



Universidade do Estado do Rio Grande do Norte  
Universidade Federal Rural do Semiárido  
Mestrado em Ciência da Computação



**Angélica de Freitas Alves**

**Modulações QAMS e *Twisted* sobre  
Superfícies, uma Aplicação à TV Digital**

Número de ordem MCCPgEE:M004  
Mossoró, RN, Fevereiro de 2012

**Angélica de Freitas Alves**

# Modulações QAMS e *Twisted* sobre Superfícies, uma Aplicação à TV Digital

Dissertação apresentada ao Mestrado de Ciência da Computação UERN/UFERSA - associação ampla entre a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte e a Universidade Federal Rural do Semiárido, para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. João de Deus Lima - UERN

Co-Orientador: Profa. Dra. Cláudia Maria Fernandes Aarújo Ribeiro - UERN

Mossoró, RN  
Fevereiro de 2012

# Modulações QAMS e *Twisted* sobre Superfícies, uma Aplicação à TV Digital

Angélica de Freitas Alves

Dissertação de Mestrado apresentada em 15 de fevereiro de 2012

---

Prof. Dr. João de Deus Lima (Orientador) .....DME/UERN

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Cláudia Maria Fernandes Araújo Ribeiro (Co-Orientadora) . DME/UERN

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes .....DME/UECE

---

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva ..... DM/UFPB

---

Prof. Dr. Elmer Rolando Llanos Villareal ..... DCE/UFERSA

# Dedicatória

*Dedico este trabalho ao Prof. João de Deus, pois sem ele nada disso seria possível, a minha mãe, a minha amada avó e ao meu saudoso pai (in memoriam).*

# Agradecimentos

A Deus, por me permitir chegar até aqui, dando-me coragem para continuar lutando pelos meus sonhos.

Em especial, ao Prof. Dr. João de Deus Lima, meu orientador, pela sua paciência, dedicação e amizade. Sua generosidade, seu jeito simples e comprometido se tornaram, para mim, um modelo a ser seguido.

A Prof<sup>a</sup>. Dra. Cláudia Maria F. Araújo Ribeiro por me aceitar em seu projeto de pesquisa de TV Digital.

A coordenadora do programa, Prof<sup>a</sup>. Dra. Angélica Félix de Castro, por sua amizade, disposição, prontidão e disponibilidade em todos os momentos que recorri a ela com algum problema e por ser tão humana e "mãezona" dos mestrandos.

A Prof<sup>a</sup>. Dra. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes - UECE, Prof. Dr. Antônio Andrade – UFPB, e Prof. Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal – UFERSA, por estarem presentes na banca avaliadora.

A minha mãe, Elisa, meus irmãos, Andréa, Andresa e Adriano, e meu cunhado, Roberto, que mesmo à distância me mantiveram firme, me apoiando e incentivando. Obrigada, família maravilhosa!

A minha querida prima, Maria de Lourdes, pelo apoio financeiro neste período tão difícil e decisivo da minha vida.

A minha avó, Helena, por suas sábias palavras de fé e coragem sempre que eu fraquejava. Obrigada, vó! Você é a mulher mais forte e guerreira que já conheci em minha vida.

As famílias Larinho e Medeiros pela força, carinho e completo apoio.

Aos meus queridos amigos que aguentaram minha ausência, a falta de assunto nesses dois anos de curso, minha chatice, lamentações e mesmo assim continuam sendo meus amigos.

Aos colegas de curso que, assim como eu, perderam noites de sono, finais de semana, feriados, festas, esqueceram o significado de vida social, viraram noites no laboratório da UFERSA e ainda assim estavam juntos e dispostos a ajudar uns aos outros.

Ao meu colega, Francisco Leônardo, por toda colaboração e esclarecimentos referentes ao LaTeX e os softwares utilizados nesta pesquisa. Aprendi muito com você, Leo!

A todos que me incentivaram a sempre tentar e nunca desistir, mesmo que as circunstâncias me motivassem do contrário.

A CAPES, por me contemplar com a bolsa de estudos nos últimos 18 meses.

A Universidade Federal Rural do Semiárido (UFERSA) e Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN) por todo apoio estrutural.

# Resumo

O objetivo geral deste trabalho é propor a construção de dois tipos de modulações sobre superfícies, as QAMS's e a *twisted*, a partir de mergulhos de grafos e avaliar o desempenho destas modulações em relação à capacidade de compactação de dados, quando utilizadas no processo de codificação da imagem da televisão em cores. Neste estudo, são utilizados quatro tipos de grafos: o grafo completo  $K_5$ , o grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ , o grafo de Cayley correspondente aos lados e vértices do hexaedro  $H_{8,12}$  e o grafo de Cayley correspondente aos lados e vértices do octaedro  $H'_{6,12}$ . Serão consideradas as modulações sobre os quatro tipos de famílias de superfícies nas quais se encontram os mergulhos dos grafos, a família das superfícies orientáveis sem e com bordos e as não-orientáveis sem e com bordos. Durante todo o processo de identificação enfatizamos amplamente o aspecto da regularidade, propriedade visada pelo projetista do sistema, por estar relacionada aos projetos de melhores desempenhos e de menor complexidade de cálculo.

**Palavras-chave:** Mergulho de grafo; Superfícies topológicas; Modulação QAMS; Modulação *twisted*; Codificação da imagem digital.

# Abstract

The aim of this work is propose the constructions of two kind of modulations on surfaces, the QAMS and *twisted* modulations, coming from graph embedding, and evaluate their performances regarding to the capacity of data compression, when used in the encoding process of the color TV image. They will use four kind of graphs, complete graph  $K_5$ , bipartite complete graph  $K_{4,4}$ , Cayley graph of hexahedron  $H_{8,12}$ , and Cayley graph of octahedron  $H'_{6,12}$ . Will be considered the four types of families of surfaces where found the graph embeddings, the orientable surfaces with and without boundary, and nonorientable surfaces with and without boundary. During the whole identification process it will be widely emphasize the aspect of regularity property aiming by the system designer, because it is related to the design of better performance and less complex calculation

**Keewords:** Graph empedding, topological surfaces, QAMS modulation, *twisted* modulation, digital image coding.

<b>Lista de Símbolos</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Contextualização . . . . .	2
1.2 Proposta da Pesquisa . . . . .	3
1.3 Contribuições da Proposta . . . . .	4
1.4 Organização da Proposta . . . . .	5
<b>2 Mergulho de grafos</b>	<b>7</b>
2.1 Conceitos e definições . . . . .	7
2.2 Representações poligonais . . . . .	8
2.3 Modelos planar, espacial e realização geométrica . . . . .	8
2.4 Mergulhos de grafos . . . . .	11
2.4.1 Propriedades de mergulhos do grafo completo $K_n$ . . . . .	13
2.4.2 Emaranhados pontual e linear . . . . .	14
2.4.3 Mergulho dual . . . . .	16
2.4.4 Classe de mergulhos . . . . .	16
2.4.5 Mergulho com bordos . . . . .	17
2.5 Canal Associado a uma Modulação QAMS . . . . .	17
2.6 Algoritmo Identificador de Mergulhos . . . . .	19
<b>3 Modulação sobre Superfícies</b>	<b>21</b>
3.1 O Canal em um sistema de comunicações . . . . .	21
3.2 Modulações usuais . . . . .	22
3.3 Modulações via mergulhos de grafos . . . . .	23
3.4 Propostas de soluções para o Problema 3.3.1 . . . . .	26
3.4.1 Solução para o Problema 3.3.1 a partir da modulação . . . . .	26
3.4.2 Solução para o Problema 3.3.1 via mergulho de grafo . . . . .	28
3.5 Por que Modulações sobre Superfícies? . . . . .	28
3.5.1 Modulação <i>twisted</i> e mergulhos de grafo . . . . .	28

