as áreas de $R_4$, $R_6$ e $R_{10}$ sobre $\Omega$ corresponda a $20\%, 30\%$ e $50\%$, respectivamente.

- Desenvolvimento de algoritmos que simulam os projetos de modulações propostas fornecendo informações precisas sobre os seus desempenhos em relação ao cálculo da probabilidade de erro.

- Propostas de modulações uniformes sobre o toro e ferramentas matemáticas de análises de eficiência do cálculo da probabilidade de erro.
- Fornecer um exemplo de espaço de sinais geometricamente uniforme sobre uma superfície vindo do mergulho de 2-células de um grafo.

## 1.4 Organização da Proposta

A organização deste trabalho e as atividades desenvolvidas são descritas a seguir.

Na Introdução, o Capítulo 1, apresentamos uma descrição do sistema integrado, no qual está inserido o contexto deste trabalho, definimos a proposta da pesquisa na forma do Problema 1.2.1, e enumeramos as principais contribuições.

No Capítulo 2 é apresentado uma descrição breve de um sistema de transmissão de dados focando os blocos modulador e demodulador e inserimos as principais definições, conceitos e resultados usados neste trabalho, sobre teoria dos grafos, mergulho de grafos, modulação QAMS e superfície parametrizada.

Projetos de modulações QAMS's sobre o toro são introduzidos no Capítulo 3, utilizando uma parametrização regular do todo, onde são estimadas as áreas das regiões de decisão de QAMS nos modelos planar e espacial, no sentido de analisar a existência de modulações 5-QAMS do toro para constelações de sinais do tipo geometricamente uniforme.

As simulações das modulações QAMS's construídas no capítulo anterior são implementadas no Capítulo 4 e analisadas os seus desempenhos.

No Capítulo 5 são propostos projetos de modulações QAMS's sobre o toro, para constelações de sinais do tipo geometricamente uniforme, analisadas os seus desempenhos visando estabelecer os limitantes nos quais uma das modulações é mais eficiente do que a outra, quando estas são comparadas em termos de probabilidades de erros de transmissão de sinais.

As conclusões e propostas para trabalhos futuros são estabelecidas no Capítulo 6.

No Apêndice A, apresentamos os cálculos de área das regiões de decisão de duas modulações 5-QAMS, sendo uma delas formada por regiões de áreas diferentes e a outra com regiões de áreas iguais.

As coordenadas dos sinais e raio das esferas as quais constituem as regiões de decisão das modulações do Apêndice A, são apresentadas no Apêndice B.

O Apêndice C contêm as coordenadas e raios das regiões de decisão de um projeto de modulação de decisão suave.

Capítulo 2

# Fundamentos/Conceitos Básicos

O projeto topológico de uma modulação QAMS é obtido através de mergulhos de grafos sobre uma superfície $\Omega$. Neste capítulo, relacionaremos os principais conceitos, definições e resultados utilizados neste trabalho, sobre geometria diferencial, sistema de comunicações, grafos, superfícies, mergulho de grafos e modulação QAMS.

## 2.1 Sistemas de Comunicação

As principais definições do sistema de transmissão de dados inclusas nesta seção podem ser encontradas em [7].

Um *sistema de transmissão de dados* conecta uma *fonte discreta* que, pode ser uma pessoa ou uma máquina a um destinatário por meio de um canal, como por exemplo, uma fibra óptica, dispositivos de armazenamento, um cabo coaxial, o espaço, etc.

Visto que este é formado por uma sequência $u = (u_1, u_2, ..., u_N)$ de símbolos da fonte $s = \{s_0, s_1, \cdots, s_{m-1}\}$, de forma que $u_i$ é escolhido aleatoriamente dentre os possíveis elementos do conjunto $s$.

Um modelo de um sistema de transmissão de dados é formado pelos seguintes blocos: fonte de dados, o codificador de fonte e canal, modulador e demodulador, o decodificador de fonte e canal e o receptor de dados.

A *fonte de dados* pode ser contínua ou discreta, no nosso caso a fonte é discreta, ou seja, uma fonte digital, composta por informações ou dados, cuja saída é uma sequência de símbolos.

Os dados emitidos por este sistema de comunicação a partir da fonte são, a princípio, processados pelo *bloco codificador de fonte*, que tem a função de representá-los de forma mais compacta, excluindo a redundância, transformando-a em uma sequência de símbolos chamada de sequência de informação $u$. A sequência $u$ é enviada para o *codificador* *de canal* o qual introduz redundância, transformando-a em uma sequência de número de *bits* denominado *palavra-código* $v$. O símbolo $v$ é exibido através de dígitos binários, quando há uma sinalização binária e por dígitos do alfabeto $q$-ário, para $q > 2$.

O bloco *modulador* tem a função de selecionar, para cada *símbolo* da *palavra-código,* uma forma de onda de duração $T$-segundos, ou seja, transformar cada símbolo em um sinal analógico.

No *canal* é introduzido ruído, sendo que o ruído Gaussiano branco aditivo (AWGN - do inglês *Additive White Gaussian Noise*) é a forma mais comum.

O bloco *demodulador* deve produzir a melhor estimativa na saída correspondente ao sinal recebido, e este deve ser um dos números reais ou símbolos anteriormente selecionados. Para otimizar a função do demodulador faz-se necessário a introdução de um *filtro* ou *detector de correlação,* acompanhado por um dispositivo que auxilia a tomada de decisão.

Na saída do demodulador existe um *quantizador* que tem a função de transformar um sinal analógico em um sinal digital, de modo que este procedimento melhore o desempenho do sistema de transmissão de dados.

O *decodificador* é composto pelo *decodificador de canal*, que tem o objetivo de transformar a sequência recebida $r$ em uma sequência $\hat{u}$, chamada de sequência estimada, uma vez que $\hat{u}$ é a estimativa da sequênca de informação de $u$, composto também pelo *decodificador de fonte*, cuja função é transformar a sequência $\hat{u}$ em uma sequência estimada do mesmo tipo da saída da fonte, e por fim, enviar a informação ao seu receptor de dados, ou seja, ao seu destinatário. A Figura 2.1.1 mostra o diagrama de blocos do sistema de transmissão de dados.

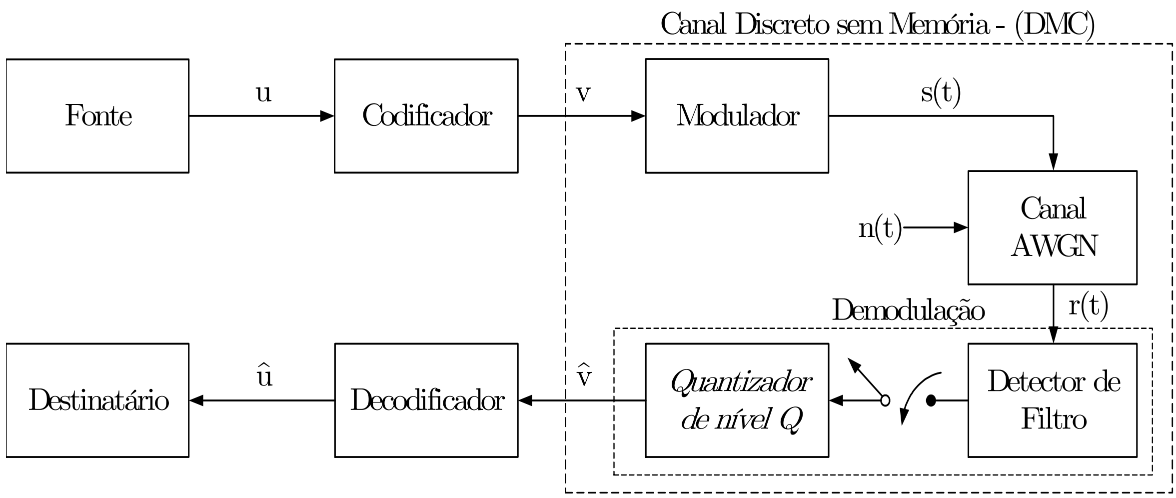



Figura 2.1.1: Diagrama de blocos de um sistema de comunicação.

Há dois modos de transmissão de dados através do sistema: cada dígito da fonte de saída é enviando um após o outro, ou $N$-dígitos na saída da fonte são agrupados formando uma sequência de $u$ para ser enviada, de maneira que nenhum dígito enviando dependa de outro enviado anteriormente. Estes dois modos, juntamente com o sistema de filtro e o quantizador de $Q$-níveis constituem o DMC.

## 2.2 Geometria Diferencial

O projeto de modulação proposto neste trabalho será realizado a nível de geometria diferencial [2]. A seguir apresentamos as principais definições e propriedade que serão utilizadas neste trabalho .

**Definição 2.2.1** *Um subconjunto* $S \subset \mathbb{R}^3$ *é uma* superfície regular *se, para cada* $p \in S$*, existe uma vizinhança* $V$ *de* $p$ *em* $\mathbb{R}^3$ *e uma aplicação* $\chi : U \rightarrow V \cap S$ *de um aberto* $U$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sobre* $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ *tal que*

**1.** $\chi$ *é diferenciável. Isto significa que se escrevermos*

$$\chi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in U \tag{2.1}$$

*as funções* $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ *têm derivadas parciais de todas as ordens de* $U$*.*

**2.** $\chi$ *é um homeomorfismo. Como* $\chi$ *é contínua pela condição* 1*, isto significa que* $\chi$ *tem inversa* $\chi^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ *que é contínua.*

**3.** *(condição de regularidade) Para todo* $q \in U$*, a diferencial* $d\chi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *é injetiva.*

A aplicação $\chi$ é chamada de *parametrização* ou um sistema de coordenadas (locais) em (uma vizinhança de) $p$. A vizinhança $V \cap S$ de $p$ em $S$ é chamada de *vizinhança coordenada.*

**Definição 2.2.2** *Uma* superfície parametrizada $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *é uma aplicação diferenciável* $\chi$ *de um conjunto aberto* $U \subset \mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}^3$*. O conjunto* $\chi(U) \subset \mathbb{R}^3$ *é chamado o* traço *de* $\chi$*. A aplicação* $\chi$ *é regular se a diferenciável* $d\chi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *é injetiva para todo* $q \in U$ *(i. e. os vetores* $\frac{\partial \chi}{du}, \frac{\partial \chi}{dv}$ *são linearmente independentes para todo* $q \in U$*).*

A equação de uma superfície parametrizada é dada como mostrada na igualdade (2.1).

Seja $\chi(u, v)$ a parametrização de uma superfície $S$. A primeira forma fundamental de $S$ é dada por

$$E = \chi_u \cdot \chi_u, \ F = \chi_u \cdot \chi_v \text{ e } G = \chi_v \cdot \chi_v, \tag{2.2}$$

onde

$$\chi_u = \frac{\partial}{du}\chi(u, v) \text{ e } \chi_v = \frac{\partial}{dv}\chi(u, v)$$

são as derivadas parciais de $\chi$ nas direções dos vetores $u$ e $v$, respectivamente, e $\cdot$ denota o produto escalar usual.

A primeira forma fundamental da superfície permite calcular a área de uma superfície parametrizada. Para isso, seja $\chi(u, v)$ uma superfície parametrizada. A área de $\chi(u, v)$ é dada por

$$A_{\chi(U)} = \int\int_U \sqrt{EG - F^2} dvdu. \tag{2.3}$$

Outra aplicação de interesse da primeira forma fundamental nesse trabalho é o cálculo da área de uma região $R$ contida em uma superfície $S$.

**Proposição 2.2.3** *Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. O número positivo*

$$\int\int_Q |\chi_u \times \chi_v| \, dudv = A(R), \tag{2.4}$$

*onde, $Q = \chi^{-1}(R)$ e $|\chi_u \times \chi_v| = \sqrt{EG - F^2}$ é chamado área de $R$.*

As equações (2.3) e (2.4) permitirá verificar a distribuição das áreas das regiões de decisão da modulação QAMS.

### 2.2.1 Superfície toro

Todas as modulações introduzidas e analisadas neste trabalho serão construídas sobre a superfície toro. Neste caso, as análises de eficiência destas modulações utilizará a geometria diferencial. Apresentaremos as principais relações da geometria diferencial que serão utilizadas.

O toro $T$ é uma superfície de gênero 1, de revolução, compacta, regular e sem bordo gerada pela rotação de uma circunferência de raio $a > 0$ em torno de uma reta pertencente ao plano da circunferência. Em particular, consideraremos o eixo de rotação como sendo o eixo $z$ do espaço Euclidiano tridimensional, $\mathbb{R}^3$.

Seja $C_a\,(P)$ uma circunferência de raio $a$ pertencente a um semiplano ortogonal a $\mathbb{R}^2$ limitado pelo eixo $z$ centrada no ponto $P \in \mathbb{R}^2$ conforme ilustrado na Figura 2.2.1 a). Através da rotação de $2\pi$ graus da circunferência $C_a\,(P)$ em torno do eixo $z$, veja a Figura 2.2.1 b), obtemos um toro centrado na origem $0 = (0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

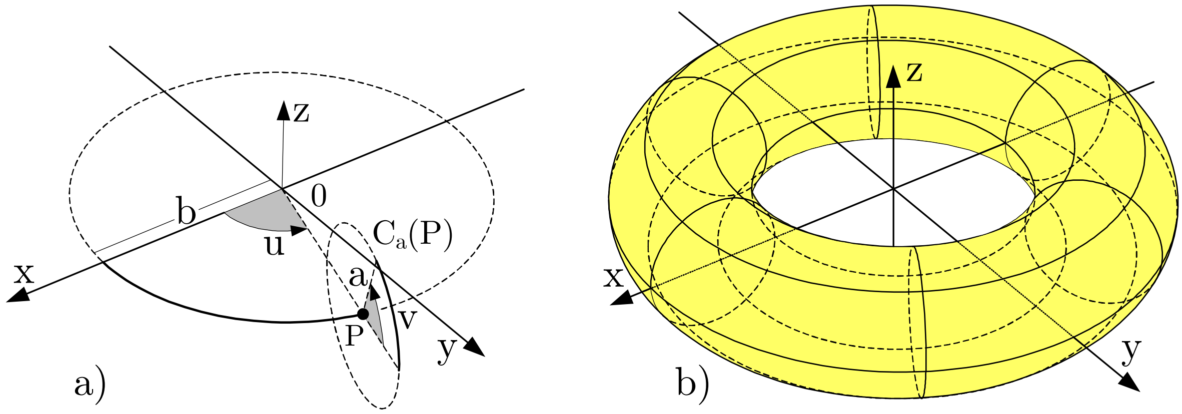



Figura 2.2.1: Método de construção da superfície toro.

Na Figura 2.2.1 a), o centro de $C_a\,(P)$ está a uma distância $b$, $0 < a < b$, da origem. Observe que ao rotacionarmos $C_a\,(P)$, o ponto $P$ descreve uma circunferência de raio $b$ pertencente a $\mathbb{R}^2$ centrada em 0. Sendo assim, a construção do toro pode ser vista como a rotação da circunferência de raio $a$, $C_a\,(P)$, centrada no ponto $P$ que pertencente a outra circunferência de raio $b$ pertencente a $\mathbb{R}^2$ centrada em 0. Por essa razão, quando for necessário, usaremos a notação $T\,(a, b)$ para indicar um toro de raios $a$ e $b$ centrado na origem de $\mathbb{R}^3$.

Nestas condições, se $P_0 = (x, y, z) \in T\,(a, b)$, as equações paramétricas de $x, y$ e $z$ que se obtém são:

$$\begin{cases} x\,(u, v) = (b + a\cos v)\cos u \\ y\,(u, v) = (b + a\cos v)\sin u \\ z\,(u, v) = \sin u, \end{cases}$$

portanto, a equação paramétrica do toro $T\,(a, b)$ é dada por

$$\Psi(u, v) = ((b + a\cos v)\cos u, (b + a\cos v)\sin u, a\sin v). \tag{2.5}$$

De acordo com a Definição 2.2.2, o conjunto $U$, domínio da parametrização $\Psi$, é um aberto do plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ o qual será tomado como a região quadrada de lado $2\pi$ dada por

$$U = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\;\; 0 < u, v < 2\pi\right\}, \tag{2.6}$$

ou seja, a aplicação da parametrização $\Psi$, dada na equação (2.5) , no domínio $U$ corresponde a superfície toro, veja a Figura 2.2.2.

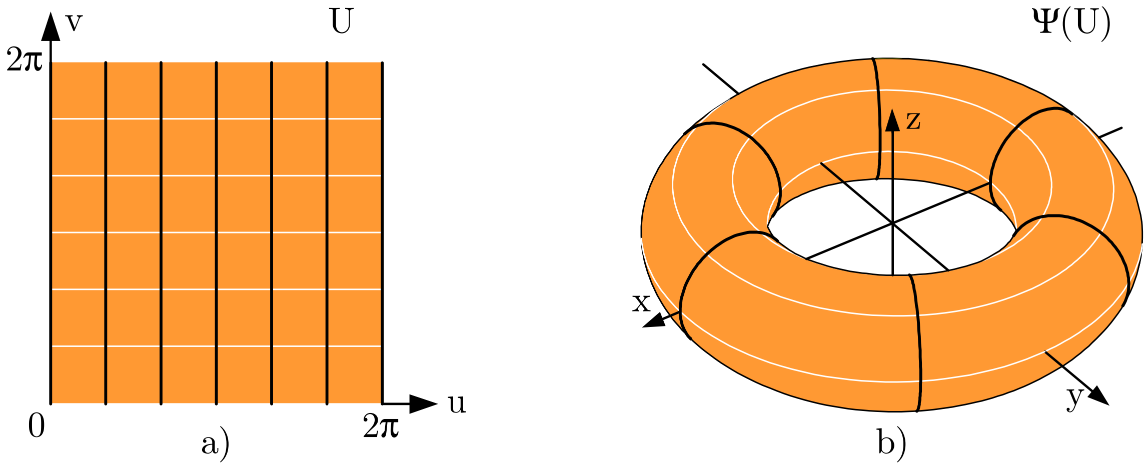



Figura 2.2.2: Domínio $U$ e imagem da parametrização $\Psi$.

Na Figura 2.2.2 b) o toro foi obtido através da aplicação de $\Psi$ no domínio $U$, visto em 2.2.2 a). Em outras palavras, o traço $\Psi(U)$ é a superfície toro.

## 2.3 Grafos

Esta seção contém as definições e os resultados sobre grafos utilizados neste trabalho.

De um modo geral, um grafo $G(V,E)$ é uma estrutura formada por um conjunto de pontos $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$, do plano, chamados de *vértices* e um conjunto de segmentos $E$ denominado de *lados* (ou *arco*) sendo que cada lado está ligado por dois vértices. Um lado de $E$ é denotado por $e = (v_i, v_j)$ e os vértices $v_i$ e $v_j$ são chamados *adjacentes* a $e$. O *grau* (ou *valência*) de um vértice $v$ é igual ao seu número de lados incidentes. O grau de $v$ é $k$ será denotado por $\deg v = k$.

Uma *orientação* de um arco $e = (v,w)$ é o par $(v,w)$ onde $v$ é o vértice inicial e $w$ o final. Um grafo $G$ diz-se *orientado* quando cada um de seus lados contém uma orientação. A orientação de $e = (v,w)$ é indicada com uma seta sobre o arco no sentido de $v$ para $w$ e, obrigatoriamente, o lado oposto de $e$ é considerado como $e^{-1} = (w,v)$. Um *dígrafo* é um grafo orientado.

Seja $P = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ o conjunto dos vértices do grafo $G(P,Q)$, chamamos de *sistema de rotações* de $G$, e o indicamos por

$$\Theta = \left\{0\,(i_{00}, \cdots, i_{0j_0}), 1\,(i_{10}, \cdots, i_{1j_1}), \cdots k\,(i_{k0}, i_{k1}, \cdots, i_{kj_k}), \cdots, p\left(i_{p0}, \cdots, i_{pj_p}\right)\right\}, \quad (2.7)$$

o conjunto dos sistemas de rotações dos vértices de $G$, no qual $k\left(i_{k0}, i_{k1}, \cdots, i_{kj_k}\right)$ indica os índices dos vértices adjacentes a $v_k$ interceptados ordenadamente quando percorremos, no sentido horário, um pequeno círculo contendo $v_k$ em seu interior.

Indicaremos o sistema de rotações do vértice $v_k$ por $\theta_k$, ou seja,

$$\theta_k = \left(i_{k0}, i_{k1}, \cdots, i_{kj_k}\right). \tag{2.8}$$

Seja $G(P,Q)$ um grafo com vértices em $P = \{v_0, v_1, \cdots, v_p\}$, lados no conjunto $Q = \{e_0, e_1, \cdots, e_q\}$ e sistema de rotações $\Theta$. Se $G(\Theta) \hookrightarrow \Omega$ esta orientado no sentido anti-horário e $R_t = \left(v_{\gamma_0}, v_{\gamma_1}, \cdots, v_{t-1}, v_{\gamma_0}\right)$ é uma região de $G(\Theta) \hookrightarrow \Omega$, chamamos de *sequência orbital* associada à $R_t$ a sequência $\gamma = \left(\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{t-1}, \gamma_0\right)$.

### 2.3.1 Mergulho de grafos

Nesta seção estão as principais fórmulas e teoremas utilizados neste trabalho relacionados com mergulho de grafos.

Um grafo $G$ está *mergulhado* em uma superfície $\Omega$, se os seus lados encontra-se sobre $\Omega$ e satisfazem as condições: dois lados de $G$ nunca se interceptam e quando o fazem, a interseção ocorre em um único vértice ou totalmente.

A identificação de um mergulho de um grafo $G$ é realizado através do *sistema de rotações*. Dois mergulhos de um grafo $G$ são ditos *idênticos* quando existe uma bijeção entre suas regiões tal que as fronteiras orientadas de regiões correspondentes são idênticas. Um sistema de rotação de um grafo $G$ é a descrição, para cada vértice de $v$, da ordem dos vértices de $G$ que estão conectados a $v$. Para isto, basta percorrer um pequeno círculo que contém apenas $v$, e anotar ordenadamente os vértices de $G$ que estão conectados a $v$ de $G$. A retirada dos lados de $G$ divide $\Omega$ em partes denominadas de *regiões*.

Se toda região do mergulho pode ser contraída em um ponto (ou é homotópica a um ponto) então diz-se que é um *mergulho de 2-células* (ou, simplesmente, um *2-células*). O mergulho de $G$ sobre $\Omega$ é indicado por $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$, onde $R_{\alpha_i}$ é um $\alpha_i$-*lados* (ou região de $\alpha_i$ lados).

As regiões $R_t^1$ e $R_t^2$ de um mergulho de $G$ são ditas *regiões semelhantes* se, e somente se, as suas respectivas sequências orbitais $\gamma_1$ e $\gamma_2$, são tais que $\gamma_2 = \gamma_1^{(i)}$.

Os mergulhos $G(\Theta_1) \hookrightarrow \Omega$ e $G(\Theta_2) \hookrightarrow \Omega$ são ditos *mergulhos semelhantes* se, e somente se, possuem regiões iguais, isto é, se $\Gamma_1 = \{\gamma_1^1, \cdots, \gamma_k^1\}$ e $\Gamma_2 = \{\gamma_1^2, \cdots, \gamma_h^2\}$ são os respectivos conjunto de sequências orbitais de $G(\Theta_1) \hookrightarrow \Omega$ e $G(\Theta_2) \hookrightarrow \Omega$, então $k = h$ e $\gamma_r^2 = (\gamma_r^1)^{(i_r)}$ para todo $r \in \{1, \cdots, k\}$.

## 2.4 Modulação QAMS

Modulação é um termo frequentemente usado para designar o processo de translação ou deslocamento do espectro de um sinal. Além de várias técnicas usadas neste processo, o modo de distribuição dos sinais nos espaços de modulações e a escolha apropriada deste, são fatores preponderantes na performance do sistema de transmissão de dados. Pesquisas apontam as variedades Riemannianas bidimensionais (ou superfícies) como os espaços sobre os quais é possível projetar modulações com desempenho superior aos sistemas de modulações equivalentes em uso atualmente [6].

Além das modulações, as variedades Riemannianas bidimensionais também possuem estruturas algébricas intrínsecas que podem ser usadas para gerar sistemas de codificação que atuam de forma integrada com as modulações, eliminando possíveis dispositivos e rotinas de programação adicionais, no sistema de transmissão, para correção de distorções proporcionadas pela escolha inadequada destes dois elementos [21].

Uma *constelação de sinais* é um conjunto de $m$ símbolos $A = \{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$ chamado de *alfabeto $m$-ário*, usada na transmissão de dados através de um *canal* de comunicação, o qual pode ser, uma fibra ótica, uma rede elétrica ou ondas eletromagnéticas. Os dados transmitidos são chamados de *mensagens*, as quais são constituídas por sequências dos elementos do alfabeto. No processo de transmissão da mensagem, conhecido como modulação, cada símbolo $s_i$ é associado a um *ponto* ou *vetor* de um *espaço* $\Omega$, definido uma região $R_i$ de $\Omega$ sobre a qual $s_i$ é alocado no seu interior chamada de *região de decisão* do sinal $s_i$ [7]. O tipo mais comum de região de decisão é a esfera de dimensão $n$, conforme a definição apresentada seguir .

Seja $A$ um conjunto de sinais de uma constelação do $\mathbb{R}^n$ e $p_i \in \mathbb{R}^n$ o ponto associado ao sinal $s_i$. A *região de Voronoi* do sinal $s_i$, denotada por $V_i$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ tais que

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p_i\| = \min_{p' \in \mathcal{S}} \|x - p'\|\}.$$

A região de Voronoi $V_i$ é formada pelo conjunto de pontos do $\mathbb{R}^n$ pertencentes ao interior de uma esfera de raio $r = \min_{p' \in \mathcal{S}} \|x - p'\|$. Quando as regiões de Voronoi de uma constelação de sinais são todas congruentes, dizemos que o espaço de sinais é do tipo *espaço de sinais geometricamente uniforme* (e.s.g.u.) e $\{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$ é uma *constelação de sinais geometricamente uniforme* [9].

**Definição 2.4.1** *[23]Seja $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{m} R_{\alpha_i}$ um mergulho de 2-células do grafo $G$ sobre uma superfície orientada $\Omega$. Chamaremos de* modulação QAM sobre a superfície $\Omega$ para um projeto de $m$-sinais $s_1, s_2, \cdots, s_m$, *e denotaremos por* $m$-QAMS (quadrature amplitude modulation on surface), *a modulação que associa cada sinal* $s_i$ *ao vértice* $v_i$ *de* $G$ *e que tem por região de decisão, a região* $R_{\alpha_i}$ *de* $\Omega$. *Com essa estrutura* $\Omega$ *será chamado de* espaço de sinais sobre uma superfície *e o conjunto de sinais* $\{s_1, \cdots, s_m\}$, *será chamado de* constelação de sinais sobre uma superfície. *Se todas as regiões* $R_{\alpha_i}$*'s forem do mesmo tipo diremos que* $\Omega$ *é um* espaço de sinais geometricamente uniforme (e.s.g.u.), *e que* $\{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$ *é um* conjunto de sinais geometricamente uniforme.

Observamos que o conceito de modulação $m$-QAMS introduzido na Definição 2.4.1, é um projeto de constelação de $m$ sinais $s_1, \cdots, s_m$, os quais estão associados a $m$ pontos $v_1, \cdots, v_m$ de $\Omega$, de tal maneira que a região de decisão de $s_i$ corresponde a região $R_i$ do mergulho $G \hookrightarrow \Omega$. Sendo assim, todo modelo de mergulho do grafo $G$ sobre uma superfície $\Omega$ corresponde a um projeto de modulação $m$-QAMS sobre $\Omega$, onde $m$ é o número de regiões obtidas de $G \hookrightarrow \Omega$. Sabe-se que os $m$ sinais da modulação $m$-QAMS não tem nenhuma relação com os vértices de $G$. Uma modulação em que o conjunto de sinais está associado aos vértices de $G$ pode ser construída a partir do mergulho de $G$, usando o conceito de dual.

**Definição 2.4.2** *Seja* $G\,(p,q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{m} R_{\alpha_i}$ *um mergulho orientado de* $G$, *chama-se* mergulho dual *de* $G$, *o mergulho* $G'(p',q') \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{j=1}^{m\prime} R_{a_j}$, *tal que, cada região* $R_{a_i}$ *de* $G$ *contém um único vértice* $v'_i$ *de* $G'$ *em seu interior e, para cada lado* $l_k = (v_k, v_h)$ *de* $G$ *com* $R_{a_k} \cap R_{a_h} = (v_k, v_h)$, *existe um único lado* $l'_k = (v'_k, v'_h)$ *de* $G'$ *tal que* $v'_k \in R_{a_k}$, $v'_h \in R_{a_h}$, $l_k \cap l'_k = \{p_k\}$ *com* $p_k \neq v_k$ *e* $p_k \neq v_h$.

**Teorema 2.4.3** *[23]Se* $n = 4 + 4k$ $(n = 5 + 4k)$ *então existe* $K_n \hookrightarrow (4k^2 + 3k)\,T \equiv nR_{n-1}$ $(K_n \hookrightarrow (4k^2 + 3k + 1)\,T \equiv nR_{n-1})$, *tais que, as modulações associadas* QAMS *e* QAMS$'$ *são idênticas.*

O Teorema 2.4.3 estabelece as condições para que as modulações QAMS e QAMS$'$ vindas de $K_n$ sejam idênticas.

## 2.5 Modelos Planar e Espacial da Superfície

Utilizando a topologia combinatorial, Seiffert-Therlffall [34], mostrou que toda superfície compacta é o espaço quociente de um polígono por uma relação de equivalência segundo o qual os lados que constituem o bordo de um polígono são identificados dois a dois segundo mostra a Figura 2.5.1 para as superfícies básicas fundamentais.

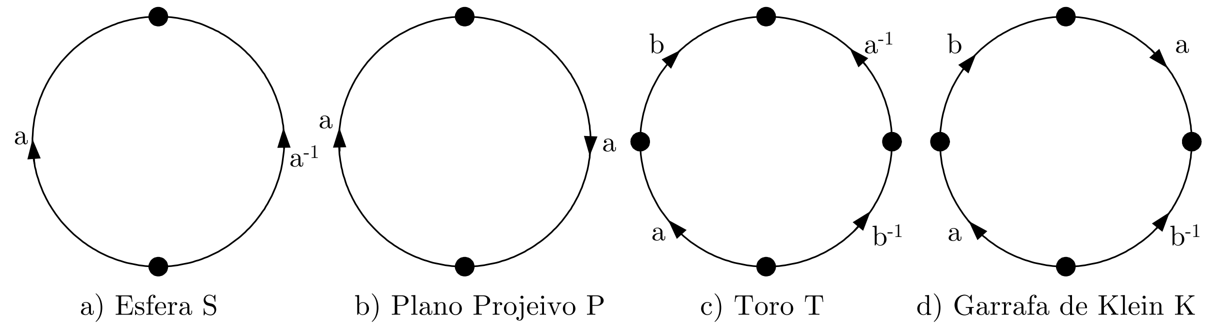



Figura 2.5.1: Superfícies topológicas básicas.

Na Topologia Algébrica os modelos planar e espacial de uma superfície, apesar de distintos, representam a mesma classe de superfície [24]. Por exemplo, o modelo espacial da superfície toro pode ser construído a partir do polígono de quatro lados, modelo planar mostrado na Figura 2.5.1 c), conforme a sequência de construções ilustradas na Figura 2.5.2. Da mesma forma realizando o processo inverso, ilustrado na Figura 2.5.2, obtem-se o modelo planar.

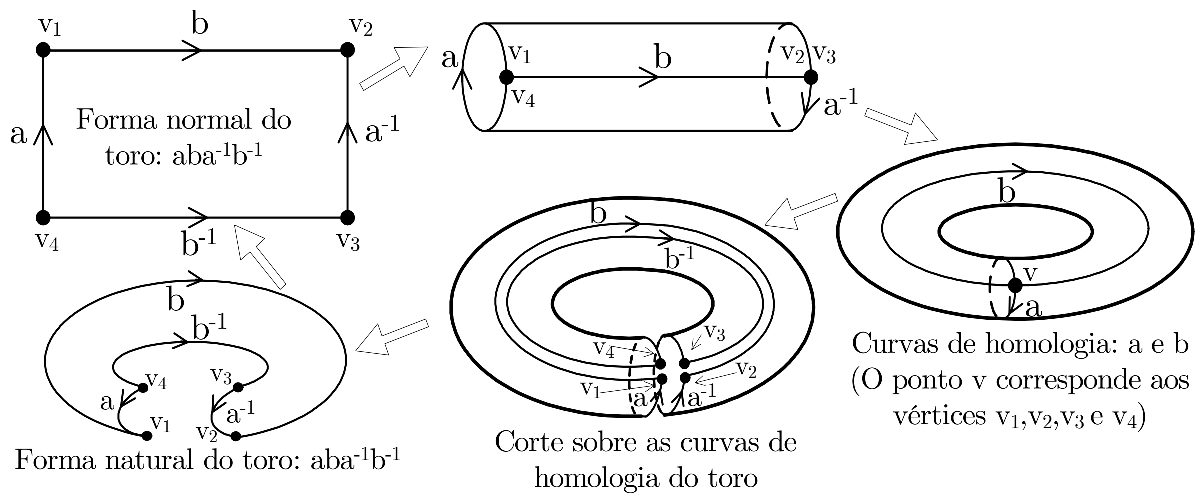



Figura 2.5.2: Realização geométrica do toro e sua operação inversa ([23]).

Veja na Figura 2.5.2, que o toro, modelo espacial, foi obtido a partir do modelo planar. De modo geral, dada a equação paramétrica $\chi(u,v)$ de uma superfície $S$, o aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, domínio da parametrização $\chi(u,v)$, será chamado de modelo planar e $\chi(U)$, traço da parametrização $\chi$, será chamado de modelo espacial $\Pi_\varepsilon$.

No caso do toro, o modelo planar $\Pi_p$ corresponde a uma região quadrada de lado $2\pi$ de comprimento e o modelo espacial $\Pi_\varepsilon$ corresponde a própria superfície toro conforme ilustra a Figura 2.2.2 a) e 2.2.2 b). Utilizaremos esse recurso proporcionado pela parametrização da superfície para construir a modulação QAMS sobre o modelo planar do toro e depois, através da equação paramétrica, transferi-la para a superfície.

Portanto, para se construir um projeto de modulação QAMS sobre o toro, é suficiente conhecer o mergulho topológico sobre o modelo planar e sua equação paramétrica. Com isso, o objetivo da utilização da equação paramétrica é possibilitar e facilitar a construção de uma modulação QAMS sobre o toro.

Capítulo 3

# Modulação Sobre Variedades Riemannianas

Neste capítulo, será implementado um sistema de modulação sobre uma variedade Riemanniana, ambiente que disponibiliza diversos tipos de elementos matemáticos que permite a construção precisa do modelo espacial e a análise da eficiência da modulação. Antes da abordagem direta do problema será dada a justificativa do por que e do como se chegou à conclusão da importância de se projetar modelos de modulações em variedades Riemannianas.

## 3.1 Histórico do Problema

O problema da comunicação consiste basicamente em transmitir informação através de um canal de um local para outro. O processo do tratamento do sinal para que este assuma uma forma adequada que possibilite a transitação através do canal e a sua recuperação pelo receptor costuma ser chamado de modulação. Esta etapa é composta por um modulador que tem a função de receber um símbolo $s$ da saída do decodificador e transformá-los em onda $\omega$ (ou sinal) possível de ser transmitida pelo canal de comunicação. O outro componente, o demodulador, tem como função, recuperar o símbolo (onda ou sinal) transmitido pelo canal. Este é o momento crucial do sistema de transmissão onde surge o problema da comunicação: recuperar o sinal transmitido $\omega$ uma vez que o canal introduz um ruído e o transforma em outro sinal $\omega'$, bem diferente do enviado $\omega$. O demodulador, então, terá que decidir qual o sinal enviado $\omega$, já que a natureza do sinal recebido $\omega'$ é totalmente imprevisível e não se tem certeza do símbolo enviado $\omega$. Portanto, estamos diante de um sinal $\omega'$ de natureza aleatório e o problema passa a ser um processo estocástico ou probabilístico.

Se $\mathcal{A} = \{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$ é o alfabeto $m$-ário usado no sistema, o procedimento usual, usado na solução do processo de decisão do sinal recebido $\omega'$, consiste em associar, primeiro um sinal $\omega_i$ a $s_i$ e, depois, associar $\omega_i$ a um ponto $p_i$ de um espaço métrico $(\Omega, d)$, para cada $i \in \{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$. Em seguida, o espaço $\Omega$ é dividido em $m$-regiões, $R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, \cdots, R_{\alpha_m}$, denominadas de *regiões de decisão* ou *regiões de Voronoi*, tais que, $p_i \in \operatorname{Int} R_{\alpha_i}$ (interior de $R_{\alpha_i}$). Na verdade, $p_i$ é tomado arbitrariamente na região $R_{\alpha_i}$. O espaço $\Omega$ com esta estrutura de partição em regiões de decisão de sinais passou a ser chamado de *espaço de sinais*, o conjunto de sinais sobre $\Omega$, $\mathcal{C} = \{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$, de *constelações de sinais,* e os espaços métricos em que todas as regiões $R_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \cdots, m$, são congruentes, é denominado de *espaço de sinais geometricamente uniforme* (e.s.g.u.).

No início, o espaço métrico $(\Omega, d)$ tomado é a reta real com a métrica usual, isto é, $\Omega = \mathbb{R}$ e $d(p, q) = |p - q|$. Este é o caso da modulação linear para uma constelação de $m$-sinais denominada de *modulação de amplitude* ($m$-AM) (*Amplitude Modulation*). A medida que um número maior de sinais passou a ser utilizado, observou-se que, ou o custo do sistema, em termo de energia, era maior, ou a probabilidade de erro aumentava com a evolução do número de sinais. A Figura 3.1.1 mostra um projeto de modulação 6-AM sobre $(\mathbb{R}, d)$ para um canal com ruído Gaussiano branco aditivo. Observe que o custo de energia cresce com o afastamento dos sinais do centro de energia localizado na origem zero da reta real.

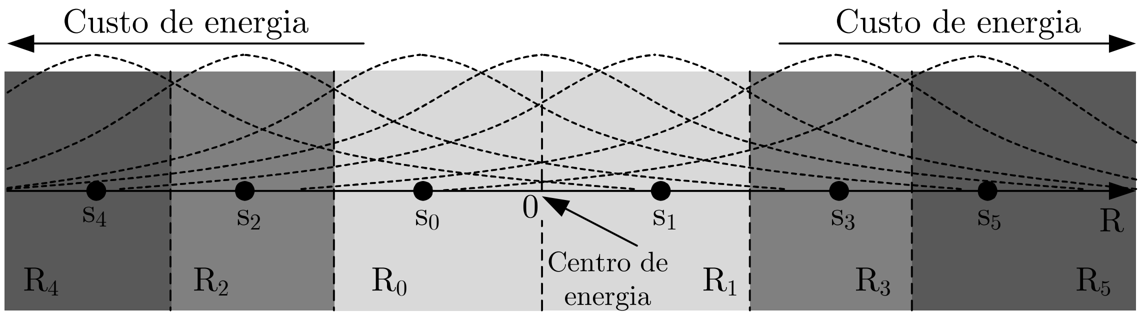



Figura 3.1.1: Modulação 6-AM sobre o espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$ para um canal AWGN.

As modulações passaram então a ser projetadas sobre o espaço métrico da esfera unidimensional $S^1$ (círculo unitário), onde os $m$ sinais são distribuídos uniformemente, assumindo a forma tão desejada do e.s.g.u., devido a diminuição da complexidade de cálculo envolvida no processo de modulação e a diminuição do custo de energia, pois este é o mesmo para cada sinal transmitido da constelação. Esse conceito de modulação foi evoluindo para esferas de dimensão maiores, as conhecidas *constelações de Slepian*. Esperava-se que a concentração de um número maior de sinais num mesmo espaço tem como efeito o aumento da probabilidade de erro no sistema de decisão do demodulador. Os seguintes exemplos de modulações por chave de mudança de fase (PSK - do inglês *Phase Shift Key*) e de Slepian, do tipo e.s.g.u., são mostrados na Figura 3.1.2: a) constelação com 8-sinais, 8-PSK, sobre $(S^1, d)$, onde $S^1$ é a esfera unidimensional; b) constelação com 3-sinais, 3-PSK, sobre o $(S^2, d)$ , onde $S^2$ é a esfera bidimensional; e c) constelação 4-PSK sobre o $(S^2, d)$.

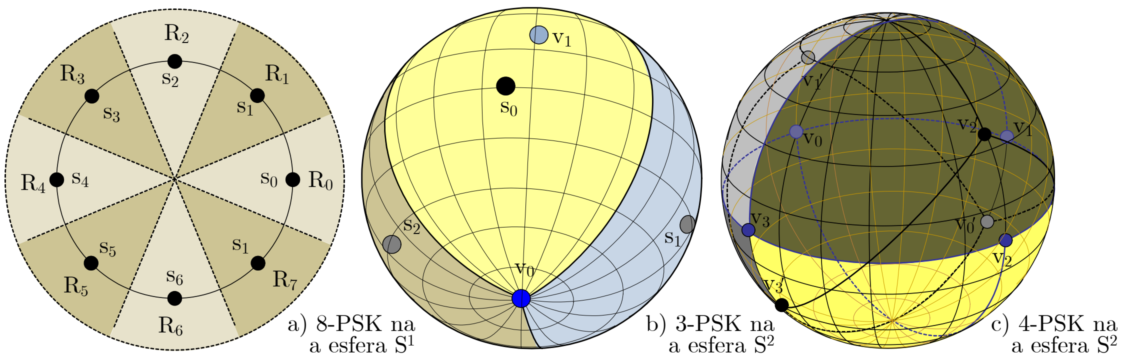



Figura 3.1.2: Modulações PSK sobre e.s.g.u. $(S^1, d)$ e $(S^2, d)$.

As constelações PSK's (e de Slepian) são, reconhecidamente, constelações de grande eficiência, mas diante da situação em que se prever a demanda por sistemas mais eficientes, pois circula cada vez mais um número maior de informação no mundo das telecomunicações, é natural que se pensasse em explorar outros tipos de modulações nestes espaços. Surgiu então a modulação em amplitude e quadratura $m$-QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*). Nesta, a distribuição de sinais ocorre sobre o plano Euclidiano, na forma de reticulados, como mostram os casos ilustrados na Figura 3.1.3.

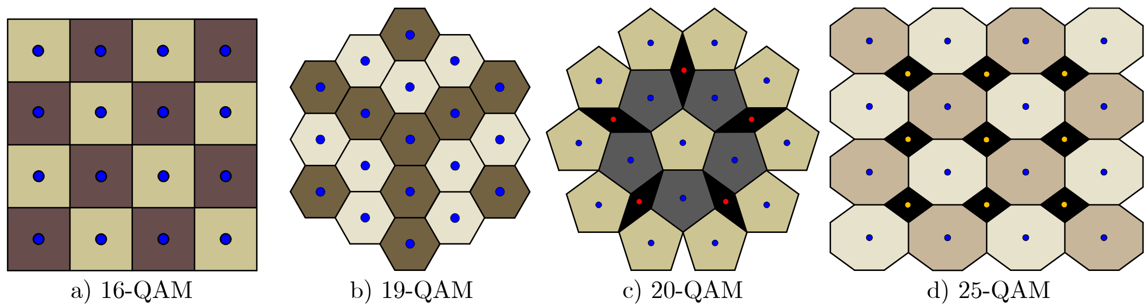



Figura 3.1.3: Modulações QAM com vários tipos de regiões de decisão.

Diferente das modulações PSK, as regiões de Voronoi das modulações QAM assumem formas bem definidas através de polígonos regulares, ou não, como são os casos de c) e d) da Figura 3.1.3. Também vemos nestes dois casos que não é proibido combinar formas poligonais diferentes para obter modulações, as quais são utilizadas para proteção diferenciada para cada símbolo. De acordo com o tipo de região $R_\alpha$, a modulação

QAM foi denominada de *reticulados* $A_\alpha$, para indicar que as suas regiões de decisões são formadas por polígonos de $\alpha$ lados. Usando esta notação, pode-se dizer que as modulações a) - d) da Figura 3.1.3 são reticulados do tipo $A_4$, $A_6$, $A_5 \cup A_4$ e $A_8 \cup A_4$, respectivamente.

Sabe-se que o desempenho da modulação depende do seu reticulado: quanto maior for o valor de $\alpha$, isto é, quanto maior for a densidade de empacotamento das esferas, maior é o desempenho da modulação. No caso do plano, há somente dois casos de constelações de sinais do tipo geometricamente uniforme, os reticulados $Z_2$ e $A_2$. Já os reticulados $A_3$ e $A_6$ são duais um do outro e são considerados como um mesmo tipo de reticulado. Obviamente que $A_2$ é considerado o reticulado mais denso do plano, ou o de melhor desempenho. Apesar das modulações c) e d) não serem do tipo e.s.g.u. não podemos descartar a hipótese de que o seu desempenho deve ser considerável em relação aos casos uniformes a) e b). Observe que c) é formado por regiões do tipo $R_4$ e $R_5$, e, portanto regiões maiores ou iguais a $R_4$. Veja ainda que c) e d) são formados por dois reticulados, ou seja, o plano é coberto por dois conjuntos do tipo e.s.g.u. Teria este menor ou maior desempenho do que $A_4$? Como d) contém um $A_8$, o seu desempenho como modulação seria muito diferente de $A_6$? As respostas são dadas através de simulações. Mas a questão levantada aqui diz respeito à natureza das modulações QAM de serem estas formadas por tipos de regiões diferentes. Esta propriedade é importante para mostrar que o uso de regiões poligonais como regiões de decisão de sinais não é novo. Então por que não considerarmos uma região poligonal sobre uma superfície?

O conceito de região poligonal foi expandido naturalmente para o ambiente das superfícies ([17], [23]) e passou a ser chamado simplesmente de *região de $\alpha$ lados,* indicado por $R_\alpha$. Então, do mesmo modo que o recobrimento do espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d)$ por um reticulado $A_m$, ou um recobrimento qualquer de $m$ regiões poligonais, é considerado uma modulação $m$-QAM $= (\mathbb{R}^2, d, A_m)$, podemos dizer o mesmo de $(\Omega, d, \cup_{i=1}^m R_{\alpha_i})$, onde $\Omega$ é uma variedade Riemanniana, $d$ é uma métrica sobre $\Omega$ e $\cup_{i=1}^m R_{\alpha_i}$ é recobrimento de $\Omega$ por $m$ regiões de $R_{\alpha_i}$. Os modelos de partições sobre superfícies construídos e identificados em [17] e [23] através de mergulhos de grafos são, portanto, modelos topológicos e algébricos de modulações QAM sobre superfícies (variedades Riemannianas bidimensionais), os quais foram denominados por modulações QAMS, devido ao ambiente em que se encontram.

Modelos topológicos de modulações QAMS e QAMS$'$ sobre o bitoro, vindo de mergulhos do grafo completo $K_5$ são mostrados na Figura 3.1.4. Os polígonos orientados de 8 lados da Figura 3.1.4 são os modelos planares da superfície $2T$ correspondentes a mergulhos de $K_5$ e seus duais. Cada mergulho geram duas modulações distintas, a QAMS e a modulação dual QAMS$'$, conforme os novos conceitos de modulações introduzidos em

[23].

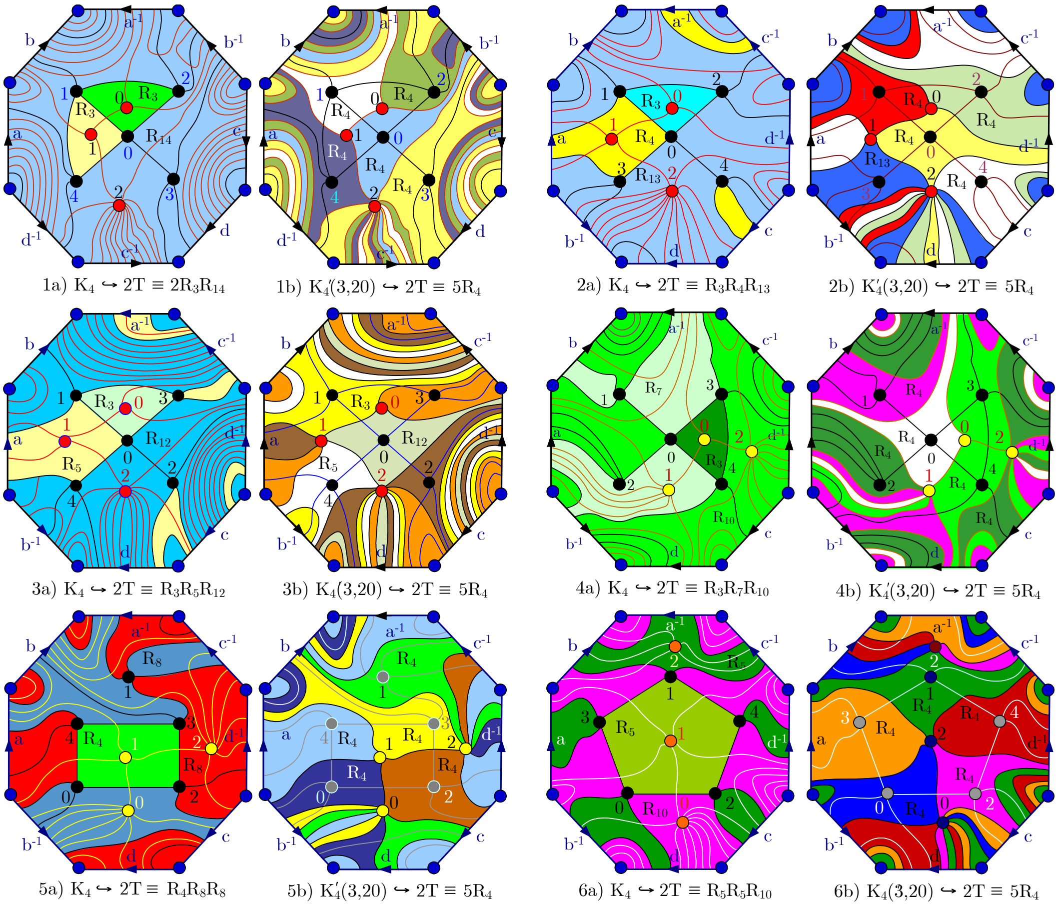


Figura 3.1.4: Modelos planares de modulações QAMS e duais QAMS′ sobre 2T vindos de mergulhos de $K_5$ ([23]).

O uso das modulações AM, PSK e QAM, em projetos convencionais de sistemas de transmissão de dados, tem mostrado que, sob condições iguais de energia média usada na transmissão de sinais, as modulações QAM's são mais eficientes do que as PSK's, e estas são mais eficientes do que as modulações AM's. No início, todas as justificativas para os desempenhos desses componentes eram provenientes, ou da observação direta sobre os desempenhos dos sistemas de transmissão, ou dos dados comparativos obtidos através de simuladores. Não existia uma demonstração quantitativa comprovando a eficiência das modulações. Foi então que Lima e Palazzo [17] introduziram os primeiros projetos de modulações em superfícies e comprovaram, usando conceitos da Topologia algébrica, que a eficiência $\varepsilon$ de uma modulação depende do gênero da superfície em que esta se encontra. A conclusão foi que, quanto maior for o gênero da superfície, maior será a eficiência da modulação.

Observando que AM, PSK (ou Slepian) e QAM são modulações dos respectivos espaços: reta real $\mathbb{R}$, da esfera $S^1$ (ou da esfera $S^m$) e do $\mathbb{R}^2$, e como a esfera $S$ tem gênero 0, menor do que o do toro, o qual tem gênero 1, o gênero da superfície é um invariante topológico que da informação sobre o desempenho da modulação. A conclusão de Lima e Palazzo [17] passou a ser, então, referência na procura por modulações mais eficientes. Podemos então afirmar que esta procura por modulação está apenas no começo, uma vez que, no universo da geometria de Riemann, somente as superfícies de gênero zero foram exploradas satisfatoriamente. Portanto, no ambiente das superfícies orientadas compactas, o toro é a próxima superfície onde provavelmente, deverão existir projetos de modulações mais eficiente do que a esfera. Como é uma superfície bem comportada, no sentido de sua forma não muito complexa, e a nível de Geometria Diferencial já se tem todas as ferramentas necessárias para desenvolver um projeto de modulação, o estudo e análise de desempenho das modulações toroidais ficarão restritos a esta área da matemática.

Antes da abordagem direta do problema da construção da modulação QAMS sobre o toro, a nível de geometria diferencial, iremos passar mais informações sobre este tipo de modulação, quanto as definições e algumas particularidades introduzidas em [23].

## 3.2 Considerações sobre QAMS

Topologicamente, uma modulação QAMS é uma partição sobre uma superfície topológica $\Omega$. No ambiente da geometria diferencial, este conceito equivale a um projeto geométrico de modulação sobre um espaço de Hausdorff $(\Omega, d)$, onde $\Omega$ é uma variedade Riemanniana bidimensional e $d$ é uma métrica de $\Omega$. Sob o aspecto da geometria diferencial os elementos da topologia são os abertos formados pelas regiões de um mergulho (regiões de Voronoi) de 2-células de um DMC, visto como um grafo. Mais precisamente, o projeto de uma modulação para uma constelação de $m$ sinais, vem de uma partição dual do mergulho do grafo associado a DMC, sobre $\Omega$, em $m$ regiões, tal que, cada uma delas é a região de decisão de um sinal da constelação [23].

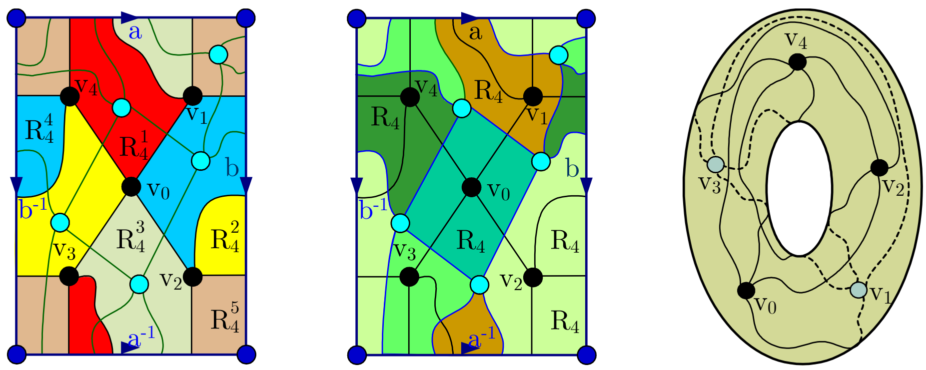
A única restrição para que um mergulho seja um projeto de uma QAMS sobre $\Omega$ é que este seja de 2-células. Caso contrário, QAMS não estaria definida de forma única.

Uma consequência imediata da Definição 2.4.1 é que todo mergulho de 2-células, $G(p,q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$ resulta em dois projetos distintos de modulações QAMS's: a própria QAMS e a dual QAMS$'$. A QAMS é uma modulação para uma constelação de $p$ sinais com regiões de Voronoi definidas pelas regiões $R_{\alpha_j}$'s do mergulho dual, $G'(k,q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{j=1}^{p} R_{\alpha_j}$. A modulação dual QAMS$'$ é uma modulação para uma constelação de $k$ sinais, com regiões de Voronoi definidas pelas regiões $R_{\alpha_i}$'s do mergulho $G(p,q) \hookrightarrow$

$\Omega \equiv \cup_{i=1}^{k} R_{\alpha_i}$. Na Figura 3.1.4, 1a) representa o projeto topológico (ou modelo planar $\Pi_p$) de uma modulação QAMS, e 1b) o modelo planar correspondente à modulação dual QAMS′, ambas obtidas de um mergulho particular do grafo completo $K_5$ sobre o bitoro. Os demais modelos 2a) e 2b) até 6a) e 6b) representam outros exemplos dos pares de modulações e duais. Observe que são projetos de modulações distintas uma vez que as correspondentes constelações de sinais e regiões de decisão são completamente diferentes.

As modulações QAMS e QAMS′ nem sempre são diferentes. Estas são idênticas quando os mergulhos do grafo e seu dual coincidem. O Teorema 2.4.3 estabelece condições em que modulações vindas de QAMS ≡ QAMS′ são idênticas. No caso de modulações QAMS vindas de mergulhos do grafo completo, a condição QAMS ≡ QAMS′ resulta sempre em uma modulação uniforme, isto é, todas as regiões possuem a mesma quantidade de lados. Não temos dois projetos distintos neste caso, mas ganhamos uma modulação para uma constelação e.s.g.u., uma classe de modulação reconhecida pela sua eficiência no processo de transmissão digital de sinais.

Modulações uniformes vindas de mergulhos do grafo completo existem em abundância, quando os projetos são realizados em superfícies com bordos (veja [17], [23], [20], [21] e [22]). Nas superfícies sem bordos, destacam-se dois casos de uniformidade, as modulações que vêm de triangulações e de relações do tipo QAMS ≡ QAMS′. Estas últimas são bem mais eficientes porque nunca se encontram em triangulações, as suas regiões de decisão são definidas sobre regiões com número de lados superior a 4. Sabemos que as triangulações existem [28], até com certa frequência, mas, pelos resultados apresentados no Teorema 2.4.3 e o caso dos mergulhos $K_5$ [23], as modulações uniformes vindas da relação QAMS ≡ QAMS′ são raríssimas (no caso de mergulhos de $K_5$, foram encontradas apenas 12 num universo de 7776) e difíceis de serem identificadas. A única, não trivial, que se tem conhecimento que já foi identificada é a que vem do mergulho $K_5 \hookrightarrow T \equiv 5R_4$, modulação representada pelos modelos topológicos da Figura 3.2.1.




a) $K_5 \hookrightarrow T \equiv 5R_4$ b) $K_5 \hookrightarrow T \equiv 5R_4$ c) $K_5 \hookrightarrow T \equiv 5R_4$

Figura 3.2.1: Modelos planar e espacial da modulação 5-QAMS uniforme sobre $T$.

Os modelos relacionados na Figura 3.2.1 representam: a) o modelo planar da modulação 5-QAMS; b) o modelo planar da modulação dual 5-QAMS$'$; e c) o modelo espacial da modulação 5-QAMS. Esses, representam projetos topológicos de modulações para constelações com 5 sinais, todas as regiões de decisão são quadrangulares, portanto uniformes. Dizemos então que o toro $T$, com uma métrica $d$ e a partição $5R_4$, é um espaço de sinais $(T, d, 5R_4)$ do tipo e.s.g.u. Além da condição e.s.g.u., o que mais se destaca nesta modulação é o fato da uniformidade ocorrer em regiões com mais de três lados.

A identificação algébrica da modulação 5-QAMS representada pelo mergulho planar da Figura 3.2.1 a) consiste em identificar três elementos: o sistema de rotações de $K_5$

$$\Theta\left(K_5\right) = \left\{0\left(1,2,3,4\right), 1\left(0,3,2,4\right), 2\left(0,4,3,1\right), 3\left(0,1,4,2\right), 4\left(0,2,1,3\right)\right\}, \tag{3.1}$$

o conjunto das sequências orbitais

$$\Gamma = \left\{\gamma_1\left(0,1,3,4\right), \gamma_2\left(0,4,2,3\right), \gamma_3\left(0,3,1,2\right), \gamma_4\left(0,2,4,1\right), \gamma_5\left(1,4,3,2\right)\right\} \tag{3.2}$$

e a forma simplificada do mergulho contendo a partição

$$K_5\left(\Theta\right) \hookrightarrow T \equiv 5R_4. \tag{3.3}$$

da forma $5R_4$. A identificação sobre o modelo espacial c) é idêntica ao processo acima. Pode-se verificar facilmente que a modulação dual 5-QAMS$'$ em b) também é idêntica, isto é, composta por 5 regiões quadrangulares. Logo 5-QAMS e 5-QAMS$'$ são iguais.

As identificações algébrica (rotação, sequências orbitais e descrição simplificada do mergulho) e geométrica (modelos planares e espacial do mergulho e dual) estabelecidas na Figura 3.2.1 dá a certeza de que não é somente possível identificar como construir projetos topológicos de modulações e.s.g.u. sobre variedades Riemannianas orientadas. O objetivo principal deste trabalho é mostrar que a modulação 5-QAMS pode ser construída sobre a superfície do toro, quando este é dado por uma parametrização. A descoberta da modulação uniforme 5-QAMS$'$ sobre $T$ com 5 regiões quadrangulares, e a construção de seus modelos topológicos em [23], despertou imediatamente um grande interesse em realizar este projeto a nível de Geometria Diferencial e Geometria Riemanniana. A motivação para este problema é muito grande, pois há todo um universo a ser explorado, quando se trata de identificar e construir modulações uniformes no ambiente dessas geometrias.

## 3.3 Modulação QAMS Uniforme sobre o Toro

Projetos topológicos de modulações uniformes, além da 5-QAMS da Figura 3.2.1, também foram identificados em [23]. As modulações uniformes identificadas sobre superfícies orientadas estão relacionadas na Tabela 3.3.1.

| $DMC$ | $K_n$ | m-QAMS | Partição | m-QAMS' | Partição | $\Omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_3$ | $K_3$ | 2-QAMS | $2R_3$ | 3-QAMS$'$ | $3R_2$ | $S$ |
| $C_4$ | $K_4$ | 4-QAMS | $4R_3$ | 4-QAMS$'$ | $4R_3$ | $S$ |
| $C_5$ | $K_5$ | 8-QAMS | $8R_3$ | 5-QAMS$'$ | $5R_4$ | $S$ |
| $C_5$ | $K_5$ | 5-QAMS | $5R_4$ | 5-QAMS$'$ | $5R_4$ | $T$ |

Tabela 3.3.1: Modulações regulares com duais idênticas.

Observe que os três primeiros casos de modulações $m$-QAMS relacionados nas duas primeiras linhas da Tabela 3.3.1 coincidem com as modulações 2-PSK, 3-PSK e 4-PSK ilustradas na Figura 3.1.2, isto porque as construções mostram que as regiões de Voronoi dessas modulações sobre a esfera são todas congruentes. Nestes casos, as modulações $m$-QAMS confundem-se com as $m$-PSK, mas só nesse caso. Porém, no caso das modulações 8-QAMS e 5-QAMS$'$ da esfera relacionadas na terceira linha da Tabela 3.3.1 não podemos afirmar que são modulações do tipo $m$-PSK, pois não são conhecidas partições da esfera em oito regiões triangulares congruentes e nem em cinco regiões quadrangulares. Neste caso não podemos confundir uma modulação $m$-PSK com uma $m$-QAMS. Sendo assim a diferença entre estes dois tipos de modulações encontra-se na possibilidade da partição uniforme existir ou não.

Quanto à modulação 5-QAMS relacionada na quarta linha da Tabela 3.3.1, essa é diferente de uma $m$-PSK, já que a mesma encontra-se sobre o toro, uma classe de superfície distinta da esfera. Também não podemos confundir esta modulação com uma 5-QAM uma vez que se desconhece uma partição sobre o toro, vinda de um mergulho de $K_5$, em que todas as cinco regiões quadrangulares são congruentes. Então, se o objetivo é projetar uma modulação $m$-QAMS diferente, devemos começar por uma na qual é impossível particionar o espaço em regiões congruentes. Caso contrário, trata-se de uma modulação $m$-QAM. Sendo assim, já podemos escolher, para iniciarmos o nosso trabalho, uma das modulações relacionadas nas duas últimas linhas da Tabela 3.3.1. A razão, como foi visto antes, é porque as partições em regiões de Voronoi congruentes são desconhecidas para estes casos. Devido a menor quantidade de sinal e por se encontrar em uma superfície diferente da esfera, começaremos o nosso estudo com a modulação 5-QAMS sobre o toro. Sem falar que este é um raro exemplo de modulação uniforme encontrada, após uma exaustiva busca, usando o Algoritmo identificador de mergulhos orientados de grafos, desenvolvido por Lima-Lima [23].

Espera-se que a escolha pela geometria do toro, um pouco mais complexa do que a da esfera, dê os suportes necessários para concretizar os projetos de modulações $m$-QAMS em outros tipos de superfícies, inclusive as $m$-QAMS da esfera.

### 3.3.1 Evolução e escolha de elementos da modulação $m$-QAMS

Uma modulação $m$-QAMS para uma constelação de $m$ sinais é uma partição dual sobre uma superfície vindo do mergulho de um grafo $G$ associado a um DMC $C_{m,n}$ (veja Definição 2.4.1). Iremos considerar partições de superfícies do tipo espaço de Hausdorff. Estas partições vêm de mergulhos de grafos com orientações iguais em todos os vértices de $G$. Todo mergulho de 2-células de um grafo particiona a superfície em regiões, tais que a interseção de duas delas é sempre vazia. Então os mergulho de 2-células $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup R_{\alpha_i}$ é um espaço de Hausdorff, pois cada $R_{\alpha_i}$ é um aberto de $\Omega$ e $R_{\alpha_i} \cap R_{\alpha_j} = \varnothing$, para $i \neq j$. Sendo assim, a escolha de 5-QAMS vinda do um mergulho uniforme de $K_5$, da Figura 3.2.1 atende as condições acima.

O problema a resolver neste capítulo, então, consiste em realizar o projeto de modulação 5-QAMS, a nível de Geometria Diferencial, vindo do mergulho $K_5\,(\Theta) \hookrightarrow T \equiv 5R_4$, onde $\Theta$ é a rotação em (3.1) cujos esquemas gráficos do processo completo contendo os elementos associados e mergulhos topológicos, são ilustrados na Figura 3.3.1.

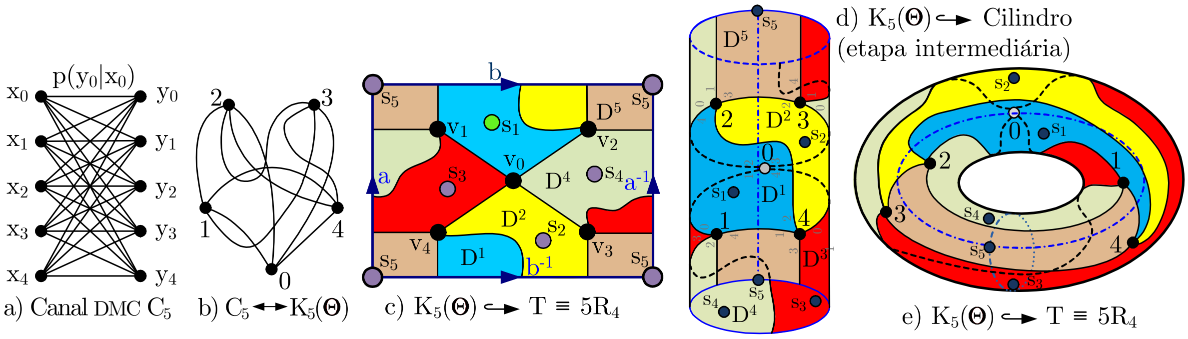



Figura 3.3.1: Associação e projeto topológico da 5 QAMS : $K_5\,(\Theta) \hookrightarrow T \equiv 5R_4$.

Na Figura 3.3.1, o esquema gráfico a) corresponde à representação do modelo tradicional do canal DMC, ou canal 5-ário $C_5$. No esquema b), a notação $C_5 \longleftrightarrow K_5\,(\Theta)$, indica que o canal $C_5$ está associado ao grafo completo $K_5$ munido do sistema de rotações $\Theta$, pelo processo de associação introduzido em [23]. Em c), é representado o mergulho de $K_5\,(\Theta)$ sobre o modelo planar de $T$. Em d), tem-se o mergulho sobre o modelo espacial do cilindro, etapa essencial para se obter o mergulho sobre o modelo espacial do toro, indicado em e). Do ponto de vista topológico, os modelos em c), d) e e) representam o mesmo mergulho de $K_5\,(\Theta)$ sobre $T$.

Observamos que o grafo completo $K_5$ é o grafo associado a $C_5$, contudo, o modelo da modulação depende do mergulho do grafo, e $K_5$ possui 7776 sistemas de rotações distintos. Somente 12 rotações de $K_5$ produzem mergulhos uniformes sobre o toro e todos são compostos por 5 regiões quadrangulares (veja [23]), da forma indicada na equação (3.3). Um deles, o sistema $\Theta$ da igualdade (3.1), foi o escolhido como aquele sobre o qual será projetado uma modulação 5-QAMS, através das ferramentas da Geometria Diferencial, objetivo que será sintetizado na forma do seguinte Problema.

**Problema 3.3.1** *Seja* $G(\Theta) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup R_\alpha$ *um mergulho de 2-células de* $G$. *Usando o modelo planar* $\Pi_p$ *do mergulho sobre* $\Omega$, *projetar, usando a parametrização* $\Psi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, *uma modulação* $m$-QAMS *compatível com o canal* $m$*-ário* $C_m$.

Em particular, para o mergulho $K_5(\Theta) \hookrightarrow T \equiv 5R_4$ da equação (3.3), a parametrização $\Psi$ é da forma

$$\Psi(u,v) = ((b + a\cos v)\cos u, (b + a\cos v)\sin u, a\sin v). \tag{3.4}$$

Neste trabalho será utilizada e seguinte parametrização particular do toro

$$\Psi(u,v) = ((b + a\cos v)\cos u, (b + a\cos v)\sin u, a\sin v), \quad a = 1 \text{ e } b = 3. \tag{3.5}$$

Como $U$ é uma região poligonal de 4-lados, e o modelo planar do mergulho do toro encontra-se sobre um 4-lados também, podemos construir um projeto geométrico sobre $U$, o modelo planar $\Pi_p$ do mergulho $K_5(\Theta) \hookrightarrow T$ topologicamente idêntico ao mergulho planar c) da Figura 3.3.1, como mostram os mergulhos construído na Figura 3.3.2.

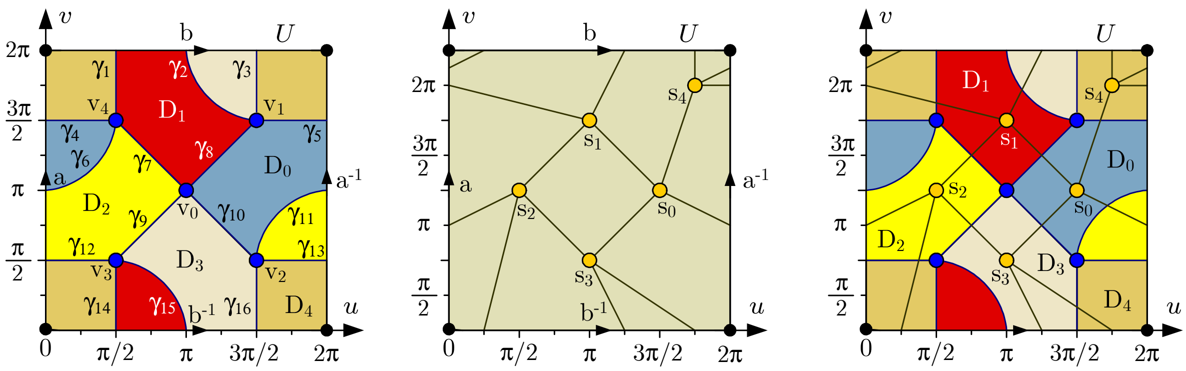



Figura 3.3.2: Modelos planares básicos da modulação 5-QAMS, $K(\Theta) \hookrightarrow T \equiv 5R_4$.

O mergulho a) da Figura 3.3.2 representa um modelo planar da modulação 5-QAMS fixado sobre o toro, sobre o qual, o projeto será descrito e analisado em termos de desempenho. Neste modelo, para todo $0 \le i, j \le 4$, $v_j$ é um vértice de $K_5$, $D_i$ indica as regiões de Voronoi do sinal $s_i$ e $\gamma_k$, $1 \le k \le 16$, são os subcaminhos de $K_5$ que definem as fronteiras das regiões de decisão de 5-QAMS. Em relação ao mergulho, toda a região de decisão $D_i$ corresponde a uma região quadrangular definida por uma sequência orbital $\gamma_i$, mais precisamente, temos

$$\gamma_1 = (0,1,3,4)\,, \gamma_2 = (0,4,2,3)\,, \gamma_3 = (0,3,1,2)\,, \gamma_4 = (1,4,3,2)\,,$$

onde $\gamma_i = (i_1, i_2, i_3, i_4)$ significa uma região de 4 lados sobre o mergulho do toro, cuja fronteira passa pelos vértices $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}$ e $v_{i_4}$ de $K_5$. A Figura 3.3.2 b) contém a constelação de sinais $\mathcal{A} = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ e o grafo dual (grafo associado ao canal $C_5$). A Figura 3.3.2 c) ilustra o projeto com todos os elementos da modulação 5-QAMS.

## 3.4 Construção da QAMS Via Parametrização

Na Figura 3.3.2, o modelo planar a) foi construído visando uma uniformidade na distribuição das áreas. Como esta é a primeira tentativa de construção, não dispomos de informações que conduzam a alguma tipo de uniformidade. Então, usando de intuição, começamos a distribuir os sinais da forma que pareceu mais adequada para obter a uniformidade desejada.

No modelo planar a) da Figura 3.3.2, cada curva $\gamma_k$ corresponde a um lado completo ou parte do lado do grafo $K_5$. Por exemplo, a curva $\gamma_7$ forma um lado completo do grafo $K_5$, une os vértices $v_0$ e $v_4$, enquanto $\gamma_4$ e $\gamma_5$ correspondem juntas a outro lado de $K_5$, unem $v_1$ a $v_4$. Podemos escolher qualquer tipo de curva para $\gamma_k$ desde que esta seja uma curva simples, sem autointerseções. O processo de construção facilita quando $\gamma_k$ é uma curva planar definida por uma função da reta $\gamma_k : I \to \mathbb{R}$. No modelo planar a) da Figura 3.3.2, a opção foi utilizar dois tipos de curvas, a linear e a circunferência. Para sermos mais precisos, na Tabela 3.4.1, relacionamos todas as equações das curvas $\gamma_k$ do modelo planar da Figura 3.3.2 a).

O modelo espacial e) da Figura 3.3.1 é idêntico ao modelo planar c), somente do ponto de vista topológico. Para obtermos o modelo espacial do mergulho correspondente ao modelo planar a) da Figura 3.3.2, cujas equações das curvas $\gamma_k$ são tomadas como na Tabela 3.4.1, utilizamos a parametrização particular do toro definida em (3.5).

Por exemplo, as curvas $\gamma_4$ e $\gamma_5$ unem os vértice $v_1$ e $v_4$, são funções lineares definidas no eixo $v$ dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_4 : \quad & \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \subset U \to \mathbb{R} \\ & u \longmapsto \gamma_4(u) = \frac{3\pi}{2}, \\ \gamma_5 : \quad & \left[\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \subset U \to \mathbb{R} \\ & u \longmapsto \gamma_5(u) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Note que $\gamma_4$, $\gamma_5$ correspondem ao lado $(v_1, v_4)$ de $K_5$. No modelo planar $\Pi_p$ do mergulho de $K_5$ (domínio da $\Psi$), o lado $(v_1, v_4)$ é definido por dois segmentos de retas. Apesar desses segmentos serem distintos e desconexos, a imagem de $\gamma_4$ e $\gamma_5$, pela aplicação $\Psi$, é o caminho conexo sobre o toro dado pela curva $\Psi(\gamma_4)\bigcup\Psi(\gamma_5)$, $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \bigcup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, unindo os pontos $\Psi\left(v_1\right)$ e $\Psi\left(v_4\right)$. Lembramos que $v_1$, $v_4$ são pontos do plano e $\Psi\left(v_1\right)$, $\Psi\left(v_4\right)$ são seus correspondentes na superfície toro ou modelo espacial $\Pi_\varepsilon$.

| Curva $\gamma_k$ | Equação da curva $\gamma_k$ |
|---|---|
| $\gamma_1$ | $u = \frac{\pi}{2}$, se $v \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ |
| $\gamma_2$ | $v = -\sqrt{-u^2 + 3\pi u - 2\pi^2} + 2\pi$, se $u \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ |
| $\gamma_3$ | $u = \frac{3\pi}{2}$, se $v \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ |
| $\gamma_4$ | $v = \frac{3\pi}{2}$, se $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| $\gamma_5$ | $v = \frac{3\pi}{2}$, se $u \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ |
| $\gamma_6$ | $v = -\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - u^2} + \frac{3\pi}{2}$, se $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| $\gamma_7$ | $v = -u + 2\pi$, se $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ |
| $\gamma_8$ | $v = u$, se $u \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ |
| $\gamma_9$ | $v = u$, se $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ |
| $\gamma_{10}$ | $v = -u + 2\pi$, se $u \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ |
| $\gamma_{11}$ | $v = \sqrt{-u^2 + 4\pi u - \frac{15\pi^2}{4}} + \frac{\pi}{2}$, se $u \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ |
| $\gamma_{12}$ | $v = \frac{\pi}{2}$, se $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| $\gamma_{13}$ | $v = \frac{\pi}{2}$, se $u \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ |
| $\gamma_{14}$ | $u = \frac{\pi}{2}$, se $v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| $\gamma_{15}$ | $v = \sqrt{-u^2 + \pi u}$, se $u \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ |
| $\gamma_{16}$ | $u = \frac{3\pi}{2}$, se $v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ |

Tabela 3.4.1: Equações das curvas $\gamma_k$ do modelo planar da Figura 3.3.2 $a$).

Usando a parametrização particular do toro definida em (3.5), para encontrar a imagem das curvas $\gamma_4$, $\gamma_5$ devemos primeiro encontrar suas equações. Conhecida a equação isolamos uma das variáveis $u$ ou $v$, feito isso substituímos o valor da variável correspondente na equação paramétrica $\Psi(u, v)$ (3.5), obtendo assim, a curva associada sobre o modelo espacial $\Pi_\varepsilon$. No caso das curvas supracitadas, cujas equações são $\gamma_4(u) = 3\pi/2$ se $u \in [0, \pi/2]$ e $\gamma_5(u) = 3\pi/2$ se $u \in [3\pi/2, 2\pi]$ respectivamente, as curvas sobre o toro são dadas por

$$\Psi(u, v) = ((3 + \cos v) \cos u, (3 + \cos v) \sin u, \sin v),$$

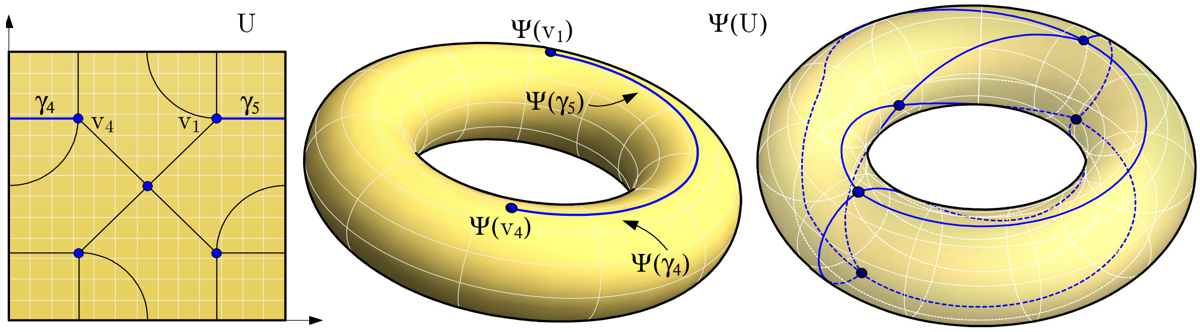
em particular, temos que

$$\Psi(\gamma_4) = \Psi(u, \gamma_4(u)) = ((3 + \cos \frac{3\pi}{2}) \cos u, (3 + \cos \frac{3\pi}{2}) \sin u, \sin \frac{3\pi}{2}), \;\; u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

e

$$\Psi(\gamma_5) = \Psi(u, \gamma_5(u)) = ((3 + \cos \frac{3\pi}{2}) \cos u, (3 + \cos \frac{3\pi}{2}) \sin u, \sin \frac{3\pi}{2}), \;\; u \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

Na Figura 3.4.1, a) representa o modelo planar $\Pi_p$ com as curvas definidas pelos segmentos de retas e arcos de circunferências definidos na Tabela 3.4.1, b) ilustra a curva $\Psi(\gamma_4) \bigcup \Psi(\gamma_5)$ e c) contém todas as curvas correspondentes ao mergulho do grafo $K_5$ sobre o toro vindo do modelo planar $\Pi_p$ cujos lados possuem equações definidas na Tabela 3.4.1. Observe que as únicas curvas do toro que não são obtidas através de seguimentos de retas são as imagens de $\gamma_2$, $\gamma_6$, $\gamma_{11}$ e $\gamma_{15}$, pois as mesmas são arcos de circunferência.




a) Modelo planar 5-QAMS b) Curva $\Psi(\gamma_4) \cup \Psi(\gamma_5)$ c) $K_5(\Theta) \hookrightarrow T \equiv 5R_4$

Figura 3.4.1: Método de construção de curvas sobre o toro.

O método aplicado as curvas $\gamma_4$ e $\gamma_5$ para obter a curvas correspondentes no toro é análogo para as demais curvas do modelo planar $\Pi_p$, devemos apenas tomar cuidado ao substituir a variável dependente. Após aplicarmos a equação paramétrica $\Psi$ em todas as curvas $\gamma_k$ do modelo planar, obtemos o mergulho do grafo $K_5$ do modelo planar sobre o toro. O principal propósito das construções do mergulho de $K_5$ na Figura 3.3.2 é obter uma partição sobre uma superfície vinda de um mergulho de um grafo através da

Geometria Diferencial. A obtenção deste mergulho sobre o toro mostra que qualquer outro mergulho topológico sobre esta superfície pode ser realizado através da Geometria Diferencial, desde que se conheça o modelo planar $\Pi_p$ do mergulho topológico. Neste primeiro protótipo, não estávamos ainda preocupados com o aspecto da uniformidade do mergulho, os sinais foram distribuídos do modo mais conveniente possível de acordo com os nossos conhecimentos prévios sobre a topologia do toro. Temos até como propósito construir um modelo uniforme e verificar se a uniformidade em número de lados, formato das regiões ou até mesmo a área no modelo planar, melhora o desempenho da modulação QAMS.

O processo de construir o mergulho de $K_5$ no modelo espacial a partir da equação paramétrica aplicada ao modelo planar, possibilita construir o mergulho equivalente de $K_5$ sobre o toro, esse método restringe o problema de construir a modulação utilizando somente o modelo planar e, através da equação paramétrica, transferir a modulação para a superfície.

As curvas $\gamma_k, k = 1, ..., 16$ do mergulho de $K_5$ no modelo planar na Figura 3.3.2 a) particiona o toro em 5 regiões, definindo uma modulação não uniforme para 5 sinais, 5-QAMS, cujas regiões de Voronoi $D_0, D_1, \cdots, D_4$ estão representadas na Figura 3.4.2: a) mostra as regiões obtidas pelo mergulho de $K_5$ sobre o modelo planar; e b) mostra as regiões equivalentes sobre o modelo espacial do toro.

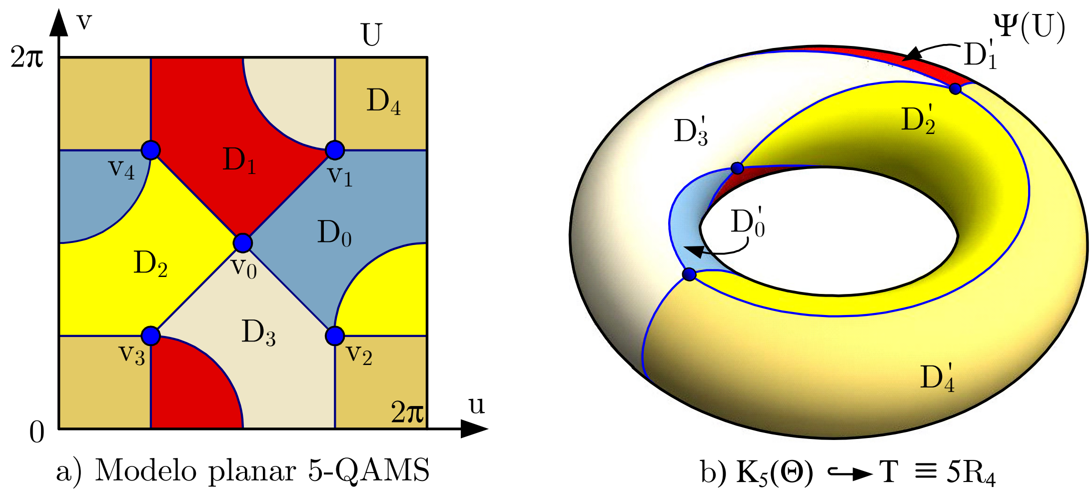



Figura 3.4.2: Modelo planar e espacial do mergulho de $K_5$ sobre o toro.

Como o mergulho planar formado por arcos de circunferência e segmentos de retas e o seu mergulho espacial equivalente sobre $T$, na Figura 3.4.2, serão utilizados posteriormente para análises e simulação da modulação 5-QAMS, este será denominado de Projeto I.

É importante ressaltar aqui, que a modulação 5-QAMS sobre o toro ilustrada na Figura 3.4.2 b) não é mais topológica, esta foi obtida diretamente da parametrização (3.5) aplicada em cada curva $\gamma_k$ relacionadas na Tabela 3.4.1. As regiões sobre o toro e as suas respectivas regiões sobre o modelo planar são equivalentes, no sentido de preservarem o número de lados, porém, estas sofrem as deformações naturais do toro. No entanto, cada região de Voronoi $D_i' = \Psi(D_i)$ do Toro passa a ser um recobrimento da sua correspondente região $D_i$ do modelo planar. A Figura 3.4.3 dá uma ideia precisa dessas aplicações.

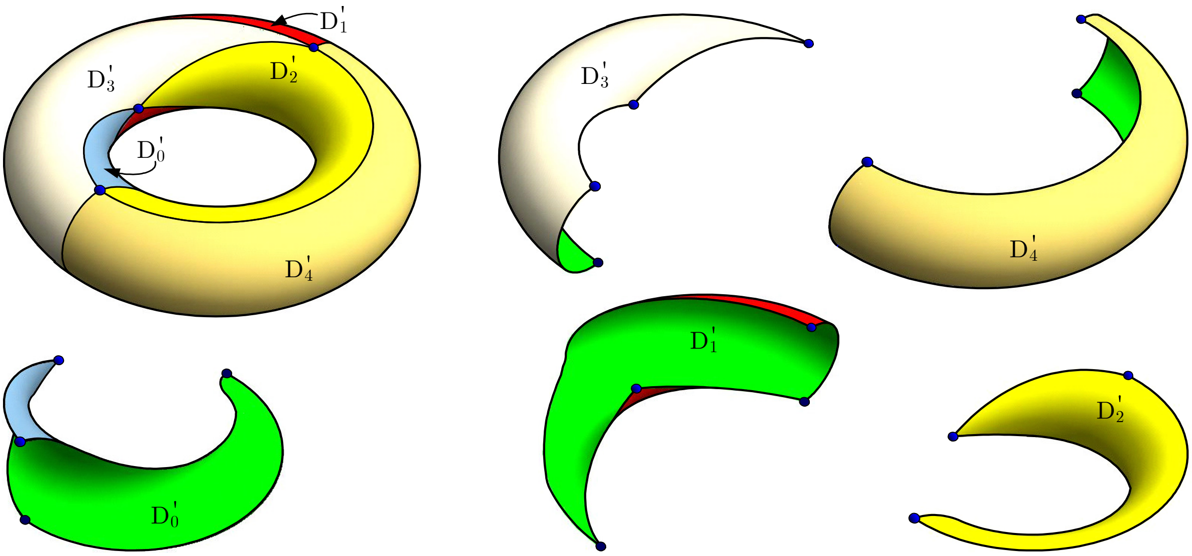



Figura 3.4.3: Modulação 5-QAMS e suas respectivas regiões de Voronoi.

Uma vez que a parametrização $\Psi$ em (3.5) é uma aplicação bijetora iremos considerar que cada região de Voronoi $D_i'$ sobre o modelo espacial e a sua correspondente $D_i$ sobre modelo planar são regiões correspondes.

## 3.5 Área das Regiões de Voronoi de QAMS

Em um sistema de transmissão de dados, o projeto de modulação tem por objetivo tratar da questão do ruído do canal ocorrido durante a transmissão. Os procedimentos gerais utilizados em um projeto de modulação consiste em distribuir os sinais através de um espaço topológico $(\Omega, d)$ e definir precisamente as regiões de decisão de cada sinal. Neste trabalho o espaço topológico $(T, d)$ é formado pelo toro e a métrica $d$ é dada pela distância toroidal. Como o sistema de transmissão de dados é de natureza estocástica, a estimativa do sinal transmitido só pode ser determinado através de regras probabilísticas. Com isso, o espaço topológico $(\Omega, d)$ deve ser escolhido de modo que seja possível estabelecer medidas sobre este espaço, tais como comprimento de curvas, áreas ou volumes das regiões de decisão dos sinais, possibilitando assim, estabelecer regras probabilísticas de decisão do sinal transmitido. Mostraremos então que se a escolha for o espaço topológico $(T, d)$, todos estes cálculos são possíveis e, consequentemente, o projeto de modulação QAMS pode ser realizado sobre o toro.

Como mencionado na Seção 3.4, a construção do mergulho sobre a superfície é feito utilizando o modelo planar. Inicialmente, dispomos de um mergulho topológico $G \hookrightarrow T$, este é reconstruído sobre o modelo planar adotando-se determinadas curvas específicas visando facilitar os cálculos das áreas das regiões de decisão da modulação, em seguida, utilizamos a equação paramétrica do toro (3.5) para obter o mesmo tipo de mergulho sobre o toro. Utilizando as equações (2.3) e (2.4) para o cálculo da área total e de uma região sobre uma superfície respectivamente, é possível verificar o comportamento da área de uma região $R'_a$ de $T$, quando a sua região correspondente $R_a$ do modelo planar $\Pi_p$ sofre pequenas variações. Isto permite construir modelos uniformes de modulações sobre $T$. É através deste procedimento que obtemos informações sobre o modo de alocar os sinais $s_i$'s das regiões de decisões $D_i$'s, distribuir os vértices de $G$ de de maneira que a modulação QAMS seja a mais uniforme possível.

A geometria diferencial fornece as ferramentas necessárias para estudo sobre a superfície. Utilizando o modelo planar com todos seus elementos definidos conforme a Figura 3.3.2 a), determinaremos a seguir as áreas das regiões de decisão de QAMS.

### 3.5.1 Área total do modelo espacial

Iremos considerar o projeto de modulação QAMS sobre o toro construído na Figura 3.3.2. De acordo com a igualdade (2.3), a área total $A_{\Psi(U)}$ da superfície é dada por

$$A_{\Psi(U)} = \int\int_U \sqrt{EG - F^2}\,dudv, \tag{3.6}$$

onde, $U$ corresponde a região fundamental da parametrização, $E, F$ e $G$ são os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície.

No caso particular da superfície toro definida pela parametrização (3.5) as derivadas parciais de $\Psi(u, v)$ são dadas por

$$\begin{aligned}\chi_u &= \frac{d\Psi(u,v)}{du} = (-\sin u\,(\cos v + 3)\,, \cos u\,(\cos v + 3)\,, 0)\,,\\ \chi_v &= \frac{d\Psi(u,v)}{dv} = (-\cos u \sin v, -\sin v \cos u, \cos v)\,,\end{aligned}$$

logo, pelas igualdade (2.2), os coeficientes da primeira forma fundamental de $\Psi(u, v)$ são dadas por

$$
\begin{aligned}
E &= \chi_u \cdot \chi_u = (3+\cos v)^2, \\
F &= \chi_u \cdot \chi_v = 0, \\
G &= \chi_v \cdot \chi_v = 1.
\end{aligned}
$$

O domínio $U$ da parametrização $\Psi$ é uma região quadrangular da forma

$$
U = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (0, 2\pi) \text{ e } v \in (0, 2\pi) \right\}.
$$

Então a área total do toro é dada por

$$
\begin{aligned}
A_{\Psi(U)} &= \int\int_U \sqrt{(3+\cos v)^2 \cdot 1 - 0^2}\, dudv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{(3+\cos v)^2}\, dudv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (3+\cos v)\, dudv \\
&= 12\pi^2.
\end{aligned}
$$

Assim, a área total do toro é $12\pi^2$, e portanto podemos utilizá-la para verificar a distribuição das áreas das regiões de decisão, em termos de porcentagem, da modulação QAMS, desde que conheçamos as aréas das regiões de decisão, as quais serão calculadas a seguir.

### 3.5.2 Cálculo da área das regiões de decisão do mergulho

Ao determinarmos as áreas das regiões de decisão de uma modulação, podemos estimar uma relação de distribuição de probabilidades dos sinais de transmissão de dados, e assim estabelecer uma regra probabilística de decisão para o sinal transmitido, etapa importante do projeto de demodulação.

No sentido de mostrar como é determinada a área de uma região de decisão sobre o toro iremos calcular um exemplo. Os cálculos das demais áreas das regiões de decisão do toro encontram-se no Apêndice A.

Pela Definição 2.2.3 a área da região $\Psi(Q) \subset \Psi(U)$, $Q \subset U$, é dada

$$
A_{\Psi(Q)} = \int\int_Q \sqrt{EG - F^2}\, dudv. \tag{3.7}
$$

No caso das regiões do mergulho, o cálculo da área da região $\Psi(Q)$ é realizado de acordo com as curvas que definem a região de decisão, com isso, existem três situações para calcular a área $A_{\Psi(Q)}$, a saber:

$$A_{\Psi(Q)} = \begin{cases} \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}(3+\cos v)dvdu, & \text{se } Q \text{ é retangular} \\ \int_{u_1}^{u_2}\int_{\gamma_1(u)}^{\gamma_2(u)}(3+\cos v)dvdu, & \text{se } Q \text{ é dada por } \gamma(v)=u \\ \int_{v_1}^{v_2}\int_{\gamma_1(v)}^{\gamma_2(v)}(3+\cos v)dudv, & \text{se } Q \text{ é dada por } \gamma(u)=v. \end{cases} \tag{3.8}$$

Vamos calcular, por exemplo, a área da região $D_0 \subset U$ de acordo com a Figura 3.3.2 a). Inicialmente, por questão de simplificação, dividimos as regiões $D_0$, $D_1$, $D_2$, $D_3$ e $D_4$ do modelo planar em subregiões. A Figura 3.5.1 mostra as subregiões $D_{ij}$, do modelo planar do mergulho de $K_5$.

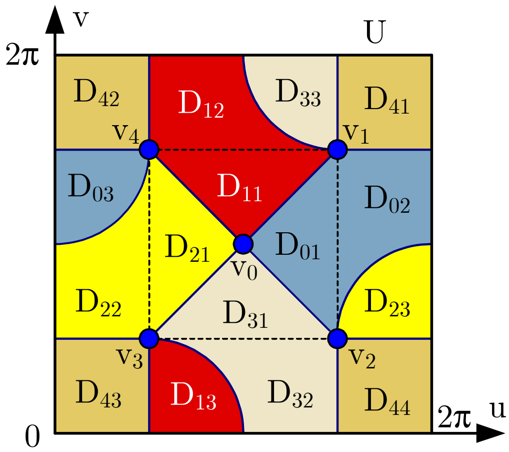



Figura 3.5.1: Subregiões do modelo planar de $K_5$ sobre o toro.

A região $D_0$ foi dividida em três subregiões: $D_{01}$ definida pelas curvas $\gamma_8$ e $\gamma_{10}$, $D_{02}$ definida pelas curvas $\gamma_5$ e $\gamma_{11}$ e $D_{03}$ definida pelas curvas $\gamma_4$ e $\gamma_6$. Com isso temos que

$$A_{\Psi(D_0)} = A_{\Psi(D_{01})} + A_{\Psi(D_{02})} + A_{\Psi(D_{03})}$$

Lembramos que as curvas que defininem cada subregião são todas dadas por $\gamma(v) = u$ (veja Tabela 3.4.1); logo, para o cálculo da área usaremos a equação

$$A_{\Psi(Q)} = \int_{u_1}^{u_2}\int_{\gamma_1(v)}^{\gamma_2(v)}(3+\cos v)dvdu.$$

Sendo assim, as áreas das subregiões $D_{ij}$ são dadas por

$$\begin{aligned} A_{\Psi(D_{01})} &= \int_{\pi}^{3\pi/2}\int_{\gamma_{10}}^{\gamma_8}(3+\cos v)dvdu \\ &= \int_{\pi}^{3\pi/2}\int_{-u+2\pi}^{u}(3+\cos v)dvdu \\ &\cong 5.402\,20, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{\Psi(D_{02})} &= \int_{3\pi/2}^{2\pi}\int_{\gamma_{11}}^{\gamma_5}(3+\cos v)dudv \\
&= \int_{3\pi/2}^{2\pi}\int_{\sqrt{-u^2+4\pi u-15\pi^2/4}+\pi/2}^{3\pi/2}(3+\cos v)dvdu \\
&\cong 6,942\,96,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
A_{\Psi(D_{03})} &= \int_{0}^{\pi/2}\int_{\gamma_6}^{\gamma_4}(3+\cos v)dudv \\
&= \int_{0}^{\pi/2}\int_{-\sqrt{\pi^2/4-u^2}+3\pi/2}^{3\pi/2}(3+\cos v)dudv \\
&\cong 4,719\,85.
\end{aligned}
$$

Desse modo, a área da região $D_0$ é dada por

$$
\begin{aligned}
A_{\Psi(D_0)} &= A_{\Psi(D_{01})} + A_{\Psi(D_{02})} + A_{\Psi(D_{03})} \\
&\cong 5,402\,20 + 6,942\,96 + 4,719\,85 \\
&= 17,065\,01.
\end{aligned}
$$

De modo análogo aos procedimentos utilizados no cálculo da área da região $D_0$ acima, determinamos, no Apêndice A, as áreas das demais regiões de decisão de QAMS sobre $T$, estas são dadas por

$$A_{\Psi(D_1)} = A_{\Psi(D_3)} = 24,206\,61, \quad A_{\Psi(D_0)} = A_{\Psi(D_1)} \text{ e } A_{\Psi(D_4)} = 35,892\,00.$$

Em termos de porcentagem, as regiões de decisão possuem a seguinte distribuição

$$A_{\Psi(D_1)} = A_{\Psi(D_3)} = 20,438\,69\%, \quad A_{\Psi(D_0)} = A_{\Psi(D_1)} = 14,408\,72\% \text{ e } A_{\Psi(D_4)} = 30,305\,16\%.$$

## 3.6 Uniformidade da Modulação QAMS

O objetivo principal deste trabalho é construir uma modulação QAMS utilizando as ferramentas da Geometria Diferencial, independente desta ser uniforme ou não. Entretanto, as modulações uniformes correspondem aos projetos de espaços de sinais do tipo geometricamente uniforme (e.s.g.u.), os quais possuem a menor complexidade de cálculo, e portanto, são os mais visados em projetos de transmissão de sinais digitais. Na verdade, a preferência pelos espaços da forma e.s.g.u. é sempre uma prioridade, porque estes minimizam a complexidade de cálculo. Por isso o objetivo de todo projetista de uma modulação é obter o modelo uniforme ou o mais próximo deste.