3.5.2	Características das regiões de indecisões . . . . .	30
3.6	Justificativas . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Modulações de Grafos Completos</b>	<b>33</b>
4.1	Processo de Identificação de $kM$ . . . . .	33
4.1.1	Identificação dos mergulhos . . . . .	34
4.1.2	Identificações das partições . . . . .	36
4.1.3	Identificação das rotações . . . . .	37
4.1.4	Identificação das modulações . . . . .	39
4.1.5	Identificação das classes de modulações . . . . .	40
4.2	Principais Características das Modulações . . . . .	44
4.2.1	Modulações sobre superfícies orientáveis . . . . .	45
4.2.2	Modulações sobre superfícies não-orientáveis . . . . .	46
4.3	Identificação das Modulações de $K_5$ . . . . .	50
4.3.1	Os mergulhos de $K_5$ . . . . .	51
4.3.2	As partições de $K_5$ . . . . .	52
4.3.3	Os sistemas de rotações de $K_5$ . . . . .	53
4.3.4	Identificação das Modulações . . . . .	55
4.3.5	Modulações em superfícies com bordos . . . . .	57
4.3.6	Modulações de $K_5$ sobre $2T$ ou $4P$ . . . . .	62
4.3.7	Modulações de $K_5$ sobre $5P$ . . . . .	63
4.3.8	A quantidade de modulações de $K_5$ . . . . .	64
4.4	Modulações do Grafo Completo Bipartido $K_{4,4}$ . . . . .	67
4.4.1	Características particulares das modulações de $K_5$ e $K_{4,4}$ . . . . .	67
4.4.2	Os modelos das modulações de $K_{4,4}$ . . . . .	68
4.4.3	Identificação dos mergulhos de $K_{4,4}$ . . . . .	69
4.4.4	As modulações QAMS e <i>twisted</i> de $K_{4,4}$ . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Modulações Oriundas do Cubo e do Octaedro</b>	<b>81</b>
5.1	Modulações Oriundas do Hexaedro . . . . .	81
5.1.1	As possíveis partições do hexaedro . . . . .	85
5.2	Modulações do Hexaedro . . . . .	88
5.3	Modulações do Octaedro . . . . .	95
5.3.1	As partições e superfícies de modulações do octaedro . . . . .	95
5.3.2	Classes de modulações do octaedro . . . . .	99
5.3.3	Modulações com bordos do octaedro . . . . .	103
5.4	Análise Geral das Modulações . . . . .	106
5.4.1	Fatores que contribuem para o número de modulações . . . . .	107
5.4.2	Índices de incidências e taxas de variações . . . . .	108
5.5	Comentários Complementares . . . . .	110
<b>6</b>	<b>Modulações QAMS's, <i>twisted</i> e TV Digital</b>	<b>115</b>
6.1	A Televisão Digital . . . . .	115
6.2	Modulação e a Codificação de Imagens . . . . .	118
6.3	Modulação QAMS e Televisão em Cores . . . . .	119

6.4	Alfabetos das Modulações QAMS's	120
6.5	Exemplos dos Alfabetos das Modulações QAMS's	125
6.5.1	Alfabetos das modulações QAMS's do grafo completo $K_5$	125
6.5.2	Alfabetos associados às modulações QAMS's do grafo $K_{4,4}$	126
6.5.3	Alfabetos das modulações QAMS's do hexaedro $H_{8,12}$	127
6.5.4	Alfabetos das modulações QAMS's do hexaedro $H'_{6,12}$	132
6.6	Mergulhos Mínimos Maximais Idênticos	133
6.7	Modulação QAMS e TV Digital	134
6.8	Alfabetos Maximais de Grafos	136
6.9	Comentários Adicionais	142
6.10	Modulação <i>Twisted</i> e a TV Digital	143
6.10.1	Número de sinais da modulação <i>twisted</i> de um grafo	144
6.10.2	Fator de compacticidade nas modulações <i>twisted</i>	146
6.11	Performances das Modulações <i>Twisted</i>	149
6.11.1	Desempenho dos alfabetos associados às QAMS's	150
6.11.2	Desempenho dos alfabetos associados às modulações <i>twisted</i>	151
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>155</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>157</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>161</b>
<b>A</b>	<b>Construção da QAMS Via Parametrização</b>	<b>163</b>
<b>B</b>	<b>Partições das Modulações de <math>K_{4,4}</math></b>	<b>169</b>
<b>C</b>	<b>Os Sistemas de Rotações do Hexaedro</b>	<b>175</b>
<b>D</b>	<b>Demonstração do Teorema 5.1.2</b>	<b>177</b>
<b>E</b>	<b>Modelos de Modulações do Octaedro</b>	<b>181</b>
<b>F</b>	<b>Análises de Mergulhos Mínimos Maximais de Grafos</b>	<b>189</b>
F.1	Mergulhos Mínimos Maximais Orientáveis	189
F.1.1	Conjunto dos alfabetos	190
F.1.2	Conjuntos das Superfícies	191
F.2	Comentários Complementares	194
<b>G</b>	<b>Demonstração do Teorema 6.8.5</b>	<b>195</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>200</b>



## LISTA DE FIGURAS

2.2.1 Formas normais da esfera e do toro . . . . .	8
2.3.1 Possíveis orientações do toro . . . . .	9
2.3.2 Realização geométrica do toro e sua operação inversa . . . . .	9
2.3.3 Transformação geométrica do bi-toro [15] . . . . .	10
2.3.4 Forma espacial do $m$ -toros e curvas de homologias . . . . .	10
2.5.1 Associação, via Regra 1, do grafo $G(5, 5 + 7)$ ao canal $C_{5,5}$ . [15] . . . . .	18
3.1.1 O canal em um sistema de comunicações [21] . . . . .	21
3.2.1 Modelos usuais de modulações . . . . .	22
3.3.1 Grafos sobre superfícies que definem regiões de indecisão de modulações . . . . .	23
3.3.2 Modulações sobre a esfera equivalentes as modulações da Figura 3.3.1 . . . . .	25
3.3.3 Modulação 128-QAM e sua equivalente sobre o toro [15] . . . . .	26
3.5.1 Modulação toroidal $M_5$ vinda do mergulho de $K_5$ . . . . .	29
4.2.1 Modulações vindas de rotações distintas de $K_5$ . . . . .	45
4.2.2 Projetos topológicos de modulações não-orientáveis de $K_5$ . . . . .	48
4.3.1 Pesquisa no arquivo de saída do Algoritmo 2.6.1 . . . . .	56
4.3.2 Projetos topológicos de classes de modulações de $K_5$ sobre $3P$ . . . . .	62
4.4.1 Grafo completo bipartido $K_{4,4}$ . . . . .	70
4.4.2 Gráfico dos números de modulações QAMS's e <i>twisted</i> por famílias de superfícies dos grafos $K_5$ e $K_{4,4}$ . . . . .	78
5.1.1 Rotulamento de vértices fixo sobre o hexaedro . . . . .	82
5.1.2 Grafo trivalente e com mesmo número de vértices e lados do hexaedro . . . . .	84
5.1.3 Rotações fixas de vértices e região de um mergulho de um grafo . . . . .	85
5.1.4 Região pentagonal de um mergulho orientável . . . . .	86
5.2.1 Gráfico da quantidade de modulações QAMS's e <i>twisted</i> por família de superfícies de mergulhos do hexaedro $H_{8,12}$ . . . . .	91
5.2.2 Gráfico da taxa de variação entre modulações QAMS's e <i>twisted</i> por famílias de superfícies dos grafos $K_5$ , $K_{4,4}$ e $H_{8,12}$ . . . . .	93
5.3.1 Modelo espacial do octaedro e seu grafo de Cayley . . . . .	96

5.3.2	Número de classes de modulações QAMS e <i>twisted</i> do octaedro . . . . .	105
5.4.1	Gráfico de barras horizontais indicando o número de classes de modulações QAMS's e <i>twisted</i> nas famílias de superfícies dos grafos $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$ e $H'_{6,12}$	112
5.4.2	Gráfico de linhas indicando a variação média dos índices de existências das classes de modulações por famílias de superfícies dos grafos $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$ e $H'_{6,12}$ . . . . .	113
6.1.1	Elementos de imagem na televisão em preto-e-branco [21] . . . . .	116
6.8.1	Gráfico de linhas dos índices de reduções dos alfabetos $X, Y$ e $Z$ das famílias dos grafos $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$ e $H'_{6,12}$ . . . . .	139
6.10.1	Projeto geométrico de modulação <i>twisted</i> sobre $T$ vindo de $K_5$ . . . . .	144
6.10.2	Gráfico das taxas de reduções dos alfabetos maximais QAMS e <i>twisted</i> . . . . .	148
A.0.1	Associação e projeto topológico da 5-QAMS : $K_5(\Theta) \hookrightarrow T \equiv 5R_4$ . . . . .	163
A.0.2	Modelos planares básicos da modulação 5-QAMS, $K(\Theta) \hookrightarrow T \equiv 5R_4$ . . . . .	164
A.0.3	Método de construção de curvas sobre o toro. . . . .	166
A.0.4	Modelo planar e espacial do mergulho de $K_5$ sobre o toro. . . . .	167
A.0.5	Modulação 5-QAMS e suas respectivas regiões de Voronoi. . . . .	168

## LISTA DE TABELAS

3.5.1 Dados referentes as áreas de indecisões da modulação toroidal $M_5$ . . . . .	30
3.5.2 Distância euclidiana entre os sinais vizinhos da constelação $A$ . . . . .	31
4.1.1 Classificação de mergulhos emaranhados . . . . .	42
4.3.1 Modelos de partições de modulações de $K_5$ . . . . .	53
4.3.2 Sistemas de rotações distintos dos vértices de $K_5$ [15] . . . . .	54
4.3.3 Classes de modulações orientáveis de $K_5$ . . . . .	57
4.3.4 Partições das modulações de $K_5$ sobre $P_\mu$ . . . . .	59
4.3.5 Partições das modulações de $K_5$ sobre $T_\mu$ ou $2P_\mu$ . . . . .	60
4.3.6 Partições das modulações de $K_5$ sobre $3P_\mu$ . . . . .	61
4.3.7 Partições das modulações de $K_5$ sobre $2T_\mu$ ou $4P_\mu$ . . . . .	63
4.3.8 Partições das modulações de $K_5$ sobre $5P$ . . . . .	64
4.3.9 Quantidades de classes de modulações QAMS de $K_5$ . . . . .	64
4.3.10 Cardinalidade das classes de Modulações de $K_5$ . . . . .	66
4.4.1 Partições das classes de mergulhos orientáveis e não-orientáveis de $K_{4,4}$ . . . . .	69
4.4.2 Cardinalidades das partições das classes de modulações de $K_{4,4}$ [18] . . . . .	71
4.4.3 Cardinalidades das partições das classes de mergulhos de $K_{4,4}$ [18] . . . . .	72
4.4.4 Modulações QAMS's e <i>twisted</i> por classes de superfícies de $K_{4,4}$ . . . . .	74
4.4.5 Taxa de variação dos índices de existências das classes de modulações QAMS's e <i>twisted</i> . . . . .	75
5.1.1 Rotações distintas dos vértices do hexaedro $H(8, 12)$ . . . . .	84
5.1.2 Partições das classes de mergulhos orientáveis e não-orientáveis de $H_{8,12}$ . . . . .	87
5.1.3 Classes de modulações orientáveis de $H_{8,12}$ . . . . .	88
5.2.1 Partições das modulações de $H_{8,12}$ sobre $2T_\mu$ ou $4P_\mu$ . . . . .	89
5.2.2 Modulações QAMS's e <i>twisted</i> por classes de superfícies de $H_{8,12}$ . . . . .	90
5.2.3 Taxa de variação dos índices de existências das classes de modulações QAMS's e <i>twisted</i> nas famílias de superfícies de mergulhos do grafo $K_{4,4}$ . . . . .	92
5.2.4 Taxas de variações dos índices de existências das classes de modulações QAMS's e <i>twisted</i> nas famílias de superfícies de mergulhos dos grafos $K_5$ , $K_{4,4}$ e $H_{8,12}$ . . . . .	92

5.2.5	Taxas de variações dos índices de existências das classes de modulações QAMS's e <i>twisted</i> nas famílias de superfícies de mergulhos dos grafos $K_5$ , $K_{4,4}$ e $H_{8,12}$	93
5.3.1	Conjunto dos sistemas de rotações distintos dos vértices de $H'_{6,12}$	96
5.3.2	Partições das classes de mergulhos orientáveis e não-orientáveis de $H'_{6,12}$	97
5.3.3	Classes de modulações de $H'_{6,12}$ e suas respectivas cardinalidades	100
5.3.4	Índices de existências das modulações de $K_5$ , $K_{4,4}$ , $H_{8,12}$ e $H'_{6,12}$	102
5.3.5	Partições das classes de modulações sobre superfícies do octaedro $H'_{6,12}$	103
5.3.6	Modulações QAMS's e <i>twisted</i> por classes de superfícies de $H_{8,12}$	104
5.4.1	Índices de existências das classes de modulações QAMS's e <i>twisted</i> nas famílias de superfícies de mergulhos do grafos $H'_{6,12}$	108
5.4.2	Taxas de variações dos índices de incidências das classes de modulações QAMS's e <i>twisted</i>	109
6.1.1	Elementos de imagem nas televisão em preto-e-branco e televisão em cores	117
6.5.1	Alfabetos das modulações QAMS's do grafo completo $K_5$	125
6.5.2	Alfabetos das modulações QAMS's do grafo completo bipartido $K_{4,4}$	126
6.5.3	Alfabetos das modulações QAMS's do hexaedro $H_{8,12}$	127
6.5.4	Alfabetos das modulações QAMS's do octaedro $K_{4,4}$	132
6.7.1	Comprimentos das palavras $X, Y$ e $Z$ codificadas em $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \dots, \mathbb{Z}_8$	135
6.7.2	Reduções máximas de $X, Y$ e $Z$ em alfabetos de $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$ e $H'_{6,12}$	136
6.10.	Número máximo de sinais das modulações QAMS's e <i>twisted</i>	145
6.10.	Reduções máximas de $X, Y$ e $Z$ em alfabetos de $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$ e $H'_{6,12}$	147
A.0.1	Equações das curvas $\gamma_k$ do modelo planar da Figura A.0.2 a).	165
B.0.1	Classes de mergulhos não orientáveis de $K_{4,4}$ sobre $gKP$	170
C.0.1	Sistemas de rotações do hexaedro $H(p, q)$	176
E.0.1	Partições das classes de modulações sobre superfícies do octaedro $H'_{6,12}$	181

$G$ :	Grafo.....	7
$\Omega$ :	Superfície.....	7
$v$ :	Vértice.....	7
$G \hookrightarrow \Omega$ :	Mergulhos de $G$ sobre $\Omega$ .....	7
$R_\alpha$ :	Região de $\alpha$ lados.....	7
$\cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}$ :	Partição em $k$ regiões.....	7
$\alpha$ -lados:	Região de $\alpha$ lados.....	7
2-células:	Região de duas células.....	7
$\gamma$ :	Sequência orbital.....	7
$\gamma^{(i)}$ :	A $i$ -ésima rotação cíclica de $\gamma$ .....	7
$\Theta$ :	Sistemas de rotações de um grafo.....	8
$G(\Theta)$ :	Grafo $G$ munido de rotação $\Theta$ .....	8
$\Gamma$ :	Conjunto de sequências orbitais.....	8
$S$ :	Esfera.....	8
$T$ :	Toro.....	8
$mT$ :	$m$ -toro.....	8
$\bar{\omega}$ :	Forma natural.....	8
$\omega$ :	Forma normal.....	11
$P$ :	Plano projetivo.....	11
$mP$ :	Soma conexa de $m$ planos projetivos.....	11
$\chi(\Omega)$ :	Característica de Eüller-Poincaré.....	11
$\gamma(K_n)$ :	Gênero mínimo orientável de $K_n$ .....	12
$\gamma_M(K_n)$ :	Gênero máximo orientável de $K_n$ .....	12

$\bar{\gamma}(K_n)$ :	Gênero mínimo não-orientável de $K_n$ .....	12
$\gamma(K_{m,n})$ :	Gênero mínimo orientável de $K_{m,n}$ .....	12
$\bar{\gamma}(K_{m,n})$ :	Gênero mínimo não-orientável de $K_{m,n}$ .....	12
$ \Theta(G) $ :	Número de sistemas de rotações de $G$ .....	13
$\Gamma(K_n)$ :	Conjunto de sequências orbitais de $K_n$ .....	13
$\partial(R_\alpha)$ :	Fronteira de $R_\alpha$ .....	14
$\varpi(R_\alpha)$ :	Emaranhado pontual de $R_\alpha$ .....	14
$\sigma(R_\alpha)$ :	Emaranhado linear de $R_\alpha$ .....	14
$\circ(R_{\alpha_i})$	Grau do emaranhado do mergulho.....	14
$ K_n(\max) $ :	Número de regiões do mergulho máximo de $K_n$ .....	15
$d_{\text{Lee}}$ :	Distância de Lee.....	15
$d_{\text{Lee}}^+(x_i)$ :	Distância de Lee à esquerda de $x_i$ .....	15
$d_{\text{Lee}}^-(x_i)$ :	Distância de Lee à direita de $x_i$ .....	15
$d_{\text{Lee}}(v_i)$ :	Distância de Lee do emaranhado pontual.....	15
$d_{\text{Lee}}(v_i, v_j)$ :	Distância de Lee do emaranhado linear.....	15
$G'$ :	Grafo dual.....	16
$l$ :	Lado de uma região de $G'$ .....	16
$\Lambda_G$ :	Conjunto dos mergulhos orientáveis de $G$ .....	16
$\lambda$ :	Mergulho.....	16
$\Theta_\lambda$ :	Sistema de rotação de $G$ associado a $\lambda$ .....	16
$\text{Part}(G \hookrightarrow \Omega)$ :	Partição do mergulho de $G$ sobre $\Omega$ .....	16
$\bar{\lambda}$ :	Classe de $\lambda$ .....	16
$\beta$ :	Componente de bordo.....	17
$G(p, q)$ :	Grafo de vértices $v_p$ e $q$ lados.....	18
$F_x$ :	Alfabeto de entrada com $x_i$ símbolos.....	18
$F_y$ :	Alfabeto de saída do canal.....	18
$C_m$ :	Canal $m$ -ário.....	18
$C_{m,n}$ :	Canal com $m$ entradas e $n$ saídas.....	18
$p_{y_j x_i}$ :	Probabilidades condicionadas.....	18
$C_k$ :	Canal discreto sem memória.....	19
$u$ :	Símbolo transmitido.....	20
$M_m$ :	Modulação para $m$ sinais.....	24
$R_{s_i}$ :	Região de indecisão de $s_i$ .....	24
$A_2$ :	Látice bi-dimensional.....	26