Lembramos que a condição de uniformidade de uma modulação uniforme vinda de um mergulho topológico de um grafo vem da condição de que todas as suas regiões são do mesmo tipo, isto é, todas possuem o mesmo número de lados. Topologicamente, regiões com o mesmo número de lados são idênticas, no entanto, do ponto de vista da Geometria Diferencial elas não são necessariamente congruentes. Um modelo de mergulho uniforme precisa ser mais trabalhado para tornar-se um espaço de sinal sobre uma superfície do tipo e.s.g.u. Não se tem respostas para a questão da existência de solução para este problema. Este é um desafio deste trabalho.

### 3.6.1 Uniformidade sobre o modelo planar

O modelo da QAMS é sempre construído, em primeiro lugar, sobre o modelo planar da superfície e, em uma segunda etapa, é conduzido, através de uma parametrização, para o modelo espacial da superfície. No modelo planar da modulação 5-QAMS Figura 3.4.2 a), o objetivo é construir um modelo uniforme sobre o modelo espacial da modulação, ou seja, uma modulação em que todas as regiões são congruentes, uma vez que os sinais que pretendemos transmitir encontram-se sobre o modelo espacial do toro. Em princípio, optamos pela distribuição de vértices mais adequada para se obter um modelo planar uniforme.

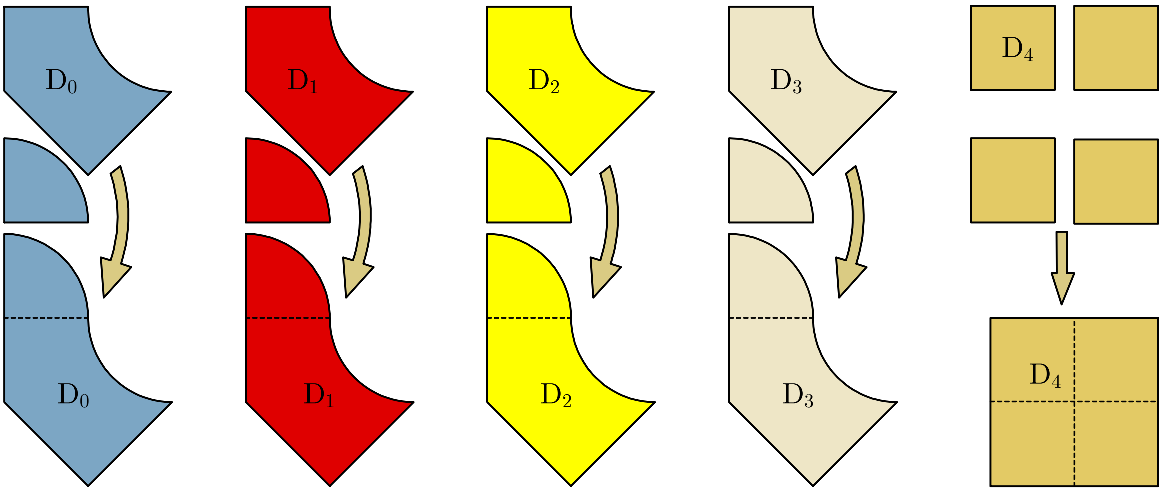



Figura 3.6.1: Formatos das regiões de decisão do modelo planar da Figura 3.4.3 a).

Aqui não tínhamos nenhuma informação sobre a uniformidade do modelo espacial da modulação. Analisando o projeto inicial da 5-QAMS na Figura 3.3.2 a), nos surpreendemos com o alto grau de uniformidade obtido, exceto a região $D_4$, todas as demais são congruentes no modelo planar, como mostra a Figura 3.6.1.

Evidente que o formato de cada região na parte inferior da Figura 3.6.1 foi obtida unindo-se as subregiões de uma mesma cor, para compor a região $D_i$. Lembramos que o modelo planar a), com a orientação sobre o polígono indicada na Figura 3.3.2 a) é, de fato, a superfície toro, e sobre esta devemos ver as subregiões de uma mesma cor como componentes de uma única região conexa. A parte superior vem de rotações das respectivas regiões do modelo planar $\Pi_p$ da Figura 3.4.3 a). Esta condição de conexidade fica bastante clara, quando observamos as regiões sobre o modelo espacial do toro, como podemos observar esta condição na Figura 3.4.2 b) e na Figura 3.4.3.

Podemos facilmente mostra que as regiões no $D_0, D_1, D_2$ e $D_3$, definidas pelas medidas adotadas pelo modelo planar $\Pi_p$ da Figura 3.3.2 a), são todas congruentes. De fato, as curvas $\gamma_2, \gamma_6, \gamma_{11}$ e $\gamma_{15}$ são arcos de circunferência de raio $\pi/2$, logo, a área da região $D_1$ é dada pela soma das regiões $A_1, A_2, A_3$ e $A_4$ ilustradas na Figura 3.6.2.

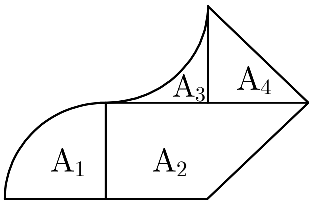



Figura 3.6.2: Região de decisão $D_1$.

Desse modo,

$$\begin{aligned} A_{D_1} &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &= \frac{1}{4}\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi/2\,(\pi + \pi/2)}{2} + \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] + \frac{\pi/2\,(\pi/2)}{2} \\ &= \frac{\pi^3}{16} + \frac{3}{8}\pi^2 - \frac{1}{16}\pi^2(\pi - 4) + \frac{1}{8}\pi^2 = \frac{3}{4}\pi^2 \cong 7,402. \end{aligned}$$

Com procedimentos análogos, deduzimos que

$$A_{D_0} = A_{D_1} = A_{D_2} = A_{D_3} \cong 7,402.$$

Além disso, a área da região $D_4$ é dada por

$$A_{D_4} = 4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \pi^2 \cong 9,869,$$

logo, é uma região diferente das demais no seu formato e em relação ao valor da área, que é maior do que as demais regiões. Consequentemente, o modelo planar de 5-QAMS só não é uniforme pelo fato da região $D_4$ ser a única região diferente das demais, mas é uma modulação de alta uniformidade. A uniformidade máxima é atingida quando as 5 regiões são congruentes, se conseguimos 4 regiões congruentes, então atingimos a maior uniformidade após a uniformidade máxima. Na verdade, não esperávamos chegar a este nível logo na primeira tentativa de construção de uma modulação QAMS.

### 3.6.2 Análise da influência da uniformidade do modelo planar sobre o modelo espacial

Analisaremos as regiões do modelo espacial, após a aplicação da equação paramétrica $\Psi(u, v)$ no modelo planar, e também verificaremos se o modelo espacial do mergulho preserva a uniformidade do modelo planar (regiões de mesma forma ou área em $\Pi_p$ devem possuir a mesma forma ou área sobre $\Pi_\varepsilon$), ou ainda, caso não preserve a uniformidade, se existe outro tipo de relação particular das regiões desse mergulho no modelo espacial.

Ao visualizar, pela primeira vez, as regiões no modelo espacial construídas a partir do mergulho $K_5$ sobre o toro de acordo com o modelo planar proposto nas Figuras 3.4.2 a) e 3.7.1 a), temos a impressão de que existem cinco regiões distintas entre si, ou seja, de início não é possível afirmar se existe uniformidade ou relação entre as regiões do modelo espacial e seu modelo planar.

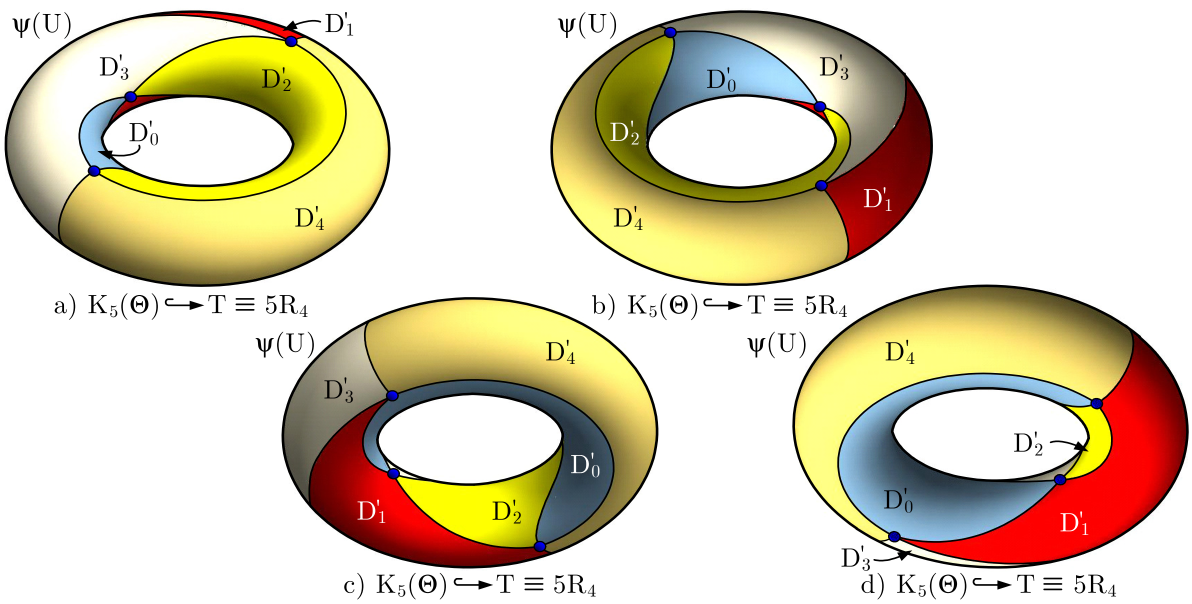



Figura 3.6.3: Modelo espacial correspondente ao modelo planar da Figura 3.4.2 a).

Note que as regiões $D'_0$, $D'_1$, $D'_2$, $D'_3$ e $D'_4$ formam o modelo espacial do mergulho, na verdade elas foram um recobrimento sobre a superfície toro. Quando vistas juntas sobre o toro, a análise das regiões, em relação ao formato, torna-se difícil de ser realizado, pois não existe possibilidade de ver todas as regiões de um só ponto de vista.

A Figura 3.6.3 mostra o modelo espacial em diversas posições, isso ajuda a ter uma ideia inicial do formato das regiões e como essas estão dispostas sobre a superfície toro.

Todavia, o recurso da visualizar em qualquer pono de vista as regiões do mergulho de $K_5$ no modelo espacial é insuficiênte para saber a influência da uniformidade obtida no modelo planar do mergulho de $K_5$ no seu respectivo modelo espacial. Por essa razão, as regiões precisam ser vistas individualmente, assim, a saída encontrada foi isolar as regiões do mergulho. Na Figura 3.6.4 temos o modelo espacial do mergulho e as regiões separadas em vários ângulos de visualização.

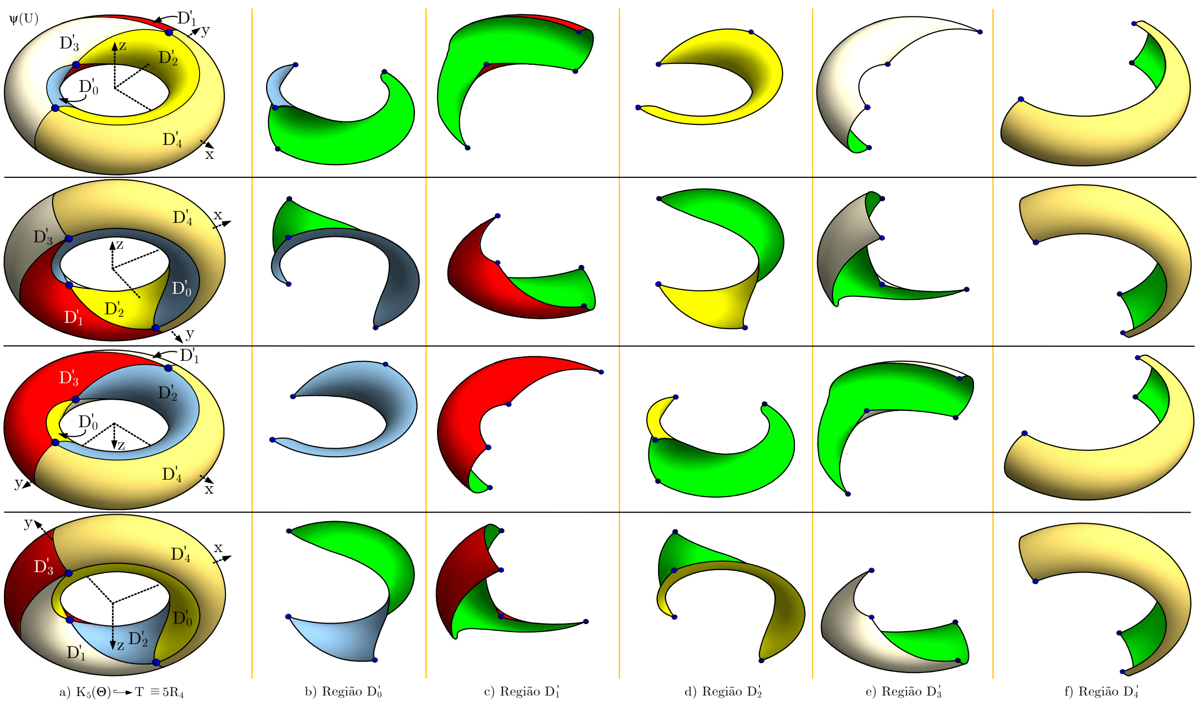



Figura 3.6.4: Regiões do mergulho de $K_5$ sobre o toro em diversas posições.

Sendo assim, separadas, o estudo das regiões é facilitado. Temos, portanto, a noção exata do formato de cada região do mergulho. A análise individual das regiões do mergulho do modelo espacial permitiu verificar algumas uniformidades particulares das regiões nesse modelo espacial.

O modelo espacial da modulação 5-QAMS sobre o toro não preserva a uniformidade obtida no modelo planar, apesar desse possuir quatro das cinco regiões congruentes. É possível perceber a não uniformidade do modelo espacial ao comparar as regiões $D_0$ e

$D_1$ na Figura 3.6.4 e perceber a distinção entre seus formatos. No entanto, descobrimos comparando todas as regiões do mergulho, uniformidades entre as regiões. Na Figura 3.6.4 as regiões $D_0$, $D_2$ e $D_1$, $D_3$ apesar de estarem em posições diferentes, possuem a mesma forma, isto é, sobre um mesmo ponto de vista, comparando as regiões $D_0$ e $D_2$, por exemplo, elas são diferentes, mas para cada posição da região $D_0$, $D_2$ tem uma região idêntica em uma posição diferente, logo podemos concluir que $D_0 = D_2$. De modo similar, também concluímos que $D_1 = D_3$.

Para ser mais específico, $D_0$ e $D_2$ são congruentes no modelo planar, a aplicação da função $\Psi$ nessas regiões as transforma em duas regiões iguais, no formato, sobre modelo espacial. Sendo assim, $D_0 = D_2 \neq D_1 = D_3 \neq D_4$, ou seja, temos 3 regiões distintas entre si no modelo espacial, um grau de uniformidade considerável, pois muitas vezes, se trabalha com todas as regiões distintas.

Na Subseção 3.5.2 aprendemos a calcular a área da região de decisão no modelo espacial. Calculando-se a área de todas as regiões do mergulho obtemos a Tabela 3.6.1.

| Região $i$ | Área $D_i$ | Área $D_i(\%)$ | Área $D'_i$ | Área $D'_i(\%)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 7,402 | 18,75 | 17,06501 | 14,40872 |
| 1 | 7,402 | 18,75 | 24,20661 | 20,43869 |
| 2 | 7,402 | 18,75 | 17,06501 | 14,40872 |
| 3 | 7,402 | 18,75 | 24,20661 | 20,43869 |
| 4 | 9,869 | 25,00 | 35,89200 | 30,30516 |

Tabela 3.6.1: Distribuição de área das regiões de decisão.

Para efeito de comparação, a Tabela 3.6.1 contém as medidas das áreas das regiões do modelo planar a) do mergulho não uniforme de $K_5$ ($2^a$ e $3^a$ colunas), e do modelo espacial b) ($4^a$ e $5^a$ colunas), da Figura 3.4.2. A medida das áreas no modelo espacial das regiões $D'_0$ e $D'_2$ são iguais, como também são iguais as medidas de $D'_1$ e $D'_3$ e estas são maiores do que as duas primeiras. A região $D'_4$ é a de maior área. Veja que no modelo planar as quatro primeiras regiões são todas congruentes, no entanto, no modelo espacial, esta uniformidade não é preservada nas quatro primeiras regiões do modelo espacial, pois estas apresentam duas medidas distintas. Constatamos então que a uniformidade do modelo planar pode não ser preservada no modelo espacial da superfície.

Após a análise nas medidas das áreas dos modelos planar e espacial da Figura 3.4.2, comprovamos que a uniformidade do modelo espacial (três regiões distintas), embora não tenha atingido o grau de uniformidade do modelo planar (somente duas distintas) a perda do grau de uniformidade não foi tão acentuado. Ocorreu somente a perda de uma unidade. Isto indica que, dependendo de como foi projetado o modelo planar, alguma uniformidade ainda pode ser transferida para o modelo espacial.

Constatamos com esta análise que podemos até ter uniformidade máxima (todas as regiões congruentes) no modelo planar do mergulho, mas nenhum tipo de uniformidade (todas regiões distintas) no modelo espacial do mergulho. Conseguir manter algum tipo de uniformidade já é uma grande vantagem apresentada no projeto do modelo planar a) da Figura 3.4.2.

Este já é um resultado satisfatório obtido no nosso primeiro teste na tentativa de conseguir uma modulação uniforme sobre o toro através da Geometria Diferencial. Atingimos um grau de uniformidade de nível médio. Neste primeiro projeto obtivemos três tipos de regiões distintas em cinco, com desvio padrão de 5.8156%.

O próximo objetivo é melhorar este resultado no sentido de construirmos uma modulação QAMS sobre o Toro do tipo e.s.g.u. O próximo modelo proposto a ser analisado, será um modelo planar com uniformidade de área máxima (todas as regiões de áreas iguais). Iremos verificar se o modelo planar dividido em regiões com a mesma área divide o modelo espacial em regiões com a mesma área embora de formas diferentes.

## 3.7 QAMS **Uniforme em Relação à Área**

Neste trabalho, o projeto de modulação QAMS é realizado sobre a superfície do toro. Se o objetivo é obter uniformidade, esta deve ser uma uniformidade sobre o modelo espacial do toro. Na nossa primeira tentativa de construir uma modulação sobre o toro, analisamos a preservação da uniformidade do modelo espacial vinda da uniformidade do modelo planar. A princípio, não sabemos como construir uma modulação uniforme sobre o modelo planar. No entanto, quanto à uniformidade de área é possível construir este tipo de modulação sobre o modelo planar. Então, para procedermos com a nossa análise, construiremos um projeto de modulação QAMS uniforme em relação à área sobre o modelo planar do toro e analisaremos a questão da preservação da uniformidade da modulação QAMS correspondente, sobre o modelo espacial.

**Definição 3.7.1** *Diremos que uma modulação* QAMS *é* uniforme em relação à área *se todas as regiões de* QAMS *possuem áreas iguais.*

Vimos que o primeiro modelo planar da Figura 3.3.2 a) tem uniformidade somente em quatro de suas regiões, todas congruentes, e, portanto todas de áreas iguais. O próximo modelo analisado, ilustrado na Figura 3.7.1 c) é, do ponto de vista da topologia, idêntico ao da Figura 3.3.2 a). Este modelo mantém a uniformidade nas quatro regiões $D_0, D_1, D_2$

e $D_3$, estas são todas congruente, ou seja, são invariantes por rotações. A região $D_4$ é a única que não é congruente as demais, porém possui a mesma área. Consequentemente o projeto c) da Figura 3.7.1 é um exemplo de modulação QAMS uniforme em relação à área usando a área do $\mathbb{R}^2$.

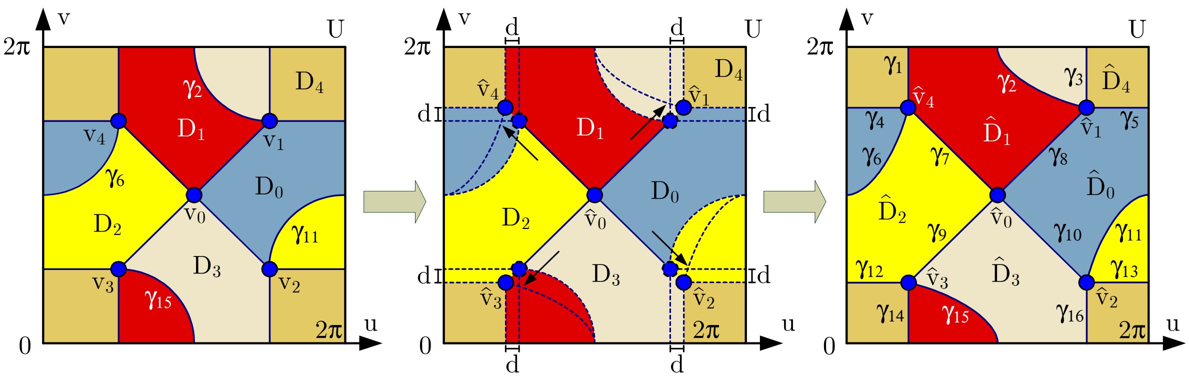
### 3.7.1 QAMS uniforme em relação à área sobre $\Pi_p$

Após a análise feita sobre a modulação não uniforme nas Seções 3.5 e 3.6, adquirimos informações de como obter uma modulação QAMS uniforme em relação à área, sobre o modelo planar do toro, a partir da QAMS apresentada na Figura 3.3.2 a).

Observamos que do ponto de vista do cálculo da área, o deslocamento de vértices de um grafo $G$ no modelo planar de um mergulho de $G$, pode afetar ou não as áreas das regiões, depende de como os lados de $G$ são alterados. Do ponto de vista da topologia, alterações nos vértices e lados de um mergulho não o afeta, continua sendo o mesmo mergulho, desde que o sistema de rotações de $G$ não seja afetado.

Então podemos fazer translações nos vértices e lados de $K_5$, sem afetar o seu sistema de rotações para obter mergulhos topologicamente iguais e de modo que a modulação QAMS seja uniforme em relação à área.

Vimos que há muitas possibilidades de escolha para as curvas que definem as fronteiras das regiões de QAMS. Poderíamos ter escolhido, a priori, retas, parábolas, elipses, circunferências ou outras curvas. No entanto, para efeito de simplificação dos cálculos utilizamos somente de retas e parábolas.



a) Modelo planar 5-QAMS b) Deslocamento dos vértices c) Modelo planar 5-QAMS uniforme

Figura 3.7.1: Método de obtenção do modelo planar uniforme da 5-QAMS.

A área da região fundamental $U$ do modelo planar é constante e igual a $4\pi^2$, sendo assim, se quisermos ter uma QAMS uniforme em relação à área, cada região de decisão

$D_i$, $i = 0, \cdots, 4$, independente da escolha das curvas de sua fronteira, deverá conter exatos $4\pi^2/5$ de área.

Para obter a modulação QAMS uniforme em relação à área, tomemos o mergulho da Figura 3.3.2 a), deslocamos, a uma distância $d$, os vértices $v_1, v_2, v_3$ e $v_4$, no sentido das diagonais do quadrado $U$, do centro para os vértices de $U$, conforme mostra o deslocamento de vértice da Figura 3.7.1 b).

No modelo planar da Figura 3.7.1 b), as coordenadas dos vértices são alteradas por um aumento ou uma diminuição de comprimento $d$ de acordo com a sua localização sobre $\Pi_p$. O problema então é encontrar uma distância $d$, conforme a Figura 3.7.1 b), e curvas correspondentes aos lados de $K_5$ após o deslocamento de vértices, de modo que as áreas das regiões $D_i$, $i = 0, \cdots, 4$, sejam todas iguais. Neste caso, é conveniente resolvemos a seguinte

**Proposição 3.7.2** *Dados os vértices $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$ no modelo planar não uniforme, encontrar uma distância $d$, conforme mostrado na Figura 3.7.1, tal que os vértices $\widehat{v}_0$, $\widehat{v}_1$, $\widehat{v}_2$, $\widehat{v}_3$, e $\widehat{v}_4$ encontrados a partir dos $v_i$, $i = 0, \cdots, 4$ dividam o modelo planar em regiões com a mesma área.*

**Demonstração.** Suponhamos que os vértices $\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \widehat{v}_3$ e $\widehat{v}_4$ tomados de acordo com a Figura 3.7.1 c) dividam o modelo planar do mergulho em regiões com a mesma área. Como os vértices $\widehat{v}_i$, $i = 0, \cdots, 4$ são formadas a partir das coordenadas dos $v_i$, conforme a Figura 3.7.1 b). Então temos, por exemplo, que o vértice $v_1 = (3\pi/2, 3\pi/2)$ sofre uma translação de comprimento $d$ em ambas as coordenadas, logo $\widehat{v}_1 = (\frac{3\pi}{2}+d, \frac{3\pi}{2}+d)$. Procedendo de modo análogo para os demais vértices, obtemos a Tabela 3.7.1.

| $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\pi, \pi)$ | $(\frac{3\pi}{2}+d, \frac{3\pi}{2}+d)$ | $(\frac{3\pi}{2}+d, \frac{\pi}{2}-d)$ | $(\frac{\pi}{2}-d, \frac{\pi}{2}-d)$ | $(\frac{\pi}{2}-d, \frac{3\pi}{2}+d)$ |

Tabela 3.7.1: Coordenadas dos vértices de $\Pi_p$ com uniformidade de área.

Desse modo, utilizamos os novos vértices para calcular a área da região $\widehat{D}_1$ mostrada na Figura 3.7.2, assim como foi feito no Apêndice A para a região $D_1$ de $\Pi_p$ não uniforme.

A área da região $\widehat{A}_1$ tem que ser calculada por uma integral, mas antes, precisamos calcular a curva $\gamma_{15}$ do tipo parábola $f(v) = av^2 + bv + c$ com o vértice em $\widehat{p}_1 = (\pi, 0)$ passando por $\widehat{p}_2 = \left(\frac{\pi}{2} - d, \frac{\pi}{2} - d\right)$. No Apêndice A justificamos a escolha da curva do tipo parábola para a construção do modelo planar uniforme em relação à área.

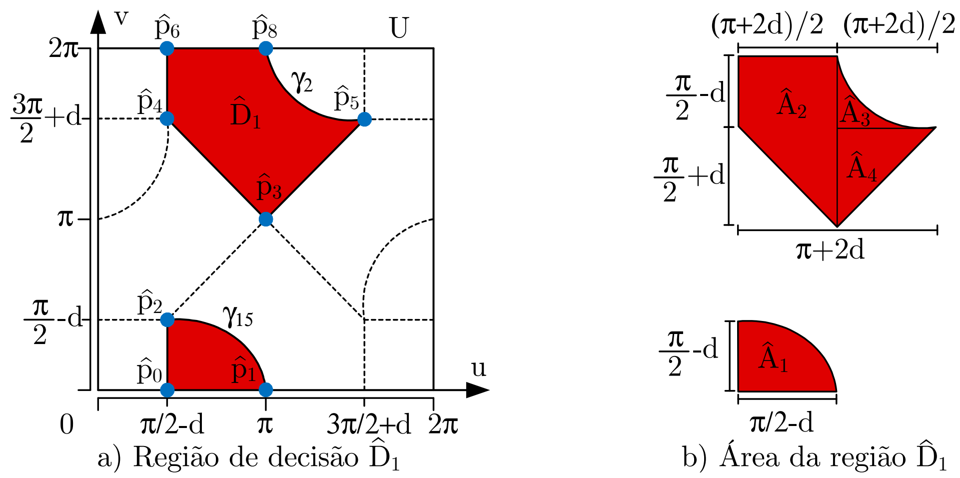



Figura 3.7.2: Cálculo da área da região $\widehat{D}_1$.

Na parábola $f(v) = av^2 + bv + c$, como $v$ é a variável independente, pelas equações $(A1.9)$, $(A1.10)$ e $(A1.11)$ da Seção A.2 temos que $u_{v_0} = 0$ e $v_{v_0} = \pi$, logo

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = 0 \\ \pi &= -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow c = \pi, \end{aligned}$$

assim,

$$f(u) = au^2 + \pi,$$

sabendo que o ponto $\widehat{p}_2$ pertence a parábola, temos

$$f(u) = au^2 + \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} - d = a\left(\frac{\pi}{2} - d\right)^2 + \pi \Rightarrow a = -\frac{(\pi/2 + d)}{(-\pi/2 + d)^2},$$

desse modo, a parábola procurada é

$$u = -\frac{(\pi/2 + d)}{(-\pi/2 + d)^2} v^2 + \pi, \tag{3.9}$$

dessa forma a área de $\widehat{A}_1$ é dada por

$$\widehat{A}_1 = \int_0^{\pi/2 - d} \left( -\frac{(\pi/2 + d)}{(-\pi/2 + d)^2} v^2 + \pi \right) dv - \left(\frac{\pi}{2} - d\right)^2 = \frac{1}{3} d^2 - \pi d + \frac{5}{12}\pi^2 - \left(\frac{\pi}{2} - d\right)^2$$

Agora, a área da região $\widehat{D}_1$ é dada por

$$\widehat{A}_{D_1} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{A}_4,$$

onde,

$$
\begin{aligned}
\widehat{A}_1 &= \frac{1}{3}d^2 - \pi d + \frac{5}{12}\pi^2 - \left(\frac{\pi}{2} - d\right)^2 \\
\widehat{A}_2 &= \frac{((\pi/2 - d) + \pi)(\pi/2 + d)}{2} \\
\widehat{A}_3 &= [(\pi/2 + d)(\pi/2 - d)] - \left(\frac{1}{3}d^2 - \pi d + \frac{5}{12}\pi^2 - \left(\frac{\pi}{2} - d\right)^2\right) \\
\widehat{A}_4 &= \frac{(\pi/2 + d)(\pi/2 + d)}{2},
\end{aligned}
$$

Devido a uniformidade do mergulho visto na Subseção 3.6.1, temos apenas dois tipos de regiões para analisar a área, ou seja,

$$
\begin{aligned}
\widehat{A}_{D_1} &= 4\pi^2/5 \\
\Rightarrow \quad -d^2 + \pi d + 3\pi^2/4 &= 4\pi^2/5 \\
\Rightarrow \quad d &= \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\sqrt{5}\pi}{5} \text{ ou } \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\sqrt{5}\pi}{5} \\
\widehat{A}_{D_4} &= 4\pi^2/5 \\
\Rightarrow \quad 4(\pi/2 - d)^2 &= 4\pi^2/5 \\
\Rightarrow \quad d &= \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\sqrt{5}\pi}{5} \text{ ou } \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\sqrt{5}\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

Se $d = \pi/2 + \sqrt{5}\pi/5$, e utilizando as coordenadas dos sinais dadas na Tabela 3.7.1, as coordenadadas dos vértices $\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \widehat{v}_3$ e $\widehat{v}_4 \notin U$. Portanto, o valor procurado é $d = \pi/2 - \sqrt{5}\pi/5$. ■

A Proposição 3.7.2 permitirá calcular as coordenadas dos novos vértices $\widehat{v}_1$, $\widehat{v}_2$, $\widehat{v}_3$ e $\widehat{v}_4$, e também as equações de novas curvas, a partir das coordenadas já conhecidas do modelo planar da Figura 3.3.2 a) dadas na Tabela 3.7.2, de maneira que todas as regiões tenham a mesma área.

| $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\pi, \pi)$ | $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ | $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ |

Tabela 3.7.2: Coordenadas dos vértices de $\Pi_p$ não uniforme em relação à de área.

A distância $d$ encontrada na Proposição 3.7.2 foi $d = \pi/2 - \sqrt{5}\pi/5$. Com esse valor de $d$, calculamos as coordenadas dos vértices $\widehat{v}_1$, $\widehat{v}_2$, $\widehat{v}_3$ e $\widehat{v}_4$. Por exemplo, vamos calcular as coordenadas de $\widehat{v}_2$ e $\widehat{v}_3$. O vértice $\widehat{v}_2$ sofre uma translação $d$ em $u$ e de $-d$ em $v$. Já o vértice $\widehat{v}_3$ sofre uma translação de $-d$ em ambas as coordenadas. Assim, efetuando os cálculos obtemos os valores das coordenadas $\widehat{v}_2$ e $\widehat{v}_3$.

$$\widehat{v}_2 = (\frac{3\pi}{2}+d, \frac{\pi}{2}-d) = \left(2\pi - \frac{\sqrt{5}\pi}{5}, \frac{\sqrt{5}\pi}{5}\right),$$

$$\widehat{v}_3 = (\frac{\pi}{2}-d, \frac{\pi}{2}-d) = \left(\frac{\sqrt{5}\pi}{5}, \frac{\sqrt{5}\pi}{5}\right).$$

Nos demais vértices, procedendo de modo similar, obtem-se o restante das coordenadas descritos na Tabela 3.7.3.

| $v_0$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\pi,\pi)$ | $(2\pi - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi, 2\pi - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi)$ | $(2\pi - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi, \frac{\sqrt{5}}{5}\pi)$ | $(\frac{\sqrt{5}}{5}\pi, \frac{\sqrt{5}}{5}\pi)$ | $(\frac{\sqrt{5}}{5}\pi, 2\pi - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi)$ |

Tabela 3.7.3: Coordenadas dos novos vértices de $\Pi_p$ uniforme em relação à área.

Os vértices tomados de acordo com a Tabela 3.7.3 dão a possibilidade de construir a QAMS uniforme em relação à área, basta apenas ter o cuidado de escolher curvas adequadas com a finalidade de garantir curvas conexas no modelo espacial. Na Figura 3.7.3 apresentamos exemplos de QAMS uniformes em relação a área. Em a) e b) as curvas $\gamma_2$, $\gamma_6$, $\gamma_{11}$ e $\gamma_{15}$ são parábolas e as demais são segmentos de reta, já em c) todas as curvas são segmentos de reta.

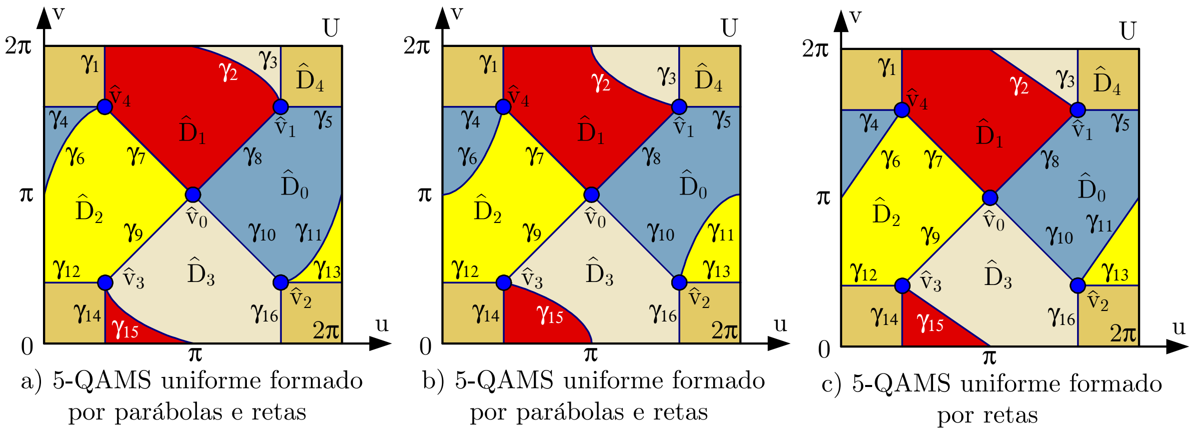



Figura 3.7.3: Modulações QAMS uniformes em relação à área sobre $\Pi_p$.

Por razões análogas aos mergulhos da Figura 3.4.2, o modelo planar parabólico e linear, ilustrado na Figura 3.7.3 b) será denominado de Projeto II da modulação 5-QAMS.

Refazendo os cálculos da área da região $D_1$, desta vez utilizando o modelo planar b) da Figura 3.7.3 e as coordenadas $\widehat{v}_1$, $\widehat{v}_2$, $\widehat{v}_3$ e $\widehat{v}_4$, tem-se que a área da região $\widehat{D}_1$ será dada por

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_{D_1} &= \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{A}_4 \\
&= \tfrac{1}{4}\pi\left(\tfrac{\sqrt{5}\pi}{5}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{\sqrt{5}}{5}\pi\right)\left(\pi + \tfrac{\sqrt{5}}{5}\pi\right) \\
&\quad + \left[\left(\pi - \tfrac{\sqrt{5}}{5}\pi\right)\tfrac{\sqrt{5}\pi}{5} - \tfrac{1}{4}\pi\left(\tfrac{\sqrt{5}\pi}{5}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{\sqrt{5}\pi}{5}\right)\left(\pi - \tfrac{\sqrt{5}\pi}{5}\right) \\
&= \tfrac{1}{20}\pi^3 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{5}\sqrt{5}\pi - \pi\right)\left(\pi + \tfrac{1}{5}\sqrt{5}\pi\right) - \tfrac{1}{20}\pi \\
&\quad - \tfrac{1}{5}\sqrt{5}\pi\left(\tfrac{1}{5}\sqrt{5}\pi - \pi\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{5}\sqrt{5}\pi - \pi\right)^2 = \tfrac{4}{5}\pi^2 \\
&\cong 7,896,
\end{aligned}$$

logo,

$$\widehat{A}_{D_0} = A_{D_1} = A_{D_2} = A_{D_3} \cong 7,896.$$

Veja também que

$$\widehat{A}_{D_4} = 4\left(\frac{\sqrt{5}\pi}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}\pi^2 \cong 7,896,$$

ou seja, todas as regiões tem a mesma área, embora a região $\widehat{D}_4$ seja diferente no formato.

Portando, nesse novo projeto aproximamos, ainda mais, do espaço de sinais geometricamente uniforme. Vale destacar, que estas são uniformidades particulares do modelo planar apenas, não sabemos ainda, se esta uniformidade será preservada no modelo espacial do toro através da parametrização, é o que iremos analisar em seguida.

### 3.7.2 Análise da QAMS uniforme em relação a área sobre o modelo espacial $\Pi_\varepsilon$

Na Subseção 3.7.1 aprendemos a construir uma modulação QAMS uniforme em relação à área sobre $\Pi_p$. Nesta seção queremos analisar a área das regiões do modelo espacial após a aplicação de $\Psi$ no modelo planar uniforme. A modulação QAMS uniforme em relação à área escolhida para análise será o modelo planar b) da Figura 3.7.3. As curvas desse modelo são todas do mesmo tipo do modelo sem uniformidade de área, com exceção de $\gamma_2$, $\gamma_6$ $\gamma_{11}$ e $\gamma_{15}$, arcos de circunferência, substituídos por parábolas. As parábolas terão vértices nos pontos $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$, $(2\pi, \pi)$ e $(\pi, 0)$ passando por $\widehat{v}_1$, $\widehat{v}_4$, $\widehat{v}_2$ e $\widehat{v}_3$ respectivamente.

O motivo que levou a optar por curvas do tipo parábola foi preservar o mergulho no modelo espacial, pois arcos de circunferência nesse modelo não garantem a existência das ligações do mergulho de $K_5$ no modelo espacial. Para mais detalhes sobre a justificativa da escolha da parábola, consultar o Apêndice A. A relação das equações das novas curvas $\gamma_k$ estão descritas na Tabela 3.7.4.

| $\gamma_k$ | Equação da curva $\gamma_k$ |
|---|---|
| $\gamma_1$ | $u=\sqrt{5}\pi/5$, se $v\in\left[2\pi-\sqrt{5}\pi/5,2\pi\right]$ |
| $\gamma_2$ | $u=-1/\pi\left(\sqrt{5}-5\right)v^2+(4\sqrt{5}-20)v+21\pi-4\sqrt{5}\pi$, se $v\in\left[2\pi-\sqrt{5}\pi/5,2\pi\right]$ |
| $\gamma_3$ | $u=2\pi-\sqrt{5}\pi/5$, se $v\in\left[2\pi-\sqrt{5}\pi/5,2\pi\right]$ |
| $\gamma_4$ | $v=2\pi-\sqrt{5}\pi/5$, se $u\in\left[0,\sqrt{5}\pi/5\right]$ |
| $\gamma_5$ | $v=2\pi-\sqrt{5}\pi/5$, se $u\in\left[2\pi-\sqrt{5}\pi/5,2\pi\right]$ |
| $\gamma_6$ | $v=-1/\pi\left(\sqrt{5}-5\right)u^2+\pi$, se $u\in\left[0,\sqrt{5}\pi/5\right]$ |
| $\gamma_7$ | $v=-u+2\pi$, se $u\in\left[\sqrt{5}\pi/5,\pi\right]$ |
| $\gamma_8$ | $v=u$, se $u\in\left[\pi,2\pi-\sqrt{5}\pi/5\right]$ |
| $\gamma_9$ | $v=u$, se $u\in\left[\sqrt{5}\pi/5,\pi\right]$ |
| $\gamma_{10}$ | $v=-u+2\pi$, se $u\in\left[\pi,2\pi-\sqrt{5}\pi/5\right]$ |
| $\gamma_{11}$ | $v=1/\pi\left(\sqrt{5}-5\right)u^2+\left(20-4\sqrt{5}\right)u+4\sqrt{5}\pi-19\pi$, se $u\in\left[2\pi-\sqrt{5}\pi/5,2\pi\right]$ |
| $\gamma_{12}$ | $v=\sqrt{5}\pi/5$, se $u\in\left[0,\sqrt{5}\pi/5\right]$ |
| $\gamma_{13}$ | $v=\sqrt{5}\pi/5$, se $u\in\left[2\pi-\sqrt{5}\pi/5,2\pi\right]$ |
| $\gamma_{14}$ | $u=\sqrt{5}\pi/5$, se $v\in\left[0,\sqrt{5}\pi/5\right]$ |
| $\gamma_{15}$ | $u=1/\pi\left(\sqrt{5}-5\right)v^2+\pi$, se $v\in\left[\sqrt{5}\pi/5,\pi\right]$ |
| $\gamma_{16}$ | $u=2\pi-\sqrt{5}\pi/5$, se $v\in\left[0,\sqrt{5}\pi/5\right]$ |

Tabela 3.7.4: Equações das curvas $\gamma_k$ do modelo planar uniforme da Figura 3.7.3 c).

Conhecendo as equações $\gamma_k$ definidas na Tabela 3.7.4 do modelo planar uniforme, calculamos as áreas das regiões $\widehat{D}_i'$, conforme descrito na Subseção 3.5.2.

A análise das áreas das regiões do modelo espacial da modulação QAMS uniforme em relação à área na Tabela 3.7.5, permite afirmar que, o modelo espacial não conserva a uniformidade de área do modelo planar. O resultado esperado era uniformidade de área em todas as regiões do modelo espacial embora tivessem formas diferentes. No entanto, quando calculamos o desvio padrão das áreas do $\Pi_\varepsilon$ vindo do modelo planar uniforme cujo valor é $3,65382\%$, nota-se significativa redução ao ser comparado com o desvio padrão do $\Pi_\varepsilon$ do modelo não uniforme que é $5,8156\%$. A área das regiões de decisão no modelo planar, e também do modelo espacial são mostrados na Tabela 3.7.5.

O desvio padrão de um e.s.g.u. é zero, quanto mais próximos desse valor, mais perto estaremos de obtê-lo. Por conseguinte, a modulação QAMS uniforme em relação à área sobre $\Pi_p$ tem desvio padrão menor, logo mais próximo de zero, por isso é melhor do que o projeto anterior sem uniformidade. O resultado aqui descoberto é de interesse já que a uniformidade de área do modelo planar pode melhorar a uniformidade de área sobre o toro.

A quantidade de regiões $\widehat{D}'_i$ distintas em termos de área da QAMS uniforme em relação à área é outro ponto importante. Das cinco regiões, têm-se somente três valores diferentes para a área divididos do seguinte modo: $\widehat{D}'_0 = \widehat{D}'_2$, $\widehat{D}'_1 = \widehat{D}'_3$ e $\widehat{D}'_0 \neq \widehat{D}'_1 \neq \widehat{D}'_4$ conforme observado na Tabela 3.7.5. O modelo planar sem uniformidade de área tem essa mesma característica de distinção e quantidade entre as áreas, porém com os outros valores.

| Região $i$ | Área $\widehat{D}_i$ | Área $\widehat{D}_i(\%)$ | Área $\widehat{D}'_i$ | Área $\widehat{D}'_i$ (%) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 7,896 | 20 | 18,58553 | 15,69256 |
| 1 | 7,896 | 20 | 26,01720 | 21,96744 |
| 2 | 7,896 | 20 | 18,58553 | 15,69256 |
| 3 | 7,896 | 20 | 26,01720 | 21,96744 |
| 4 | 7,896 | 20 | 29,22980 | 24,67998 |

Tabela 3.7.5: Área das regiões de decisão do modelo planar com uniformidade de área.

Portanto, a uniformidade das regiões no modelo planar do mergulho, não implica uniformidade no modelo espacial. Ambos os modelos espaciais não preservam a uniformidade de seus modelos planares, ou seja, dividir o modelo planar em regiões de mesmo formato ou áreas iguais, não é o bastante para garantir um mergulho do tipo e.s.g.u. no modelo espacial $\Pi_\varepsilon$. Esse resultado motivou a seguinte questão: existe uma maneira de dividir o modelo planar do mergulho em regiões congruentes de tal modo que essa congruencia seja preservada no modelo espacial, ou seja, um modelo espacial uniforme? Não conseguimos um modelo do tipo e.s.g.u., porém chegamos mais próximo do projeto almejado quando utilizamos uma QAMS uniforme em relação à área. As discursões a respeito da construção de um modelo espacial do tipo e.s.g.u. vindo do mergulho de um grafo $G$ serão discutidas no Capítulo 5.

## 3.8 Considerações

Dado um modelo topológico de um mergulho de um grafo $G$ sobre o toro, vimos que sempre é possível construir o projeto de modulação QAMS sobre o toro utilizando ferramentas da Geometria Diferencial. O processo consiste em construir o mergulho sobre e modelo planar, utilizando curvas diferenciáveis, com o objetivo de facilitar o cálculo dos elementos da modulação (área de regiões de decisão). A equação paramétrica transfere, de forma natural, o modelo planar do mergulho para o modelo espacial do mergulho sobre o toro. Como o projeto inicial do mergulho planar encontra-se a nível de topologia, este processo permite que escolhamos adequadamente os componentes da modulação: curvas que definem as fronteiras (lados do grafo $G$) das regiões de decisão (regiões do mergulhos $G \hookrightarrow \Omega$) e a posição dos sinais (vértices de $G$) a serem utilizados no mergulho. Definido o modelo planar do mergulho de $G$, uma equação paramétrica do toro o conduz, de forma única, para a superfície do toro. Portanto, cada modelo fixo de um mergulho tem-se uma modulação QAMS sobre o toro definida univocamente. O método de construção aqui desenvolvido é importante, pois permite projetar qualquer modulação via Geometria diferencial e não se restringe ao toro, ele pode ser expandido para outras superfícies, desde conhecida a equação paramétrica e o modelo topológico do mergulho.