$d$	Métrica.....	26
$(\Omega, d)$ :	Espaço métrico .....	26
$U$ :	Modelo planar .....	26
$\Psi(U)$ :	Modelo espacial de $U$ .....	28
$D_{s_i}$ :	Disco em que atua o ruído .....	30
$\Psi : D \rightarrow \Omega$ :	Parametrização de $D$ sobre $\Omega$ .....	32
$\mathbb{S}(G)$ :	Conjunto das superfícies orientáveis de $G$ .....	33
$\bar{\mathbb{S}}(G)$ :	Conjunto das superfícies não-orientáveis de $G$ .....	33
$\mathbb{S}_b(G)$ :	Conjunto das superfícies orientáveis com bordos.....	33
$\bar{\mathbb{S}}_b(G)$ :	Conjunto das superfícies não-orientáveis com bordos.....	33
$\triangleq$ :	Equivalência .....	33
$\Xi(\Omega)$ :	Conjunto dos modelos de partições sobre $\Omega$ .....	33
$\Xi_\epsilon(\Omega)$ :	Conjunto dos modelos possíveis de mergulhos de $G$ .....	33
$\Theta(G)$ :	Conjunto de todas as rotações de $G$ .....	33
$\deg v_j$ :	Grau do vértice $v_j$ .....	34
$R_{a_1, a_2, \dots, a_k}$ :	Representação simplificada de um mergulho $G$ .....	34
$kM$ :	Modulação vinda de um mergulho $G$ .....	34
$pM$ :	Modulação vinda de um mergulho dual de $G$ .....	34
$\alpha$ :	Número de regiões do mergulho mínimo orientável .....	35
$\bar{\alpha}$ :	Número de regiões do mergulho mínimo não-orientável .....	35
$\Phi_i$ :	Conjunto de rotações distintas .....	37
$ \Psi $ :	Número de rotações distintas dos vértices de $G(p, q)$ .....	38
$\eta_{\text{Lee}}(\gamma)$ :	Sequência de Lee de $\gamma$ .....	41
$\mu$ :	Comprimento da sequência de Lee .....	41
$kN$ :	Modulação sobre $\Omega$ .....	42
$\tilde{g}$	Gênero da superfície não orientável.....	47
$\tilde{g}P$	Superfícies não-orientável .....	47
$2P$ :	Soma conexa de dois planos projetivos .....	53
$3P$ :	Soma conexa de três planos projetivos.....	53
$4P$ :	Soma conexa de quatro planos projetivos 4 .....	53
$5P$ :	Soma conexa de cinco planos projetivos .....	53
$6P$ :	Soma conexa de seis planos projetivos.....	53
$2T$ :	Bitoro .....	53

$3T$ :	Tritoro .....	53
$g$ :	Gênero.....	56
$gT$ :	Gênero do toro.....	56
$\#$ :	Cardinalidade.....	57
$R_{\alpha_{\min}}$ :	Região mínima de $\alpha$ .....	67
$d_{\text{Lee}}^{\min}$ :	Distância de Lee mínima.....	67
$7P$ :	Soma conexa de sete planos projetivos .....	70
$8P$ :	Soma conexa de oito planos projetivos .....	70
$9P$ :	Soma conexa de nove planos projetivos.....	70
$4T$ :	4-toro.....	70
$5R_4$ :	5 regiões de 4 lados .....	72
$8R_4$ :	8 regiões de 4 lados .....	72
$I_p$ :	Índice parcial de existência.....	75
$I_t$ :	Índice total de existência.....	75
$I^{\min}$ :	Índice mínimo da taxa de existência.....	76
$I^{\max}$ :	Índice máximo da taxa de existência .....	76
$I_p^{\min}$ :	Índice mínimo da taxa de existência parcial .....	76
$I_p^{\max}$ :	Índice máximo da taxa de existência parcial.....	76
$I_t^{\min}$ :	Índice mínimo da taxa de existência total .....	76
$I_t^{\max}$ :	Índice máximo da taxa de existência total.....	76
$\text{var}_p$ ;	Varição média de índice parcial .....	76
$\text{var}_t$ :	Varição média de índice total .....	76
$\text{des}_p$ :	Desvio padrão máximo parcial .....	77
$\text{des}_t$ :	Desvio padrão máximo total .....	77
$ \text{Reg}(\Omega_s) $ :	Número de modulações regulares sobre a superfície $\Omega$ .....	90
$ \text{Irreg}(\Omega_s) $ :	Modulações irregulares sobre a superfície $\Omega$ .....	90
$\text{Dp}(\Omega(\text{Reg}))$ :	Desvio padrão das modulações regulares .....	92
$\text{Dp}(\Omega(\text{Irreg}))$ :	Desvio padrão das modulações irregulares.....	93
$\text{Vm}(M_s)$ :	Varição média de $M$ em superfícies orientáveis sem bordo .....	93
$\text{Vm}(\overline{M})$ :	Varição média das modulações em superfícies não-orientáveis.....	93
$\text{Vmt}(K_m)$ :	Varição média total das modulações da superfície $K_m$ .....	93
$S_\mu$ :	Esfera com $\mu$ componentes de bordos .....	103
$P_\mu$ :	Plano projetivo com $\mu$ componentes de bordos.....	103
$\text{Tw}$ :	Modulação <i>twisted</i> .....	106

$ \text{Tw} $ :	Número de modulações <i>twisted</i> .....	106
$ \text{Tw}_c $ :	Número de Tw em superfície orientável com bordo.....	106
$ \text{Tw}_s $ :	Número de Tw em superfície orientável sem bordo .....	106
$ \overline{\text{Tw}}_c $ :	Número de Tw em superfície não-orientável com bordo .....	106
$ \overline{\text{Tw}}_s $ :	Número de Tw em superfície não-orientável sem bordo.....	106
$X$ :	Brilho da imagem .....	116
$Y$ :	Cor da imagem .....	116
$\mathbb{Z}_k$ :	Alfabeto associado à modulação $k$ -QAMS.....	118
$\mathbb{Z}_\alpha$ :	Alfabeto associado a modulação QAMS.....	120
$\mathbb{A}$ :	Conjunto dos alfabetos sobre as modulações em superfícies.....	123
$M_{\min \max}$ :	Mergulho mínimo máximo de $G$ .....	127
$\mathbb{A}_{\min}$ :	Alfabeto do mergulho mínimo orientável.....	128
$\overline{\mathbb{A}}_{\min}$ :	Alfabeto do mergulho mínimo não-orientável.....	128
$\mathbb{A}_H$ :	Alfabeto das modulações QAMS de $G$ .....	129
$Z$ :	Alfabeto do elemento de imagem.....	134
$\text{Red}_x$ :	Redução do número de símbolos do alfabeto $\mathbb{A}_\alpha$ .....	135
$G_{m/\max}$ :	Simplificação de mergulho mínimo maximal.....	139
$T^\gamma$ :	O mesmo que $\gamma T$ .....	139
$T^\eta$ :	O mesmo que $\eta T$ .....	139
$\mathbb{A}_{GH}$ :	Alfabetos maximais de $G$ e $H$ .....	139



# CAPÍTULO 1

## Introdução

A justificativa do problema abordado neste trabalho esta fundamentada na existência, em anos recentes, de uma grande demanda por sistemas de transmissão e armazenagem de dados eficientes e confiáveis. Esta demanda tem sido acelerada pela emergência, em grande escala, de redes de alta velocidade de dados para carregamento, processamento e armazenagem da informação de dados nas esferas militar, governamental e privada. Um manancial de tecnologia de comunicações e computação é requerida nestes sistemas. No que diz respeito ao projetista, o maior desafio é o controle de erros de tal maneira que a reprodução confiável de dados seja obtida.

O processo de correção de erros é realizado pelo sistema de codificação, porém, a modulação dos sinais precisa ser eficiente e compatível com a capacidade de correção de erros e capacidade do canal, de modo que a informação transmitida seja confiável. Neste trabalho, o foco é o projeto da constelação de sinais da modulação. Estas serão projetadas sobre superfícies oriundas de mergulhos de grafos. Justificativas, construções, identificação, aplicação e análises dos projetos de constelações sobre superfícies são os objetivos desta dissertação.

No desenvolvimento dos tópicos, serão enfatizados fortemente os aspectos matemáticos envolvidos nos processos de construção e identificação. Os conhecimentos necessários para a compreensão deste trabalho são específicos da topologia algébrica e teoria dos mergulhos de grafos. As justificativas estão fundamentadas na teoria da informação e tem o objetivo de validar a escolha do problema abordado. No processo analítico serão consideradas as questões matemáticas, os aspectos estatísticos importantes relacionados com aplicações das modulações em sistemas de comunicações, enfatizando, em alguns momentos, o uso das modulações na transmissão de imagens através da televisão a cores.

O formalismo matemático foi necessário para identificar propriedades fundamentais. Adiante que isto pode dificultar um pouco a leitura para aqueles que não estão familiarizados com as noções básicas da topologia algébrica. Mas, sem as técnicas e ferramentas matemáticas, não teríamos obtidos informações tão precisas dos sistemas estudados. Para facilitar o entendimento, todos os resultados matemáticos são seguidos de comentários esclarecendo a sua importância em processos de construção, identificação ou eficiência de sistemas. Além disso, cada tópico finaliza com a análise de resultados, enfatizando aspectos da existência,

eficiência e importância dos projetos de modulações sobre superfícies, no processo de transmissão de dados.

## 1.1 Contextualização

Observando a evolução das técnicas de modulações de sinais ao longo do tempo, percebemos uma evolução natural dos espaços métricos nos quais os projetos de modulações são realizados. Os primeiros projetos de modulações foram realizados na reta (PRK), depois vieram as modulações do plano (PSK) e, em seguida, as modulações da esfera (modulações de Slepian). A reta e o plano são espaços topológicos euclidianos de dimensão um e dois, respectivamente. Sabe-se que a esfera possui uma métrica não euclidiana dada pela distância geodésica e, portanto, com esta métrica, a esfera é um espaço topológico. Houve, então, uma evolução dos espaços: primeiro a reta, segundo o plano e depois a esfera. Supondo que estes espaços possuem um limite de desempenho para projetos de modulações, a questão é: quais seriam os próximos espaços métricos onde poderiam haver projetos de modulações com melhores desempenhos? Considerando que a reta é um subespaço do plano, este, por sua vez, é homeomorfo a esfera menos um ponto, e a esfera é uma superfície de gênero zero, então, sob esta linha de raciocínio, os próximos espaços a serem explorados seriam as superfícies de gêneros um, dois, três e assim sucessivamente. Consequentemente, o conjunto de superfícies orientáveis sem bordos de gêneros um, dois, três, e assim por diante, seriam os próximos espaços métricos a serem explorados para projetos de modulações.

Conhecendo o universo das variedades riemannianas, porque não considerar as demais classes de superfícies orientáveis com bordos e as não-orientáveis sem e com bordos como subespaços nos quais os projetos de modulações seriam realizados? Mas seria possível projetar modulações sobre superfícies? Existiriam as ferramentas matemáticas necessárias para realizar os projetos de modulações em termos de simulações? É possível, sim, no estágio atual em que se encontram as áreas da matemática como geometria diferencial, geometria riemanniana, topologia algébrica e teoria dos grafos, existem ferramentas matemáticas mais do que suficiente para realizar projetos de modulações QAMS's e *twisted*. Além disso, o uso da topologia algébrica permite prever a existência dos tipos de projetos, contribui no processo de construção, identificação e contém os invariantes topológicos que dão informação sobre a performance da modulação.

Mas teríamos que começar do zero e criar novas técnicas de modulações para que o projeto seja realizado numa superfície? A resposta é não. Com pequenas adaptações, as técnicas existentes de modulação podem ser aplicadas no ambiente destes espaços topológicos. Portanto, os projetos de modulações sobre superfícies não se encontram somente no campo das hipóteses, pois em um trabalho pioneiro realizado por Costa [3], modulações QAMS's foram implementadas com sucesso e demonstraram ter excelentes desempenhos. As modulações *twisted* foram propostas por Wozencraft [32], em 1968, e devido ao seu bom desempenho houve, recentemente, por parte de vários pesquisadores ([2], [5],[11] e [20]), uma grande retomada ao estudo das modulações não-lineares, mostrando a sua importância e eficiência.

Consequentemente, o aprimoramento das técnicas de construções das modulações *twisted* já é uma realidade e continua produzindo excelentes trabalhos. Quanto às modulações

QAMS's, estas encontram-se ainda em seu estágio embrionário de desenvolvimento, cujas técnicas iniciais utilizadas precisam ser aprimoradas e como o universo das variedades riemannianas oferece muitas opções de espaços com características distintas para projetos, há muito o que se fazer nesta direção em termo de pesquisa.

Há, então, um longo caminho a percorrer neste trabalho, pois teremos que tratar simultaneamente de duas classes de modulações, através do estudo de quatro categoria de grafos distintos e descrever processos abordando a questão da existência, construção, análises das propriedades intrínsecas de cada família de grafos abordados, tudo isto, sobre quatro famílias de superfícies nas quais encontram-se os mergulhos destes grafos. Sem falar que o trabalho não estaria completo sem uma aplicação, neste caso, a análise do potencial da capacidade de compactação de dados destas modulações, no uso da codificação da imagem da televisão a cores.

## 1.2 Proposta da Pesquisa

A idéia inicial de modulações QAMS's sobre superfícies surgiu com o trabalho de Lima-Palazzo [14]. A abundância de construções e de informações contidas neste trabalho foram as motivações para o desenvolvimento e aprimoramento do processo de construção, identificação e medidas de desempenhos das modulações QAMS's, vindas do mergulho de grafos completos realizado por Lima [15] e do mergulho de grafos completos bipartidos realizado por Lima [18]. Estes trabalhos contêm idéias mais precisas dos procedimentos de construção, identificação e análise de desempenho das modulações QAMS's. Apesar do manancial de informações existentes, a abordagem, além de focalizar os aspectos da construção, existência e desempenho da modulação baseada em questões matemáticas oriundas da topologia algébrica e de mergulhos de grafos, o estudo estava restrito à famílias dos grafos completos. Com o trabalho de Costa [3], surgiu a necessidade de expandir de vez a realização das modulações QAMS's sobre qualquer tipo grafo. Para isto, foi preciso ampliar o conjunto de grafos e descrever um procedimento geral do processo de construção, identificação e análise das características intrínsecas que mais contribuem para existência das classes de modulações QAMS's. Consideramos, então, os trabalhos de Lima-Luana [15] e Matias [18], acrescentamos dois grafos da família dos poliedros platônicos e fizemos um estudo completo dos processos relacionados à questão da existência, construção, identificação e análise das características individuais destes grafos quanto às modulações QAMS's existentes nas famílias de superfícies orientáveis e não-orientáveis com e sem bordo.

Como também encontram-se sobre superfícies, as modulações não-lineares, ou *twisted*, enquadram-se perfeitamente neste objetivo. Então, todos os procedimentos utilizados nas modulações QAMS's foram aplicados em modulações *twisted*, com o objetivo de identificar algumas características diferenciadas entre estes dois tipos de modulações.

Um dos aspectos abordados evidencia a questão matemática envolvida no processo, através de resultados e demonstrações matemáticas. Aqueles que não são da área da matemática pura sentirão dificuldades de entender as demonstrações. Neste caso, sugerimos então somente a leitura de resultados e dos comentários que os seguem, descrevendo a importância e aplicabilidade dos mesmos.

Este trabalho não estaria completo sem uma aplicação prática das modulações sobre

superfícies. Abordamos, então, a questão da compacticidade de informação e alguns aspectos do desempenho, quando do uso da codificação de imagem da televisão a cores por parte das modulações QAMS's e *twisted*. Embora não tenha sido utilizado processos de simulações, os parâmetros matemáticos analisados fornecem informações precisas sobre o uso dessas modulações no processo de transmissão da televisão a cores.