Outro ponto importante a ser destacado é o efeito causado pela uniformidade do modelo planar sobre o modelo espacial. Como visto nas Seções 3.6 e 3.7, o modelo planar uniforme (forma ou área) não é condição suficiente para garantir uniformidade sobre o modelo espacial. Na Figura 3.3.2 a) e na Figura 3.7.3 c), temos modelos planares com um alto grau de uniformidade. O primeiro modelo possui quatro das cindo regiões congruentes, o segundo modelo idêntico ao primeiro distinto somente quanto à área das regiões, todas tem a mesma área, contudo os seus modelos espaciais não preservam as uniformidades obtidas. Lembramos que sobre o modelo planar a uniformidade encontrada não é única, existem outras maneiras de obter uniformidade, basta escolher outras curvas como arcos de circunferência, parábolas ou retas.

Na construção do projeto topológico do mergulho visamos a uniformidade, após inúmeros tentativas para obter um modelo espacial uniforme surge a seguinte questão: existe uma modulação uniforme sobre o toro? Chega-se até a pensar que não existe tal modulação uniforme, ou seja, não é possível obter o projeto de modulação do tipo e.s.g.u. vindo do mergulho de $K_5$ sobre $T$. As modulações uniformes sobre o modelo espacial, caso existam são raras, até é possível conseguir diversas modulações uniformes no modelo planar, mas na superfície nem sempre essa uniformidade é preservada. Por isso, se quisermos projetar uma modulação QAMS na superfície, temos de trabalhar com projetos de modulações o mais uniforme possível. Por causa da dificuldade de achar um projeto de modulação do tipo e.s.g.u., optamos por trabalhar com os modelos planares propostos, pois esses foram os projetos mais próximos da uniformidade pretendida.

Finalmente, após seguir todas as etapas do processo de construção, ganhamos com isso controle das regiões de decisão, das coordenadas dos sinais, das curvas, da área de cada região de decisão, temos uma função que leva o mergulho do modelo planar para o espacial, também é possível fazer o caminho inverso, se temos as informações da modulação sobre o toro, também temos a informação sobre o modelo planar, com todas essas informações é possível analisar essas modulações conforme veremos no Capítulo 4. Não é complicado projetar uma modulação uniforme na superfície como veremos no Capítulo 5.

Capítulo 4

# Projetos de Demoduladores

Modulações não-lineares foram propostas por Wozencraft [37]. Nessa, a modulação é associada a uma variedade Riemanniana bidimensional ou superfície. Foi comprovado por Cavalcante [6], que modulações sobre superfícies têm, em geral, melhor desempenho do que as suas modulações equivalentes no espaço Euclidiano. Por essa razão, quando o objetivo a ser alcançado na proposta de novas modulações é o melhor desempenho, então o estudo de modulações sobre superfícies deve ser considerado.

De modo geral a área referente ao ruído de um sinal $s_i$ é tomado como sendo o disco aberto $\delta_{r_i}(s_i)$ de raio $r_i$ centrado no ponto $s_i \in \Omega$, de tal modo que $\delta_{r_i}(s_i) \cap \delta_{r_j}(s_j) = \varnothing$, para todo $i \neq j$.

Em um projeto de modulação $\Xi$ sobre o espaço métrico $(\Omega, d)$, o objetivo é otimizar a utilização de $\Omega$, através de uma distribuição dos sinais, de maneira que a soma das áreas dos discos abertos $\delta_{r_i}(s_i)$, $\Sigma_i A_{\delta_{r_i}}(\Xi)$ seja máxima dada que a energia média da constelação de sinais seja mantida.

**Definição 4.0.1** *Dados os projetos de modulação $\Xi_1$ e $\Xi_2$ com o mesmo número de sinais sobre o espaço métrico $(\Omega, d)$, diremos que a modulação $\Xi_2$, em relação $\Xi_1$,* subestima *o espaço $\Omega$, se $\Sigma_i A_{\delta_{r_i}}(\Xi_2) < \Sigma_i A_{\delta_{r_i}}(\Xi_1)$.*

Apesar da sua comprovada eficiência das modulações lineares, devemos saber que essas modulações tendem a subestimar o espaço métrico $(\Omega, d)$, no sentido de não utilizar integralmente a sua área. Em geral, nas modulações lineares, a projeção do ruído no espaço $\Omega$ restringe a modulação a uma área particular, deixando de utilizar parte significativa do espaço $\Omega$.

Considerando que o ruído atua numa área circular do espaço, a Figura 4.0.1 mostra duas condições onde a modulação subestima a área do espaço.

Observe, na Figura 4.0.1, que as modulações a) e b) têm o mesmo número de sinais e encontram-se sobre o mesmo espaço $\Omega$, porém $\Sigma_i A_{\delta_{r_i}}(b) < \Sigma_i A_{\delta_{r_i}}(a)$, logo em relação à modulação em a), a área do espaço $\Omega$ é subestimada pela modulação em b). Na modulação não-linear em c), note que ocorreu interferência entre os sinais $s_0$ e $s_2$, condição geralmente evitada em projeto de modulação, então esta interferência é evitada diminuindo o raio $r_0$ e $r_2$ como mostra a modulação em d). Assim, $\Sigma_i A_{\delta_{r_i}}(d) < \Sigma_i A_{\delta_{r_i}}(c)$ e novamente temos que, em relação modulação em c) a área do espaço $\Omega$ é subestimada pela modulação em d).

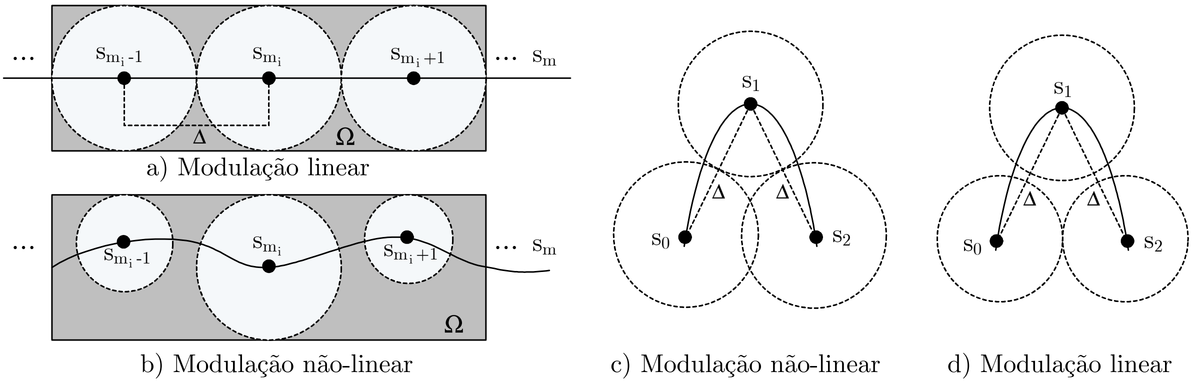



Figura 4.0.1: Exemplos de modulações mostrando a subestimação do espaço.

Observe, na Figura 4.0.1, que a área total dos discos associados ao ruído, $\Sigma_i A_{\delta_{r_i}}(\Xi)$, é sempre menor que a área de $\Omega$, qualquer que seja a modulação sobre $\Omega$, pois $\Sigma_i A_{\delta_{r_i}}(\Xi)$ é dada por discos que não se interceptam, e portanto não recobrem o espaço $\Omega$, uma vez que estamos considerando modulações com mais de um sinal.

Nas modulações $m$-QAMS o sinal $s_i$ da constelação $\{s_1, \cdots, s_m\}$ pertence a região de decisão $R^i_{\alpha_i}$ da partição $\cup_{i=1}^m R^i_{\alpha_i}$ sobre $\Omega$. Como o espaço métrico $(\Omega, d)$ munido da partição $\cup_{i=1}^m R^i_{\alpha_i}$ é um espaço de Hausdorff, então $R^i_{\alpha_i} \cap R^j_{\alpha j} \neq \varnothing$ e $\cup_{i=1}^m R^i_{\alpha_i} = \Omega$, e portanto, a soma das áreas das regiões $R^i_{\alpha_i}$ é igual a área de $\Omega$, isto é,

$$\Sigma_i A_{\delta_{r_i}}(\Xi) < \Sigma_i A_{R^i_{\alpha_i}}(\Xi),$$

onde $A_{R^i_{\alpha_i}}$ é a área da região $R^i_{\alpha_i}$. No campo das hipóteses, a modulação $m$-QAMS otimiza melhor a área do espaço métrico $(\Omega, d)$. Sob este aspecto podemos afirmar que o desempenho da modulação $m$-QAMS é superior à modulação linear. Além do mais, na modulação QAMS temos mais liberdade de escolha da distribuição dos sinais.

Os comentários acima mostram que devemos investir no desenvolvimento de projetos de modulações QAMS's. No entanto, vimos no Capítulo 3, que as modulações QAMS encontram-se sobre superfícies, em particular, estamos projetando uma QAMS sobre o toro. Inicialmente, iremos utilizar um demodulador por verossimilhança para testar a eficiência da modulação QAMS.

## 4.1 A Constelação de Sinais de QAMS

No Capítulo 3 construímos um projeto topológico de uma modulação 5-QAMS sobre o toro, composta por 5 regiões quadrangulares, utilizando a Geometria Direferencial para definir precisamente as regiões de decisão dos sinais da modulação (veja Figura 3.4.2). Obviamente que se trata de uma modulação para um constelação de 5 sinais. Seja $\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ a constelação de sinais utilizada nesta modulação 5-QAMS, onde $s_i$ é o sinal que se encontra na região de decisão $D_i$.

De modo geral, o demodulador por verosimilhança, no modelo planar $\Pi_p$, restringe a área da região de decisão $D_i$ do sinal $s_i$, a um círculo $\delta_{r_i}(s_i)$ de raio $r_i$ e centro $s_i$ contido na região de decisão $D_i$: quanto maior for o valor de $r$ para uma energia média constante, maior será a eficiência de QAMS. Então, o objetivo é maximizar $r$ para obter a modulação QAMS mais eficiente. O fato de utilizar um círculo torna o processo de cálculo do sinal transmitido mais simples, pois não se têm regiões circulares e não é possível recobrir a região quadrangular de $\Pi_p$ por círculos tangentes. Assim a ação do demodulador por verosimilhança resume-se em calcular a distância entre o sinal transmitido $s_i$ e o sinal recebido $\widehat{s}$, $\|\widehat{s} - s_i\|$, e comparar com $r$: se $\|\widehat{s} - s_i\| < r$ o demodulador decidirá que o sinal transmitido foi $s_i$, caracterizando um acerto por parte do decodificador; caso contrário, se $\|\widehat{s} - s_i\| \geq r$, então o decodificador decide que o sinal enviado não foi $s_i$, o que caracteriza um erro de transmissão do sinal $s_i$.

## 4.2 Constelação de Sinais sobre $\Pi_p$

Apesar das regiões de decisão de uma modulação QAMS sobre $\Pi_p$ serem poligonais, os lados das regiões de decisão nem sempre são segmentos de retas. Na verdade, uma região de decisão sobre $\Pi_p$ é quase sempre não uniforme, uma vez que os lados do polígono podem ser formados por qualquer tipo de curva diferenciável. Então o primeiro problema a enfrentar é alocar os sinal $s_i$ na região $D_i$ de maneira que o disco $\delta_{r_i}(s_i)$ tenha o maior raio $r_i$ possível. Como as regiões de decisão $D_i$ de 5-QAMS no modelo da Figura 3.3.2 são formados por segmentos de retas e arcos de circunferência, conseguimos, para cada $s_i$, determinar um disco $\delta_{r_i}(s_i)$. Neste caso, as coordenadas dos sinais de 5-QAMS, na notação de pontos flutuantes, são dadas por

$$s_0 = (5.099, 3.778)\,, s_1 = (2.505, 5.099)\,, s_2 = (1.183, 2.504)\,, s_3 = (3.78, 1.18)\,, s_4 = (0, 0)$$

e os discos de cada sinal são dados por:

$$\delta_{r_0}(s_0) = \delta_{r_1}(s_1) = \delta_{r_2}(s_2) = \delta_{r_3}(s_3) = \delta_{0,93225}(s_0) \text{ e } \delta_{r_4}(s_4) = \delta_{\pi/2}(s_4)\,.$$

Observe, na Figura 4.2.1 a), a posição das coordenadas dos pontos referentes aos sinais de 5-QAMS no modelo planar $\Pi_p$.

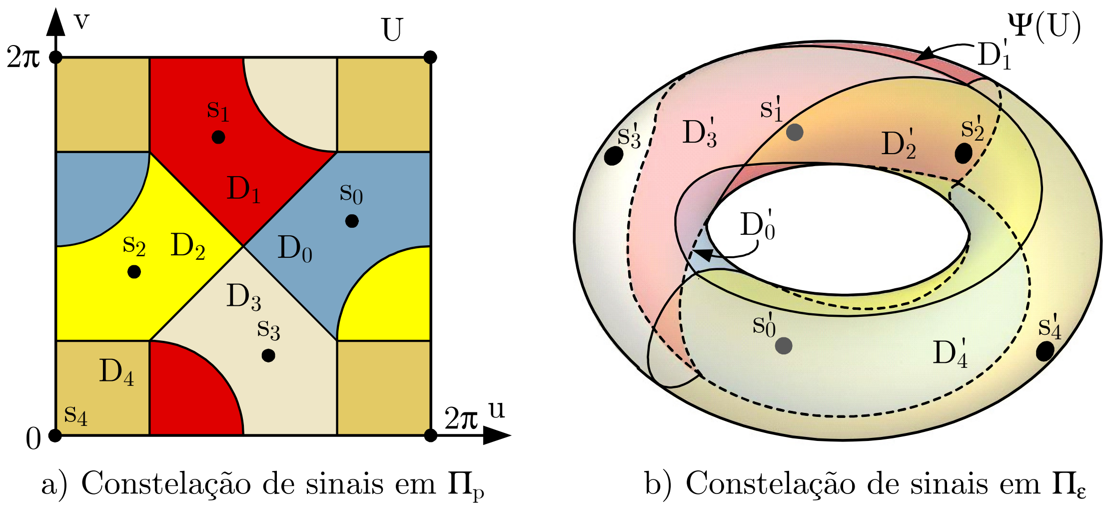



Figura 4.2.1: Constelação de sinais definidas nos modelos planar $\Pi_p$ e espacial $\Pi_\varepsilon$.

## 4.3 Constelação de Sinais sobre $\Pi_\varepsilon$

Depois de definir a constelação em $\Pi_p$, calculamos as coordenadas dos sinais e a imagem dos discos $\delta_{r_i}(s_i)$ sobre $\Pi_\varepsilon$ pela parametrização $\Psi(U)$. As coordenadas dos sinais $s_i' = \Psi(s_i)$, $i = 0, \cdots, 4$, no modelo espacial serão utilizadas no processo de demodulação. Na Figura 4.2.1 b) podemos ver a posição dos sinais da constelação definida no modelo espacial a partir do modelo planar a).

As coordenadas dos sinais dos projetos de modulação na superfície toro se encontram no Apêndice B. A seguir, vamos tratar da transmissão e processamento do sinal recebido $\widehat{s}$.

## 4.4 O Modelo do Sistema

O modelo do sistema proposto para nossa análise de desempenho é constituído pelo modulador, canal e demodulador. Na modulação, um sinal $s_i$ é selecionado aleatoriamente, com igual probabilidade de escolha para todos os sinais da constelação, para ser transmitido pelo canal. Se a constelação possui $m$ sinais, então a probabilidade de um sinal qualquer se selecionado é igual a $1/m$, isto é, os sinais são equiprováveis.

Na entrada do canal temos o sinal escolhido $s_i$ que durante a transmissão sofre a ação do ruído. O ruído pode ser caracterizado como informações indesejadas que distorcem a informação original e pode, até mesmo, ocasionar um erro no processo de demodulação. Desse ponto em diante assumimos que o canal seja sempre perturbado pelo ruído Gaussiano branco aditivo (AWGN).

Logo após o sinal $s_i$ passar pelo canal, o demodulador recebe o sinal ruidoso $\widehat{s_i} = s_i + n_w$, o qual é formado pelo sinal original $s_i$ somado ao ruído $n_w$. Neste momento, o demodulador irá decidir, através de uma regra de decisão, qual sinal foi enviado e, irá associar o mesmo a um sinal $s_j$ da constelação de sinais, a partir do sinal recebido $\widehat{s_i} = s_i + n_w$, ou seja, o demodulador irá estimar $\widehat{s_i}$, sendo que o sinal $s_i$ foi enviado e retorna o sinal $s_j$. Depois de passar por essas etapas, no final do processo comparamos o sinal enviado $s_i$ e o sinal estimado pelo demodulador $s_j$. Se $i = j$, o demodulador acertou na decisão, caso contrário, se $i \neq j$ ocorreu um erro. Na Figura 4.4.1, temos o diagrama de blocos, onde temos os três principais componentes do sistema.

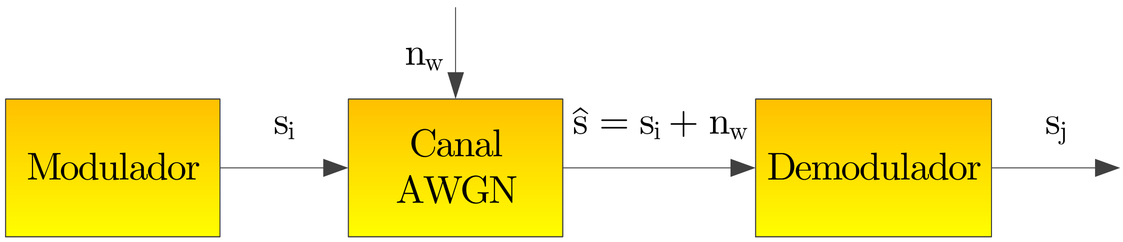



Figura 4.4.1: Diagrama de blocos simplificado do canal do sistema de transmissão.

O erro acontece quando o sinal transmitido é diferente do sinal estimado. Se dois sistemas fazem a mesma quantidade de transmissões $Q_T$ e a quantidade de erros $Q_e$ cometidos de um deles é menor, então o que cometeu menos erros será melhor. Sendo assim, quanto menor for a quantidade de erros, mais eficiente será esse sistema. Logo, a quantidade de erros ocorridos no sistema é de interesse, pois irá fornecer a medida de desempenho do sistema chamada de probabilidade de erro $p_e \in [0, 1]$, que é a razão entre a quantidade de erros e a quantidade de transmissões realizadas, assim

$$p_e = \frac{Q_e}{Q_T},$$

onde, $Q_e$ é a quantidade de erros e $Q_T$ é o total de transmissões.

Portanto, se quisermos melhorar o desempenho de um sistema, devemos diminuir sua $p_e$. Antes de passarmos às simulações, é preciso entender o comportamento do ruído branco e como este afeta constelação de sinais.

### 4.4.1 Influência do ruído AWGN na constelação de sinais

Determinada a constelação de sinais sobre o modelo planar e espacial, é necessário estudar os efeitos que o ruído branco aditivo de natureza Gaussiana causa a essa constelação. Na Figura 4.4.2 temos a constelação sob a ação do ruído branco no modelo planar a) e espacial b) os quais correspondem aos sinais recebidos pelo demodulador.

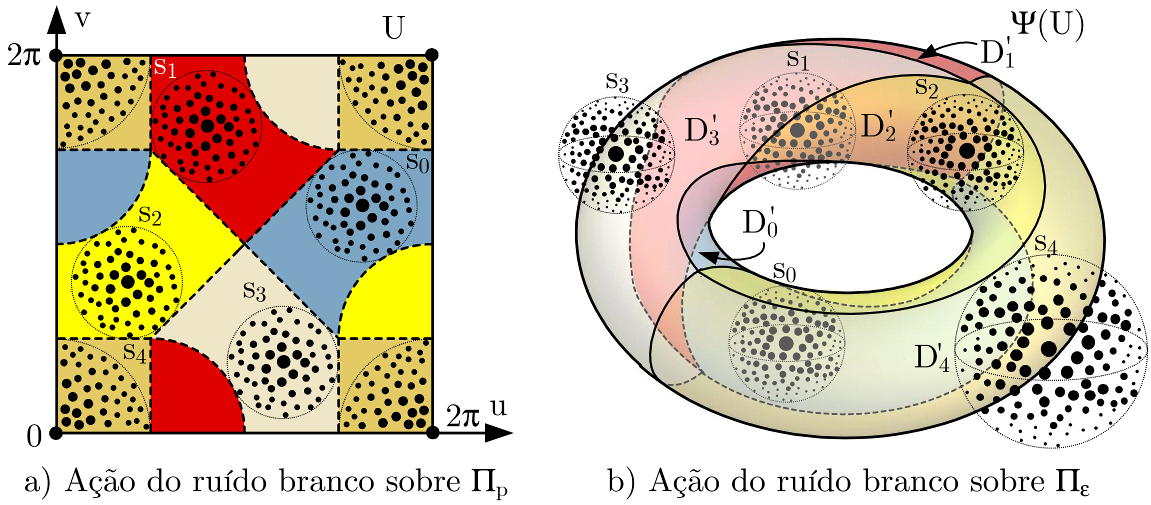



Figura 4.4.2: Ruído branco na constelação de sinais sobre os modelos planar e espacial.

Na constelação de sinais sobre os modelos $\Pi_p$ e $\Pi_\varepsilon$ apresentadas na Figura 4.4.2, os sinais recebidos estão concentrados em torno das coordenadas dos sinais, os quais representam o resultado das transmissões da constelação de sinais em um meio perturbado pelo ruído Gaussiano branco.

Ao analisar a distribuição dos sinais recebidos sob a ação do ruído Gaussiano branco, no modelo planar a) da Figura 4.4.2, vemos que a região no plano onde há ocorrência de sinais recebidos formam um círculo (representação do ruído), por isso, para minimizar a ação do ruído sobre o sistema, deve-se determinar o disco $\delta_{r_i}(s_i) \subset D_i$, tal que este seja o maior possível. Na Figura 4.4.2 tem-se a distribuição desejada dos sinais no modelo planar para cinco sinais, um para cada região, onde o sinal $s_i$ está alocado no centro do círculo contido na região $D_i$, que é o procedimento de praxe. Contudo, nosso interesse é verificar a ação do ruído branco sobre o modelo espacial.

No modelo espacial b) os sinais recebidos estão dispostos em forma de esfera, neste caso, para minimizar a ação do ruído, devemos determinar a esfera de centro $s_i$ e raio $r_i$, tal que $r_i$ seja o maior possível. De preferência $r_i$ tangente as curvas da região $D'_i$. O raio $r_i$ será utilizado no processo de simulação, pois com o valor do raio $r_i$ é possível determinar a probabilidade de erro da região $\Psi\,(D_i) = D'_i$.

Outro modo de visualizar o comportamento do ruído sobre a constelação é com o auxílio do MATLAB. Por exemplo, realizando 1000 transmissões do sinal $s_0$ para diferentes valores da relação sinal ruído (SNR - do inglês *signal-to-noise ratio*) sobre o modelo planar. Os resultados das transmissões são vistos na Figura 4.4.3.

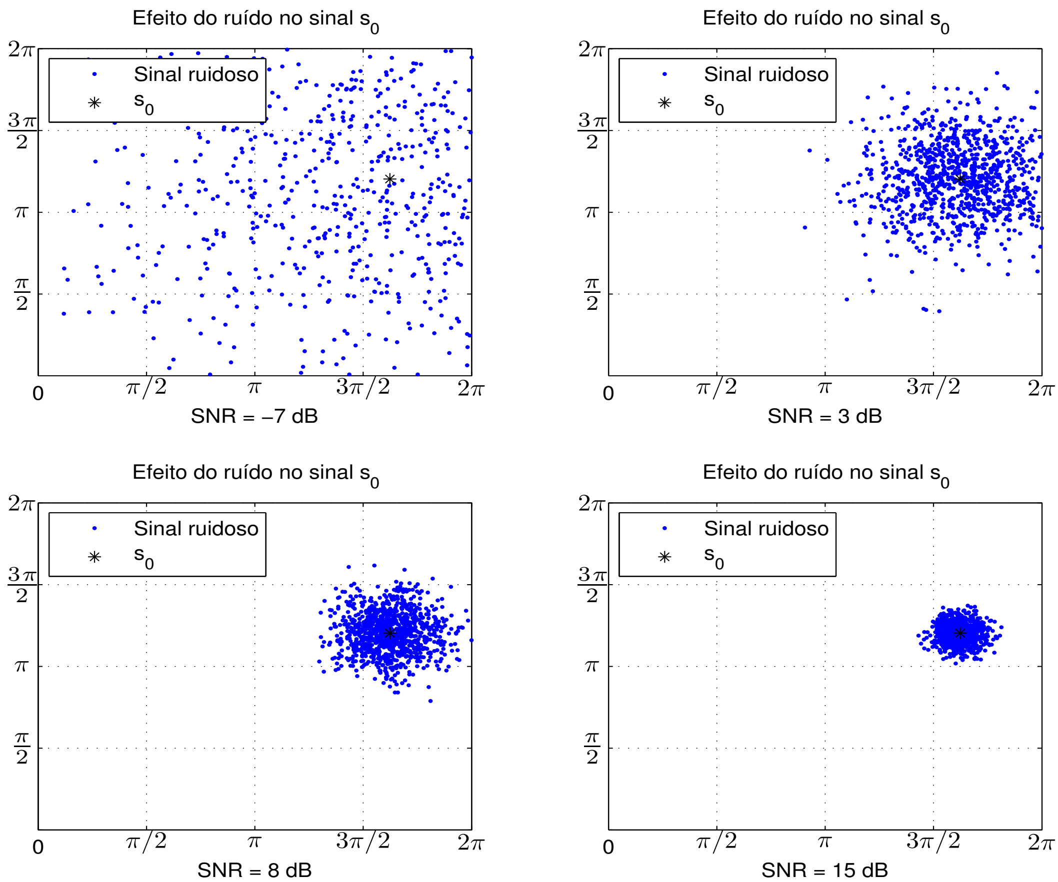



Figura 4.4.3: Representação do ruído branco no plano.

Analisando a representação do ruído branco na Figura 4.4.3 sobre o sinal $s_0$, podemos observar que, conforme o valor da SNR aumenta, a concentração dos sinais recebidos é maior em torno do sinal $s_0$, isto é, os sinais recebidos tendem a ficarem bem próximos uns dos outros e em torno de $s_0$.

O valor da SNR está relacionado com a energia do sinal presente no canal. Se a energia diminui, o valor da SNR diminui e isso, significa que os sinais tendem a ficar muitos distantes do sinal enviado. Caso contrário, se a energia do sinal aumenta, a SNR aumenta e os sinais tendem a ficar, cada vez mais próximos, do sinal original. Para uma

SNR de $-7\,\text{dB}$, conforme visto na Figura 4.4.3, os pontos estão bastante dispersos sobre o modelo planar e podem ser facilmente confundidos com os outros sinais da constelação. Nesse caso, a quantidade de erros por parte do demodulador é maior e, consequentemente a probabilidade de erro $p_e$ também. Do mesmo modo, para a SNR $= 15\,\text{dB}$, na Figura 4.4.3, a quantidade de erros é mínima no processo de demodulação, uma vez que, os sinais estão próximos do sinal enviado. Neste caso, o valor da SNR permitirá medir o desempenho das modulações. Por exemplo, fixado um valor da SNR e efetuando certa quantidade de transmissões, pode-se contabilizar a quantidade de erros e calcular a $p_e$.

A fim de comparar os resultados das simulações fixamos um intervalo $I = [a, b]$ dos valores que a SNR irá assumir, onde $a$ corresponde ao valor da SNR em que $p_e$ é próxima de 0 e $b$ corresponde ao valor da SNR em que $p_e$ é próxima de 1. Após os comentários sobre o modelo do sistema, representação do ruído branco e a medida de desempenho, passaremos agora as simulações e os resultados obtidos.

## 4.5 Simulações e Resultados

Voltando ao objetivo da Seção 4.4, devemos então determinar a probabilidade de erro $p_e$ do sistema de transmissão para um determinado valor fixo da relação sinal ruído SNR e para uma certa quantidade de transmissões deste sinal. Antes de definir o simulador, são necessários alguns conceitos que serão utilizados no processo de simulação os quais serão descritos a seguir.

Suponhamos que $M_T$ seja a matriz de ordem $m \times 1$, tal que a $i$-ésima linha de $M_T$ é composta por $n_T^i$ transmissões de um sinal $s_i$ da constelação $A = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ da modulação 5-QAMS. Denominado $M_T$ por *matriz de transmissão*, esta assume a seguinte forma

$$M_T = \begin{bmatrix} n_T^1 \\ n_T^2 \\ \vdots \\ n_T^m \end{bmatrix}_{m \times 1}. \tag{4.1}$$

A matriz $M_T$ em (4.1) indica a transmissão de $m$ blocos de $n_T$ sinais transmitidos, o que corresponde a um total $T_T$ de transmissões, isto é,

$$T_T = m n_T. \tag{4.2}$$

A quantidade de erros cometidos a cada $n_T$ transmissões em todas as $m$ linhas de

$M_T$ irá gerar a *matriz de erros* $M_e$ da forma

$$M_e = \begin{bmatrix} n_e^1 \\ n_e^2 \\ \vdots \\ n_e^m \end{bmatrix}_{m\times 1}, \tag{4.3}$$

onde $n_e^i$ é a quantidade de erros a cada $n_T$ transmissões na $i$-ésima linha de $M_T$. O *erro médio* $T_e$ será dado portanto pelo somatório dos erros de cada linha de $M_e$, isto é,

$$T_e = \frac{\sum_{i=1}^m n_e^i}{m}. \tag{4.4}$$

Desse modo, a *probabilidade de erro* $p_e$ dos sinais transmitidos é dado por

$$p_e = \frac{T_e}{n_T} = \frac{\sum_{i=1}^m n_e^i}{mn_T} = \frac{\sum_{i=1}^m n_e^i}{T_T},$$

onde $n_T$ introduzido no denominador de $T_e$ em (4.4) é um fator de normalização.

## 4.6 Estimador/Receptor

Nesta seção o simulador será descrito detalhadamente, analisado as melhores opções para as escolhas de seus parâmetros e feito testes de validações e análises de desempenho da probabilidade de erro de transmissão através da modulação 5-QAMS.

De modo geral, as implementações das modulações propostas neste trabalho, estão baseadas nas rotinas computacionais de um algoritmo gerado por funções matemática bem definidas. Evidentemente que dependendo da modulação, este algoritmo pode sofrer pequenas modificações. Mas basicamente as modulações forma implementadas através do seguinte Algoritmo:

**Algorítmo 4.6.1** *Dado uma relação de sinal ruído* SNR *pertencente ao conjunto* $P_{I=[a,b]}$, *a curva de desempenho do sinal* $s \in \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ *de uma modulação* 5-QAMS *do toro, com probabilidade de erro* $p_e$, *será obtido através do seguinte algoritmo:*

Entrada:

1. $P_{I=[a,b]} = [a, a+\Delta s, a+2\Delta s, a+3\Delta s, \cdots, a+(n-2)\Delta s, b]$;
2. $\mathrm{SNR} = \{a, a+\Delta s, a+2\Delta s, a+3\Delta s, \cdots, a+(n-2)\Delta s, b\}$;
3. $M_T = \left[n_T^1, n_T^2, \ldots, n_T^i, \cdots, n_T^m\right]^T$ e $s \in \mathrm{SNR}$;
4. $\quad 1 \le i \le m$ e $m \in \mathbb{Z}$;
5. $\quad n_T \to \{\Psi(s_j)\}_{j=1}^h$, $h \in \mathbb{Z}$.

Saída:

1. Distância Euclidiana $d_i = ||\widehat{s} - s||$
2. $M_e = \left[n_e^1, n_e^2, \ldots, n_e^i, \cdots, n_e^m\right]^T$ ;;
3. $p = \frac{1}{T_T}\sum_{i=1}^{m} n_e^i$ para cada $s \in$ SNR;
4. Curva de desenpenho: $\{(s, p) \in \text{SNR} \times p_e\}$ .

O diagrama simplificado do Algoritmo 4.6.1 é apresentado na Figura 4.6.1. No bloco de entrada declaramos os parâmetros: o intervalo $I = [a, b]$ , o incremento $\Delta s$, o número de linhas $m$ da matriz $M_T$, o número de transmissões $n_T$ por linhas de $M_T$, os raio $r_i$ da esferas $S_i$ da região de decisão do sinal $\Psi(s_i)$, $i = 0, 1, \cdots, 4$. Definido o conjunto SNR é criada a matriz de transmissão e iniciam-se as transmissões com o valor da SNR $= a$. Na saída do bloco de transmissão, temos a matriz de erros que será utilizada para calcular $p_e$. Se SNR $\neq b$, $a$ será incrementado $\Delta s$, e novamente efetuamos as transmissões para SNR $= a + \Delta s$ e repetimos o processo até SNR $= b$.

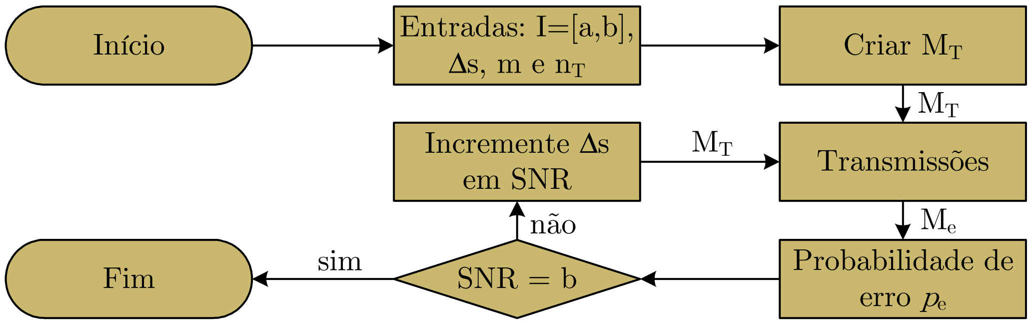



Figura 4.6.1: Fluxograma do Algoritmo 4.6.1.

A cada valor da SNR no bloco de transmissões da Figura 4.6.1, o simulador realiza um conjunto de tarefas as quais serão descritas a seguir.

Inicialmente, será selecionado um sinal $s_i$ da constelação $A = \{s_0, s_2, \cdots, s_{k-1}\}$. Escolhido $s_i$, será introduzido o ruído AWGN a taxa de SNR dB gerando assim o sinal ruidoso $\widehat{s}$. Com o sinal ruidoso calculamos todas as distâncias entre ele e os demais sinais da constelação, sendo assim

$$d_i = \|\widehat{s} - s_i\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}\left(\widehat{s}_{1j} - s_{ij}\right)^2},\ i = 0, \cdots, k-1,$$

isto, $d_i$ é a distância Euclidiana entre o sinal $\widehat{s}$ e o sinal $s_i$.

Dentre o conjunto das distâncias, a de interesse é a menor, chamada distância mínima $d_{\min}$, pois será utilizada para determinar o sinal da constelação mais próximo de $\widehat{s}$. Ao determinar o sinal da constelação mais próximo do sinal recebido, suponhamos que seja $s_j$, teremos duas situações, ou $d_{\min} < r_j$ ou $d_{\min} \geq r_j$, onde $r_j$ é o raio da esfera da região de decisão $D_j$ no modelo espacial. Se $d_{\min} < r_j$, o simulador decide que o sinal enviado foi $s_j$. No final comparamos o sinal enviado $s_i$ com o sinal $s_j$ decidido pelo demodulador, caso $i \neq j$ ou $d_{\min} \geq r_j$ contabilizamos um erro, se $i = j$ o demodulador acertou. Os passos que começam na seleção do sinal até o erro ou acerto por parte do demodulador é contabilizado como 1 transmissão. Neste processo de demodulação, o sinal recebido $\widehat{s}$ é associado a um elemento da constelação de sinais $A = \{s_0, s_2, \cdots, s_{k-1}\}$, isto é, para $k$ possíveis escolhas de transmissão, tem-se $k$ possíveis escolhas de decisão. Neste caso, diz-se que utilizamos a demodulação por decisão abrupta.

Na linha $l$, $l = 1, \cdots, m$, de $M_T$, após $n_T$ transmissões, a quantidade de erros cometidos é armazenada na $l$-ésima linha da matriz de erros, repetimos até $l = m$. Depois de efetuarmos as $mn_T$ transmissões, obtemos $M_e$. A partir da matriz de erros $M_e$ calculamos a probabilidade de erro $p_e$ para o valor da SNR dado no início da simulação.

Inicialmente, o simulador deve analisar qual a melhor opção de escolha dos seguintes parâmetros: o intervalo fechado $I = [a, b]$ no qual a SNR irá assumir os seus valores, o incremento ou intervalo da partição $\Delta s$, o número de linhas $m$ da matriz de transmissão $M_T$, o número de transmissões feitas em cada linha $l$ de $M_T$, $n_T$, os raios $r_i$'s das esferas das regiões de decisão e as coordenadas dos sinais $s_i$'s no modelo espacial de $T = \Psi(U)$.

Após alguns testes iniciais do simulador chegamos à conclusão de que o intervalo $I = [-5, 15]$, com incremento de $\Delta s = 0,1$, produz as 201 amostras para a SNR com valores assumidos no seguinte conjunto de números reais representados com a notação de ponto flutuante:

$$\text{SNR} = \{-5, -4.9, -4.8, -4.7, \cdots, 14.7, 14.8, 14.9, 15\}.$$

Os parâmetros que deram uma curva com grau de suavidade satisfatória, sem comprometer o tempo de processamento do simulador foram $m = 100$ e $n_T = 300$.

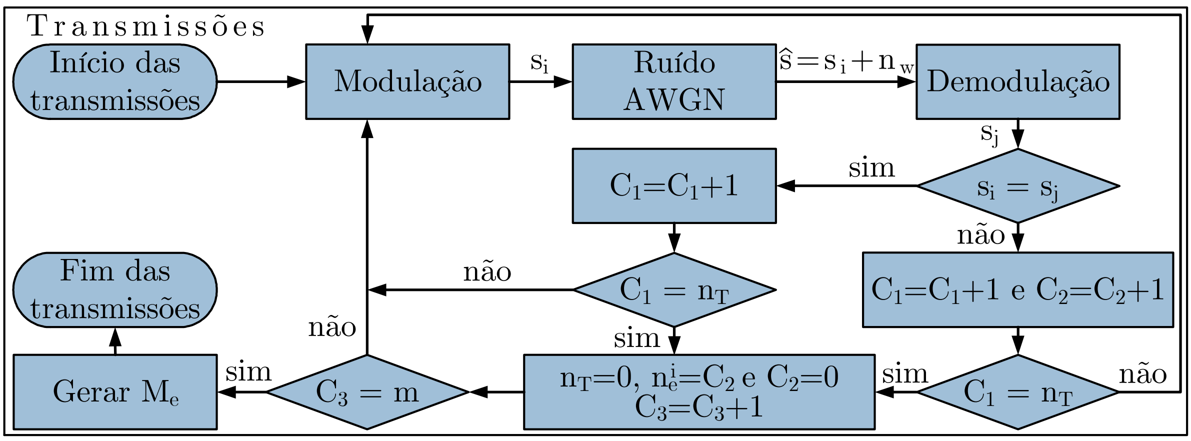



Figura 4.6.2: Diagrama de blocos do processo de transmissão.

O processo que inicia com a determinação da SNR e termina com o cálculo de $p_e$, será realizado para todos os 201 valores do intervalo $I = [-5, 15]$. No final do processo depois de efetuadas todas as transmissões é exibido um gráfico que mostra a probabilidade de erro em função do valor da SNR.

Na Figura 4.6.2, temos o diagrama do processo de transmissões correspondente ao bloco de transmissões da Figura 4.6.1, no qual a entrada é $M_T$ e cuja saída é $M_e$. O contador $C_1$ irá contar o número de transmissões $n_T$, $C_2$ contará os erros a cada $n_T$ transmissões e $C_3$ corresponde a linha $l$ e percorrerá as $m$ linhas de $M_T$. Todos serão incrementados de 1 unidade a cada passagem por esses contadores.

Por exemplo, vamos efetuar uma simulação com os seguintes parâmetros: $m = 5$, $n_T = 100$ e SNR $= -10$. Dessa forma, temos que a matriz de transmissão é dada por

$$M_T = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}_{5\times 1}.$$

Após as $5 \times 100$ transmissões a matriz de erros para SNR $= -10$ foi

$$M_e = \begin{bmatrix} 97 \\ 90 \\ 92 \\ 95 \\ 80 \end{bmatrix}_{5\times 1}.$$

A probabilidade de erro desta simulação para a SNR $= -10$ será igual a

$$p_e = \frac{97 + 90 + 92 + 95 + 80}{5 \times 100} = 0,908,$$

portanto, a $p_e = 0,908$ ou $90,8\%$ para os parâmetros SNR $= -10$, $m = 5$ e $n_T = 100$.

Em seguida iremos analisar o desempenho das modulações propostas no Capítulo 3.

### 4.6.1 Projeto I

A implementação da modulação 5-QAMS será realizada a partir de dois projetos construídos no Capítulo 3. O modelo planar do Projeto I da Seção 3.4, é formado por quatro regiões congruentes e uma diferente, compostas de curvas elípticas e lineares (segmentos de retas). O Projeto II da Subseção 3.7.1 é topologicamente igual ao Projeto I, porém, é construído a partir de curvas parabólicas e lineares. Lembramos que o objetivo do Projeto II era obter um projeto de modulação sobre um espaço de sinais geometricamente uniforme sobre o espaço métrico $(T, d)$, no modelo planar de $T$. Obviamente que o modelo espacial nem sempre preserva a uniformidade vinda do modelo planar, mas aproxima-se do modelo uniforme.

O intervalo $I = [-5, 15]$ será considerado o campo de ação da relação sinal ruído. Neste caso iremos verificar o comportamento de uma modulação 5-QAMS sobre o toro sob efeito do ruído Gaussiano branco aditivo no intervalo de $-5\,\text{dB}$ a $-15\,\text{dB}$. Adotaremos a partição de $I$ de incremento $\Delta s = 0,1$. Para cada sinal $s_i$ das constelação $A_1 = \{s'_0, s'_1, s'_2, s'_3, s'_4\}$ e cada valor da SNR contida no intervalo $I$ (são 201 amostras), serão estimados 300 transmissões de $s_i$, 100 vezes. Com esses dados relativamente pequenos para um simulador obtivemos resultados satisfatórios como serão visto a seguir.

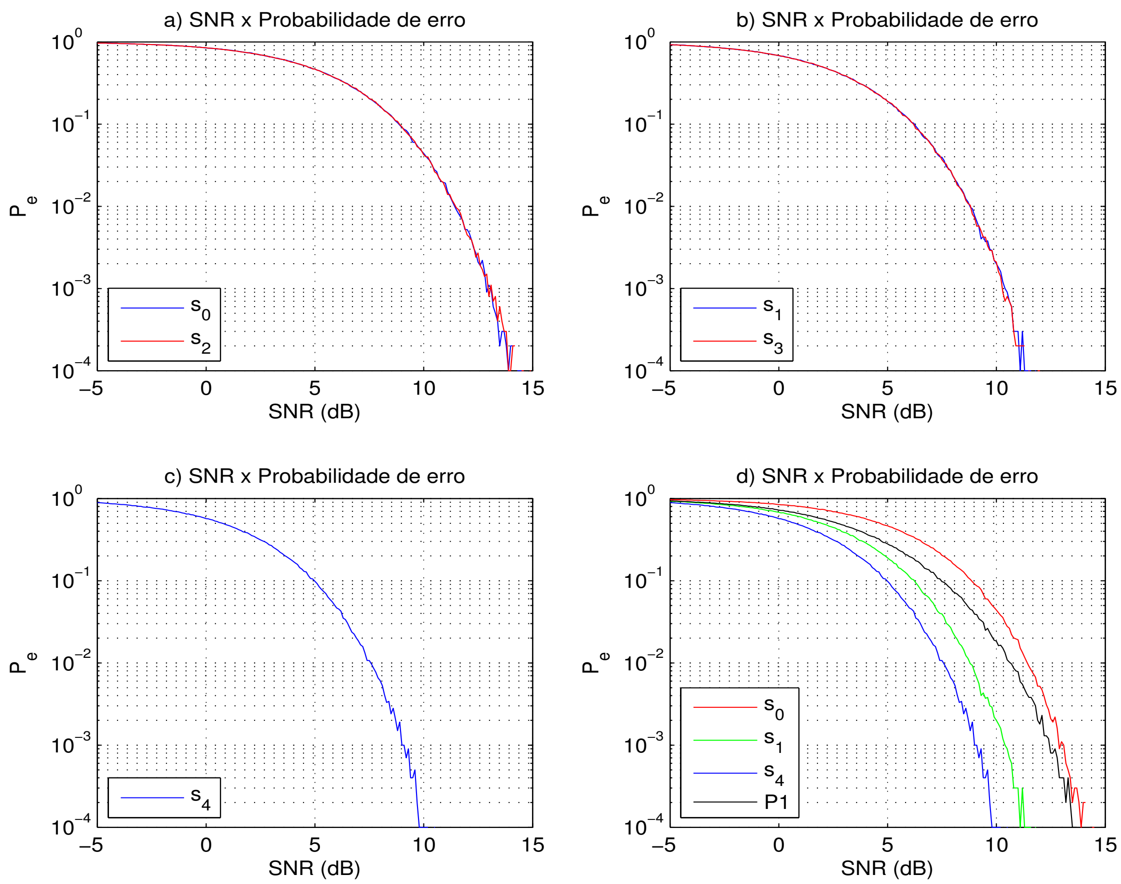



Figura 4.6.3: Simulação da probabilidade de erro de transmissão do Projeto I.

A simulação será realizada individualmente para cada sinal, pois o objetivo é estimar isoladamente a probabilidade de erro de transmissão em um canal que assume os 201 valores de SNR pertencente ao intervalo $I = [-5, 15]$.

Sob as condições acima foi implementado no *Matlab*, via Algoritmo 4.6.1, o simulador referente ao Projeto I. Os gráficos das simulações dos sinais do Projeto I são vistos na Figura 4.6.3.

O gráfico a) da Figura 4.6.3 mostra as duas curvas de desempenhos resultantes da transmissão dos sinais $s'_0$ e $s'_2$. Lembramos que $s'_0$ e $s'_2$ são as coordenadas sobre o toro e as suas respectivas regiões de decisão $D'_0$ e $D'_2$ estão restritas as esferas centradas $s'_0$ e $s'_2$. Como as curvas de desempenhos são iguais, as probabilidades de erros de transmissão de $s'_0$ e $s'_2$ são iguais. Este resultado era esperado uma vez que as regiões $D'_0$ e $D'_2$ são congruentes (veja o modelo espacial do mergulho de $K_5$ na Figura 3.4.2). Mostramos então que o simulador está coerente com os resultados esperados o que comprova a sua validação.

A análise do gráfico b) da Figura 4.6.3 mostra conclusões análogas para os sinais $s'_1$ e $s'_3$, isto é, as probabilidades de erros de transmissão de $s'_1$ e $s'_3$ são iguais, pois, novamente, vem de regiões de decisão $D'_1$ e $D'_3$ congruentes. Por outro lado, não podemos concluir ainda que a probabilidade de erro de $s'_1$ e $s'_3$ é menor ou igual a de $s'_0$ e $s'_2$. Esta condição será analisada posteriormente.

A curva da probabilidade de erro de transmissão sinal $s_4$ é apresentada em c). Por último, no gráfico d) da Figura 4.6.3, mostramos as curvas das probabilidades de erros dos sinais $s_0$, $s_1$ e $s_4$, bem como a simulação simultânea dos sinais da constelação com o objetivo de compararmos as probabilidades de erros. A conclusão é que

$$p_e(s'_4) < p_e(s'_1) = p_e(s'_3) < p_e(s'_0) = p_e(s'_2).$$

Com isto, o sinal o sinal $s'_4$ é o que erra menos na transmissão através da modulação 5-QAMS do Projeto I e os sinais $s'_0$ e $s'_2$ são os que erram mais. Logo, em relação a probabilidade de erros de transmissão de sinais, podemos afirmar que o projeto para $s'_4$ é mais eficiente do que os projetos de $s_1$ e $s_3$, e estes são mais eficientes do os projetos de $s'_0$ e $s'_2$.

**Observação 4.6.2** *A média das probabilidades de erros irá fornecer a eficiência da modulação* 5-QAMS *do Projeto I. A eficiência máxima é atingida quando se tem um projeto do tipo espaço de sinais do tipo geometricamente uniforme.*

O próximo projeto de modulação 5-QAMS analisado tem o modelo planar uniforme em relação à área. Queremos verificar o desempenho desse novo projeto e comparar com o Projeto I.

### 4.6.2 Projeto II

Seja $A_2 = \{\omega'_0, \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3, \omega'_4\}$ a constelação de sinais para a modulação 5-QAMS do Projetos II, correspondente à Figura 4.6.5. Neste, o modelo planar é formado por regiões de áreas iguais, portanto é uniforme em relação à área. Utilizando as medidas do raio das esferas relativas as regiões de decisão da modulação 5-QAMS dos Projetos I e II, do Apêndice B, chegamos a conclusão que o Projeto II aproxima-se mais do projeto de modulação uniforme, do que o Projeto I.

**Proposição 4.6.3** *A modulação 5-*QAMS *vinda do Projeto II é mais eficiente do que a modulação* 5-QAMS *vinda do Projeto I.*

**Demonstração.** Utilizando a Observação 4.6.2 devemos mostrar que a probabilidade de erro médio da modulação 5-QAMS do Projeto II é maior do que a do Projeto I. De fato, a media das probabilidades de erro depende da área dos discos $\delta_{r_i}(s_i)$ das regiões de decisão dos sinais da constelação. Os raios $r_i$'s das regiões de decisão dos Projetos I e II são dados no Apêndice B. Assim, a média das áreas dos discos $\delta_{r_i}(s_i)$ dos Projetos I e II são dadas por

$$\overline{M}_1 = \frac{(0.901)^2\pi + (1.227)^2\pi + (0.901)^2\pi + (1.227)^2\pi + (1.414)^2\pi}{5} = 4.168,$$

$$\overline{M}_2 = \frac{(0.983)^2\pi + (1.329)^2\pi + (0.983)^2\pi + (1.329)^2\pi + (1.292)^2\pi}{5} = 4.483.$$

Como $\overline{M}_2 > \overline{M}_1$, segue que o Projeto II aproxima-se mais do projeto de modulação uniforme, do que o Projeto I. ∎

Na Figura 4.6.4, são apresentados os resultados da simulação do Projeto II que atendem as mesmas condições nas quais o Projeto I foi submetido. O nosso objetivo principal neste processo de simulação é mostrar que dois pares de sinais apresentam probabilidades de erros iguais, como a exemplo do par de sinais $\omega_0$ e $\omega_2$ e dos sinais $\omega_1$ e $\omega_3$. No gráfico d) podemos observar somente a probabilidade de erro de um dos pares, quando estes são iguais. Sendo assim, somente as curvas relativas aos sinais $\omega_0$, $\omega_1$ e $\omega_4$ são observadas no gráfico d) da Figura 4.6.4. A curva P2 representa a média das probabilidades de erro dos cinco sinais da constelação da modulação 5-QAMS do Projeto II.

Os gráficos a), b) e c) das Figuras 4.6.5 e 4.6.4 são praticamente idênticas, mas do gráfico d) comprovamos que há uma diferença nas curvas. Observe que as curvas de d) do Projeto I estão mais afastadas uma da outra do que as curvas de d) no Projeto II. Isto significa que o Projeto II aproxima-se mais do projeto de sinais geometricamente uniforme confirmando o que foi mostrado na Proposição 4.6.3. Esta é uma maneira de observar diretamente dos gráficos das curvas de desempenhos quando um projeto de modulação aproxima-se do espaço de sinais do tipo geometricamente uniforme.

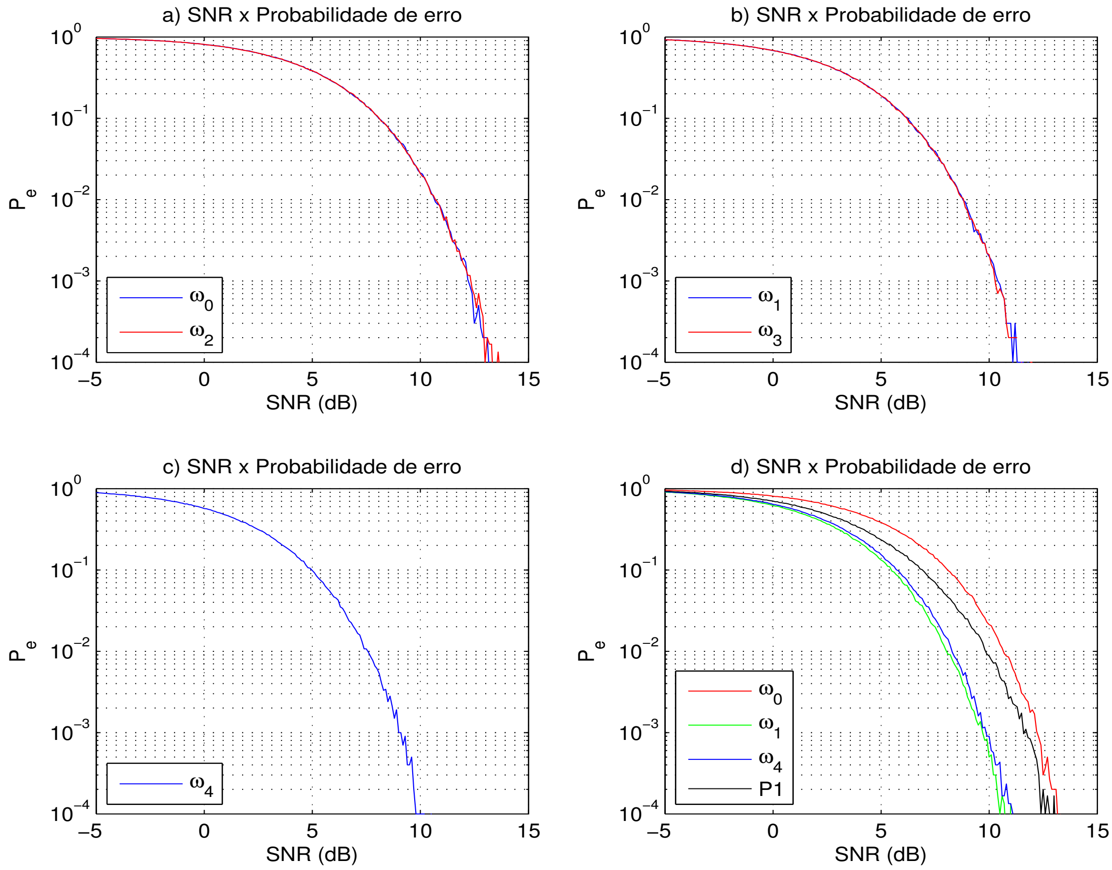



Figura 4.6.4: Simulação da probabilidade de erro de transmissão de sinais da constelação 5-QAMS do Projeto II.

Para efeito de comparação individual do sinal, apresentamos, nos gráficos a), b) e c) da Figura 4.6.5 as probabilidades de erros dos pares de sinais $(s_0, \omega_0)$ , $(s_1, \omega_1)$ e $(s_4, \omega_4)$ , onde $s_i \in A_1$ e $\omega_i \in A_2$. O gráfico d) mostram as curvas de desempenhos P1 e P2 dos projetos Projetos I e II, respectivamente.

Dos gráficos a) e b) da Figura 4.6.5 comprova-se que o desempenho individual dos sinais $\omega_i$ é superior ao desempenho do sinal $s_i$, para todo $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ , pois a $p_e(\omega_i) < p_e(s_i)$ . Por razões análogas concluímos no gráfico c) da Figura 4.6.5 que o desempenho de $s_4$ é superior ao de $\omega_4$. O que ocorreu foi a seguinte compensação: as regiões de decisão dos sinais $s_0, s_1$, $s_2$ e $s_3$ cederam espaço para os respectivas regiões de decisão dos sinais $\omega_0, \omega_1$, $\omega_2$ e $\omega_3$, enquanto a região de decisão de $s_4$ ganhou espaço em relação à região de decisão de $\omega_4$, e como consequência o Projeto II aproximou-se mais do projeto uniformemente geométrico do que o Projeto I. Este ganho é confirmado no gráfico d) da Figura 4.6.5. Veja que a probabilidade de erro médio P2 é menor do que a probabilidade de erro médio de P1 em todos os pontos do domínio onde a SNR está definida. Entenda que o gráfico d) mostra o desempenho, de fato, das modulações dos Projetos I e II. Não devemos confundir com o desempenho individual dos sinais dos gráficos a), b) e c).

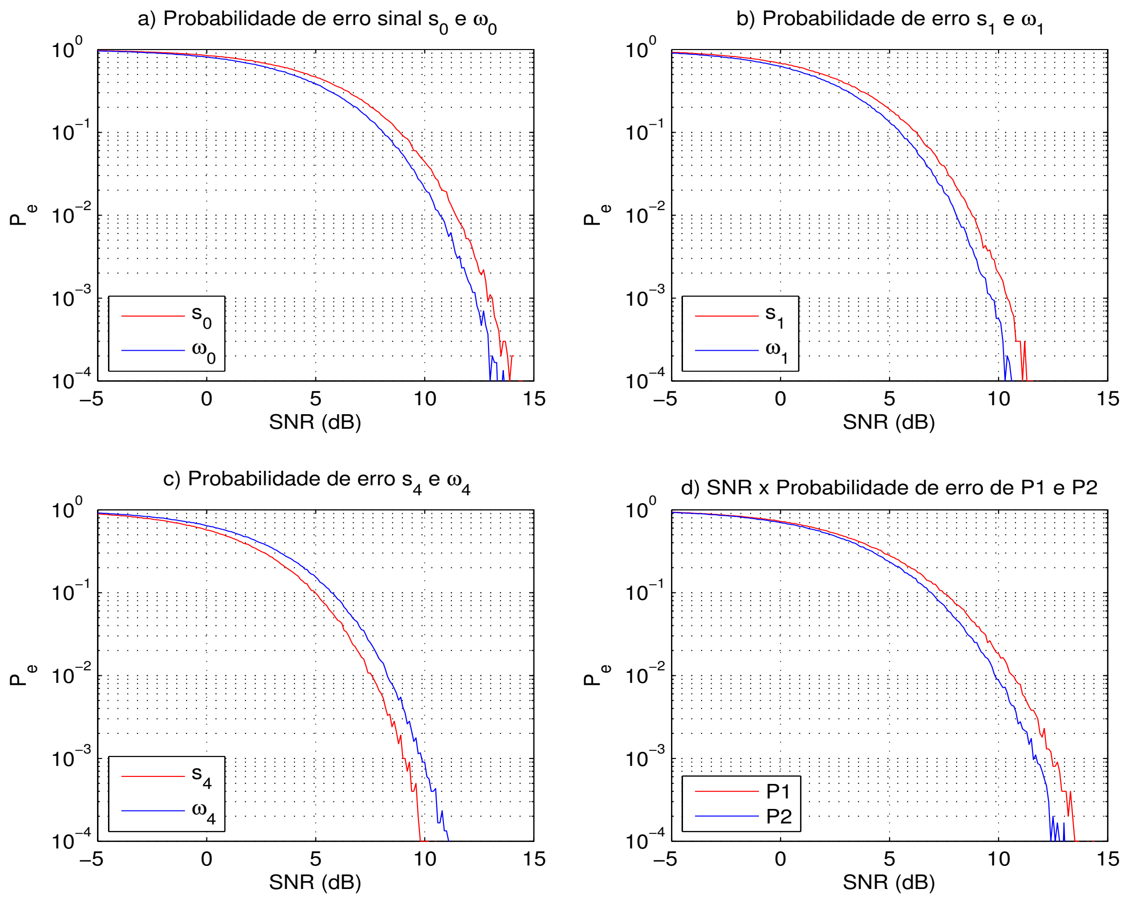



Figura 4.6.5: Probabilidade de erro dos Projetos I e II.

A questão é, poderíamos melhorar ainda o desempenho da modulação QAMS a partir de um modelo pré-fixado? Veremos a seguir que ainda é possível desde que a QAMS não esteja nas condições de geometricamente uniforme.

## 4.7 Demodulação por Decisão Suave

Nas simulações realizadas para os Projetos I e II utilizamos a decisão abrupta no processo de demodulação, isto é, o sinal recebido $\widehat{s}$ é decidido por algum sinal $s'_i$ pertencente a constelação de sinais $\{s'_0, s'_1, s'_2, s'_3, s'_4\}$. A demodulação por decisão abrupta, devido a sua facilidade de implementação e execução, é utilizada pela maioria dos sistemas de comunicação. No entanto, alguns sistemas fazem uso da demodulação por decisão suave, que apesar de ser mais complexa de implementar e executar, este tipo de demodulação oferece significativas melhorias no desempenho do sistema quando comparada com a demodulação por decisão abrupta. Por esse motivo, com o objetivo de melhorar o desempenho da modulação 5-QAMS sobre o toro, optamos por utilizar a demodulação por decisão suave, mas antes disso, construímos um modelo planar para decisão suave.

### 4.7.1 Projeto de quantização de nível 2

Sistemas de transmissão de dados utilizam quantizadores até de nível 8, o qual fornece o maior desempenho obtido até até então por um quantizador. Sabe-se que com o uso de um quantizador de nível 8 chega-se a ganhar 2 dB na relação sinal ruído. Para efeito de simplificação de implementação construímos um quantizador de nível 2 sobre o Projeto II. Neste caso, o canal quantizado assume a forma da Figura 4.7.1.

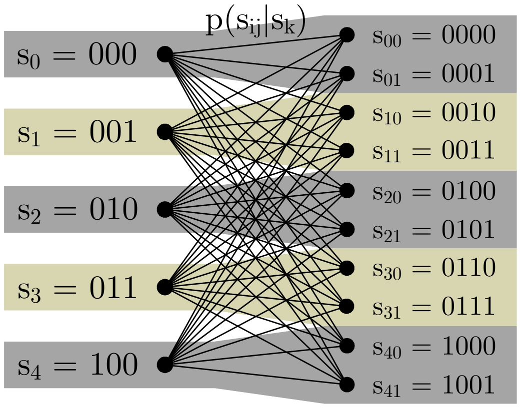



Figura 4.7.1: Canal $C_{5,10}\,[10,5]$ quantizado de nível 2.

Os índices 5 e 10 em $C_{5,10}\,[10,5]$ indicam as respectivas quantidades de elementos dos alfabetos 5-ário $A = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ de entrada do canal e do alfabeto 10-ário da saída do canal

$$B = \{s_{00}, s_{01}, s_{10}, s_{11}, s_{20}, s_{21}, s_{30}, s_{31}, s_{40}, s_{41}\}.$$

O colchete $[10, 5]$ indica que cada $\deg(v) = 10$, se $v \in A$, e $\deg(\omega) = 5$, se $\omega \in B$, onde $A$ e $B$ são os conjuntos de vértices do grafo completo biparticionado $K_{5,10}\{A, B\}$. Estamos considerando que $s_i$ e $s_{ij}$ são coordenadas do toro.

O objetivo do projeto de quantizador sobre o modelo planar do Projeto II, é dividir cada região de decisão $D_i$ em duas subregiões $D_{i0}$ e $D_{i1}$. Devido a praticidade de se trabalhar com regiões do tipo discos esta subdivisão consiste em obter dois discos $D_{i0}$ e $D_{i1}$ sobre a região $D_i$ de maneira que $D_{i0} \cup D_{i1} = \{p\}$, $p \in T$, e $D_{i0} \cap D_{i1} = \varnothing$, isto é, as circunferências das fronteiras de $D_{i0}$ e $D_{i1}$ são tangentes. Além disso, o propósito é maximizar as áreas de $D_{i0}$ e $D_{i1}$. Porém, observamos que numa região $D_i$ não uniforme, nem sempre esta é a melhor opção para maximizar a área ocupada por $D_{i0}$ e $D_{i1}$. Resolvemos então analisar a condição em que $D_{i0} \cap D_{i1} \neq \varnothing$. Como $D_{i0}$ e $D_{i1}$ estão contidos em $D_i$, faz sentido que todo sinal recebido $\widehat{s}$ seja decidido por $s_i$ caso $\widehat{s} \in D_{i0} \cup D_{i1}$. Após algumas experiências chegamos a conclusão de que o projeto do Modelo III da Figura 4.7.2 aproxima-se desse projeto máximo que estamos procurando.

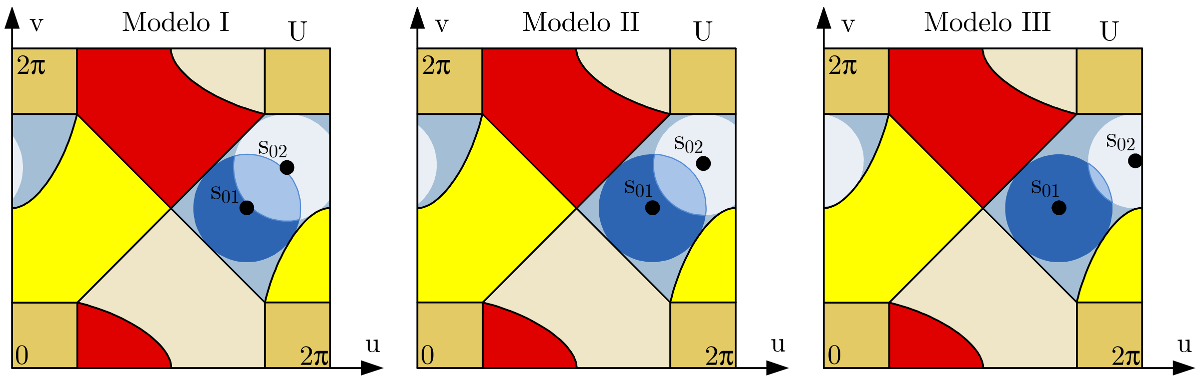



Figura 4.7.2: Modelos planares com distintos modos de escolher os sinais $\mu_{01}$e $\mu_{02}$ na região de decisão $D_0$.

Vimos na Seção 4.6.2 que no Projeto II, as regiões $D_0$, $D_1$, $D_2$ e $D_3$ são congruente, então é suficiente resolver o problema para uma região. Em particular, tomemos a região $D_0$ e façamos alguns testes como mostrado na Figura 4.7.2. Observe que à medida que a interseção de $D_{00}$ e $D_{01}$ diminui, a área de $D_0 - (D_{i0} \cup D_{i1})$ diminui e a área de $D_{00} \cup D_{01}$ aumenta; sendo assim, estamos maximizando a área de $D_{00} \cup D_{01}$, que é o nosso objetivo. Pode-se provar através de cálculos elementares que esta afirmação é verdadeira. A Figura 4.7.2 é somente para ilustrar esta situação. O projeto do Modelo

III aproxima-se da solução máxima, não estamos afirmando que é a solução máxima, mas vamos utilizá-lo.

Por se tratar de uma região quadrangular, o processo de quantização da região $D_4$ em nível 2, não é viável, é melhor não aplicar esse processo nesta região. Portanto, o quantizador não irá operar somente na região $D_4$.

### 4.7.2 Projeto III

O modelo planar do Projeto III é uniforme em relação à área. Neste modelo, cada região de decisão terá dois sinais, exceto a região $D_4$, ou seja, $\mu_{i1}, \mu_{i2} \in D_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ e $\mu_{41} \in D_4$. O modelo planar do Projeto III com a constelação de sinais definida sobre esse é apresentado na Figura 4.7.3.

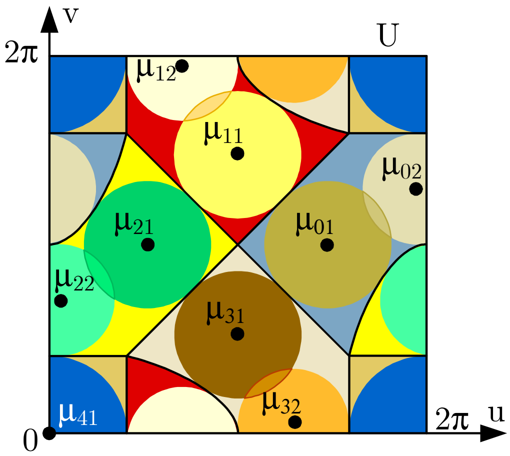



Figura 4.7.3: Modelo planar do Projeto III .

Uma vez construído o modelo planar do projeto III, procedemos de modo análogo aos Projetos I e II, isto é, a partir desse projeto construímos o modelo espacial equivalente, calculamos as coordenadas dos sinais $\mu_{ij}$ sobre $T$, e também os raios $r_{ij}$ das esferas nas regiões $D_i$. As coordenadas dos sinais em $\Pi_p$ e $\Pi_\varepsilon$, e também, dos raios das esfera em $\Pi_\varepsilon$ estão no Apêndice B. Agora, passaremos ao processo de demodulação por decisão suave sobre $\Pi_\varepsilon$ do Projeto III.

Na demodulação, um sinal $s \in A$ é transmitido, o demodulador recebe $\widehat{s}$, e para todo $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{0, 1\}$ , calcula a distância euclidiana entre $\widehat{s}$ e $s_{ij}$. Se

$$||\widehat{s} - s_{ij}|| < r_{ij}$$

então o demodulador decide que o sinal transmitido foi $s_i$. Se $s_i = s$, é porque ocorreu

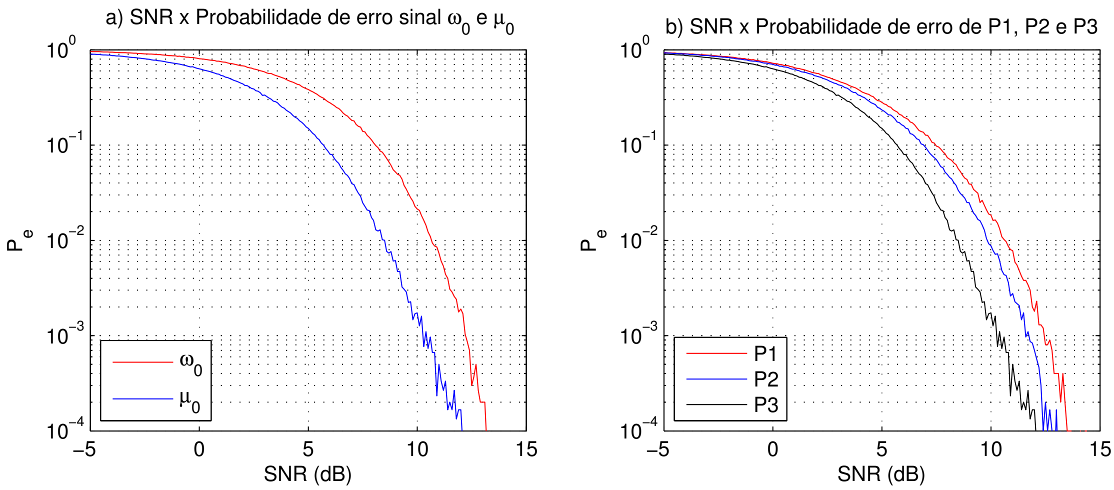



Figura 4.7.4: Gráficos da probabilidade de erro do Projeto I, II e III.

um acerto no processo de transmissão do sinas $s$, caso contrário, houve um erro por parte do demodulador.

Nas simulações realizadas para o Projeto III, utilizamos a decisão suave. A Figura 4.7.4 mostra os gráficos das simulações do Projeto III para o sinal $\mu_0$ e também, para todos os sinais da constelação.

No gráfico a) da Figura 4.7.4, comparamos a probabilidade de erro do sinal $\omega_0$ e $\mu_0$, como se pode comprovar a probabilidade de erro do sinal $\mu_0$ é inferior ao do sinal $\omega_0$, ou seja, $p_e\left(\omega_0\right) < p_e\left(\mu_0\right)$. No gráfico b), mostra a probabilidade erro dos Projetos I, II e III, onde constatamos que a demodulação por decisão suave é melhor, pois $p_e\left(P3\right) < p_e\left(P2\right) < p_e\left(P1\right)$.

## 4.8 Considerações

Nesse capítulo, o objetivo foi analisar o desempenho de uma modulação QAMS independente do projeto de modulação ser uniforme ou não, haja vista a dificuldade de obter um modelo espacial uniforme discutidos no Capítulo 3. Como não foi possível obter um projeto de modulação uniforme para 5-QAMS sobre o toro, optamos por realizar nossas simulações com os projetos de modulação não uniformes construídos no Capítulo 3.

Os resultados obtidos foram satisfatórios, pois dado um valor para a SNR mostramos que é possível analisar o desempenho de uma modulação 5-QAMS sobre o toro, calculando-se a probabilidade de erro $p_e$, em outras palavras, mostramos que a análise de desempenho é possível de ser realizada.

O método de análise de desempenho da modulação 5-QAMS permitiu comparar projetos distintos da mesma modulação, por exemplo, comparando os desempenhos dos Projetos I e II na Figura 4.6.5 sobre as mesmas condições, concluímos que o Projeto II é de melhor porque seu modelo espacial é mais uniforme. Dessa forma, concluímos que quanto mais uniforme for o projeto de modulação, melhor será seu desempenho, por isso, o projeto do tipo e.s.g.u. é o melhor e o desejado em qualquer modulação.

As simulações feitas sobre o modelo espacial do toro não se restringem a esse tipo de superfície. Os métodos de análise de desempenho da modulação QAMS podem ser feitos para qualquer projeto de modulação QAMS, basta seguir os procedimentos aplicados aos projetos de modulação sobre o toro.

Por fim, propomos uma maneira de melhorar o desempenho das modulações, demodulação por decisão suave, a partir de um projeto existente sem a necessidade de distribuir as áreas das regiões de decisão.

Capítulo 5

# Modulações QAMS Uniforme Sobre o Toro

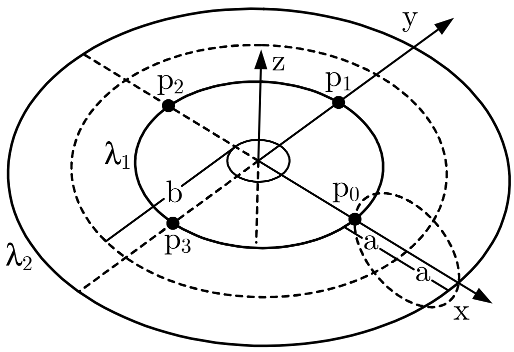
As modulações do tipo espaço de sinais geometricamente uniforme, por apresentar menor complexidade de cálculo e menor probabilidade de erro médio, são as mais requeridas em projetos de modulação. Por esse motivo, iremos mostrar que existem modulações QAMS do tipo geometricamente uniforme sobre o toro, para uma constelação de $m$ sinais. Veremos ainda que existe uma modulação QAMS do tipo geometricamente uniforme sobre o toro vindo do mergulho do grafo completo $K_5$.

Na Seção 3.7, construímos uma modulação 5-QAMS uniforme em relação à área sobre o modelo planar do toro. No modelo espacial dessa modulação QAMS mostramos que, apresar do modelo planar ser uniforme, o modelo espacial não preserva a uniformidade, ou seja, mesmo que o modelo planar do projeto de modulação QAMS seja uniforme, não há como garantir essa uniformidade no modelo espacial. A partir das conclusões obtidas, chegamos a seguinte questão: existe uma modulação QAMS uniforme sobre o toro?

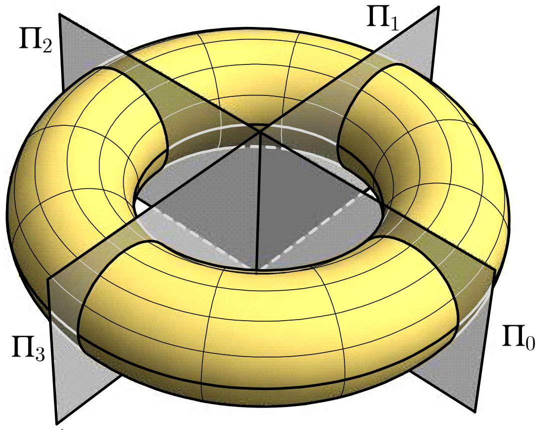
Neste capítulo, vamos estudar as possibilidades de partição do toro em regiões congruentes e verificar a existência de uma modulação QAMS uniforme sobre o mesmo.

## 5.1 Modulação $m$-QAMS Uniforme sobre a Geodésica Máxima do Toro

Analisando a forma geométrica do toro, percebemos que é possível particioná-lo em regiões congruentes. Seja $T(a,b)$ um toro de raios $a$ e $b$, $b > a$, centrado na origem do plano cartesiano tridimensional, conforme o esquema apresentado na Figura 5.1.1 a). Se $C(0,r)$ é a circunferência de raio $r$ e centro na origem $0 = (0,0,0)$, então $\lambda_1 = C(0,b-a)$ e $\lambda_2 = C(0,b+a)$ serão denominadas de geodésicas mínima e máxima do toro respectivamente. Tomemos $m$ semiplanos planos ortogonais a $\mathbb{R}^2$, $\Pi_0, \Pi_1, \cdots, \Pi_{m-1}$ limitados pelo eixo $z$ e que dividem a circunferência $\lambda_1$ em $m$ arcos congruentes de acordo com a construção mostrada na Figura 5.1.1 a), para uma particular divisão em 4 regiões congruentes.




a) Divisão da geodésica $\lambda_1$ em 4 arcos




b) Partição do toro em 4 regiões

Figura 5.1.1: Partição do toro em 4 regiões congruentes pelos semiplanos ortogonais $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2$ e $\Pi_3$.

Sendo assim, o toro é dividido em $m$ regiões toroidais tubulares. Se considerarmos estas como sendo regiões de Voronoi de uma constelação de $m$ sinais sobre o toro, estas não seriam 2-células. Porém, se quisermos projetar uma modulação $m$-QAMS sobre a partição b) do toro da Figura 5.1.1 as quatro regiões tubulares devem ser transformadas em duas células.

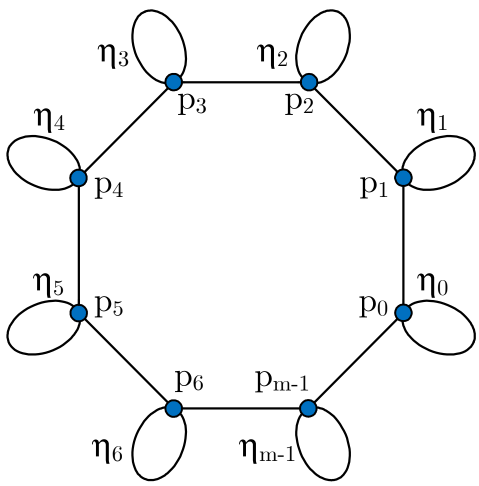



Figura 5.1.2: Grafo $G\,(m, 2m)$ da modulação QAMS uniforme sobre $T$.

Para construir um mergulho de 2-células, consideremos o grafo $G(m, 2m)$ definido sobre o conjunto de vértices $\{p_i \in T, i = 0, 1, \cdots, m-1\}$ tal que $p_i = \lambda_1 \cap \Pi_i$ e $2m$ arcos, sendo $m$ arcos de $\lambda_1$ e os $m$ laços $\eta_i$, tal que $\eta_i = \Pi_i \cap T$. Ou seja, o grado $G$ é da forma ilustrada na Figura 5.1.2.

Sendo assim grafo $G$ sobre $T(a, b)$ define um mergulho uniforme de 2-células

$$G \hookrightarrow T(a, b) \equiv mR_4, m \geq 2. \tag{5.1}$$

Neste caso, a coordenada do vértice $p_i$ de $G$ sobre $T$ é dada por

$$p_i = (b-a)(\cos(2\pi i/m), \sin(2\pi i/m), 0), \ i \in \{0, 1, \cdots, m-1\}. \tag{5.2}$$

**Definição 5.1.1** *Seja* $A = \{s'_0, s'_1, \cdots, s'_{m-1}\}$ *o conjunto de* $m$ *sinais sobre o toro definidos pelas coordenadas*

$$s'_i = (b+a)(\cos((2i+1)\pi/m), \sin((2i+1)\pi/m), 0), \ i \in \{0, 1, \cdots, m-1\}. \tag{5.3}$$

*Chamaremos de* modulação $m$-QAMS uniforme sobre a geodésica máxima $\lambda_2$ do toro*,* MUGMT*, a modulação sobre* $T$ *cujas regiões de decisão são as* $m$ *regiões de 2-células da partição do mergulho de* $G(m, 2m)$ *da Figura 5.1.1.*

Veja que o conjunto de $m$ sinais $s_i$, $i = 0, 1, \cdots, m-1$, definidos pela equação (5.3), encontram-se sobre a geodésica $\lambda_2$, no ponto médio dos arcos definido pelos pontos $p_i$.

Pela Seção 3.4, o projeto de uma modulação $m$-QAMS sobre o toro é a imagem, dada pela aplicação $\Psi$ definida em (3.5), do modelo planar do mergulho $\Pi_p$ do grafo $G(m, 2m)$. Sendo assim, as coordenadas dos vértices $v_i$'s do modelo planar $\Pi_p$ para uma MUGMT qualquer são dadas por

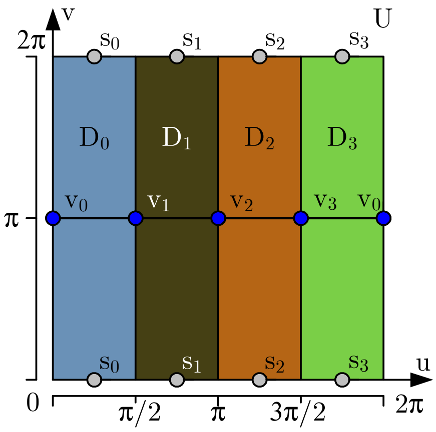
$$v_i = (2\pi i/m, \pi), \ i \in \{0, 1, \cdots, m-1\}, \tag{5.4}$$

e as coordenadas dos sinais $s_j$'s são dadas por

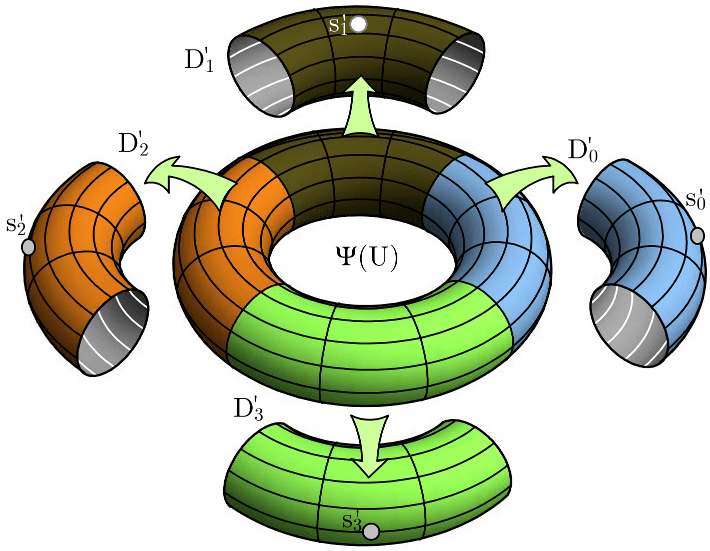
$$s_j = ((2j+1)\pi/m, 0), \ j \in \{0, 1, \cdots, m-1\}. \tag{5.5}$$

Neste caso, $\Psi(v_i) = p_i$ e $\Psi(s_i) = s'_i$ encontram-se sobre o toro $T(a, b)$, $a = 1$ e $b = 3$.

Os modelos planar e espacial do projeto geométrico da modulação uniforme sobre geodésica máxima do toro, MUGMT, projetado com o recursos computacionais tridimensionais do *software Mathematica,* para uma constelação de 4 sinais , isto é, uma modulação do tipo 4-QAMS uniforme, são ilustrados na Figura 5.1.3. As 4 regiões de decisão da modulação MUGMT, são formadas por regiões tubulares congruentes. Elas foram destacadas, usando a aplicação de translação, para se ter uma maior visão do seu formato.




a) Modelo planar MUGMT para 4 sinais




b) G(4,8) ↪ T ≡ 4R₄

Figura 5.1.3: Modelos planar e espacial de MUGMT para 4 sinais.

A Figura 5.1.3 a) mostra o modelo planar $\Pi_p$ sobre o toro correspondente ao mergulho do grafo $G\,(4,8)$ da Figura 5.1.2. Os vértices $v_0$ $v_1$ $v_2$ e $v_3$ que estão sobre a curva $v = \pi$ corresponde a geodésica $\lambda_1$ e os sinais $s_0$ $s_1$ $s_2$ e $s_3$ sobre a curva $v = 0$ corresponde a geodésica $\lambda_2$.

O modelo espacial $\Pi_\varepsilon$ de MUGMT para 4 sinais é ilustrado na Figura 5.1.3 b). Neste, destacamos as regiões de decisão $D_0', D_1', D_2'$ e $D_3'$. Observamos que as regiões de decisão apesar de estarem na forma tubular, estas são de 2-células uma vez que o bordo não faz parte da região. Por exemplo, a região $R_4^1 = (0011)$ é o conjunto dos pontos interiores, obviamente que os lados de $R_4^1$, os quais compõem o bordo $\partial\,(R_4^1)$ de $R_4^1$, pertencem ao grafo $G$, porém, não fazem parte de $R_4^1$. Em ambos os modelos, todas as regiões são congruentes. As coordenadas dos vértices e dos sinais de $\Pi_p$ estabelecidas nas igualdades (5.4) e (5.5), e também, de $\Pi_\varepsilon$ determinadas nas igualdades (5.2) e (5.3) são as relacionadas na Tabela 5.1.1.

| $i$ | $v_i$ | $\Psi(v_i)$ | $s_i$ | $\Psi(s_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $(0,\pi)$ | $(4,0,0)$ | $(\pi/4,0)$ | $(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$ |
| 1 | $(\pi/2,\pi)$ | $(0,4,0)$ | $(3\pi/4,0)$ | $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$ |
| 2 | $(\pi,\pi)$ | $(-4,0,0)$ | $(5\pi/4,0)$ | $(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0)$ |
| 3 | $(3\pi/2,\pi)$ | $(0,-4,0)$ | $(7\pi/4,0)$ | $(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0)$ |

Tabela 5.1.1: Coordenadas dos pontos $v_i$, $s_i$, $\Psi(v_i)$ e $\Psi(s_i)$ para $m = 4$.

Observamos que as coordenadas dos sinais $s'_0, s'_1, s'_2$ e $s'_4$ na $4^a$ coluna da Tabela 5.1.1 encontram-se nos centros das respectivas regiões $D'_0, D'_1, D'_2$ e $D'_3$ sobre a geodésica $\lambda_2$.

## 5.2 Modulação $2m$-QAMS Uniforme sobre Curvas Paralelas do Toro

Na Seção 5.1, mostramos uma maneira de particionar o toro em regiões congruentes por semiplanos ortogonais. Além dessa maneira, existe outro modo de dividir o toro em regiões congruentes. Para isso, utilizaremos um plano $\Pi$ para seccionar o toro conforme descrito a seguir.

Consideremos o plano $\Pi$ passando pela origem $(0,0,0)$ e definido pelas condições: $x, y \in \mathbb{R}$ e $z = 0$. O plano $\Pi$ divide o toro $T(a,b)$ em duas regiões congruentes como ilustra a Figura 5.2.1. Fixaremos duas curvas do toro através da seguinte

**Definição 5.2.1** *Seja $C(a,r)$ a circunferência de raio $r$ paralela ao plano $\Pi$ centrada no ponto $(0,0,a)$, denominaremos de* curvas paralelas *do toro, denotadas por $\lambda_3$ e $\lambda_4$, as curvas dadas pelas circunferências do toro $\lambda_3 = C(a,b)$ e $\lambda_4 = C(-a,b)$.*

Observe que as duas curvas paralelas $\lambda_3$ e $\lambda_4$ são únicas, como também as geodésicas mínima $\lambda_1$ e a geodésica máxima $\lambda_2$.

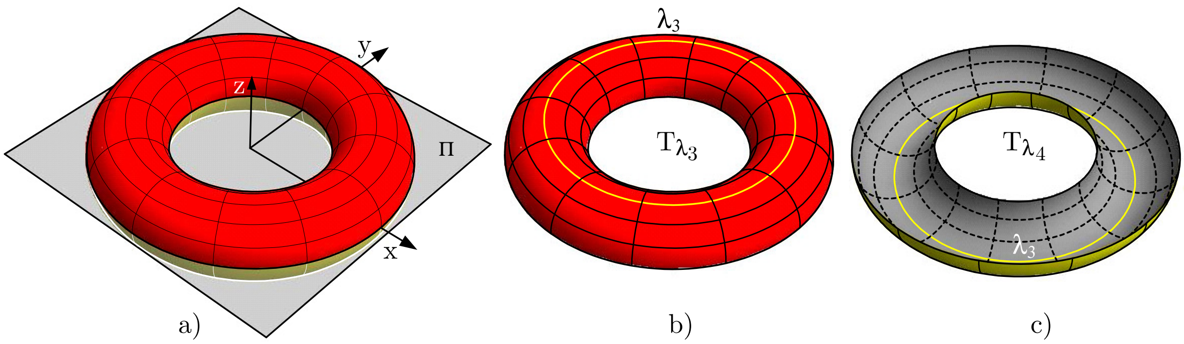



Figura 5.2.1: Divisão do toro em duas regiões congruentes pelo plano $\Pi$.

Na Figura 5.2.1 a) são mostrados o plano $\Pi$ seccionando o toro $T$ em duas regiões congruentes: a 'calota' superior, região $T_{\lambda_3}$ que contém a curva $\lambda_3$, ilustrada em b) e a 'calota' inferior, região $T_{\lambda_4}$ que contem a curva $\lambda_4$, mostrada em c).

Aplicando a mesma partição para $m$ regiões sobre $T$, definida na Seção 5.1, as regiões $T_{\lambda_3}$ e $T_{\lambda_4}$são divididas em $m$ regiões congruentes e, assim, obtemos uma partição do toro com $2m$ regiões congruentes. Consequentemente, dado um $T(a,b)$ seccionado pelo plano $\Pi$ contendo a geodésica máxima $\lambda_2$ e seccionados pelos $m$ planos ortogonais $\Pi_{i=0}^{m}$ definidos na Seção 5.1 obtemos uma partição em $2m$ regiões congruentes. Observe que cada região tubular será dividida em 2 regiões congruentes, logo, o toro será dividido em $2m$ regiões toroidais semitubulares, como mostra a Figura 5.2.2, no caso em que $m = 4$. A Figura 5.2.2 a) mostra as curvas paralelas $\lambda_3$ e $\lambda_4$, ambas divididas em quatro arcos congruentes. A Figura 5.2.2 b), mostra a partição do toro em oito regiões congruentes pelos semiplanos $\Pi_0$, $\Pi_1$, $\Pi_2$ e $\Pi_3$ e, também, pelo plano $\Pi$.

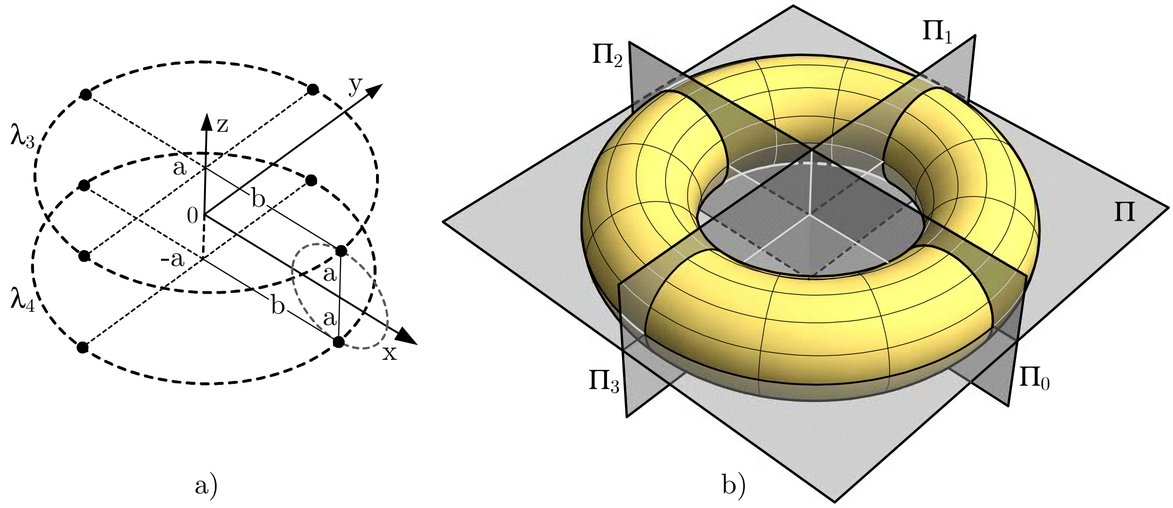



Figura 5.2.2: Partição do toro em regiões congruentes por semiplanos ortogonais e pelo plano $\Pi$.

A fim de introduzir os elementos da modulação QAMS uniforme sobre as curvas paralelas do toro $\lambda_3$ e $\lambda_4$ satisfazendo as condições da Definição 5.2.1, iremos considerar $G\,(2m, 4m)$ como sendo o grafo definido sobre a geodésica mínima $\lambda_1$, a geodésica máxima $\lambda_2$ do toro e as curvas

$$\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{m-1},$$

onde $\mu_i = \Pi_i \cap T$, e sobre os dois conjuntos de vértices $A = \{p_0, p_1, \cdots, p_{m-1}\}$ e $B = \{q_0, q_1, \cdots, q_{m-1}\}$, de tal maneira que:

a) o vértice $p_i = \lambda_2 \cap \Pi_i$ e os vértices de $A$, dividem a geodésica $\lambda_2$ em $m$ arcos congruentes;

b) o vértice $q_i = \lambda_1 \cap \Pi_i$ e os vértices de $B$ dividem a geodésica $\lambda_1$ em $m$ arcos congruentes. Como consequência, cada curva $\mu_i$ é dividida em dois arcos congruentes pelos vértices $p_i$ e $q_i$. Veja que o grafo $G$ é da forma ilustrada na Figura 5.2.3.

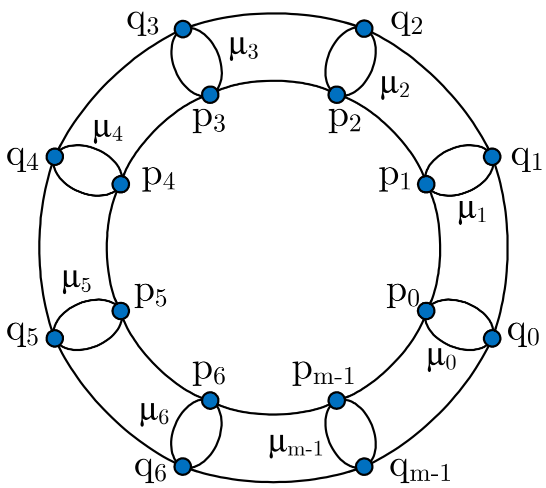



Figura 5.2.3: Grafo $G\,(2m, 4m)$ da modulação QAMS uniforme sobre o $T$.

Observe, na Figura 5.2.2 b), que o mergulho de $G\,(2m, 4m)$ sobre o toro é um mergulho de 2-células uniforme definido pela seguinte partição

$$G\,(2m, 4m) \hookrightarrow T\,(a, b) \equiv 2mR_4,\ \ m \geq 2. \tag{5.6}$$

que atende a condição de uma modulação $2m$-QAMS sobre o toro vindo de um mergulho de 2-células.

Veja que a coordenada do vértice $p_i$ de $G$ sobre a geodésica máxima $\lambda_2$ do toro $T\,(a, b)$ é dada por

$$p_i = (b + a)\,(\cos\,(2\pi i/m)\,, \sin\,(2\pi i/m)\,, 0)\,,\ \ i \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$$

e a coordenada do vértice $q_j$ de $G$ sobre a geodésica mínima $\lambda_1$ do toro $T\,(a, b)$ é dada por

$$q_j = (b - a)\,(\cos\,(2\pi j/m)\,, \sin\,(2\pi j/m)\,, 0)\,,\ \ j \in \{0, 1, \cdots, m-1\}\,.$$

**Definição 5.2.2** *Seja* $A = \left\{s'_0, s'_1, \cdots, s'_{2m-1}\right\}$ *o conjunto de* $2m$ *sinais sobre o toro definidos pelas coordenadas*

$$s'_i = (b\cos\,((2i+1)\,\pi/m)\,, b\sin\,((2i+1)\,\pi/m)\,, a)\,,\ \ i \in \{0, 1, \cdots, m-1\} \tag{5.7}$$

*e*

$$s'_{i+m} = (b\cos\,((2i+1)\,\pi/m)\,, b\sin\,((2i+1)\,\pi/m)\,, -a)\,,\ \ i \in \{0, 1, \cdots, m-1\}\,. \tag{5.8}$$

*Chamaremos de* modulação $m$-QAMS uniforme sobre as curvas paralelas $\lambda_3$ e $\lambda_4$ de $T\,(a, b)$, MUCPT, *a modulação sobre* $T$ *cujas regiões de decisão são as* $2m$ *regiões de 2-células definidas pela partição do mergulho do grafo* $G\,(2m, 4m)$ *da Figura 5.2.2.*

A região de Voronoi $D_i'$ de MUCPT é definida pela sequência orbital $\gamma_i$. No caso da modulação da Figura 5.2.3, as regiões de Voronoi são dadas por

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= (0,1,5,4)\,, \gamma_1 = (1,2,6,5)\,, \gamma_2 = (2,3,7,6)\,, \gamma_3 = (3,0,4,7)\,,\\ \gamma_4 &= (4,5,1,0)\,, \gamma_5 = (5,6,2,1)\,, \gamma_6 = (6,7,3,2)\,, \gamma_7 = (7,4,3,0)\,.\end{aligned}$$

Observamos que o sinal $s_i'$ da constelação $A = \left\{s_0', s_1', \cdots, s_{m-1}', s_m', s_{m+1}', \cdots, s_{2m-1}'\right\}$ de MUCPT é tomado no centro da região $D_i'$ do toro, isto é, sobre as curvas $\lambda_3$ e $\lambda_4$ no ponto médio do arco definido pelos pontos $p_i$'s em $\lambda_3$ e $q_i$'s em $\lambda_4$. Os sinais $s_i'$'s da equação (5.7) e (5.8) estão definidos sobre as curvas $\lambda_3$ e $\lambda_4$ respectivamente.