Para sermos mais precisos, o objetivo geral deste trabalho é propor a construção de dois tipos de modulações sobre superfícies, a QAMS's e a *twisted*, a partir de mergulhos de grafos e avaliar o desempenho destas modulações em relação à capacidade de compactação de dados, quando utilizadas no processo de codificação da imagem da televisão a cores. Neste estudo, serão utilizados quatro tipos de grafo: o grafo completo  $K_5$ , o grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ , o grafo de Cayley correspondente aos lados e vértices do hexaedro  $H_{8,12}$  e o grafo de Cayley correspondente aos lados e vértices do octaedro  $H'_{6,12}$ . Serão consideradas as modulações sobre os quatro tipos de famílias de superfícies nas quais se encontram os mergulhos dos grafos, a família das superfícies orientáveis sem e com bordos e as não-orientáveis sem e com bordos. Durante todo o processo de identificação será enfatizado amplamente o aspecto da regularidade, propriedade visada pelo projetista do sistema, porque está relacionada aos projetos de melhores desempenhos e de menor complexidade de cálculo.

### 1.3 Contribuições da Proposta

Uma das contribuições desta proposta é apresentar justificativas plausíveis do uso de modulações sobre superfícies. O trabalho pode parecer árduo devido ao uso da matemática, mas a melhoria de desempenho é a grande motivação para aprimorar este tipo de modulação. Serão apresentadas, de forma clara e precisa, todas as etapas do processo de construção e identificação das modulações QAMS's e *twisted* vindas de mergulhos de grafos. Muitas das etapas de identificação são realizadas através de algoritmos. As implementações destes permitem obter informações precisas e rápidas sobre a questão da existência da modulação, os tipos e quantidades de modulações existentes nas classes de mergulhos e nas famílias de superfícies. Podemos afirmar que os algoritmos são, de fato, algumas das grandes contribuições deste trabalho. Os resultados matemáticos obtidos não são menos importante, garantem a funcionabilidade dos algoritmos e permitem classificar as modulações fornecendo informações valiosas para tomadas de decisões por parte do projetista do sistema de transmissão de dados.

Sempre que preciso, serão apresentadas tabelas e gráficos de resultados, seguidos de análises, apontando as diferenças básicas entre os dois tipos de modulações, nas quatro famílias de superfícies dos quatro tipos grafos estudados. Caso não tivéssemos apresentado estes tipos de dados, as informações apresentadas seriam confusas e de difícil compreensão.

Um dos grandes méritos deste trabalho refere-se ao uso da técnica do mergulho de grafos para projetos de modulações QAMS's e *twisted*. Em um processo de construção de uma modulação QAMS's, sem a técnica de mergulho de grafos, não teríamos a noção de como construir o projeto; nesta hora, contaríamos apenas com a intuição, e nem sequer saberíamos se o projeto que imaginamos existiria, de fato, sobre a superfície almejada.

Nas modulações *twisted*, o efeito da técnica de mergulho é notado imediatamente. A tendência no processo de construção de um mergulho de grafo é espalhar os lados deste sobre a superfície, ofertando um conjunto de curvas correspondentes aos lados do grafo, apropri-

adas para serem utilizadas como os sinais da modulação *twisted*, próximas do desempenho máximo.

A análise do uso das modulações QAMS's e *twisted* na codificação da imagem da televisão a cores fornecem informações precisas de como o projetista deve levar em consideração a escolha da quantidade de sinais nas diversas categorias de modulações. Esta etapa também contribui com informações sobre o desempenho da modulação em relação aos invariantes topológicos inerentes às classes de superfícies.

## 1.4 Organização da Proposta

A nossa primeira preocupação foi apresentar justificativas coerentes para o uso das modulações QAMS's e *twisted* sobre superfícies vindas de mergulhos de grafos. A seguir, o foco foi apresentar todas as etapas do processo de identificação das modulações QAMS's, descrito de forma geral e seguida das aplicações nos dois tipos de grafos completos. Os resultados dos grafos completos eram quase todos conhecidos dos trabalhos [15] e [18], entretanto havia uma grande expectativa em relação aos grafos de Cayley dos poliedros platônicos, trabalho que vem logo a seguir no capítulo posterior. Por fim, a abordagem do problema da compactação de dados, quando do uso dos alfabetos das modulações QAMS's e *twisted*, na codificação da imagem da televisão a cores, encerra o conjunto de questões abordados neste trabalho.

Este trabalho foi desenvolvido através das etapas as quais serão descritas a seguir.

A descrição, importância e contribuições da proposta compõem a introdução, ou equivalentemente, Capítulo 1 desta dissertação.

O Capítulo 2 contém as principais definições, resultados sobre os sistema de transmissão de dados, modulações, teoria da informação, teoria dos mergulhos de grafos, mergulhos com bordos, grafos duais, superfícies, propriedades dos mergulhos do grafo completo  $K_n$ , propriedades dos emaranhados e o algoritmo identificador do mergulho utilizado na identificação dos mergulhos de  $K_{m,n}$ .

Justificativa de que o processo de modulações QAMS's e *twisted* sobre superfície são viáveis serão apresentados no Capítulo 3.

O Capítulo 3 apresenta o processo geral de identificação das modulações QAMS's e *twisted* sobre as quatro famílias de superfícies de mergulhos de grafos e mostra como este processo é realizado através das identificações das modulações QAMS's e *twisted* das duas categorias de grafos, o grafo completo  $K_5$  e o grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ . Neste capítulo são analisadas as diferenças básicas das modulações de  $K_5$  e de  $K_{4,4}$ .

O desenvolvimento do Capítulo 4 é análogo ao capítulo anterior, porém, trata de identificar as modulações QAMS's e *twisted* oriundas dos mergulhos dos grafos de Cayley dos poliedros platônicos, o hexaedro  $H_{8,12}$  e o octaedro  $H'_{6,12}$ . Neste capítulo, são analisadas ainda as particularidades das modulações QAMS's e *twisted* das quatro categorias de grafos consideradas neste trabalho.

Um estudo sobre a aplicação dos alfabetos associados às modulações QAMS's e *twisted*, vindas dos mergulhos dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$ , na codificação da imagem da televisão a cores é apresentado no Capítulo 5.

As conclusões são apresentadas no Capítulo 6.

Devido a grande quantidade de informação ou demonstrações e análises muito extensas,

disponibilizamos, logo após as referências bibliográficas, os seguintes apêndices: No Apêndice A constam informações complementares sobre um projeto de modulação QAMS sobre o toro vindo de um mergulho regular do grafo completo  $K_5$ ; O Apêndice B contém uma longa tabela relacionando os projetos de partições referentes às modulações do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ ; O Apêndice C contém o conjunto completo dos sistemas de rotações de hexaedro  $H_{8,12}$ ; No Apêndice D disponibilizamos o complemento da demonstração do Teorema 5.1.2; No Apêndice E é relacionado o conjunto completo das partições correspondentes as modulações do octaedro  $H'_{6,12}$ ; No Apêndice F, apresentamos uma análise sobre os mergulhos mínimos maximais de grafos; Finalmente, no Apêndice G, apresentamos a demonstração completa do Teorema 6.8.5 e um de seus corolários.

Neste trabalho, utilizaremos o mergulho de grafo com o propósito de obter partição sobre uma superfície e utilizá-la como base de um projeto de modulação. Analisaremos duas possibilidades de modulações sobre superfícies vindas de mergulhos de grafos, a partição em regiões como modulação QAM sobre superfície, e as curvas do grafo como sinais de uma modulação *twisted*. Objetivando o conhecimento dos elementos básicos das modulações, neste capítulo, introduziremos os principais conceitos, definições e resultados sobre mergulhos de grafos.

## 2.1 Conceitos e definições

Diz-se que um grafo  $G$  está *mergulhado* em uma superfície  $\Omega$ , se os seus lados encontram-se sobre  $\Omega$  e satisfazem as condições: dois lados de  $G$  nunca se interceptam e quando o fazem, a interseção ocorre em um único vértice ou é total sobre os dois lados. A identificação de um mergulho de um grafo  $G$  é realizado através do *sistema de rotações*. Dois mergulhos de um grafo  $G$  são ditos *idênticos* quando existe uma bijeção entre suas regiões tal que as fronteiras orientadas de regiões correspondentes são idênticas como caminhos *direccionados*. Um sistema de rotação de um grafo  $G$  é a descrição, para cada vértice de  $v$ , da ordem dos vértices de  $G$  que estão conectados a  $v$ . Para isto, basta percorrer um pequeno círculo que contém apenas  $v$  e anotar, ordenadamente, os vértices de  $G$  que estão conectados a  $v$  de  $G$ . A retirada dos lados de  $G$  divide  $\Omega$  em partes denominadas de *regiões*. Se toda região do mergulho pode ser contraída em um ponto (ou é homotópica a um ponto) então diz-se que é um *mergulho de 2-células* (ou, simplesmente, um *2-células*). O mergulho de  $G$  sobre  $\Omega$  é indicado por  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}$ , onde  $R_{\alpha_i}$  é um  $\alpha_i$ -lados (ou região de  $\alpha_i$  lados).