Pela Seção 3.4, o projeto da modulação QAMS sobre o toro é a imagem da aplicação $\Psi$ definida em (3.5) do modelo planar do mergulho $\Pi_p$. Sendo assim, as coordenadas dos vértices $v_i$'s do modelo planar $\Pi_p$ de MUCPT, são dadas por

$$\begin{aligned}v_i &= (2\pi i/m, 0)\,,\ i \in \{0,1,\cdots,m-1\}\,, && (5.9(a))\\ v_{i+m} &= (2\pi i/m, \pi)\,,\ i \in \{0,1,\cdots,m-1\}\,, && (5.9(b))\end{aligned}$$

e as coordenadas dos sinais $s_i$'s são dadas por

$$\begin{aligned}s_i &= ((2i+1)\,\pi/m, \pi/2)\,,\ i \in \{0,1,\cdots,m-1\}\,, && (5.10(a))\\ s_{i+m} &= ((2i+1)\,\pi/m, 3\pi/2)\,,\ i \in \{0,1,\cdots,m-1\}\,, && (5.10(b))\end{aligned}$$

onde, $\Psi(v_i) = p_i$, $\Psi(v_{i+m}) = q_i$, $\Psi(s_i) = s_i'$, e $\Psi(s_{i+m}) = s_{i+m}'$, $i \in \{0,1,\cdots,m-1\}$ para um toro $T(1,3)$.

| $i$ | $v_i$ | $\Psi(v_i)$ | $s_i$ | $\Psi(s_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $(0,0)$ | $(4,0,0)$ | $(\pi/4,\pi/2)$ | $\left(3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2, 1\right)$ |
| 1 | $(\pi/2,0)$ | $(0,4,0)$ | $(3\pi/4,\pi/2)$ | $\left(-3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2, 1\right)$ |
| 2 | $(\pi,0)$ | $(-4,0,0)$ | $(5\pi/4,\pi/2)$ | $\left(-3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2, 1\right)$ |
| 3 | $(3\pi/2,0)$ | $(0,-4,0)$ | $(7\pi/4,\pi/2)$ | $\left(3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2, 1\right)$ |
| 4 | $(0,\pi)$ | $(2,0,0)$ | $(\pi/4,3\pi/2)$ | $\left(3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2, -1\right)$ |
| 5 | $(\pi/2,\pi)$ | $(0,2,0)$ | $(3\pi/4,3\pi/2)$ | $\left(-3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2, -1\right)$ |
| 6 | $(\pi,\pi)$ | $(-2,0,0)$ | $(5\pi/4,3\pi/2)$ | $\left(-3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2, -1\right)$ |
| 7 | $(3\pi/2,\pi)$ | $(0,-2,0)$ | $(7\pi/4,3\pi/2)$ | $\left(3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2, -1\right)$ |

Tabela 5.2.1: Coordenadas dos pontos $v_i$, $s_i$, $\Psi(vi)$ e $\Psi(s_i)$ para $m = 4$.

Utilizando as equações $(5.9(a))$, $(5.9(b))$,$(5.10(a))$ e $(5.10(b))$, no caso particular de $m = 4$, as coordenadas do vértice $v_i$ e do sinal $s_i$, $i \in \{0,1,\cdots,7\}$ sobre os modelos planar e espacial de MUCPT são como os relacionados na Tabela 5.2.1.

Os projetos geométricos de MUCPT para 8 sinais ($m = 4$), isto é, uma modulação 8-QAMS uniforme são vistos na Figura 5.2.4. A Figura 5.2.4 mostra os modelos planar e espacial das respectivas MUCPT's sobre o toro construídos no *software Mathematica*.

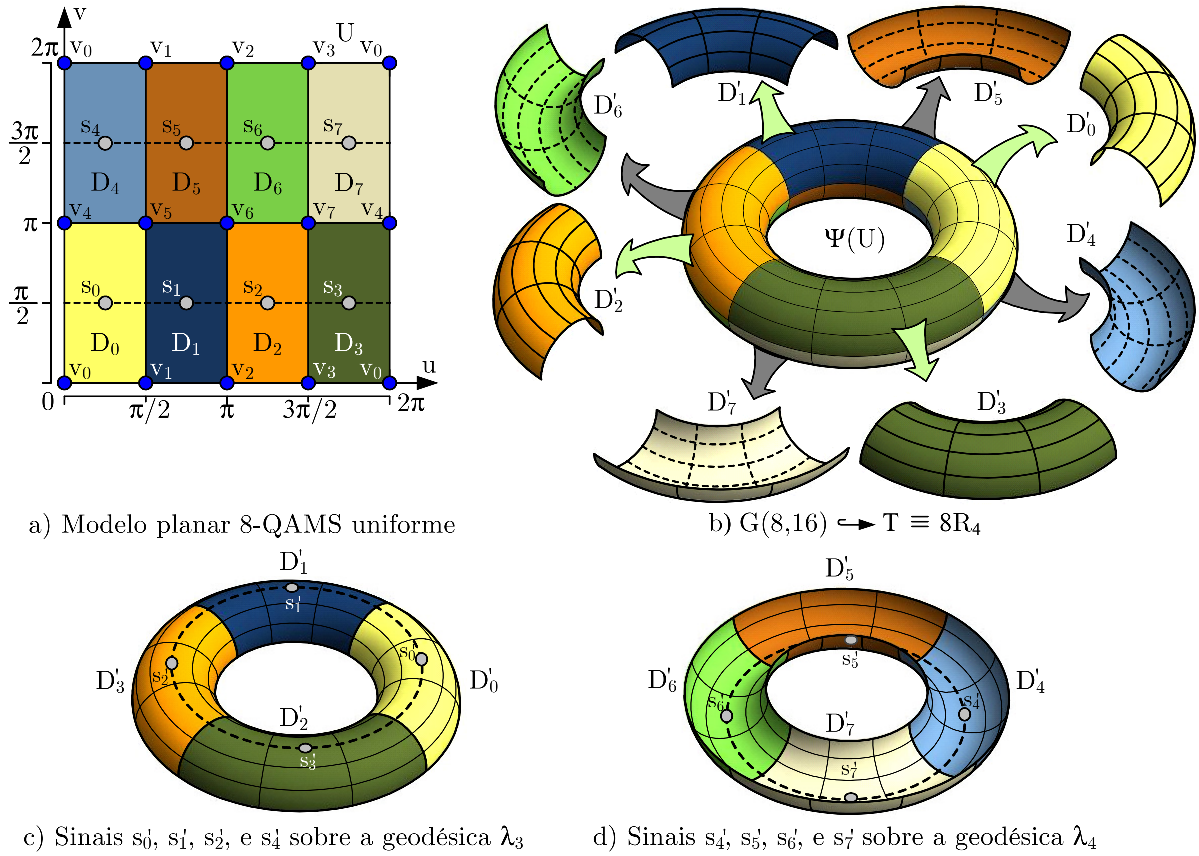



Figura 5.2.4: Modelos planar e espacial de MUCPT para 8 sinais.

A Figura 5.2.4 a) contém o modelo planar do mergulho do grafo $G\,(8, 16)$ sobre $T$: os vértices $v_0$ $v_1$ $v_2$ e $v_3$ pertencem à curva $v = 0$, os vértices $v_4$ $v_5$ $v_6$ e $v_7$ pertencem à curva $v = \pi$. O traço das curvas $v = 0$ e $v = \pi$ correspondem às geodésicas $\lambda_2$ e $\lambda_1$. Os sinais $s_0$ $s_1$ $s_2$ e $s_3$ estão definidos sobre a curva $v = \pi/2$, os sinais $s_4$ $s_5$ $s_6$ e $s_7$ encontram-se sobre a curva $v = 3\pi/2$. O traço das curvas $v = \pi/2$ e $v = 3\pi/2$ correspondem as curvas paralelas $\lambda_3$ e $\lambda_4$.

No modelo espacial de MUCPT na Figura 5.2.4 b), a disposição das regiões $D_i'$'s da modulação 8-QAMT uniforme podem ser observadas. A curva $\lambda_3$, os sinais $s_0'$ $s_1'$ $s_2'$ e $s_3'$ e as regiões de decisão $D_0'$, $D_1'$, $D_2'$ e $D_3'$, podem ser vistos na Figura 5.2.4 c). Por último, na Figura 5.2.4 d) são apresentadas as regiões $D_4'$, $D_5'$, $D_6'$ e $D_7'$, destacando-se os sinais $s_4'$ $s_5'$ $s_6'$ e $s_7'$ sobre a curva $\lambda_4$.

## 5.3 Modulação $2m$-QAMS Uniforme Rotacionada do Toro

Na MUCPT aplicando-se uma rotação sobre a região $T_{\lambda_4}$ em torno do eixo $z$, percebemos que é possível obter outra modulação QAMS uniforme. Nesta seção, construiremos uma modulação QAMS uniforme para $2m$ sinais sobre as curvas paralelas do toro rotacionando a região $T_{\lambda_4}$.

Inicialmente, dividiremos as geodésicas $\lambda_1$ e $\lambda_2$ de $T\,(a,b)$ em $2m$ arcos congruentes pelos pontos $p_j \in \lambda_2$ e $q_j \in \lambda_1$, $j \in \{0, 1, \cdots, 2m-1\}$. Da secção do toro $T\,(a,b)$ pelo plano $\Pi$ obtem-se duas regiões congruentes $T_{\lambda_3}$ e $T_{\lambda_4}$ conforme ilustrado na Figura 5.2.1. Agora, divide-se a região $T_{\lambda_3}$, Figura 5.2.1 b), em $m$ regiões congruentes pelo semiplano ortogonal $\Pi_j$ tais que $q_j = \lambda_1 \cap \Pi_j$ e $p_j = \lambda_2 \cap \Pi_i$, sendo $j$ ímpar.

De modo semelhante, a região $T_{\lambda_4}$, Figura 5.2.1 c), também será dividida em $m$ regiões pelo semiplano ortogonal $\Pi_j$ tal que $q_j = \lambda_1 \cap \Pi_j$ e $p_j = \lambda_2 \cap \Pi_j$, sendo $j$ par. Logo, os $2m$ planos ortogonais $\Pi_j$, particionam o toro em $2m$ regiões congruentes semitubulares de seis lados cada uma. A Figura 5.3.1 mostra a partição do toro em 8 regiões congruentes, para $m = 4$.

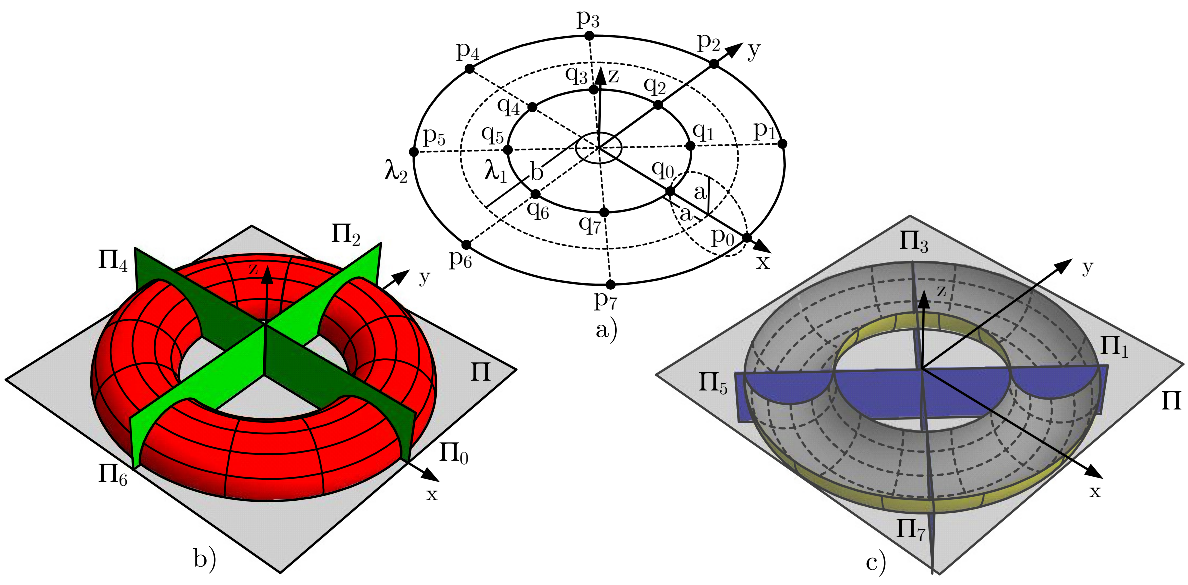



Figura 5.3.1: Partição do toro em 8 regiões congruentes.

Os Pontos $p_j$ e $q_j$, $j = 0, 1, \cdots, 7$, na Figura 5.3.1 a), particionam as geodésicas $\lambda_2$ e $\lambda_1$ em 8 arcos congruentes. Em b), $\Pi_0, \Pi_2, \Pi_4, \Pi_6$ e $\Pi$ particionam $T_{\lambda_3}$ em 4 regiões congruentes. Já em c), $\Pi_1, \Pi_3, \Pi_5, \Pi_7$ e $\Pi$ particionam $T_{\lambda_4}$ em outras 4 regiões congruentes.

Seja $G\left(4m,6m\right)$ o grafo definido sobre as geodésicas do toro $\lambda_1,\lambda_2$ e sobre as curvas $\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_{2m-1}$, onde $\mu_j=\Pi_j\cap T_{\gamma 3}$, $j$ ímpar e $\mu_j=\Pi_j\cap T_{\gamma 4}$, $j$ par, sobre os dois conjuntos de vértices $C=\{p_0,p_1,\cdots,p_{2m-1}\}$ e $D=\{q_0,q_1,\cdots,q_{2m-1}\}$. Os vértices do conjunto $C$ dividem $\lambda_2$ em $2m$ arcos e os vértices de $D$ dividem $\lambda_1$ em $2m$ arcos e as geodésicas $\mu_i$ formam $2m$ arcos que ligam os pontos $p_j$ e $q_j$. Veja que o grafo $G$ é da forma ilustrada na Figura 5.3.2.

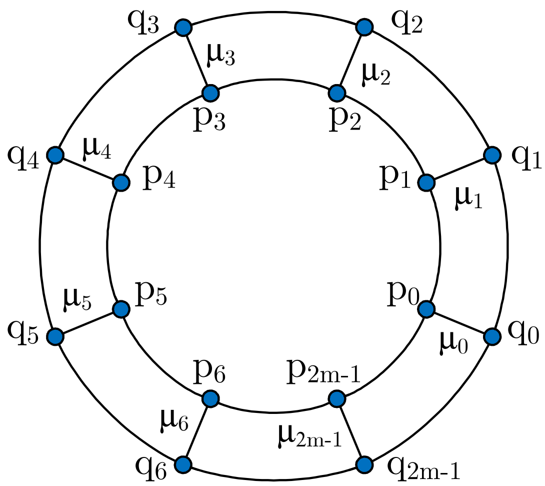



Figura 5.3.2: Grafo $G\left(4m,6m\right)$ da modulação QAMS uniforme sobre o $T$.

Veja que o mergulho de $G\left(4m,6m\right)$ sobre o toro $T\left(a,b\right)$ é um mergulho de 2-células uniforme definido pela seguinte partição

$$G\left(4m,6m\right)\hookrightarrow T\left(a,b\right)\equiv 2mR_6,\ m\geq 2. \tag{5.3.0}$$

Como o conjunto de pontos $p_j$ pertencem a geodésica máxima $\lambda_2$ e o os pontos $q_j$ pertencem a geodésica mínima $\lambda_1$, a coordenada do vértice $p_j$ do grafo $G$ sobre $T\left(a,b\right)$ é dadas por

$$p_j=\left(b+a\right)\left(\cos\left(\pi j/m\right),\sin\left(\pi j/m\right),0\right),\ j\in\{0,1,\cdots,2m-1\}, \tag{5.11}$$

e a coordenada do vértice $q_j$

$$q_j=\left(b-a\right)\left(\cos\left(\pi j/m\right),\sin\left(\pi j/m\right),0\right),\ j\in\{0,1,\cdots,2m-1\}. \tag{5.12}$$

**Definição 5.3.1** *Seja* $A=\left\{s'_0,s'_1,\cdots,s'_{2m-1}\right\}$ *o conjunto de* $2m$ *sinais sobre o toro definidos pelas coordenadas*

$$s'_i=\left(b\cos\left(\left(2i+1\right)\pi/m\right),b\sin\left(\left(2i+1\right)\pi/m\right),a\right),\ i\in\{0,1,\cdots,m-1\}, \tag{5.13}$$

*se $s_i \in \lambda_3$ e, se $s_{i+m} \in \lambda_4$, temos que*

$$s'_{i+m} = (b\cos((2i+2)\pi/m), b\sin((2i+2)\pi/m), -a), \ i \in \{0,1,\cdots,m-1\}. \quad (5.14)$$

*Chamaremos de* modulação $m$-QAMS uniforme rotacionada sobre as curvas paralelas $\lambda_3$ e $\lambda_4$ de $T(a,b)$, MURCPT*, a modulação sobre $T$ cujas regiões de decisão são as $2m$ regiões de 2-células definidas pela partição do mergulho do grafo $G(4m,6m)$ da Figura 5.3.2.*

Segue da Definição 2.4.1, que a partição $2mR_6$, obtida do mergulho do $G(4m,6m)$, são regiões de 2-células. Deste modo, a partição $2mR_6$ define uma modulação MURCPT para um constelação de $2m$ sinais sobre regiões de Voronoi hexagonais.

Além disso, pela Seção 3.4, o projeto da modulação $2m$-QAMS sobre o toro é a imagem da aplicação $\Psi$ definida em (3.5) do modelo planar do mergulho $\Pi_p$. Sendo assim, a modulação $2m$-QAMS uniforme sobre as geodésicas paralelas rotacionada, possui um modelo planar equivalente. Neste modelo planar, a coordenada do vértice $v_j$ é dada por

$$v_j = (\pi j/m, 0), \ j \in \{0,1,\cdots,2m-1\}, \quad (5.15(a))$$
$$v_{j+m} = (\pi j/m, \pi), \ j \in \{0,1,\cdots,2m-1\}, \quad (5.15(b))$$

para o sinal $s_i$, a coordenada é dada por

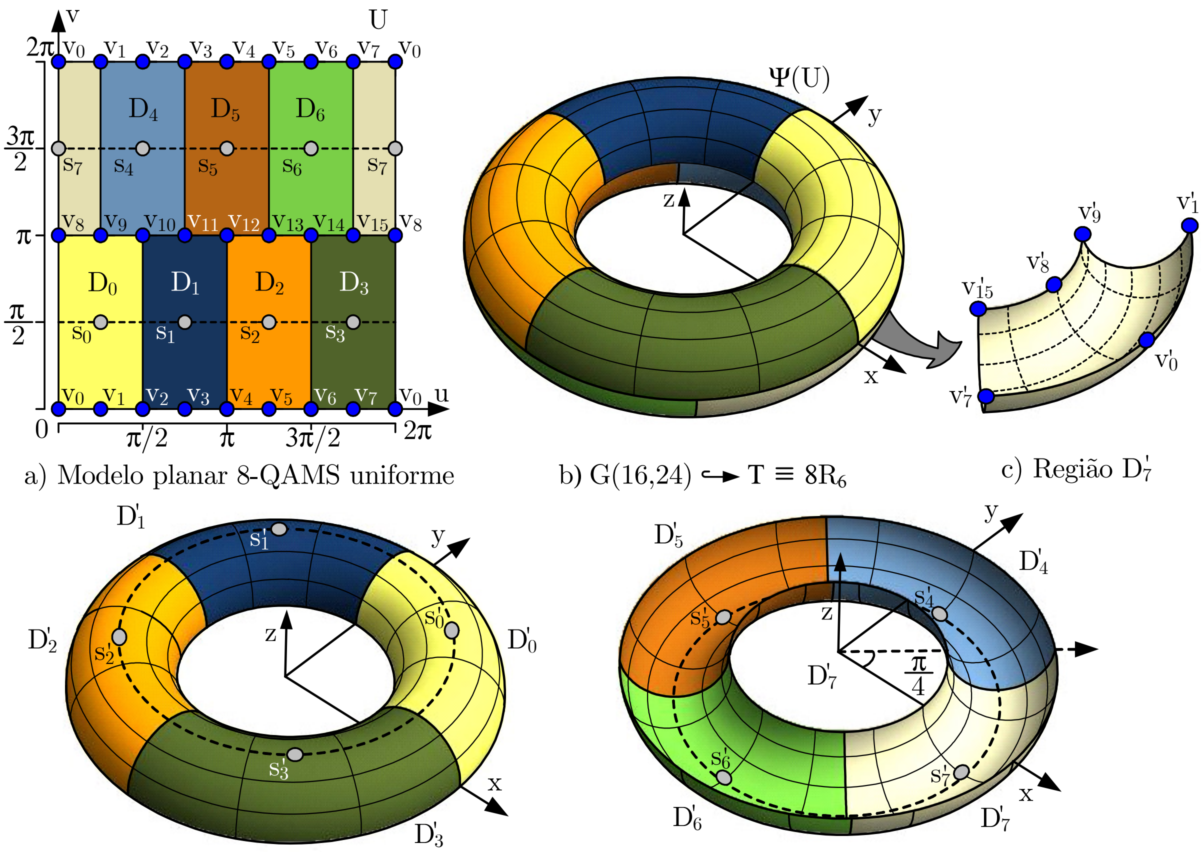
$$s_i = ((2i+1)\pi/m, \pi/2), \ i \in \{0,1,\cdots,m-1\}, \quad (5.16(a))$$
$$s_{i+m} = ((2i+2)\pi/m, 3\pi/2), \ i \in \{0,1,\cdots,m-1\}, \quad (5.16(b))$$

onde, $\Psi(v_j) = p_j$, $\Psi(v_{j+m}) = q_j$, $j \in \{0,1,\cdots,2m-1\}$, $\Psi(s_i) = s'_i$, $\Psi(s_{i+m}) = s'_{i+m}$, $i = \{0,1,\cdots,m-1\}$. Lembramos que na aplicação $\Psi$ definda em (3.5), no toro $T(a,b)$ consideramos que $a=1$ e $b=3$.

Os modelos planar e espacial do projeto geométrico, da modulação 8-QAMS, $m=4$, do tipo MURCPT, são ilustrados na Figura 5.3.3.

O modelo planar de MURCPT para 8 sinais, vinda do mergulho do grafo $G(16,24)$, é ilustrado na Figura 5.3.3 a). O modelo espacial obtido da parametrização $\Psi$ é mostrado em b). Em c), destacamos a região $D'_7$ que, apesar de congruentes as demais regiões da modulação 8-QAMS sobre as geodésicas paralelas, ver Figura 5.2.4 b), são regiões formadas por seis lados.

A Figura 5.3.3 d) mostra as regiões de decisões $D'_0, D'_1, D'_2$ e $D'_3$ e os sinais $s'_0, s'_1, s'_2$ e $s'_3$ sobre a curva $\lambda_3$. As regiões $D'_4, D'_5, D'_6$ e $D'_7$ e os sinais $s'_4, s'_5, s'_6$ e $s'_7$ sobre a curva $\lambda_4$ são mostradas na Figura 5.2.4 e). Observe que essas regiões foram rotacionadas $\pi/4$ graus em torno do eixo $z$.




a) Modelo planar 8-QAMS uniforme

b) $G(16,24) \hookrightarrow T \equiv 8R_6$

c) Região $D'_7$

d) Sinais $s'_0$, $s'_1$, $s'_2$, e $s'_4$ sobre a curva $\lambda_3$

e) Sinais $s'_4$, $s'_5$, $s'_6$, e $s'_7$ sobre a curva $\lambda_4$

Figura 5.3.3: Modelos planar e espacial de MURCPT para 8 sinais.

De modo geral, quando comparamos as regiões de decisão pertencentes à $T_{\lambda_3}$ e $T_{\lambda_4}$ de MURCPT para $2m$ sinais, verificamos que as regiões de $T_{\lambda_4}$ são rotacionadas $\pi/m$ graus em torno do eixo $z$.

## 5.4 Desempenho das Modulações QAMS Uniformes

Uma análise do desempenho das modulações uniformes toroidais QAMS introduzidas nas Seções 5.1-5.3 é de extrema importância para comparar a eficiência de um projeto em relação aos demais. O ideal seria analisar o desempenho através de simulações como foi feito no Capítulo 4. No entanto, é possível fazer uma análise de desempenho observando as propriedades geométricas das modulações. Com isto, economizamos tempo e como as deduções vem de relações matemáticas os resultados são até mais precisos.

Analisaremos, em primeiro lugar, sob condições idênticas, a probabilidade de erro médio de transmissão de sinais das modulações uniformes.

**Notação 5.4.1** *Para efeito de simplificação adotaremos as seguintes denominações* $M_1 =$ MUGMT*,* $M_2 =$ MUCPT *e* $M_3 =$ MURCPT*.*

Levando em consideração que o ruído atua numa região esférica do espaço tridimensional de raio $r$, a eficiência do sinal transmitido depende do valor de $r$. Este é um dos principais parâmetro que influencia o desempenho da modulação.

**Observação 5.4.2** *Dadas as modulações* $M_1$ *e* $M_2$ *de raios, seja* $r_i^j$ *o raio da esfera da região de decisão* $D_i^j$ *da modulação* $M_j$*,* $j = 1, 2$*, centrada em* $s_i$*. Se* $r_i^1 < r_k^2$*, então* $p_e(s_k^2) < p_e(s_i^1)$*. Se* $p_e(s_k^2) < p_e(s_i^1)$ *então* $M_2$ *é mais eficiente do que* $M_1$*.*

Pela Observação 5.4.2, quanto maior for o valor do raio $r$, menor será a probabilidade de erro de transmissão dos sinais da constelação e consequentemente, mais eficiente. Portanto, podemos analisar a probabilidade de erro médio dos sinais transmitidos através do raio $r$ destas modulações uniformes.

Uma vez que, para cada $j = 1, 2, 3$, $M_j$ se encontra sobre o mesmo toro e os sinais $s_i$ possuem a mesma energia, iremos analisar inicialmente os desempenhos das modulações MUGMT e MUCPT.

### 5.4.1 Desempenho das modulações MUGMT e MUCPT

Se as modulações MUGMT e MUCPT possuem o mesmo número de sinais e se encontram sobre o mesmo toro, então a mais eficiente será aquela que apresenta o maior raio de região de decisão. Então iremos comparar modulações MUGMT e MUCPT sob estas condições.

**Teorema 5.4.3** *Suponha que* $M_1$ *e* $M_2$ *encontram-se sobre o toro* $T(a, b)$ *e são da forma* $2m$-QAMS*, então o raio* $r_i^j$ *da região de decisão dos sinais* $s_i \in M_j$*,* $j = 1, 2$ *satisfaz as condições:*

$$\begin{aligned} r_i^1 &= (a+b)\sin\frac{\pi}{2m} \\ r_k^2 &= \begin{cases} a, & se\ a \leq b\sin\frac{\pi}{m} \\ b\sin\frac{\pi}{m}, & se\ a > b\sin\frac{\pi}{m}. \end{cases} \end{aligned}$$

**Demonstração.** Quanto aos $2m$ sinais $s_j^i$'s de $M_1$, estes estão distribuídos sobre a geodésica máxima $\lambda_2$ do toro, e portanto $\lambda_2$ é dividida em $2m$ arcos congruentes a $AB$. Então o raio $r_i^1$ da região de decisão do sinal $s_i^1$ é a metade da distância da corda $\overline{AB}$ do arco $AB$, como mostra a Figura 5.4.1 b). Logo,

$$r_i^1 = (a+b)\sin\frac{\pi}{2m}.$$

Por outro lado, os $2m$ sinais de $M_2$ encontram-se sobre as curvas paralelas $\lambda_3$ e $\lambda_4$, distribuídos em pares alinhados, particionando-as em $m$ arcos congruentes $CD$.

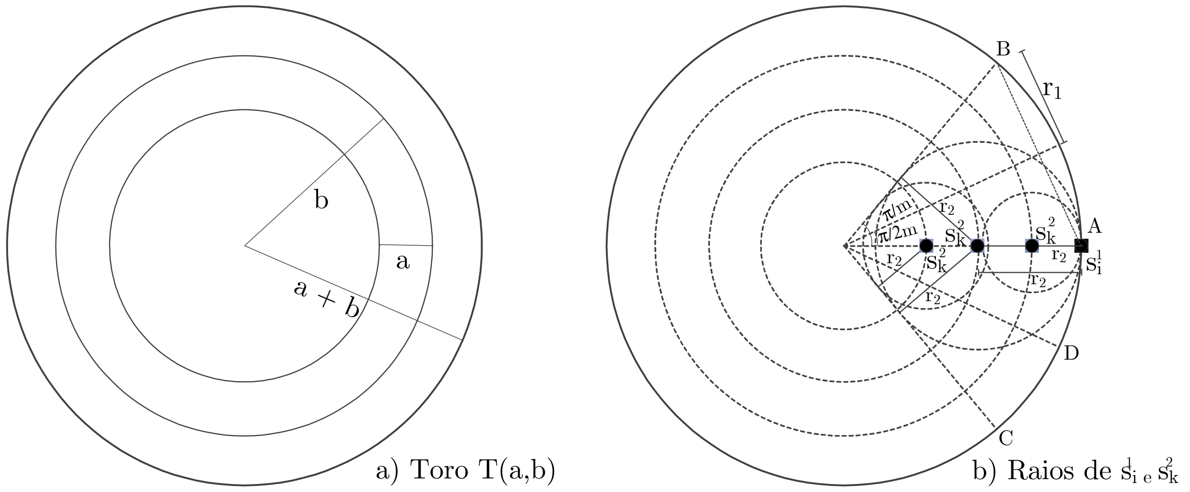



Figura 5.4.1: Raios das regiões de decisão das modulações $M_1$ e $M_2$.

Mas, devido a interseção das regiões de decisão de $M_2$ o raio $r_k^2$ depende de $a$ e da distância entre $a$ e a reta $0B$ como mostra a Figura 5.4.1 b). Ou seja, para não ocorrer interferência intersimbólica devemos ter

$$r_k^2 = \begin{cases} a, \ a \leq b \sin \frac{\pi}{2m} \\ b \sin \frac{\pi}{m}, \text{ se } a > b \sin \frac{\pi}{2m}, \end{cases}$$

o que mostra a afirmação. ■

A dúvida agora é saber se o desempenho de uma das modulações em relação a outra é maior ou menor. Como o raio da geodésica máxima do toro $T(a,b)$ é dado por $r(\lambda_2) = a + b$, suponhamos que $r(\lambda_2) = c$, e consideremos o raio $a$ como uma função do raio $b$ tal que $a = c - b$. Tomando valores diferentes para $a$, $0 < a < b/2$, constatamos que o raio $r_k^2$ da região de decisão $D_k$, centrada em $s_k^2$ de $M_2$, varia conforme os gráficos apresentados na Figura 5.4.1.

Observe que o raio $r_k^2 < r_i^1$, se $0 < a < (a+b) \sin \frac{\pi}{2m}$ e $r_k^2 \geq r_i^1$, se $a \geq (a+b) \sin \frac{\pi}{2m}$. Consequentemente, para $\varepsilon(M_i)$, $i = 1, 2$, a eficiência da modulação $M_i$, temos que $\varepsilon(M_1) > \varepsilon(M_2)$, na região clara da Figura 5.4.2, e $\varepsilon(M_1) < \varepsilon(M_2)$ na região escura de Figura 5.4.2.

Na Figura 5.4.2, representamos três situações em que o valor de $a$ no toro $T(a,b)$ aumenta, a soma $a+b$ é mantida constante. Consequentemente $b$ diminui como também o valor de $b \sin \pi/m$. Segue daí a forma decrescente da representação gráfica apresentada na Figura 5.4.2.

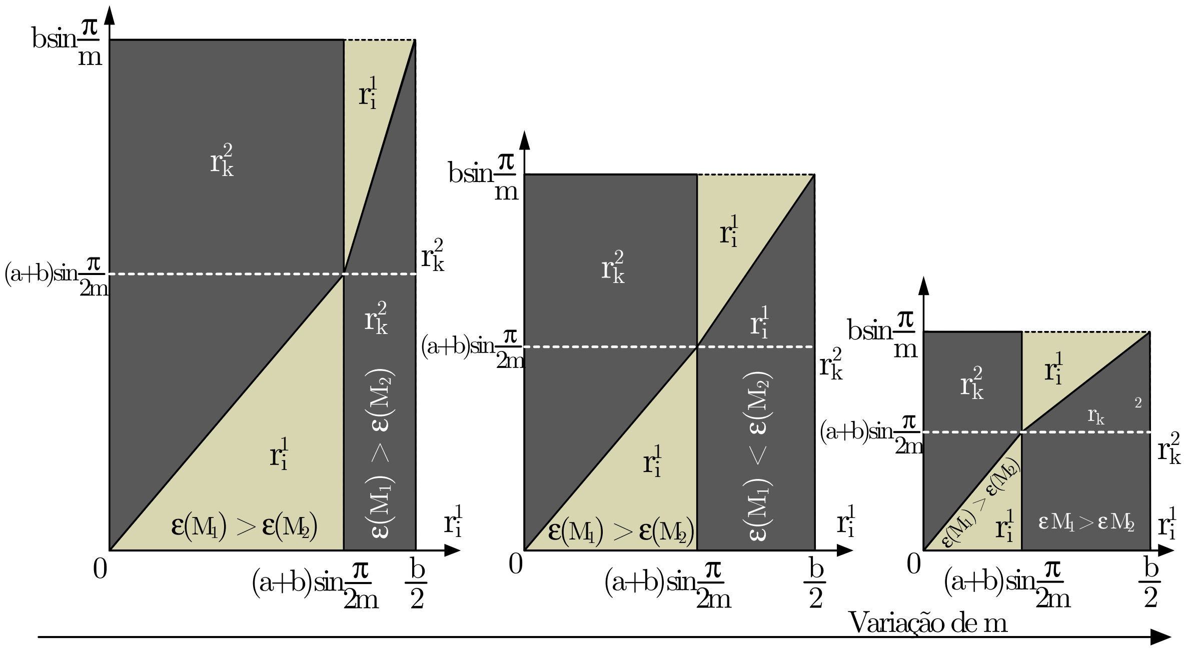



Figura 5.4.2: Estudo da variação de desempenho das modulações MUGMT e MUCPT em função dos raios.

Observamos ainda na Figura 5.4.2 que, à medida que o número de sinais das modulações MUGMT e MUCPT aumenta, o raio $r_i^1$ fica menor que $r_k^2$, e portanto, a modulação MUCPT será mais eficiente do que a modulação MUCPT.

Deduzimos então que devemos analisar os desempenhos de MUGMT e MUCPT quando $a + b = c$, isto é, quando $b = c - a$ com $m \geq 2$. Os gráficos da Figura 5.4.3 mostram o comportamento da curva formada pelos raios $r_k^2$ e $r_i^1$ em função de $m$ para $a + b = 4$ e para $a$ quando este assume os valores 1, 1.3, 1.6, e 1.9 (notação de ponto flutuante).

Analisando o gráfico da Figura 5.4.3 a) quando $a = 1$ e $b = 3$, verificamos que para determinados valores de $m$ o raio da modulação $M_1$ é maior do que o raio da modulação $M_2$. No entanto, observamos que, á medida que o valor de $m$ aumenta, o raio da modulação $M_2$ se torna maior do que o raio da modulação $M_1$. Portanto, concluímos que existem valores de $m$ para os quais o raio da modulação $M_2$ é maior do que o raio da modulação $M_1$. Chegamos as mesmas conclusões quando da análise dos gráficos b) da Figura 5.4.3 nos casos em que $a = 1.3$ e $b = 2.7$, da análise do gráfico c) da Figura 5.4.3, para valores de $a = 1.6$ e $b = 2.4$ e também do gráfico d) da Figura 5.4.3, para os valores $a = 1.9$ e $b = 2.1$.

Logo, podemos concluir que o raio da modulação $M_1$ em relação a modulação $M_2$ pode ser maior ou menor, isto irá depender dos valor de $m$. Sendo assim, pela observação

5.4.2 a eficiência da modulação $M_1$ pode ser maior ou menor do que a modulação $M_2$.

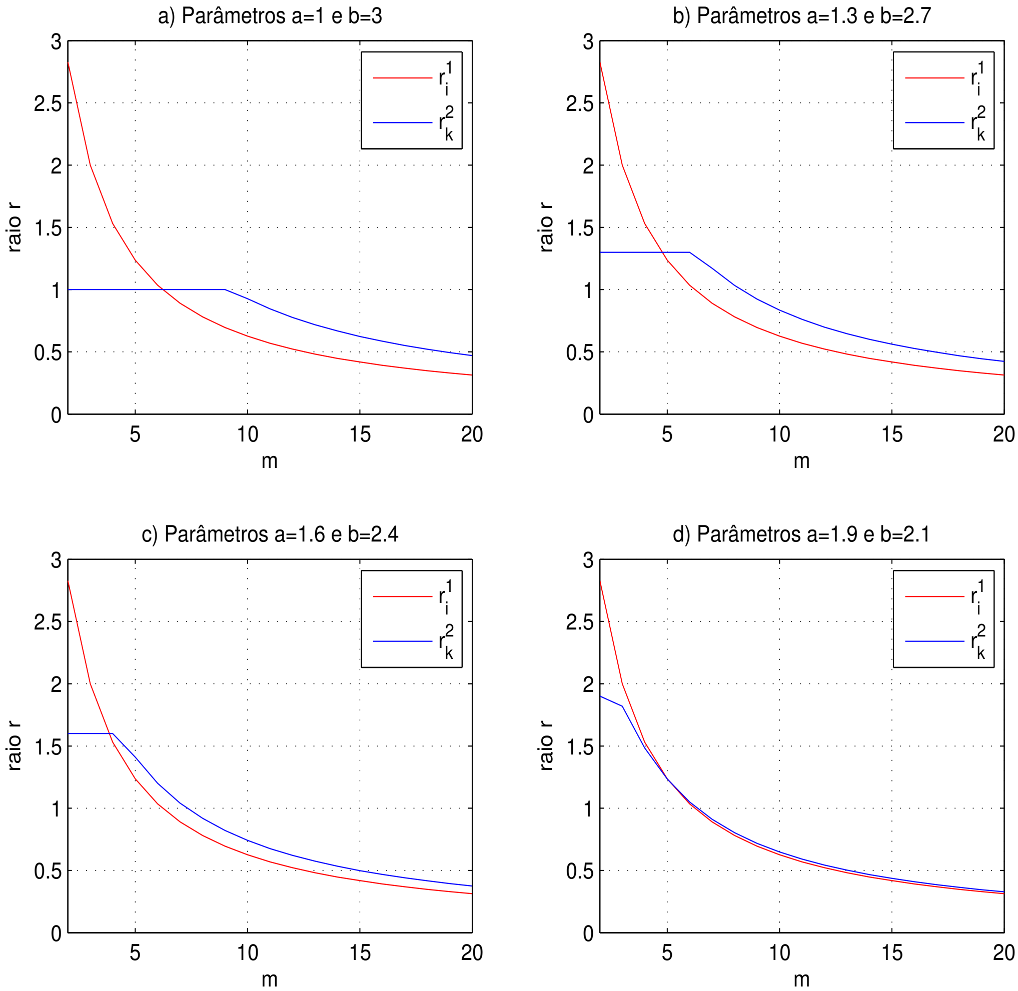



Figura 5.4.3: Curva dos raios $r_i^1$ e $r_k^2$ em função de $m$.

Para sermos mais específicos sobre o desempenho da modulação $M_1$ e $M_2$, concluímos após uma análise dos gráficos da Figura 5.4.2 que:

a) De um modo geral o desempenho de $M_2$ é melhor que o desempenho de $M_1$;

b) O desempenho de $M_1$ é maior do que o de $M_2$ somente nos casos em que $m$ é aproximadamente menor ou igual a 6;

c) À medida que o parâmetro $a$ converge para $b/2$ o desempenho das modulações $M_1$ tende ao desempenho da modulação $M_2$.

Segue das conclusões acima que, de um modo geral, $M_2$ é superior $M_1$, se $m \gtrapprox 6$; caso contrário, se $m \lessapprox 6$, então $M_1$ é mais eficiente do que $M_2$. Quando $m$ é suficientemente grande, $M_1$ e $M_2$ possuem o mesmo desempenho.

### 5.4.2 Desempenho das modulações MUGMT e MURCPT

No caso da modulação MURCPT considerando que esta possui $2m$ sinais, o raio $r_j^3$ da região de decisão $D_j$ centrado em $s'_j$ será dado pela metade da distância entre um sinal $s'_j \in \lambda_3$ e o sinal $s'_{j+m} \in \lambda_4$, isto é

$$r_j^3 = \frac{||s'_{j+m} - s'_j||}{2}.$$

Utilizando as equações da constelação de sinais da Definição 5.3.1 para $j = 0$, temos

$$\begin{aligned} s'_0 &= \left(b\cos\left(\pi/m\right), b\sin\left(\pi/m\right), a\right), \\ s'_m &= \left(b\cos\left(2\pi/m\right), b\sin\left(2\pi/m\right), -a\right), \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} r_j^3 &= \frac{||s'_m - s'_0||}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\left(b\cos\left(2\pi/m\right) - b\cos\left(\pi/m\right)\right)^2 + \left(b\sin\left(2\pi/m\right) - b\sin\left(\pi/m\right)\right)^2 + 4a^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2b^2\left(1 - \cos\pi/m\right) + 4a^2}}{2}, \end{aligned}$$

portanto, o raio $r_j^3$ da região de decisão dw MURCPT é dado por

$$r_j^3 = \frac{\sqrt{2b^2\left(1 - \cos\pi/m\right) + 4a^2}}{2} \tag{5.17}$$

Analisando os desempenhos das modulações MUGMT e MURCPT, sob os mesmos critérios utilizando para as análises de MUGMT e MUCPT na Seção 5.4.1, chegamos aos mesmos resultados: como $a + b = c$, então $b = c - a$. Iremos considerar modulações $2m$-QAMS tal que $m \geq 2$.

Recordemos que $r_i^1$ e $r_j^3$ são os raios das regiões de decisão das correspondentes modulações MUGMT e MURCPT . Os gráficos da Figura 5.4.4 mostram simultaneamente os valores dos $r_i^1$ e $r_j^3$ em função do valor $m$ no caso em que $a + b = 4$ e $a$ assume os seguintes valores reais 1, 1.3, 1.6 e 1.9 (pontos flutuantes).

Analisando os gráficos da Figura 5.4.4 chegamos as seguintes deduções:

a) O intervalo no qual o desempenho da modulação $M_3$ é inferior ao desempenho da modulação $M_1$ é muito pequeno em relação ao intervalo em o desempenho de $M_3$ é superior ao de $M_1$;

b) À medida que o número de sinais das constelações de $M_1$ e $M_3$ aumentar a eficiência de $M_3$ é muito maior do que a de $M_1$. Como consequência, a eficiência de $M_3$ é sempre superior a de $M_1$ quando $m$ tende a infinito;

c) Quando $m$ tende a zero, a eficiência de $M_1$ é maior do que a de $M_3$.

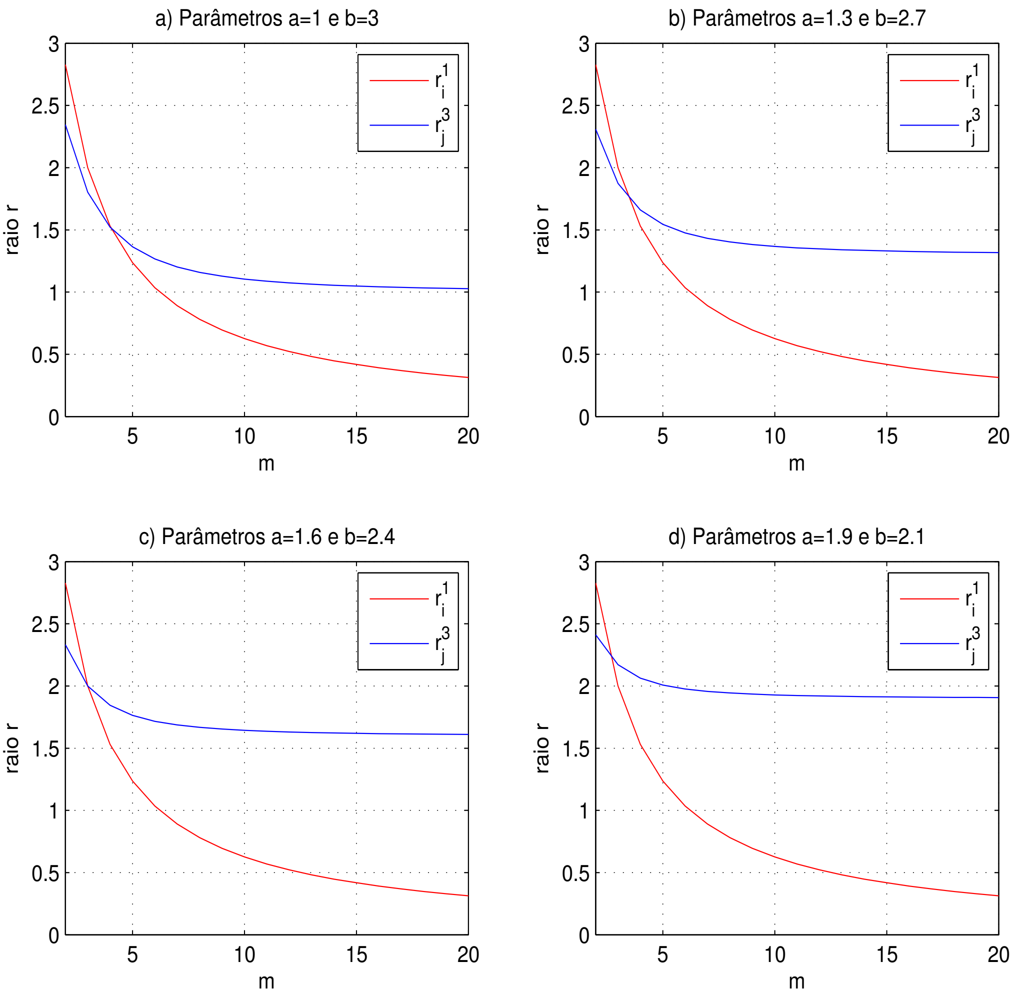



Figura 5.4.4: Curva dos raios $r_i^1$ e $r_j^3$ em função de $m$.

De modo geral, concluímos das observações anteriores que a modulação $M_3$ é mais eficiente do que a modulação $M_1$. A modulação $M_1$ só supera em eficiência a modulação $M_3$ nos casos em que $m$ é aproximadamente menor ou igual a 4. Levando em consideração que $m$ é um inteiro maior ou igual 2, podemos concluir que $M_1$ é superior a $M_2$ somente nos casos em $m = 2$ e $m = 3$.

### 5.4.3 Desempenho das modulações MUCPT e MURCPT

Finalmente, comparemos as modulações MUCPT e MURCPT denotadas respectivamente por $M_2$ e $M_3$. Na análise deste foi utilizado os mesmos parâmetros e critérios utilizados nas Seções 5.4.1 e 5.4.2.

Os resultados gráficos obtidos são apresentados na Figura 5.4.5.

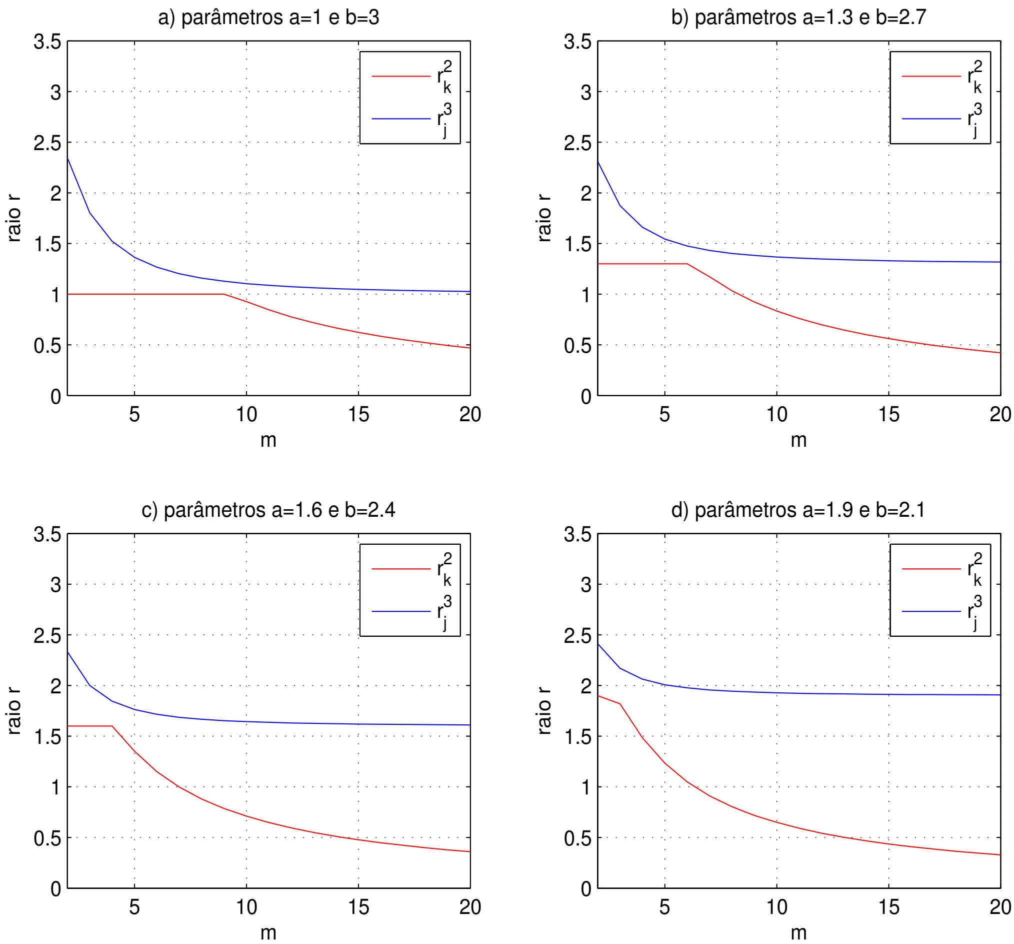



Figura 5.4.5: Curva dos raios $r_k^2$ e $r_j^3$ em função de $m$.

A análise dos gráficos da Figura 5.4.5 nos mostra claramente que $M_3$ é mais eficiente do que $M_2$ independente dos parâmetros $a$ e $b$ e da quantidade de sinais $m$ escolhidos, como é mostrado no próximo teorema.

**Teorema 5.4.4** *Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b/2$ e o inteiro $m \geq 2$, os raios $r_k^2$ e $r_j^3$ das respectivos modulações $M_2$ e $M_3$ são tais que $r_j^3 > r_k^2$.*

***Demonstração.*** *Seja $s_k^2$ e $s_j^3$ os sinais da modulação $M_2$ e $M_3$ respectivamente. Pelo Teorema (5.4.3) e pela equação (5.17) os raios das regiões de decisão de $s_k^2$ e $s_j^3$, $k, j \in \{0, 1, \cdots, 2m-1\}$ são dados por*

$$
\begin{aligned}
r_k^2 &= \begin{cases} a, & a \leq b \sin \frac{\pi}{m} \\ b \sin \frac{\pi}{m}, & se\ a > b \sin \frac{\pi}{m}, \end{cases} \\
r_j^3 &= \frac{\sqrt{2b^2 (1 - \cos \pi/m) + 4a^2}}{2}.
\end{aligned}
$$

*Veja que $\sqrt{2}/2 \leq \cos \pi/m < 1$,então, se $r_k^2 = a$ resulta que*

$$r_k^2 = a = \sqrt{\frac{2a^2}{2}} < \sqrt{\frac{b^2 (1 - \cos \pi/m) + 2a^2}{2}} = \frac{\sqrt{2b^2 (1 - \cos \pi/m) + 4a^2}}{2} = r_j^3.$$

*Concluímos portanto que $r_j^3 > r_k^2$.*

*Se $r_k^2 = b \sin \frac{\pi}{m}$*

$$r_k^2 = b \sin \frac{\pi}{m} \Longrightarrow a > b \sin \frac{\pi}{m}$$

*como*

$$r_j^3 > a \Longrightarrow r_j^3 > b \sin \frac{\pi}{m} \Longrightarrow r_j^3 > r_k^2.$$

*Portanto, $r_j^3 > r_k^2$.* ■

**Corolário 5.4.5** *Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b/2$ e o inteiro $m \geq 2$, modulação $M_3$ é mais eficiente do que a modulação $M_2$.*

**Demonstração.** Pelo Teorema 5.4.4 e Observação 5.4.2 segue que

$$r_i^1 < r_j^3 \Rightarrow p_e\left(s_j^3\right) < p_e\left(s_i^1\right).$$

Portanto, a modulação $M_3$ é mais eficiente do que a modulação $M_2$ para toda $a, b$ e $m$ satisfazendo as condições das hipóteses do corolário. ■

Da análise das partições do toro e de sua geometria, percebemos que é possível fazer outra partição uniforme. O próximo projeto de modulação QAMS uniforme será construído sobre a geodésica máxima, porém de forma distinta da apresentada na Seção 5.1.

## 5.5 Modulações $m$-QAMS Uniforme sobre a Geodésica Máxima de $T$ por Curvas Espirais

Da análise dos projetos de modulação QAMS uniforme sobre o toro construídos nas Seções 5.1-5.2, verificamos que, em nenhuma dessas modulações uniformes temos uma partição do toro em cinco regiões congruentes vinda do mergulho do grafo completo $K_5$, ou seja, não temos uma 5-QAMS uniforme tal que $K_5 \hookrightarrow T \equiv 5R_4$. Veja que MUGMT para $m = 5$ é uma modulação 5-QAMS uniforme, isto é, particiona em cinco regiões congruentes de quatro lados, contudo o grafo dessa partição não corresponde ao do grafo completo $K_5$.

O projeto de modulação 5-QAMS uniforme, $K_5 \hookrightarrow T \equiv 5R_4$, não foi possível de ser construído, apesar de várias tentativas realizadas no Capítulo 4, surgiu então questão: existe uma modulação 5-QAMS uniforme sobre o toro tal que $K_5 \hookrightarrow T \equiv 5R_4$? Após estudarmos as possibilidades de partição do toro em regiões congruentes, chegamos a conclusão de que esta modulação uniforme existe. Mas antes de construirmos essa 5-QAMS uniforme, vejamos como construir uma modulação $m$-QAMS por curvas espirais.

Seja $T\,(a,b)$ um toro de raios $a$ e $b$, $b > a$, centrado na origem do plano cartesiano tridimensional, e $\lambda_1$, $\gamma_2$ a geodésica mínima e máxima de $T$. Dados $m$ vértices $v_0, v_1, \cdots, v_{m-1}$ sobre a geodésica máxima de $T$, $\gamma_2 : x = 0$, $y \in \mathbb{R}$, de modo a dividi-la em $m$ arcos congruentes. Sabemos que a reta

$$\xi_1 = \overline{v_0 v_1 v_2 \cdots v_{m-1} v_0}, \ \forall m \geq 2$$

que passa pelos vértices $v_0, v_1, \cdots, v_{m-1}$, sobre modelo planar $\Pi_p$ de $T$, é uma curva fechada denominada de espiral de $m$ voltas no toro. Pela mesma razão as retas

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \overline{v_0 v_2 v_4 \cdots v_{m-2} v_0}, \text{ se } m \text{ par}, \\ \xi_3 &= \overline{v_1 v_3 v_5 \cdots v_{m-1} v_0}, \text{ se } m \text{ par}, \end{aligned}$$

são espirais fechadas de $m/2$ voltas cada uma, e também

$$\xi_4 = \overline{v_0 v_2 v_4 ... v_{m-1} v_1 v_3 \cdots v_{m-2} v_0}, \text{ se } m \text{ é ímpar},$$

é outra espiral fechada de $m$ voltas no toro.

Na Figura 5.5.1 iremos descrever, para o caso particular em que $m = 6$, as geodésicas do toro $\xi_1, \xi_2$ e $\xi_3$, sobre os modelos planar $\Pi_p$ e espacial $\Pi_\varepsilon$ do toro. Observamos que estas curvas podem apresentar características diferentes em ralação à paridade de seu rotulamento. Note que cada seguimento de reta no modelo planar equivale a uma volta da curva espiral sobre o toro. Além disso, observamos ainda que no caso de $m = 6$, $\xi_1, \xi_2$ e $\xi_3$ são três curvas fechadas distintas do toro.

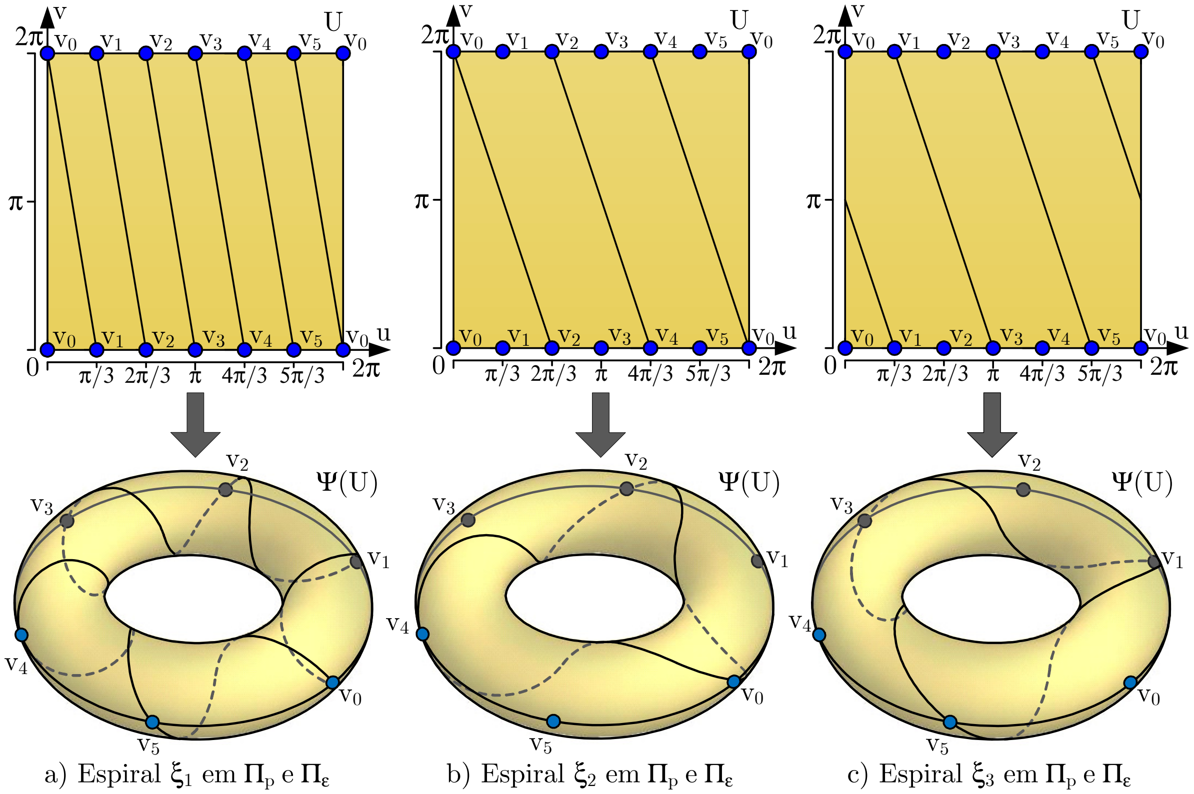



Figura 5.5.1: Modelos planar e espacial das espirais $\xi_1, \xi_2$ e $\xi_3$ para $m = 6$.

Utilizando as curvas espirais, podemos definir um grafo $G\,(m, 2m)$ de modo a obter uma partição uniforme do toro em $m$ regiões congruentes da forma

$$G\,(m, 2m) \hookrightarrow T\,(a, b) \equiv mR_4, \tag{5.18}$$

onde, as $m$ regiões de quatro lados são 2-células. Para isso, consideremos $G\,(m, 2m)$ o grafo definido sobre os vértices $v_0, v_1, \cdots, v_{m-1}$ sobre $\gamma_2$. Tomemos os $2m$ lados do grafo $G\,(m, 2m)$ como sendo as $2m$ voltas das espirais $\xi_1, \xi_2$ e $\xi_3$, se $m$ é par ou $\xi_1$ e $\xi_4$, se $m$ é ímpar. Veja que o grafo $G$ que define a partição uniforme sobre o toro é da forma ilustrada na Figura 5.5.2. Portanto esta é uma modulação do tipo QAMS, conforme as condições da Definição 2.4.1.

Observamos da Figura 5.5.2 que, no caso em que $m$ é um número par, a partição sobre o toro é gerada a partir do mergulho de 2-células de um grafo $G\,(m.2m)$ cujos vértices encontram-se sobre um polígono regular $P_m$ de $m$ lados, seus lados são constituídos pelos lados do polígono $P_m$ e dos lados dos polígonos regulares $P_\alpha$ e $P_\beta$, $\alpha = \beta = m/2$, os vértices de $P_a$ são os vértices pares de $P_m$ e os vértices de $P_\beta$ são os vértices ímpares de $P_m$.

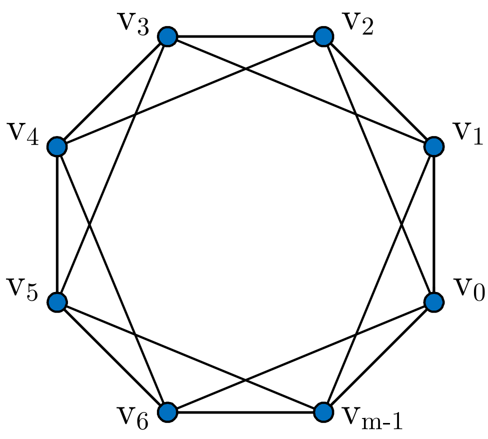



Figura 5.5.2: Grafo $G(m, 2m)$ da modulação $m$-QAMS uniforme sobre o $T$.

**Definição 5.5.1** *Chamaremos de* modulação sobre expirais do toro, MET*, a modulação* $m$-QAMS *uniforme de* $T(a, b)$ *vinda do mergulho de* $G(m, 2m)$ *definido pelas curvas expirais* $\xi_1$ *e* $\xi_4$*, se* $m$ *é ímpar ou* $\xi_1, \xi_2$ *e* $\xi_3$*, se* $m$ *é par.*

Pela igualdade (5.18), MET está definida sobre um partição uniforme composta de $m$ regiões congruentes de quatro lados, como será mostrado para o caso particular da modulação 5-QAMS vinda do grafo $K_5$.

De um modo geral, MET é uma modulação $m$-QAMS definida a partir do mergulho do grafo $G(m, 2m)$ ilustrada na Figura 5.5.2.

Como o vértice $v_i$ está definida sobre a geodésica $\gamma_2$ de $T$, sua coordenada será dada por

$$v_i' = (b + a)(\cos(2\pi i/m), \sin(2\pi i/m), 0), \ i \in \{0, 1, \cdots, m-1\}. \tag{5.19}$$

O sinal $s_i'$ pertencente a constelação $A = \{s_0', s_1', \cdots, s_{m-1}'\}$ de MET será definido também sobre a geodésica $\gamma_2$ no ponto médio dos arcos definidos pelos vértices $v_i$'s. Mais precisamente, a coordenada do sinal $s_i'$ é dado por

$$s_i' = (b + a)(\cos((2i + 1)\pi/m), \sin((2i + 1)\pi/m), 0), \ i \in \{0, 1, \cdots, m-1\}. \tag{5.20}$$

Lembramos que pela Seção 3.4, o projeto de uma modulação MET sobre o toro é a imagem da aplicação $\Psi$ definida em (3.5) do modelo planar do mergulho $\Pi_p$. Sendo assim, MET possui um modelo planar equivalente. No modelo planar, a coordenada do vértice $v_i$ é dada por

$$v_i = (2\pi i/m, 0), \ i \in \{0, 1, \cdots, m-1\}, \tag{5.21}$$

e a coordenada do sinal $s_i$ é dada por

$$s_i = ((2i+1)\,\pi/m, 0)\,,\ \ i \in \{0, 1, \cdots, m-1\}\,, \tag{5.22}$$

onde, $\Psi(v_i) = v_i'$, $\Psi(s_i) = s_i'$, para um toro $T(1,3)$.

Na Figura 5.5.3, ilustramos os modelos planares das modulações uniformes sobre o toro do tipo MET, construídos utilizando a equação (5.21) nos casos particulares em que $m = 4, 5, 6$ e 7 e as curvas espirais $\xi_1, \xi_2$ e $\xi_3$, nos casos em que $m$ são pares, ou as expirais $\xi_1$ e $\xi_4$, nos casos em que $m$ são ímpares.

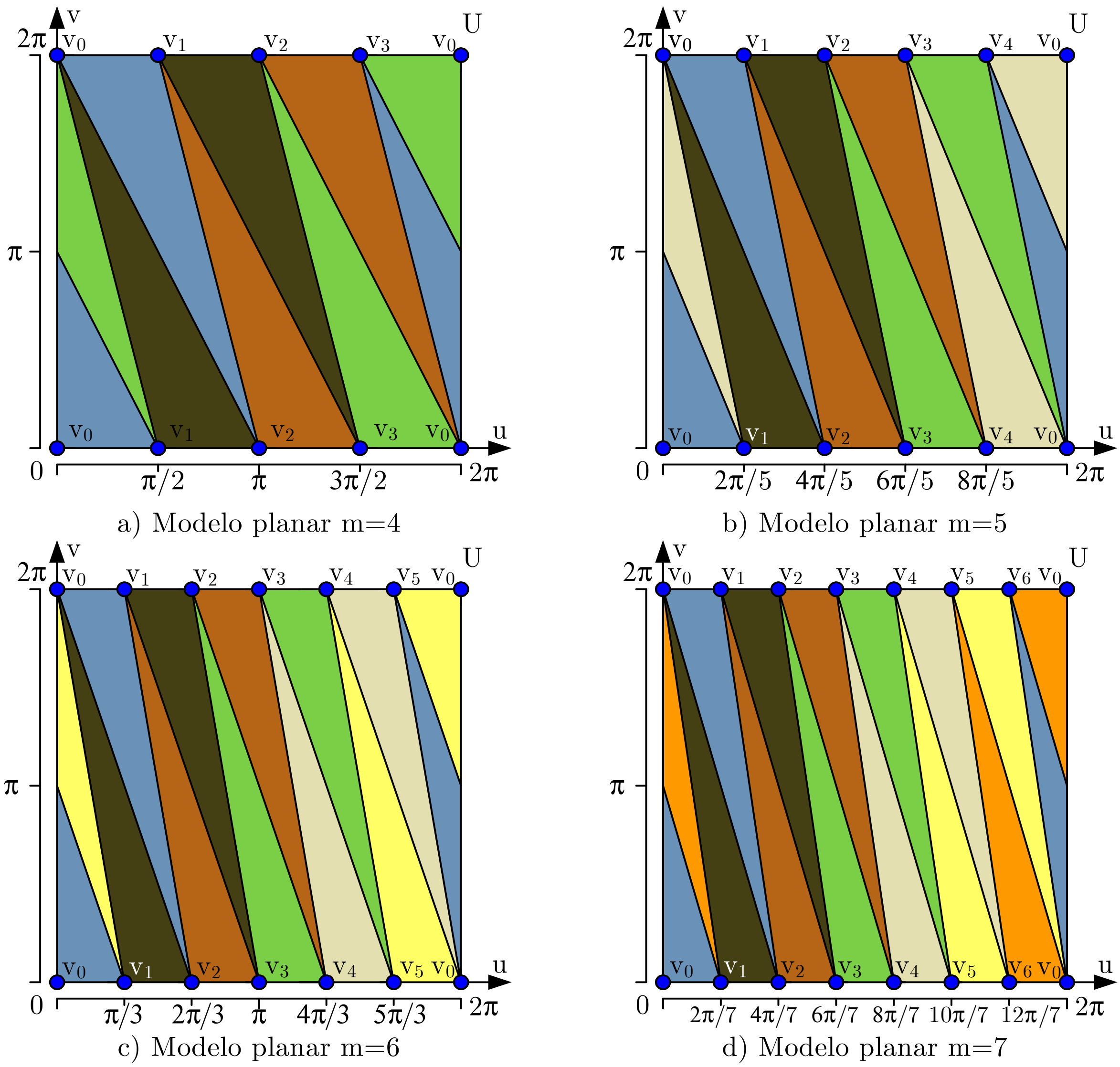


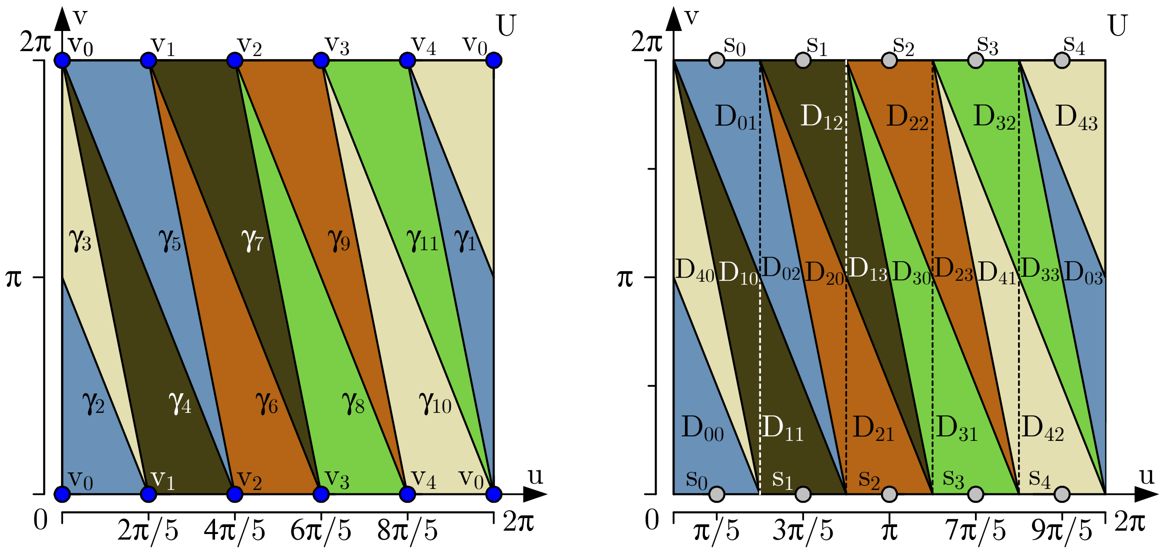

Figura 5.5.3: Modelos planares de MET para $m = 4, 5, 6$ e 7.

O procedimento utilizado na construção da modulação uniforme sobre o toro do tipo MET nos permite construir um caso especial de modulação QAMS que estávamos interessados desde a sua descoberta por Lima [23]. Veremos a seguir a construção dessa modulação uniforme, tão desejada desde o conhecimento de sua existência.

### 5.5.1 Modulação 5-QAMS uniforme vinda do mergulho do grafo completo $K_5$ sobre o toro

Na Seção 3.7, constatamos que a uniformidade do modelo planar nem sempre é preservada no modelo espacial. Chegamos até a pensar que não existe uma partição do toro em cinco regiões congruentes obtida do mergulho do grafo $K_5$. No entanto, note que o grafo de MET para $m = 5$, veja a Figura 5.5.2, corresponde ao grafo completo $K_5$, ou seja, para $m = 5$, MET uma modulação 5-QAMS uniforme para cinco sinais tal que $K_5 \hookrightarrow T \equiv 5R_4$. Em outras palavras, conseguimos um projeto de modulação 5-QAMS uniforme sobre o toro vinda do mergulho do grafo completo $K_5$. Como foi possível obter uma modulação 5-QAMS uniforme vinda do mergulho do grafo completo $K_5$, construímos esse projeto de modulação sobre o toro.

Na Seção 3.4, o modelo espacial da modulação QAMS é construído a partir do modelo planar do mergulho através da equação paramétrica(3.5). Utilizando o modelo planar da modulação 5-QAMS uniforme, construímos o modelo espacial. A Figura 5.5.4 mostra o projeto geométrico da 5-QAMS uniforme: os vértices, as curvas espirais são vistas em a) e os sinais da constelação e as subregiões de decisão são mostrados em b).




a) Modelo planar 5-QAMS uniforme

b) Sub-regiões $D_{ij}$ e sinais $s_i$ sobre $\Pi p$

Figura 5.5.4: Modelo planar do projeto de modulação 5-QAMS uniforme.

As coordenadas dos vértices e dos sinais no modelo planar e espacial para $m = 5$ de acordo com as equações (5.21), (5.22), (5.19) e (5.20) são como relacionadas na Tabela 5.5.1.

| $i$ | $v_i$ | $\Psi(v_i)$ | $s_i$ | $\Psi(s_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $(0,0)$ | $(4,0,0)$ | $(\frac{\pi}{5},0)$ | $(\sqrt{5}+1,\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}},0)$ |
| 1 | $(\frac{2\pi}{5},0)$ | $(\sqrt{5}-1,\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+5},0)$ | $(\frac{3\pi}{5},0)$ | $(1-\sqrt{5},\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+5},0)$ |
| 2 | $(\frac{4\pi}{5},0)$ | $(-\sqrt{5}-1,\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}},0)$ | $(\frac{5\pi}{5},0)$ | $(-4,0,0)$ |
| 3 | $(\frac{6\pi}{5},0)$ | $(-\sqrt{5}-1,-\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}},0)$ | $(\frac{7\pi}{5},0)$ | $(1-\sqrt{5},-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+5},0)$ |
| 4 | $(\frac{8\pi}{5},0)$ | $(\sqrt{5}-1,-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+5},0)$ | $(\frac{9\pi}{5},0)$ | $(\sqrt{5}+1,-\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}},0)$ |

Tabela 5.5.1: Coordenadas dos pontos $v_i$, $s_i$, $\Psi(v_i)$ e $\Psi(s_i)$ para $m = 5$.

As equações das curvas $\gamma_i$ do modelo planar a) da Figura 5.5.4 foram calculados utilizando as equações das retas sobre o domínio $U$ da parametrização $\Psi$ (3.5) passando pelos vértices do grafo $G\,(5,10)$ (Veja Tabela 5.5.2).

| $\gamma_i$ | Equação da curva espiral | Intervalo $u$ |
|---|---|---|
| 1 | $v = -5u/2 + 6\pi$ | $[8\pi/5, 2\pi]$ |
| 2 | $v = -5u/2 + \pi$ | $[0, 2\pi/5]$ |
| 3 | $v = -5u + 2\pi$ | $[0, 2\pi/5]$ |
| 4 | $v = -5u/2 + 2\pi$ | $[0, 4\pi/5]$ |
| 5 | $v = -5u + 4\pi$ | $[2\pi/5, 4\pi/5]$ |
| 6 | $v = -5u/2 + 3\pi$ | $[2\pi/5, 6\pi/5]$ |
| 7 | $v = -5u + 6\pi$ | $[4\pi/5, 6\pi/5]$ |
| 8 | $v = -5u/2 + 4\pi$ | $[4\pi/5, 8\pi/5]$ |
| 9 | $v = -5u + 8\pi$ | $[6\pi/5, 8\pi/5]$ |
| 10 | $v = -5u/2 + 5\pi$ | $[6\pi/5, 2\pi]$ |
| 11 | $v = -5u + 10\pi$ | $[8\pi/5, 2\pi]$ |

Tabela 5.5.2: Equações das curvas $\gamma_i$ do modelo planar de $K_5\,(\Theta) \hookrightarrow T \equiv 5R_4$.

Aplicando a parametrização $\Psi$ sobre o modelo planar da Figura 5.5.4, obtemos o modelo espacial conforme mostrado na Figura 5.5.5.

O modelo espacial da modulação 5-QAMS uniforme, $K_5 \hookrightarrow T \equiv 5R_4$ é visto na Figura 5.5.5 a). Na Figura 5.5.5 b), c), d), e) e f) mostramos as regiões de decisão

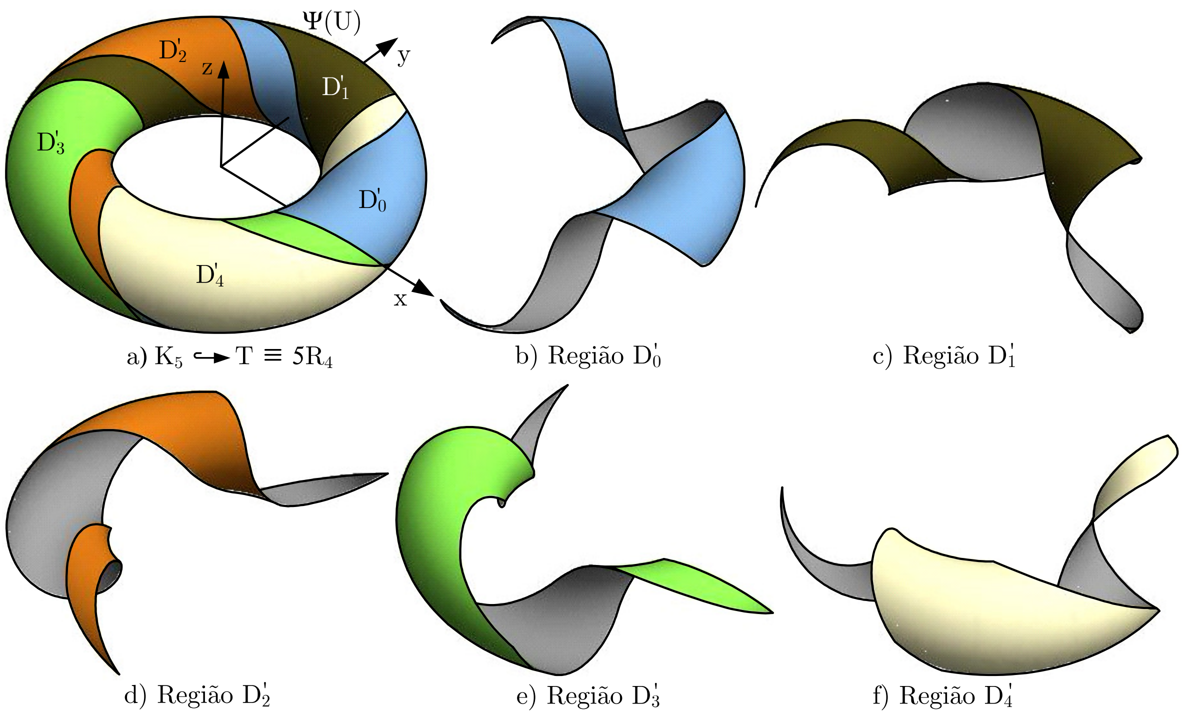



Figura 5.5.5: Modelo espacial e regiões de decisão da modulação 5-QAMS uniforme.

$D'_0, D'_1, D'_2, D'_3$ e $D'_4$ da modulação 5-QAMS uniforme. Observe na Figura 5.5.4 b) que as regiões de decisão do modelo planar são regiões triangulares de base $2\pi/5$ e altura $2\pi$. Por exemplo, a área da região $D_0$ será a soma da área das subregiões $D_{00}, D_{01}, D_{02}$ e $D_{03}$, logo a área da região $D_0$ é igual a

$$\begin{aligned} A_{D_0} &= A_{D_{00}} + A_{D_{01}} + A_{D_{02}} + A_{D_{03}} \\ &= (\pi 2\pi/5)/2 + (\pi 2\pi/5)/2 + (\pi 2\pi/5)/2 + (\pi 2\pi/5)/2 \\ &= 4\pi^2/5. \end{aligned}$$

De forma semelhante, mostramos que $A_{D_1} = A_{D_2} = A_{D_3} = A_{D_4} = 4\pi^2/5$. Portanto, a área das regiões de decisão do modelo planar da Figura 5.5.4 a) são todas iguais.

Por outro lado, conhecidas as equações das curvas das subregiões que formam a fronteira da região $D_{ij}$ do modelo planar Figura 5.5.4 b), pela equação (3.8) encontramos a área da regiões no modelo espacial. Por exemplo, a área da região de decisão $D'_0$ é igual a

$$A_{\Psi(D_0)} = A_{\Psi(D_{00})} + A_{\Psi(D_{01})} + A_{\Psi(D_{02})} + A_{\Psi(D_{03})},$$

onde,

$$
\begin{aligned}
A_{\Psi(D_{00})} &= \int_0^{2\pi/5}\int_0^{\gamma 2}(3+\cos v)dvdu \\
&= \int_0^{2\pi/5}\int_0^{-5u/2+\pi}(3+\cos v)dvdu \\
&= \frac{3}{5}\pi^2+\frac{4}{5},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{\Psi(D_{01})} &= \int_0^{2\pi/5}\int_{\gamma_4}^{2\pi}(3+\cos v)dudv \\
&= \int_0^{2\pi/5}\int_{-5u/2+2\pi}^{2\pi}(3+\cos v)dvdu \\
&= \frac{3}{5}\pi^2+\frac{4}{5},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{\Psi(D_{02})} &= \int_{2\pi/5}^{4\pi/5}\int_{\gamma_4}^{\gamma_5}(3+\cos v)dudv \\
&= \int_{2\pi/5}^{4\pi/5}\int_{-5u/2+2\pi}^{-5u+4\pi}(3+\cos v)dvdu \\
&= \frac{3}{5}\pi^2-\frac{4}{5},
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
A_{\Psi(D_{03})} &= \int_{8\pi/5}^{2\pi}\int_{\gamma_{11}}^{\gamma_1}(3+\cos v)dudv \\
&= \int_{8\pi/5}^{2\pi}\int_{-5u+10\pi}^{-5u/2+6\pi}(3+\cos v)dvdududv \\
&= \frac{3}{5}\pi^2-\frac{4}{5}.
\end{aligned}
$$

Desse modo, a área da região $D_0'$ é dada por

$$
\begin{aligned}
A_{\Psi(D_0)} &= A_{\Psi(D_{00})}+A_{\Psi(D_{01})}+A_{\Psi(D_{02})}+A_{\Psi(D_{03})} \\
&= \left(\frac{3}{5}\pi^2+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}\pi^2+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}\pi^2-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}\pi^2-\frac{4}{5}\right) \\
&= \frac{12}{5}\pi^2.
\end{aligned}
$$

De modo análogo, mostramos que $A_{\Psi(D_{01})} = A_{\Psi(D_{02})} = A_{\Psi(D_{03})} = 12\pi^2/5$. Logo, todas as regiões possuem a mesma área.

Portanto, não só mostramos que existe, mas construímos o modelo espacial uniforme para cinco sinais, isto é, uma modulação 5-QAMS uniforme. Agora, utilizando da modulação 5-QAMS uniforme, apresentado nas Figuras 5.5.4 e 5.5.5, passaremos as simulações e análise comparativa do projeto uniforme com os resultados das simulações dos Projetos I, II e III do Capítulo 4.

### 5.5.2 Projeto IV

O processo de simulação aplicado aos Projetos I, II e III, será aplicado também, de modo análogo, no projeto de modulação 5-QAMS uniforme vinda do grafo completo $K_5$ que chamaremos de Projeto IV. Neste Projeto IV, como todas as regiões são congruentes, o raio $r_i$ máximo da esfera centrada em $s_i$ são todos iguais a 1.414217099.

Uma vez que temos as coordenadas dos sinais $s_i$, relacionadas na Tabela 5.5.1, bem como o raios $r_i$'s das esferas das regiões de decisão $D'_i$, efetuamos o processo de simulação para o Projeto IV. O resultado da simulação do Projeto IV é apresentado na Figura 5.5.6.

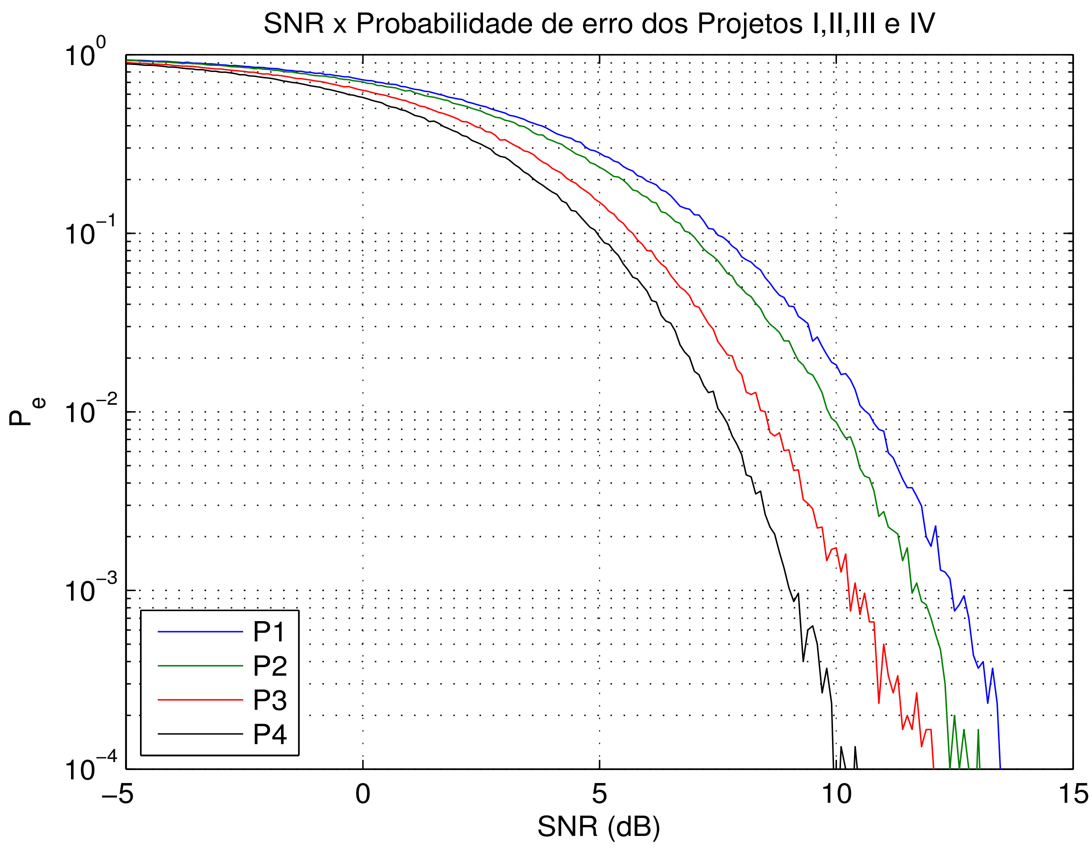



Figura 5.5.6: Gráficos das curvas de desempenho dos Projetos I, II, III e IV.

Na Figura 5.5.6, mostramos as curvas de desempenho dos projetos de modulação 5-QAMS sobre o toro: P1, P2, P3 e P4 que correspondem respectivamente aos Projeto I, Projeto II, Projeto III e Projeto IV. Comparando as curvas de desempenho dos projetos, verificamos que

$$p_e\left(P4\right) < p_e\left(P3\right) < p_e\left(P2\right) < p_e\left(P1\right),$$

isto é, P4 tem a menor probabilidade de erro. Consequentemente, com esse resultado, comprovamos que o projeto de modulação 5-QAMS uniforme, Projeto IV, é o melhor entre os Projetos I, II, III e IV, pois tem a menor probabilidade de erro como era esperado. Portanto, em projetos de modulação QAMS devemos, sempre que possível, optar pelo projeto uniforme, já que este possui o melhor desempenho.

## 5.6 Considerações

No início do capítulo questionamos a respeito da existência de modulações QAMS uniforme sobre o toro. No entanto, ao longo do capítulo, mostramos que, não só existem, como construímos projetos distintos de modulação QAMS uniforme. Em resumo, o objetivo desse capítulo que era construir uma modulação QAMS uniformes foi alcançado.

Inicialmente, para conseguir obter essas modulações QAMS uniformes particionamos o toro em regiões congruentes. Sobre essa partição verificamos que é possível definir um grafo $G$ tal que as regiões obtidas do mergulho de $G$ sobre $T$ sejam de 2-células. Como a modulação QAMS é obtida através do mergulho de um grafo $G$ sobre a superfície de modo à particioná-la em regiões de 2-células, o mergulho do grafo $G$ sobre o toro define uma modulação QAMS uniforme, pois as regiões obtidas da partição são todas congruentes.

As modulações QAMS uniformes construídas foram MUGMT, MUCPT e MURCPT. A MUGMT é uma modulação para $m$ sinais, $m \geq 2$, sendo que a partição obtida do mergulho do grafo $G(m, 2m)$, definido na Seção 5.1, é da seguinte forma $G(m, 2m) \hookrightarrow T \equiv mR_4$, ou seja, o mergulho do grafo $G$ sobre o toro o dividem em $m$ regiões congruentes de quatro lados. Nessa modulação a constelação de sinais está definida sobre a geodésica $\gamma_2$. As MUCPT e MURCPT por sua vez, definem uma modulação para $2m$ sinais, $m \geq 2$. Elas são obtidas do mergulho do grafo $G(2m, 4m)$, definido na Seção 5.2, e $G(4m, 6m)$, definido na Seção 5.3, que definem as seguintes partições respectivamente $G(2m, 4m) \hookrightarrow T \equiv 2mR_4$ e $G(4m, 6m) \hookrightarrow T \equiv 2mR_6$.

Na medida em que avançamos no problema de particionar o toro, notamos que existe a possibilidade de particionar o toro em regiões congruentes utilizando curvas espirais. Nessa partição, assim como foi feito para as modulações MUGMT, MUCPT e MURCPT definimos um grafo $G(m, 2m)$, definido na Seção 5.5, tal que o mergulho de $G(m, 2m)$ é da forma $G(m, 2m) \hookrightarrow T \equiv mR_4$, construímos então MET para $m$ sinais, $m \geq 2$.

Essa modulação $m$-QAMS uniforme que utiliza curvas espirais possibilitou construir, até então desconhecido, uma modulação 5-QAMS uniforme vinda do grafo completo $K_5$, isto é, $K_5 \hookrightarrow T \equiv 5R_4$. Veja que MET particiona $T$ em $m$ regiões congruentes de quatro lados, e como o grafo corresponde para $m = 5$ é o grafo completo $K_5$, obtemos o desejado projeto de modulação 5-QAMS uniforme. Para esse projeto, realizamos simulações e comprovamos que o projeto de modulação 5-QAMS uniforme, comparado com os Projetos I, II, III, é o que tem menor probabilidade de erro, e como consequência é o mais eficiente.

Em relação à eficiência das modulações MUGMT, MUCPT e MURCPT construídas sobre o $T(a, b)$ para uma constelação de $2m$ sinais temos o seguinte: quando comparamos

MUGMT e MUCPT ou MUGMT e MURCPT, constatamos que uma ou outra pode ser mais eficiente, isto irá depender dos raios de $T(a, b)$ e de $m$, por outro lado comparando MUCPT e MURCPT, comprovamos que MURCPT, independente dos raios de $T(a, b)$ e $m$, será sempre mais eficiente do que MUCPT.

Capítulo 6

# Conclusão

A proposta deste trabalho tem como objetivo expandir o universo das modulações para variedades Riemannianas, utilizando o mergulho de grafos. Não havia a intensão de utilizar as modulações *twister* introduzidas por Wozencraft [37] ou as modulações não-lineares estabelecidas por Cavalcante [3]. A ideia era analisar a possibilidade de construir uma modulação explorando a partição vinda de um mergulho de grafo. Como este projeto é muito semelhante às modulações sobre reticulados, isto é, as do tipo QAM, daí a sua denominação modulação QAMS, onde o $S$ indica o espaço (superfície) na qual esta é projetada.

Os mergulhos de grafos costumam ser obtidos na forma topológica e precisam ser adequados aos projetos de modulação, no que se referem a identificação dos sinais da constelação e suas regiões de decisão. A forma da região deve atender a característica da fonte de informação no que diz respeito ao modo de como esta seleciona seus símbolos. O processo de seleção de um símbolo $s$ pela fonte é medido em termos de probabilidade de ocorrência deste símbolo, informação que é utilizada no projeto de modulação para adotar uma região de decisão de $s$ compatível com esta probabilidade. Com isso as regiões de decisão de uma modulação são projetadas de acordo com as probabilidades de seleção dos símbolos pela fonte. O mergulho topológico pode ser usado para projetar uma modulação que atenda as características da informação enviada pela fonte.

Neste trabalho, usamos um raro exemplo de mergulho regular, cujo modelo topológico foi construído somente com o intuito de mostrar que o mesmo existia, e constatamos que foi possível transformar este modelo para obter um dos projetos mais visados por projetistas, uma modulação para uma constelação de sinais do tipo geometricamente uniforme. Além disso, verificamos que modulações QAMS não precisam ser uniformes para terem um bom desempenho.

Apesar do objeto de estudo ter sido a modulação 5-QAMS sobre o toro vindo de um mergulho do grafo completo, vale ressaltar que este projeto pode ser realizado em qualquer tipo de superfície parametrizada, desde que se conheça um mergulho de 2-células sobre esta. Com isto, um grande número de projetos de modulações QAMS podem ser projetados com os mergulhos construídos por Lima ([17], [23], [25], [15] e [16]). Na verdade, cada mergulho topológico construído pode ser usado para projetar dois tipos de modulações QAMS ([23], [25], [15] e [16]).

Outro objetivo deste trabalho é utilizar a forma toroidal para projetar constelações de sinais do tipo geometricamente uniformes. Constatamos que estes projetos existiam e três projetos de modulações geometricamente uniformes foram analisados, sob o ponto de vista de sua eficiência, utilizando somente os elementos básicos da geometria toroidal. Evidentemente que sob as condições nas quais foram definidas, tratam-se de modulações ótimas do toro.

Por se tratar de um modelo no qual acreditávamos que não era possível construí-lo de forma uniforme, o projeto de modulação uniforme 5-QAMS vinda do mergulho de $K_5$, foi o que mais motivou a pesquisa realizada neste trabalho. Além de propor uma forma de confrontar a eficiência dos diversos projetos analisados, a busca pela forma uniforme, proporcionou um modo de gerar uma família de modulações do tipo geometricamente uniforme sobre o toro, a família de modulações uniformes sobre as curvas expirais do toro, denominadas de MET, definida na Seção 5.5.

Este é um início de trabalho no qual apresenta a transição de uma matemática, até então julgava improvável de aplicações práticas, para aplicações de cunho tecnológico no ambiente das telecomunicações, pois os resultados conseguidos até o presente eram todas de cunho topológico ou puramente algébricos. Por isso acreditamos que demos um grande passo para contribuir em um futuro próximo para o desenvolvimento de projetos de modulações de desempenhos melhores.

Como proposta, sugerimos que outras classes de superfícies diferente do toro sejam exploradas. Só assim colheremos informações sobre os invariantes topológicos que mais influenciam o desempenho de uma modulação QAMS. Sugerimos também que avancemos na questão da técnica de construção de mergulho topológicos, sem estes, não é possível realizar o projeto da modulação QAMS a nível de geometria diferencial ou geometria Riemanniana. Obviamente que a identificação de mergulhos de grafos também é de extrema utilidade porque irá dizer se o mesmo existe e em que superfície se encontra, além de fornecer informações valiosas para a construção do projeto topológico, a base de construção da modulação QAMS .

# Referências Bibliográficas


[1] BARBOSA, J. Lucas and COLARES, M A. Gervásio, Mínimal Surfaces in , *Lecture Notes in Mathematics*, No. 1195, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] CARMO, M. P. do., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[3] CAVALCANTE, R. G., *Análise de Desempenho de Constelações de Sinais em Variedades Riemannianas*, Dissertação de Mestrado, DT-FEEC-UNICAMP, Campinas, SP, 2002.

[4] CAVALCANTE, R. G., LAZARI, H., LIMA, J. D., PALAZZO JUNIOR, R., Coset space approach for the design of geometrically uniform codes in homogeneous spaces. *In: XVIII Escola de Álgebra*, 2004, Campinas. Anais da XVIII Escola de Álgebra. Campinas: UNICAMP, v. CD-ROM. p. 1-26, 2004.

[5] CAVALCANTE, R. G., LAZARI, H., LIMA, J. D., PALAZZO JUNIOR, R., *A new approach to the design of digital communication systems.* AMS-DIMACS Series, USA, v. 68, n. 1, p. 145-177, 2005.

[6] CAVALCANTE,R. G. *Análise da Influência da Curvatura do Espaço em Sistemas de Comunicações*, Tese de Doutorado, DT-FEEC-UNICAMP, Campinas, SP, 2008.

[7] COSTELLO Jr, D. J. and Lin , S. Error Coding: Fundamentals and Applications. Englend Cliffs, Nj, USA: Prentice-Hall, First ed., 1983.

[8] FLOR, P. A. and RAMSTED, T., A. Noisy analyses for dimension expanding mappings in souce-channel coding, *IEEE – Seventh Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, Cannes, France, July, 2-5, 2006.

[9] FORNEY Jr., G. D., Geometrically Uniform Codes, *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. 37, pp. 1241-1260, Sept. 1991.

[10] GIBLIN, P. J., *Graphs, Surfaces and Homology*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1977.

[11] HEAWOOD, P. J., Map Colour Theorem. *Quart. J. Math.* v. 24, pp. 332-338, 1890.