As regiões  $R_t^1$  e  $R_t^2$  de um mergulho de  $G$  são ditas *regiões iguais* se, e somente se, as suas respectivas sequências orbitais  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , são tais que  $\gamma_2 = \gamma_1^{(i)}$ , isto é,  $\gamma_2$  é a  $i$ -ésima rotação cíclica de  $\gamma_1$ .

Dois mergulhos de um grafo  $G$ ,  $G(\Theta_1) \hookrightarrow \Omega$  e  $G(\Theta_2) \hookrightarrow \Omega$ , são ditos *mergulhos idênticos* se, e somente se, possuem regiões iguais, isto é, se  $\Gamma_1 = \{\gamma_1^1, \dots, \gamma_k^1\}$  e  $\Gamma_2 = \{\gamma_1^2, \dots, \gamma_h^2\}$  são os respectivos conjunto de sequências orbitais de  $G(\Theta_1) \hookrightarrow \Omega$  e  $G(\Theta_2) \hookrightarrow \Omega$ , então  $k = h$  e

para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  existe um único  $j \in \{1, 2, \dots, h\}$ , tal que  $\gamma_i^1 = \gamma_j^2$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, h\}$ .

## 2.2 Representações poligonais

É comum referir-se às representações poligonais de uma superfície como sendo o *modelo plano* da superfície. Fazendo uso da topologia combinatorial, Seifert e Threlfall [29] mostram que toda superfície compacta é o espaço quociente de um polígono por uma relação de equivalência segundo a qual os lados que constituem o bordo do polígono são identificados dois a dois.

O polígono é denominado de *2n-lados* e, no caso das superfícies compactas orientáveis sem bordo, cada classe de superfícies pode ser representada por um 2n-lados indicado por uma *palavra* chamada de *forma normal*.

Se  $S$  e  $mT$  são, respectivamente, a esfera e uma superfície homeomorfa à soma conexa de  $m$  superfícies iguais ao toro, as suas indicações com as respectivas *palavras na forma normal* são:

$$S \equiv aa^{-1} \text{ e } mT \equiv a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \cdots a_mb_ma_m^{-1}b_m^{-1}$$

cuja orientação dos lados é indicada na Figura 2.2.1.

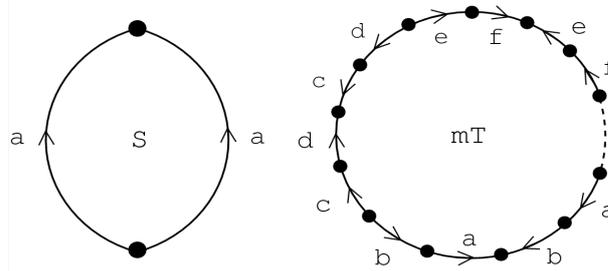


Figura 2.2.1: Formas normais da esfera e do toro

**Definição 2.2.1** Denominamos de *forma natural de um polígono de m-lados a todo polígono orientado segundo a palavra*

$$\bar{\omega} = a_1b_1a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1} \cdots a_m^{-1}b_m^{-1}a_mb_mb_{m-1}^{-1}a_{m-1}b_{m-1} \cdots a_3b_3b_2^{-1}a_2b_2b_1^{-1} \dots \quad (2.1)$$

## 2.3 Modelos planar, espacial e realização geométrica

A forma normal (ou polígono orientado) de uma superfície depende da orientação escolhida. O toro, além da forma normal, pode ser representado pelas palavras  $a^{-1}bab^{-1}$ ,  $ab^{-1}a^{-1}b$  e  $a^{-1}b^{-1}ab$ , cujos polígonos orientados são mostrados na Figura 2.3.1.

Cada polígono orientado induz, após a realização geométrica, uma orientação nas curvas de homologia ou curvas fechadas no modelo espacial da superfície correspondente à união

de dois lados opostos do polígono. A Figura 2.3.2 mostra a realização geométrica da forma normal do toro e a transformação inversa.

Topologicamente todos os polígonos mostrados na Figura 2.3.1 apresentam a mesma transformação geométrica como aquela mostrada na Figura 2.3.2. A diferença está nas orientações das curvas de homologia. Por exemplo, para obter a realização geométrica de  $ab^{-1}a^{-1}b$ , basta inverter a orientação do lado  $b$  em todos os quatro esquemas da Figura 2.3.2. Os demais casos são obtidos de forma semelhante.

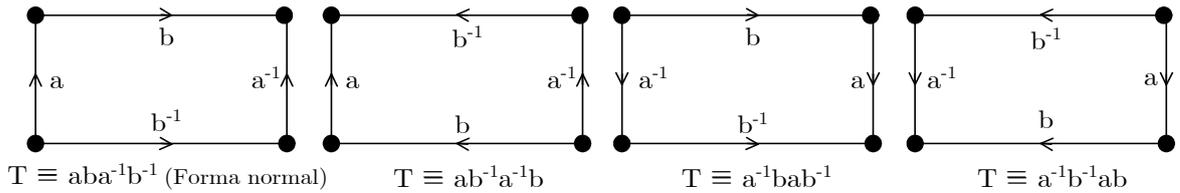


Figura 2.3.1: Possíveis orientações do toro [15]

De modo análogo ao raciocínio usado para o toro, deduzimos que, para  $m \geq 2$ , existem  $16m^2$  formas distintas de orientações para os  $4m$ -lados que geram os  $m$ -toros. Por exemplo, o bitoro possui  $16 \cdot 2^2 = 64$  polígonos orientados distintos de 8-lados que preservam os rótulos da forma normal (não consideraremos as rotações e nem os outros casos possíveis de rotulamentos distintos da forma normal).

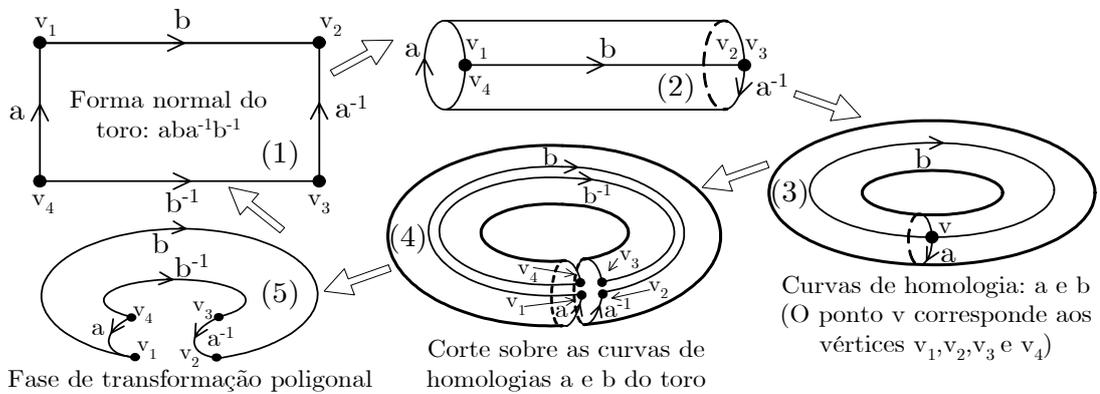


Figura 2.3.2: Realização geométrica do toro e sua operação inversa

Portanto, para  $m \geq 2$ , existem mais  $16m^2$  maneiras distintas de escolher rotulamentos e orientações para os  $4m$ -lados, cujas realizações geométricas são todas homeomorfas a um  $m$ -toro. Dentre elas, a forma normal é a mais simples de ser memorizada, a principal razão de ser usada para definir a classe de homeomorfismo do  $m$ -toro, porém, sua realização geométrica não é simples de ser memorizada no sentido de se saber exatamente a posição e orientações das curvas de homologia. A Figura 2.3.3 mostra as etapas da realização geométrica do bitoro, a partir da forma normal, indicando as curvas de homologias em cada etapa. O conhecimento

das curvas de homologia permite reverter o processo de construção de um mergulho de grafo que se encontra sobre o modelo espacial, para o modelo planar da superfície.