[12] KÖNIG D., *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Leipzig, 1936, Reprinted to Chelsea, New York, 1950..

[13] KOTEL'NIKON, V. A., *The Theory of Optimum Noise Immunity*, New York, McGraw-Hill Book Company, Ink, 1959.

[14] LEE, K. H. and PETERSEN, D. P. Optimal linear coding for vector channels, *IEEE Transeactions on Communications*, vol. COM-24, no 12, pp 1283-1290, December 1976.

[15] LIMA, J. D., SILVA, F. M. and ALVES, A. F., Integrate system, a new aproach for data transmission on the topológic surfaces. *Conputational & Applied Matematics*, SBMAC, Brazil, (2011), 1-7. (in submission)

[16] LIMA, J. D. COSTA, F. L. and MATIAS, E. V. O., Integrate system, a new aproach for data transmission on the topológic surfaces wich borders. *Applied Matematical and Computational Sciences*, Mili Publication, Índia (2011), 1-19. (in submission)

[17] LIMA J. D., *Identificação e Estrutura Algébrica das Superfícies Compactas com e sem Bordos, Provenientes de Mergulhos de Canais Discretos sem Memória*, Tese de Doutorado, DT–FEEC-UNICAMP, Campinas, SP, 2002.

[18] LIMA, J. D. e PALAZZO Jr, R., Topological structures associated with discrete memoryless channels. *In: IEEE/SBrT Proceedings of the International Telecommunications* Symposium, Natal, RN: IEEE/SBrT, v. 1. p. 211-215, 2002.

[19] LIMA, J. D. e PALAZZO Jr, R., Embedding discrete memoryless channels on compact and minimal surfaces. *In: IEEE Information Theory* Workshop, 2002, Bangalore. Proceedings of the IEEE Information Theory Workshop. New Jersey: IEEE Press, v. 1. p. 183-186, 2002.

[20] LIMA, J. D. e LIMA, Luana P. R. C., Topological projects of modulation on surfaces, *In: 31o Congresso Nacional de Matemática Aplicada - CNMAC*, 2008, Belém-Pará. Anais da XXXI CNMAC: UNAMA, v. CD-ROM, 65.pdf, p. 1-6, 2008.

[21] LIMA, J. D. e PALAZZO Jr, R., Projetos de Modulações sobre Superfícies via Sistema Integrado de Transmissão de Dados, *TEMA – SBMAC*, v. 3, p 405-416, 2008.

[22] LIMA, J. D. e LIMA, Luana P. R. C., Grupo de homologia, uma fonte natural de códigos, *In: 31o Congresso Nacional de Matemática Aplicada - CNMAC*, 2008, Belém-Pará. Anais da XXXI CNMAC: UNAMA, v. CD-ROM, 67.pdf, p. 1-7, 2008.

[23] LIMA, Luana Priscilla Rodrigues da Costa, *Projetos Topológicos de Modulações sobre Variedades Riemannianas Associadas ao DMC, uma Solução Parcial*, Dissertação de Mestrado, UERN-UFERSA, Mossoró, RN, 2009.

[24] MASSEY, W. S., *Algebraic Topology: un Introduction*, Springer Verlag, New York, 1977.

[25] MATIAS, Ênio Virgílio de oliveira, *Modulações para Constelação de Sinais Sobre Variedades Riamannianas: Canal DMC Associado e Medida de Desempenho*, Dissertação de Mestrado, UERN-UFERSA, Mossoró, RN, 2011.

[26] MUNKRES, J. R., *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, Publishing Company, New York, 1993.

[27] RINGEISEN, R. D., Survey of results on the maximum genus of a graph, *Journal of Graph Theory*, v. 3, pp. 1-13, 1979.

[28] RINGEL, G., Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, v. 28, pp. 139-150, 1965.

[29] RINGEL, G., Der vollstandige paare Graph auf Nichotorientierbaren Flächen, *J. Reine Angew. Math.*, v. 220, pp. 88-93, 1965.

[30] RINGEL, G. and YOUNGS, J. W. T., Das Geschelcht des symmetrische vollständige drei-Farbaren Graphen, *Comment. Math. Helv.*, v. 45, pp. 152-158, 1970.

[31] RINGEL, G., *Map Color Theorem*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[32] SAKRISON, J., *Communication Theory: Transmission of Waveforms and Digital Information*, New York: John Wiley & Sons, Inc, 1968.

[33] SHANNON C. E., "A Mathematical Theory of Communication," *Bell Syst. Tech. J.*, 27, pp. 397-423 (Part I), 623-656 (Part II), July 1948.

[34] SEIFFERT, H., THRELFALL, W. *Leciones de Topologia.* Madrid, 1951.

[35] SHEN, W., JUFANG, Z., ZHU, S. and DENG, X., Fermat's principle, the general eikonal equation, and space geometry *in a static anisotropic medium, J. Opt. Soc. Am.*, A 14, 2850-2854, 1997.

[36] STAHL, S., The Embeddings of a Graph - A Survey. *Journal of Graph Theory*, v. 2, pp. 275-298, 1978

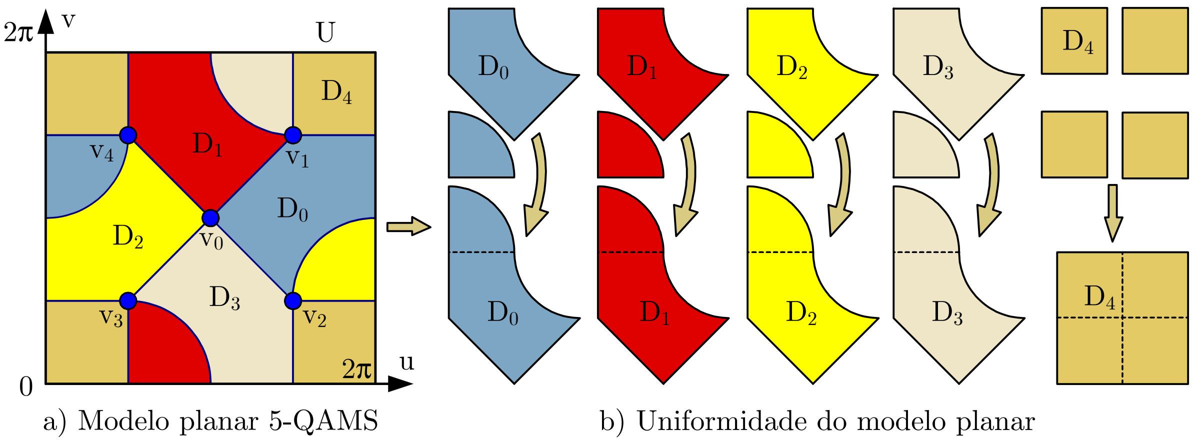
[37] WOZENCRAFT, J. M. and JACOBS,I M., *Principles of Communications Engineering*, New York: John Wiley & Sons, Inc, 1965.

Apêndice A

# Cálculo das Áreas de uma QAMS

Ao analisar o primeiro projeto proposto da modulação 5-QAMS sobre o toro, se verificou dois tipos de uniformidade no modelo planar. A primeira uniformidade obtida está na quantidade de lados, todas são regiões de 4 lados, a outra uniformidade encontrada está no formato das regiões, todas, exceto $D_4$, tem a mesma forma, ou seja, 4 das 5 regiões são iguais conforme mostra a Figura A.0.1. Com isso, obtemos uma uniformidade satisfatória em relação à área das regiões de decisão da modulação, já no primeiro projeto, o que para nós, foi uma surpresa. Não esperávamos alcançar tal uniformidade já na primeira tentativa.

Além dessas uniformidades encontradas, pode-se obter a uniformidade de área (todas as regiões possuem as mesmas áreas, mas não são congruentes) sobre o modelo planar descrita a seguir.



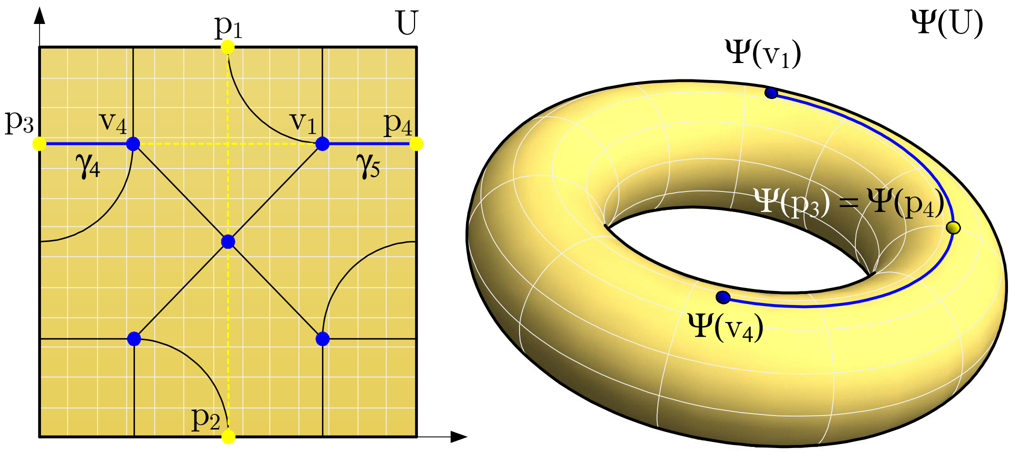

a) Modelo planar 5-QAMS b) Uniformidade do modelo planar

Figura A.0.1: Uniformidade do mergulho de $K_5$ sobre o toro.

## A.1 Curvas do Mergulho no Modelo Planar na Superfície Toro

A construção do mergulho no modelo planar, modelo matemático não mais topológico, deve ser feito tomando-se alguns cuidados, a fim de garantir a existência do mergulho no modelo espacial. Por exemplo, na construção do mergulho de $K_5$ sobre o toro, duas curvas desconexas podem representar uma curva contínua sobre o toro.

A Figura A.1.1 a) mostra duas curvas desconexas $\gamma_4$ e $\gamma_5$, ambas curvas do tipo seguimento de reta que contém os vértices $v_4$ e $v_1$ respectivamente no modelo planar, b) mostra as imagens dos vértices e das curvas após a aplicação de $\Psi$, equação (3.5), onde se vê que estas duas curvas são apenas uma curva sobre o modelo espacial.




a) Modelo planar 5-QAMS b) Curva $\Psi(\gamma_4) \cup \Psi(\gamma_5)$

Figura A.1.1: Curva $\gamma_4 \cup \gamma_5$ do mergulho de $K_5$ em $\Pi_p$ e $\Pi_\varepsilon$.

Sejam $\gamma_{v_1}$ e $\gamma_{v_2}$ curvas dadas pelas funções lineares definidas no eixo $v$ tais que

$$\begin{aligned} \gamma_{v_1} \quad &: \quad [0, 2\pi] \subset U \to \mathbb{R} \\ v \quad &\longmapsto \quad \gamma_{v_1}(v) = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_{v_2} \quad &: \quad [0, 2\pi] \subset U \to \mathbb{R} \\ v \quad &\longmapsto \quad \gamma_{v_2}(v) = 2\pi. \end{aligned}$$

Sejam também $\gamma_{u_1}$ e $\gamma_{u_2}$ curvas dadas pelas funções lineares definidas no eixo $u$ tais que

$$\begin{array}{rcl}\gamma_{u_1} & : & [0,2\pi] \subset U \to \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \gamma_{u_1}(u) = 0,\end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl}\gamma_{u_2} & : & [0,2\pi] \subset U \to \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \gamma_{u_2}(u) = 2\pi.\end{array}$$

**Proposição A.1.1** *Se $p_{v_1} = (u_1, v) \in \gamma_{v_1}$ e $p_{v_2} = (u_2, v) \in \gamma_{v_2}$, então $\Psi(p_{v_1}) = \Psi(p_{v_2})$ pela parametrização $\Psi$ da equação* (3.5).

**Demonstração.** Dados os pontos $p_{v_1} = (u_1, v)$ e $p_{v_2} = (u_2, v)$ pertencentes respectivamente as curvas $\gamma_{v_1}$ e $\gamma_{v_2}$, então $u_1 = 0$ e $u_2 = 2\pi$. Pela aplicação $\Psi$ da equação (3.5), as imagens dos pontos $p_{v_1}$ e $p_{v_2}$ são dadas por

$$\begin{array}{rcl}\Psi(p_{v_1}) & = & \Psi(0,v) = ((3+\cos v)\cos 0, (3+\cos v)\sin 0, \sin v) = (3+\cos v, 0, \sin v), \\ \Psi(p_{v_2}) & = & \Psi(2\pi,v) = ((3+\cos v)\cos 2\pi, (3+\cos v)\sin 2\pi, \sin v) = (3+\cos v, 0, \sin v),\end{array}$$

portanto, temos que $\Psi(p_{v_1}) = \Psi(p_{v_2})$. ■

**Proposição A.1.2** *Se $p_{u_1} = (u, v_1) \in \gamma_{u_1}$ e $p_{u_2} = (u, v_2) \in \gamma_{u_2}$, então $\Psi(p_{u_1}) = \Psi(p_{u_2})$ pela parametrização $\Psi$ da equação* (3.5).

**Demonstração.** Dados os pontos $p_{u_1} = (u, v_1)$ e $p_{u_2} = (u, v_2)$ pertencentes respectivamente as curvas $\gamma_{u_1}$ e $\gamma_{u_2}$, então $v_1 = 0$ e $v_2 = 2\pi$. Pela aplicação $\Psi$ da equação (3.5), as imagens dos pontos $p_{u_1}$ e $p_{u_2}$ são dadas por

$$\begin{array}{l}\Psi(p_{u_1}) = \Psi(u,0) = ((3+\cos 0)\cos u, (3+\cos 0)\sin u, \sin 0) = (4\cos u, 4\sin u, 0), \\ \Psi(p_{u_2}) = \Psi(u,2\pi) = ((3+\cos 2\pi)\cos u, (3+\cos 2\pi)\sin u, \sin 2\pi) = (4\cos u, 4\sin u, 0),\end{array}$$

portanto, temos que $\Psi(p_{u_1}) = \Psi(p_{u_2})$. ■

Por essa razão, pelas Proposições A.1.1 e A.1.2, os pontos $p_1$, $p_2$ e $p_3$, $p_4$ da Figura A.1.1 a), assim como os vértices $v_1$, $v_2$, $v_3$ e $v_4$ da Figura A.1.2, correspondem ao mesmo ponto no modelo espacial.

Na Figura A.1.2 a) são ilustradas as curvas sobre o toro $\gamma_4$ e $\gamma_5$, ambas as curvas são do tipo seguimento de reta limitadas por $v_4$ e $p_5$, $v_1$ e $p_8$ respectivamente. A Figura b) apresenta as imagens das curvas $\gamma_4$ e $\gamma_5$ na superfície toro (sobre o seu modelo espacial).

Veja pela Proposição A.1.1 que os pontos $p_5 = (0, 7\pi/4)$ e $p_8 = (2\pi, 5\pi/4)$ não correspondem ao mesmo ponto no modelo espacial, isto é $\Psi(p_5) \neq \Psi(p_8)$. Sendo assim, o conjunto $\Psi(\gamma_4) \cup \Psi(\gamma_5)$ é uma curva desconexa sobre o toro conforme mostra a Figura A.1.2.

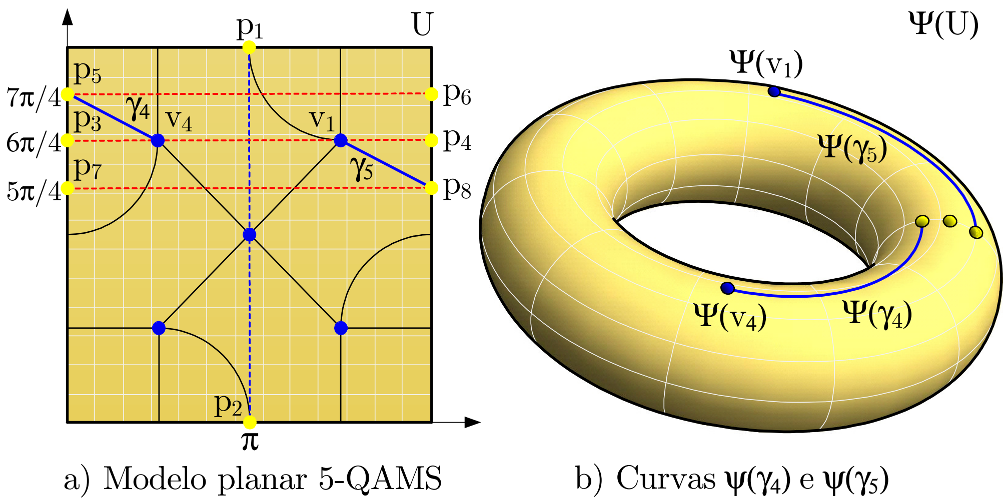



Figura A.1.2: Modelo planar destacando as curvas $\gamma_1$, $\gamma_4$ e suas respectivas imagens sobre o toro.

Para a curva $\Psi(\gamma_4) \cup \Psi(\gamma_5)$ ser conexa de acordo com a Proposição A.1.1 e com Figura A.1.2 é preciso que os seguimentos de reta $\gamma_4$ e $\gamma_5$ tenham respectivamente como extremos os pontos $v_4$, $p_5$ e $v_1$, $p_6$ ou $v_4$, $p_3$ e $v_1$, $p_3$ ou $v_4$, $p_7$ e $v_1$, $p_8$.

## A.2 Cálculo da Equação da Parábola Conhecendo o Vértice e um Ponto

Dada a equação da parábola

$$f(u) = au^2 + bu + c, a \neq 0. \tag{A1.1}$$

O cálculo dos coeficientes $a$, $b$ e $c$ para determinar a equação da parábola pode ser feito conhecendo as coordenadas do vértice $v_0 = (u_{v_0}, v_{v_0})$ e um ponto $p = (u_p, v_p)$ pertencente a parábola. Assim, temos que as coordenadas do vértice são dadas por

$$u_v = -\frac{b}{2a} \tag{A1.2}$$

$$v_v = -\frac{\Delta}{4a}, \ \Delta = b^2 - 4ac, \tag{A1.3}$$

substituindo as coordenadas do vértice $v_0 = (u_{v_0}, v_{v_0})$ nas equações $(A1.2)$ e $(A1.3)$ , vem

$$\begin{aligned} u_{v_0} &= -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2au_{v_0}, \qquad &(A1.4)\\ v_{v_0} &= -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow -4av_{v_0} = b^2 - 4ac, \qquad &(A1.5)\end{aligned}$$

substituindo o valor de $b$ da equação $(A1.4)$ na equação $(A1.5)$ , obtemos

$$-4av_{v_0} = b^2 - 4ac = (-2au_{v_0})^2 - 4ac = (-2au_{v_0})^2 - 4ac = au_{v_0}^2 - c$$

onde,

$$a = (c - v_{v_0})/u_{v_0}^2, u_{v_0} \neq 0.$$

Substituímos o valor de $a$ na equação $(A1.4)$ , temos que

$$b = -2au_{v_0} = -2u_{v_0}\frac{(c - v_{v_0})}{u_{v_0}^2} = \frac{-2(c - v_{v_0})}{u_{v_0}},$$

logo,

$$\begin{aligned} a &= (c - v_{v_0})/u_{v_0}^2 \qquad &(A1.6)\\ b &= -2(c - v_{v_0})/u_{v_0}, \qquad &(A1.7)\end{aligned}$$

subtituindo os valores de $a$ e $b$ na equação $f(u) = au^2 + bu + c$, resulta que

$$f(u) = \frac{(c - v_{v_0})}{u_{v_0}^2}u^2 + \frac{-2(c - v_{v_0})}{u_{v_0}}u + c. \qquad (A1.8)$$

Neste caso, conhecendo um ponto $p = (u_p, v_p)$ pertencente a parábola $(A1.1)$, substituímos os valores de $p = (u_p, v_p)$ na equação $(A1.8)$ e calculamos o coeficiente $c$. Logo após calcular $c$, encontramos os coeficientes $a$ e $b$ nas equações $(A1.6)$ e $(A1.7)$. Quando $u_{v_0} = 0$, as equações $(A1.4)$, $(A1.5)$ tornam-se

$$\begin{aligned} u_{v_0} &= -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = 0 \qquad &(A1.9)\\ v_{v_0} &= -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow c = v_{v_0}, \qquad &(A1.10)\end{aligned}$$

logo,

$$f(u) = au^2 + v_{v_0}, \qquad (A1.11)$$

assim, substituindo o ponto $p = (u_p, v_p)$, encontramos o coeficiente $a$.

Portanto, dado o vértice e um ponto pertencente a uma parábola, podemos encontrar a equação da parábola, para isso, basta calcular os coeficientes $a$, $b$ e $c$. Em alguns casos a equação da parábola será descrita por $f(v) = av^2 + bv + c$, nesse caso o cálculo das variáveis $a, b$ e $c$ será análogo ao anterior, tomando cuidado apenas, com os valores das coordenadas do ponto $p = (u_p, v_p)$ na hora da substituição.

## A.3 Uniformidade de Área do Modelo Planar

Conhecendo as coordenadas do ponto inicial e final das curvas do mergulho do modelo planar, podemos calcular a área das regiões $D_i, i = 0 \cdots, 4$. Calculemos, por exemplo, a área da região $D_1$.

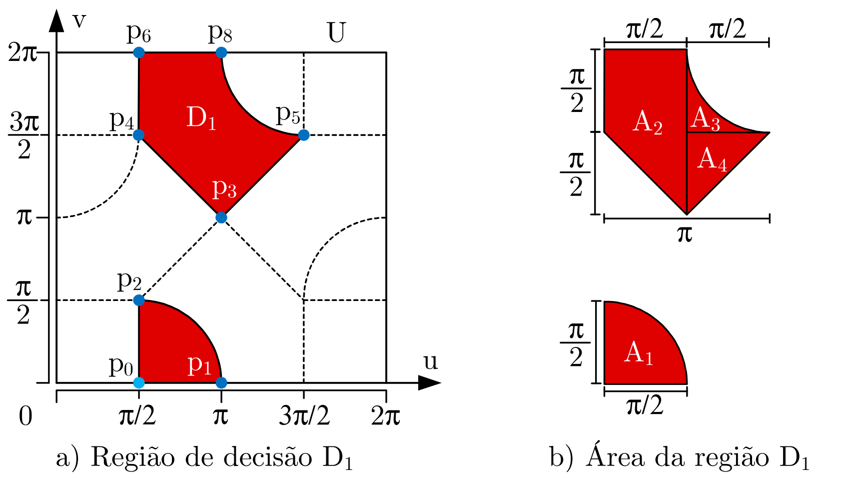



Figura A.3.1: Região de decisão $D_1$: curvas e pontos que a definem.

A Figura A.3.1 a) mostra todos os pontos $p_i$, $i = 0, 1, \cdots, 7$ das curvas que determinam a região $D_1$. A Tabela A.3.1 fornece as coordenadas dos pontos $p_i$, $i = 0, 1, \cdots, 7$ e, a partir desse pontos, calculamos o comprimento dos seguimentos como mostrado na Figura A.3.1 b).

Portanto, de acordo com a Figura A.3.1 b), a área da região $D_1$ é dada por

$$\begin{aligned} A_{D_1} &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{(\pi + \pi/2)\,\pi/2}{2} + \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] + \frac{(\pi/2)\,(\pi/2)}{2} \\ &= \frac{3}{4}\pi^2 = 7,402. \end{aligned}$$

De modo análogo deduzimos que

$$A_{D_0} = A_{D_1} = A_{D_2} = A_{D_3} = 7,402.$$

Além disso, é fácil ver que a área da região $D_4$ é dada por

$$A_{D_4} = 4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \pi^2 = 9,869,$$

sendo assim, o modelo apresentado cujas coordenadas dos vértices são: $v_0 = (\pi, \pi)\,, v_1 = (3\pi/2, 3\pi/2)\,, v_2 = (3\pi/2, \pi/2)\,, v_3 = (\pi/2, \pi/2)\,, v_4 = (\pi/2, 3\pi/2)$ não tem uniformidade

| $p_i$ | $(x_i, y_i)$ |
|---|---|
| $p_0$ | $(\pi/2, 0)$ |
| $p_1$ | $(\pi, 0)$ |
| $p_2$ | $(\pi/2, \pi/2)$ |
| $p_3$ | $(\pi, \pi)$ |
| $p_4$ | $(\pi/2, 3\pi/2)$ |
| $p_5$ | $(3\pi/2, 3\pi/2)$ |
| $p_6$ | $(\pi/2, 2\pi)$ |
| $p_7$ | $(\pi, 2\pi)$ |

Tabela A.3.1: Coordenadas dos pontos $p_i, i = 1, \cdots, 7$ da Figura A.3.1 a).

de área. Logo, nosso próximo objetivo será alcançar a uniformidade de área, deixando o modelo planar uniforme em relação à área.

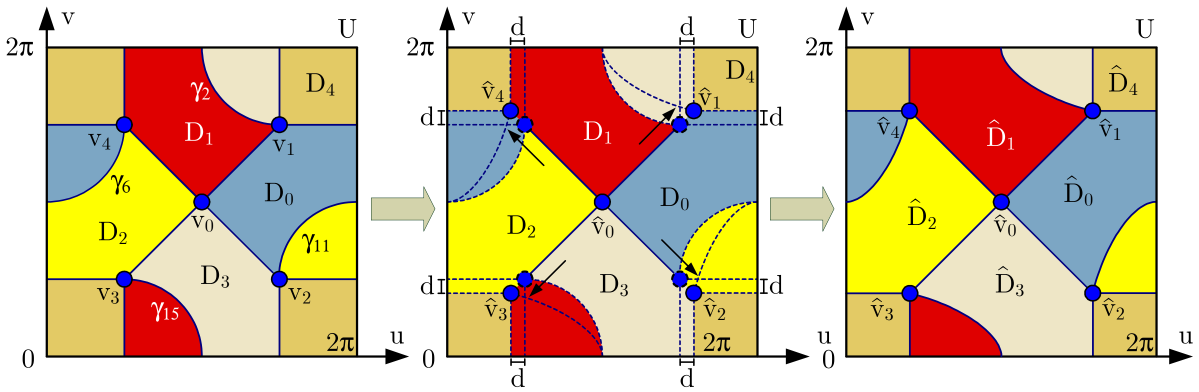



Figura A.3.2: Construção de $\Pi_p$ uniforme em relação à de área da modulação 5-QAMS.

Estudando o modelo planar, notamos que a área das regiões pode ser alterada movimentando os vértices. Salientamos que quando falamos em deslocar os vértices, estamos interessados em alterar as coordenadas dos vértices. O deslocamento dos vértices ocorrerá sobre as diagonais da região fundamental $U$ do centro para os extremos. A Figura A.3.2 a) mostra o primeiro projeto de modulação escolhido, b) como acontecerá o deslocamento dos vértices e c) o novo modelo pretendido com uniformidade de área. Escolhemos deslocar os vértices do centro para os cantos porque a área da região $D_4$ é maior que as demais, por isso, ao fazer esse deslocamento aumentamos a área das regiões

$D_0, D_1, D_2$ e $D_3$ e diminuindo $D_4$ tornando-as iguais em área.

Efetuando o deslocamento como indicado na Figura A.3.2 b), as curvas $\gamma_2$, $\gamma_6$, $\gamma_{11}$ e $\gamma_{15}$ mostradas na Figura A.3.2 a) do tipo arcos de circunferência centradas em $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$, $(2\pi, \pi)$ e $(\pi/2, 0)$ respectivamente não poderão ser mais utilizadas, pois não satisfazem a condição de conexão entre os lados do mergulho no modelo espacial apresentado na seção A.1, note que $\Psi(p_0) \neq \Psi(p_1)$ pela Proposição A.1.1 e $\Psi(p_2) \neq \Psi(p_3)$ pela Proposição A.1.2. A Figura mostra as curvas $\gamma_2$, $\gamma_6$, $\gamma_{11}$ e $\gamma_{15}$ centradas nos mesmos pontos, porém com raio menor por causa do movimento dos vértices.

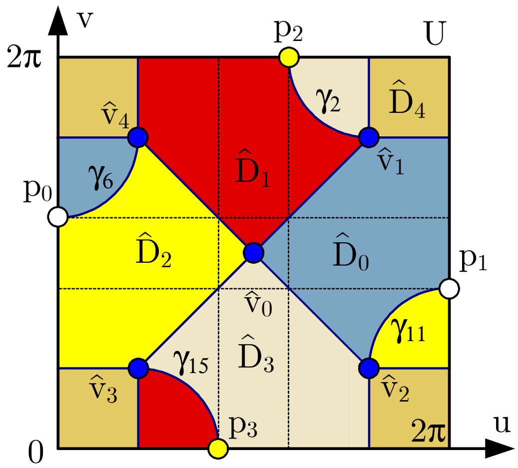



Figura A.3.3: Modulação 5-QAMS com as curvas do tipo arcos de circunferência.

Por essa razão, houve a necessidade de optar por outro tipo de curva que melhor se adapte a realidade do mergulho no modelo planar uniforme. A curva escolhida foi a parábola, pois podemos calcular sua equação conhecendo-se as coordenadas dos vértices e um ponto pertencente a ela. Por simplificação dos cálculos as parábolas terão vértices centrados em $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$, $(2\pi, \pi)$ e $(\pi/2, 0)$ e passarão por $\widehat{v}_1, \widehat{v}_4, \widehat{v}_3$ e $\widehat{v}_2$ respectivamente.

Utilizando o valor de $d$ da Proposição 3.7.2, encontramos as coordenadas dos vértices $\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \widehat{v}_3, \widehat{v}_4$ mostrados Tabela A.3.2.

| $\widehat{v}_0$ | $\widehat{v}_1$ | $\widehat{v}_2$ | $\widehat{v}_3$ | $\widehat{v}_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\pi, \pi)$ | $(2\pi - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi, 2\pi - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi)$ | $(2\pi - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi, \frac{\sqrt{5}}{5}\pi)$ | $(\frac{\sqrt{5}}{5}\pi, \frac{\sqrt{5}}{5}\pi)$ | $(\frac{\sqrt{5}}{5}\pi, 2\pi - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi)$ |

Tabela A.3.2: Coordenadas dos sinais de $\Pi_p$ uniforme em relação à área.

Por fim, os vértices tomados conforme a Tabela A.3.2 dividem, com a mesma área, as regiões do modelo planar do mergulho da Figura A.3.2 c).

## A.4 Cálculo da Área das Regiões de Decisão do Modelo Espacial do Mergulho de $K_5$

A área da região $D_i' = A_{\Psi(D_i)}$ no modelo espacial do mergulho é dada pela seguinte igualdade

$$A_{\Psi(D_i)} = \int\int_{D_i} \sqrt{EG - F^2}\, dvdu,$$

onde, a região $D_i$ está contida na região fundamental da parametrização $U$, e $E$, $F$, $G$ são os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície (2.2). No caso da parametrização particular do toro, equação (3.5), temos $E = (3 + \cos v)^2$, $F = 0$, e $G = 1$.

### A.4.1 Cálculo da área do modelo espacial $\Pi_\varepsilon$ correspondente ao modelo planar não uniforme

Cálculo das áreas das regiões do modelo espacial que tem o modelo planar não uniforme em relação à área. Este modelo é o nosso primeiro projeto de modulação. Apesar de não ser uniforme, tem quatro das cinco regiões com a mesma forma e área. O modelo planar do projeto é visto na Figura A.4.1 a), em b) temos as subregiões $D_{ij}$ de $\Pi_p$.

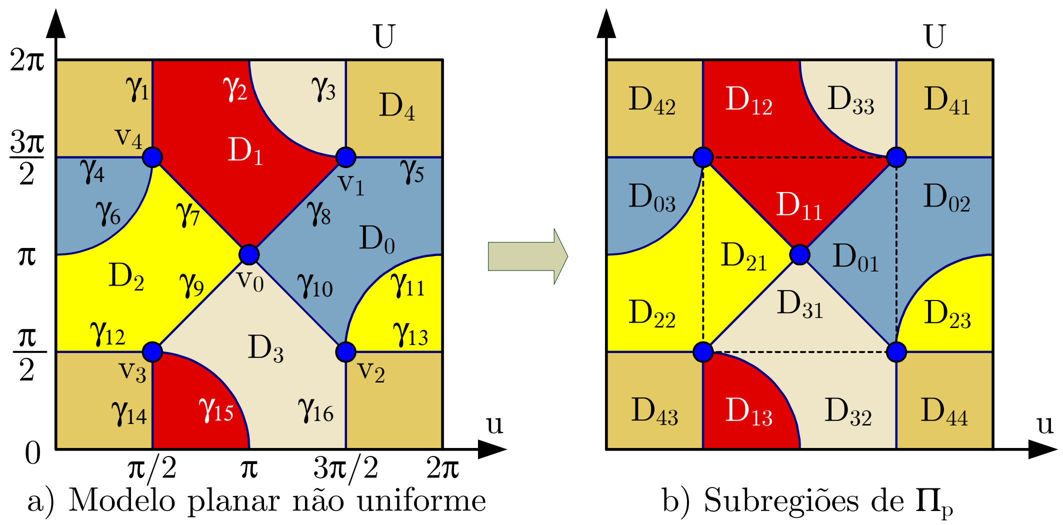



Figura A.4.1: Modelo planar não uniforme.

O modelo planar da Figura A.4.1 b) foi dividido em subregiões para simplificar o cálculo da área das regiões de decisão $D_i'$.

A área da região $D_0'$ é dada por $A_{D_0'} = A_{\Psi(D_{01})} + A_{\Psi(D_{02})} + A_{\Psi(D_{03})}$, onde,

$$A_{\Psi(D_{01})} = \int\int_{D_{01}} (3 + \cos v)\, dvdu \cong 5,40220,$$

$$A_{\Psi(D_{02})} = \int\int_{D_{02}} (3 + \cos v)\, dvdu \cong 6.94296,$$

e

$$A_{\Psi(D_{03})} = \int\int_{D_{03}} (3 + \cos v)\, dvdu \cong 4.71985.$$

Portanto, a área da região $D_0'$ é

$$A_{D_0'} = A_{\Psi(D_{01})} + A_{\Psi(D_{02})} + A_{\Psi(D_{03})} \cong 17,06501.$$

A área da região $D_1'$ é dada por

$$A_{D_1'} = A_{\Psi(D_{11})} + A_{\Psi(D_{12})} + A_{\Psi(D_{13})},$$

onde,

$$A_{\Psi(D_{11})} = \int\int_{D_{11}} (3 + \cos v)\, dudv \cong 6.26061,$$

$$A_{\Psi(D_{12})} = \int\int_{D_{12}} (3 + \cos v)\, dudv \cong 10.73374$$

$$A_{\Psi(D_{13})} = \int\int_{D_{13}} (3 + \cos v)\, dudv \cong 7.21226.$$

Portanto, a área da região $D_1'$ é

$$A_{D_1'} = A_{\Psi(D_{11})} + A_{\Psi(D_{12})} + A_{\Psi(D_{13})} \cong 24,20661.$$

A área da região $D_2'$ é dada por

$$A_{D_2'} = A_{\Psi(D_{21})} + A_{\Psi(D_{22})} + A_{\Psi(D_{23})},$$

onde,

$$A_{\Psi(D_{21})} = \int\int_{D_{21}} (3 + \cos v)\, dvdu \cong 5.40220,$$

$$A_{\Psi(D_{22})} = \int\int_{D_{22}} (3 + \cos v)\, dvdu \cong 6.94296,$$

e

$$A_{\Psi(D_{23})} = \int\int_{D_{23}} (3 + \cos v)\, dudv \cong 4.71985.$$

Portanto, a área da região $D_2'$ é

$$A_{D_2'} = A_{\Psi(D_{21})} + A_{\Psi(D_{22})} + A_{\Psi(D_{23})} = 17,06501.$$

A área da região $D'_3$ é dada por

$$A_{D'_3} = A_{\Psi(D_{31})} + A_{\Psi(D_{32})} + A_{\Psi(D_{33})},$$

onde,

$$A_{\Psi(D_{31})} = \int\int_{D_{31}} (3 + \cos v)\, dudv \cong 6.26061,$$

$$A_{\Psi(D_{32})} = \int\int_{D_{32}} (3 + \cos v)\, dudv \cong 10.73374,$$

e

$$A_{\Psi(D_{33})} = \int\int_{D_{33}} (3 + \cos v)\, dudv \cong 7.21226.$$

Portanto, a área da região $D'_3$ é

$$A_{D'_3} = A_{\Psi(D_{31})} + A_{\Psi(D_{32})} + A_{\Psi(D_{33})} = 24,20661.$$

A área da região $D'_4$ é dada por

$$A_{D'_4} = A_{\Psi(D_{41})} + A_{\Psi(D_{42})} + A_{\Psi(D_{43})} + A_{\Psi(D_{44})},$$

onde,

$$A_{\Psi(D_{41})} = \int\int_{D_{41}} (3 + \cos v)\, dvdu \cong 8.97300,$$

$$A_{\Psi(D_{42})} = \int\int_{D_{42}} (3 + \cos v)\, dvdu \cong 8.97300,$$

$$A_{\Psi(D_{43})} = \int\int_{D_{44}} (3 + \cos v)\, dvdu \cong 8.97300,$$

e

$$A_{\Psi(D_{44})} = \int\int_{D_{44}} (3 + \cos v)\, dvdu \cong 8.97300.$$

Portanto, a área da região $D'_4$ é

$$A_{D'_4} = A_{\Psi(D_{41})} + A_{\Psi(D_{42})} + A_{\Psi(D_{43})} + A_{\Psi(D_{44})} \cong= 35.89200.$$

### A.4.2 Cálculo da área do modelo espacial $\Pi_\varepsilon$ correspondente ao modelo planar uniforme

Cálculo das áreas das regiões do modelo espacial que tem o modelo planar uniforme em relação à área. Este modelo foi obtido do modelo planar não uniforme. Apesar de ser uniforme em relação à área, não é uniforme em relação à forma. A Figura A.4.2 a) mostra o modelo planar uniforme, b) as subregiões $D_{ij}$ de $\Pi_p$.

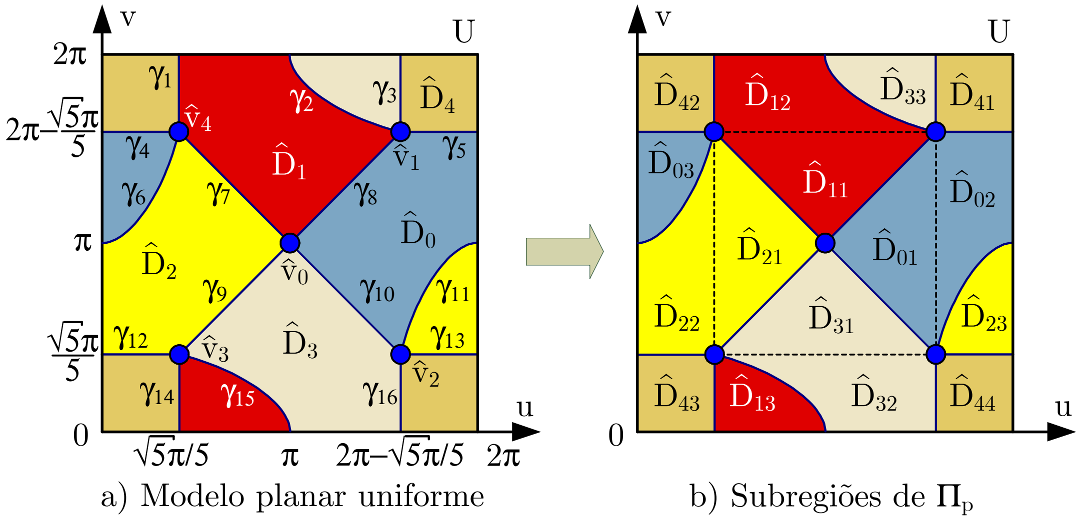



Figura A.4.2: Modelo planar uniforme em relação a área.

O modelo planar da Figura A.4.2 b) foi dividido em subregiões para simplificar o cálculo da área das regiões de decisão $D'_i$.

Assim, temos que a área da região $D'_0$ é dada por

$$A_{D'_0} = A_{\Psi(D_{01})} + A_{\Psi(D_{02})} + A_{\Psi(D_{03})},$$

onde,

$$A_{\Psi(D_{01})} = \int\int_{D_{01}} (3+\cos v)\, dvdu \cong 6.71750,$$

$$A_{\Psi(D_{02})} = \int\int_{D_{02}} (3+\cos v)\, dvdu \cong 7.71986,$$

e

$$A_{\Psi(D_{03})} = \int\int_{D_{03}} (3+\cos v)\, dvdu \cong 4.14817.$$

Portanto, a área da região $D'_0$ é

$$A_{D'_0} = A_{\Psi(D_{01})} + A_{\Psi(D_{02})} + A_{\Psi(D_{03})} = 18.58553.$$

A área da região $D'_1$ é dada por

$$A_{D'_1} = A_{\Psi(D_{11})} + A_{\Psi(D_{12})} + A_{\Psi(D_{13})},$$

onde,

$$A_{\Psi(D_{11})} = \int\int_{D_{11}} (3+\cos v)\, dudv \cong 7.95219,$$

$$A_{\Psi(D_{12})} = \int\int_{D_{12}} (3+\cos v)\, dudv \cong 11.85786,$$

e

$$A_{\Psi(D_{13})} = \int\int_{D_{13}} (3+\cos v)\, du dv \cong 6.20715.$$

Portanto, a área da região $D_1'$ é

$$A_{D_1'} = A_{\Psi(D_{11})} + A_{\Psi(D_{12})} + A_{\Psi(D_{13})} = 26.01720.$$

A área da região $D_2'$ é dada por

$$A_{D_2'} = A_{\Psi(D_{21})} + A_{\Psi(D_{22})} + A_{\Psi(D_{23})},$$

onde,

$$A_{\Psi(D_{21})} = \int\int_{D_{21}} (3+\cos v)\, dv du \cong 6.71750,$$

$$A_{\Psi(D_{22})} = \int\int_{D_{22}} (3+\cos v)\, dv du \cong 7.71986,$$

e

$$A_{\Psi(D_{23})} = \int\int_{D_{23}} (3+\cos v)\, du dv \cong 4.14817$$

Portanto, a área da região $D_2'$ é

$$A_{D_2'} = A_{\Psi(D_{21})} + A_{\Psi(D_{22})} + A_{\Psi(D_{23})} = 18.58553.$$

A área da região $D_3'$ é dada por

$$A_{D_3'} = A_{\Psi(D_{31})} + A_{\Psi(D_{32})} + A_{\Psi(D_{33})},$$

onde,

$$A_{\Psi(D_{31})} = \int\int_{D_{31}} (3+\cos v)\, du dv \cong 7.95219,$$

$$A_{\Psi(D_{32})} = \int\int_{D_{32}} (3+\cos v)\, du dv \cong 11.85786,$$

e

$$A_{\Psi(D_{33})} = \int\int_{D_{33}} (3+\cos v)\, du dv \cong 6.20715.$$

Portanto, a área da região $D_3'$ é

$$A_{D_3'} = A_{\Psi(D_{31})} + A_{\Psi(D_{32})} + A_{\Psi(D_{33})} = 26.01720.$$

A área da região $D_4'$ é dada por

$$A_{D_4'} = A_{\Psi(D_{41})} + A_{\Psi(D_{42})} + A_{\Psi(D_{43})} + A_{\Psi(D_{44})},$$

onde,

$$A_{\Psi(D_{41})} = \int\int_{D_{41}} (3 + \cos v)\, dvdu \cong 7.30745,$$

$$A_{\Psi(D_{42})} = \int\int_{D_{42}} (3 + \cos v)\, dvdu \cong 7.30745,$$

$$A_{\Psi(D_{43})} = \int\int_{D_{44}} (3 + \cos v)\, dvdu \cong 7.30745,$$

e

$$A_{\Psi(D_{44})} = \int\int_{D_{44}} (3 + \cos v)\, dvdu \cong 7.30745.$$

Portanto, a área da região $D_4'$ é

$$A_{D_4'} = A_{\Psi(D_{41})} + A_{\Psi(D_{42})} + A_{\Psi(D_{43})} + A_{\Psi(D_{44})} = 29.22980.$$

Apêndice B

# Coordenadas dos Sinais das Modulações dos Projetos I e II

Na Subseção 4.6.1 foi analisado um projeto de modulação 5-QAMS sobre o toro $T(1,3)$ em que as áreas não eram todas iguais. Na Subseção 4.6.2 foi analisado um modelo de modulação 5-QAMS sobre o toro $T(1,3)$ em que as áreas eram todas iguais. Nestes projetos foram utilizadas uma constelação de sinais $A = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ cujas coordenadas, sobre o modelo planar e sobre o modelo espacial do toro constam na Tabela B.0.1. Para representar o sistema de coordenadas, utilizamos a notação de ponto flutuante.

| Projeto I | | | |
|---|---|---|---|
| Sinal | $\Pi_p$ | $\Pi_\varepsilon$ | Raio |
| $s_0$ | $(5.0993, 3.77828)$ | $(0.8285989471, -2.033603254, -0.5945376)$ | 0.900518018 |
| $s_1$ | $(2.5049, 5.0993)$ | $(-2.715605029, 2.007952030, -0.9260774)$ | 1.227040217 |
| $s_2$ | $(1.18388, 2.50491)$ | $(0.8285967062, 2.033597748, 0.5945296293)$ | 0.900518018 |
| $s_3$ | $(3.77828, 1.18388)$ | $(-2.715605032, -2.007952028, 0.9260774)$ | 1.227040217 |
| $s_4$ | $(0, 0)$ | $(4, 0, 0)$ | 1.414213562 |
| Projeto II | | | |
| Sinal | $\Pi_p$ | $\Pi_\varepsilon$ | Raio |
| $s_0$ | $(5.30401, 3.85022)$ | $(1.249688767, -1.859898271, -0.650794)$ | 0.983338084 |
| $s_1$ | $(2.43297, 5.30401)$ | $(-2.701228687, 2.315312290, -0.830035)$ | 1.329106232 |
| $s_2$ | $(0.97918, 2.43297)$ | $(1.249666540, 1.859905364, 0.65078706)$ | 0.983338084 |
| $s_3$ | $(3.85022, 0.97918)$ | $(-2.701199233, -2.315333900, 0.830040)$ | 1.329106232 |
| $s_4$ | $(0, 0)$ | $(4, 0, 0)$ | 1.292224128 |

Tabela B.0.1: Coordenadas dos pontos correspondentes aos sinais $s_i$ sobre os modelos planar e espacial dos Projetos I e II e os raios das regiões de decisão.

As coordenadas dos sinais das modulações dos Projetos I e II da Tabela B.0.1 foram escolhidas aproximadamente nos centros das respectivas regiões de decisões e os raios correspondem aos raios das maiores esferas possíveis contidas inteiramentes nestas regiões.

Apêndice C

# Coordenadas dos Sinais do Projeto III

Na Subseção 4.6.1 foi analisado Um projeto de modulação 5-QAMS sobre o toro $T(1,3)$ com o objetivo do demodulador tomar uma decisão suave do sinal transmitido foi analisado na Subseção 4.7.2. As coordenadas dos sinais para a constelação $A = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ são apresentadas na Tabela cujas coordenadas, sobre o modelo planar e sobre o modelo espacial do toro constam na Tabela C.0.1. Novamente foi utilizada a notação de ponto flutuante para representar as coordenadas e o raio da região de decisão.

| | Coordenada em $\Pi_p$ | Coordenada em $\Pi_\varepsilon$ | Raio $r_i$ |
|---|---|---|---|
| $s_{01}$ | $(4.61003, 3.14159)$ | $(-0.2043529, -1.98953, 0)$ | 1.340017569 |
| $s_{02}$ | $(6.20552, 4.00817)$ | $(2.3454, -0.1825, -0.762)$ | 0.842866810 |
| $s_{11}$ | $(3.14159, 4.61003)$ | $(-2.897823, 0, -0.994766)$ | 1.340017569 |
| $s_{12}$ | $(2.27501, 6.20552)$ | $(-2.587, 3.0461, -0.0775)$ | 1.019786087 |
| $s_{21}$ | $(1.67315, 3.14159)$ | $(-0.204352, 1.989532, 0)$ | 1.340017569 |
| $s_{22}$ | $(0.07766, 2.27501)$ | $(2.3454, 0.18251, 0.762)$ | 0.842866810 |
| $s_{31}$ | $(3.14159, 1.67315)$ | $(-2.8978235, 0, 0.99476)$ | 1.340017569 |
| $s_{32}$ | $(4.00817, 0.07766)$ | $(-2.587, -3.046, 0.0775)$ | 1.019786087 |
| $s_{41}$ | $(0, 0)$ | $(4, 0, 0)$ | 1.292228180 |

Tabela C.0.1: Coordenadas dos sinais do modelo planar e espacial do Projeto III.

As coordenadas de sinais da Tabela C.0.1 foram escolhidas com o objetivo de tornar os raios das regiões de decisões os maiores possíveis.

# Índice Remissivo