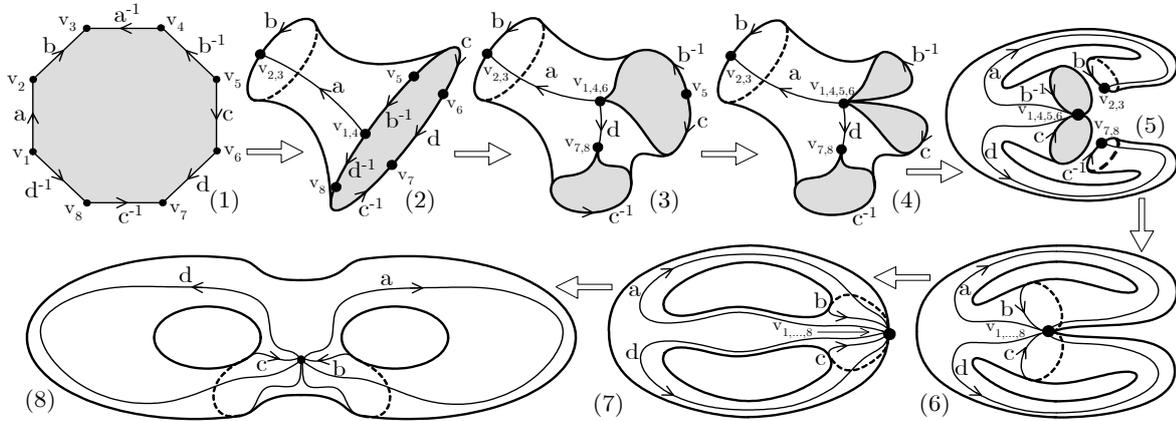


Figura 2.3.3: Transformação geométrica do bi-toro [15]

Obter o mergulho sobre o polígono orientado é difícil em qualquer um deles. Obter a posição e orientação das curvas de homologia da superfície  $mT$ , para  $m \geq 2$ , oriunda da forma normal, só com a construção passo-a-passo da realização geométrica. Como o objetivo é construir uma modulação sobre o modelo planar de uma superfície proveniente de um mergulho no modelo espacial, a princípio, apenas o grafo  $K_{n,n}$  é conhecido. Disso, podemos escolher adequadamente os elementos a serem utilizados, ou seja, a forma espacial de  $mT$ , o rotulamento e as orientações das curvas de homologia. A Figura 2.3.4 contém os elementos que utilizaremos.

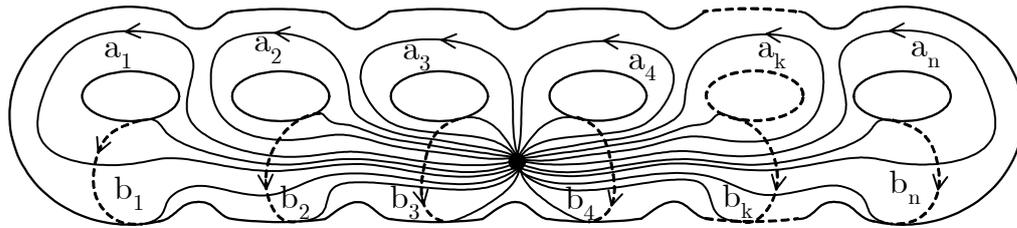


Figura 2.3.4: Forma espacial do  $m$ -toros e curvas de homologias

Para obter o modelo planar de  $mT$  é necessário construir a realização geométrica inversa, como ilustrado na Figura 2.3.1. Para tanto, há de se fazer um corte nas curvas de homologia da superfície, para obter o modelo planar do mergulho. Este corte em cada uma das  $2m$ 's curvas de homologia  $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$ , de  $mT$ , duplicam cada uma das curvas e, devido as orientações, produzem automaticamente suas respectivas curvas inversas  $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_m^{-1}, b_1^{-1}, b_2^{-1}, \dots, b_m^{-1}$ . Observamos ainda, que o corte transforma o único ponto de interseção das curvas de homologia nos  $4m$ -vértices do polígono da forma planar de um  $mT$ . Após o corte, obtemos, inicialmente, uma curva fechada simples  $\gamma$ , formada pelas

$4m$ -curvas de homologia e separadas por  $4m$ -vértices. Uma curva fechada simples divide o plano em duas regiões; logo a realização geométrica inversa transforma o modelo espacial de um  $mT$  em um polígono de  $4m$ -lados, cujo bordo é formado por lados que correspondem às curvas de homologia. Em particular, o tritoro com a forma, o rotulamento e a orientação das curvas de homologia mostradas na Figura 2.3.4, tem como forma planar o polígono de 12-lados definido pela palavra

$$\bar{\omega}(3T) = a_1 b_1 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} b_3^{-1} a_3 b_3 b_2^{-1} a_2 b_2 b_1^{-1}. \quad (2.2)$$

No caso geral do  $m$ -toro mostrado na Figura 2.3.4, podemos comprovar através dos exemplos construídos por [14], que a transformação inversa resulta no modelo planar de um  $mT$  definido por uma forma poligonal de  $4m$ -lados, cuja palavra é

$$\bar{\omega} = a_1 b_1 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} \cdots a_m^{-1} b_m^{-1} a_m b_m b_{m-1}^{-1} a_{m-1} b_{m-1} \cdots a_3 b_3 b_2^{-1} a_2 b_2 b_1^{-1}, \quad (2.3)$$

a qual será denominada de *forma natural* do  $m$ -toro. Observe que as formas normal e natural do toro são iguais.

A *forma normal* de uma superfície não-orientável homeomorfa a  $m$  planos projetivos  $mP$ , é dada por

$$\omega(mP) = a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_m a_m. \quad (2.4)$$

Para mostrar que as modulações podem ser construídas, veremos alguns exemplos de mergulhos orientáveis construídos sobre as formas poligonais normal e natural em (2.2) e (2.3) e mergulhos não-orientáveis sobre a forma poligonal (2.4).

## 2.4 Mergulhos de grafos

Em um mergulho de um grafo  $G$  sobre uma superfície  $\Omega$ , indicado por  $G \hookrightarrow \Omega$ , os números de vértices, lados e regiões serão denominados por  $v$ ,  $e$  e  $f$ , respectivamente.

A *característica de Euler-Poincaré* de uma superfície  $\Omega$  é dada pela relação de igualdade

$$\chi(\Omega) = v - e + f \quad (2.5)$$

Se  $G$  possui um mergulho de 2-células sobre uma superfície  $\Omega$  de gênero  $m$ , então as características das superfícies orientável e não-orientável são dadas por

$$\chi(\Omega) = \begin{cases} 2 - 2m, & \text{se } \Omega = mT \\ 2 - m, & \text{se } \Omega = mP. \end{cases} \quad (2.6)$$

Conhecer os gêneros mínimo e máximo das superfícies nas quais se encontram mergulhados o grafo completo  $K_n$  é fundamental para identificar os mergulhos de 2-células de  $K_n$ .

O gênero da superfície para o mergulho mínimo orientável do grafo completo  $K_n$  foi determinado em 1968 por Ringel e Youngs [?] ao estabelecerem a veracidade da conjectura do mapa colorido de Heawood [7]. Mais precisamente, foi provado que se  $\gamma(K_n)$  é o gênero da superfície para o mergulho mínimo orientável do grafo completo  $K_n$ , então

$$\gamma(K_n) = \left\{ \frac{1}{12} (n-3)(n-4) \right\}, \text{ para } n \geq 3. \quad (2.7)$$

onde  $\{x\}$  é igual ao menor inteiro maior ou igual ao número real  $x$ .

O gênero máximo para muitos dos mergulhos conhecidos foi determinado entre 1970 e 1974. Em 1972, Ringensen [22] mostrou que se  $\gamma_M(K_n)$  é o gênero para o mergulho máximo orientado do grafo completo  $K_n$ , então

$$\gamma_M(K_n) = \left\lceil \frac{1}{4}(n-1)(n-2) \right\rceil, \text{ para } n \geq 1. \quad (2.8)$$

onde  $[x]$  é o maior inteiro menor ou igual ao número real  $x$ .

O gênero mínimo do mergulho não-orientável do grafo completo  $K_n$  é dado por [24]

$$\bar{\gamma}(K_n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\}, \text{ para } n \geq 3 \text{ e } n \neq 7, \quad (2.9)$$

e  $\bar{\gamma}(K_7) = 3$ .

As fórmulas dos gêneros mínimos dos mergulhos orientáveis e não-orientáveis do grafo completo bipartido  $K_{m,n}$  são dadas respectivamente por [1]:

$$\gamma(K_{m,n}) = \left\{ \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\}, \text{ se } m \geq 2 \text{ e } n \geq 2, \quad (2.10)$$

e

$$\bar{\gamma}(K_{m,n}) = \left\{ \frac{(m-2)(n-2)}{2} \right\}, \text{ se } m \geq 3 \text{ e } n \geq 7. \quad (2.11)$$

Pode-se até determinar os gêneros das superfícies para os mergulhos mínimos de uma superfície, analisando os tipos de regiões dos mergulhos mínimos e tentando construir modelo de mergulhos, mas fica sempre a dúvida de que o mesmo poderia ser mergulhado em uma superfície de gênero menor. Por isso, as fórmulas (2.7)-(2.11) são extremamente importantes para validar os resultados deste trabalho.

Uma observação simples, mas de extrema importância na demonstração de determinadas afirmações deste trabalho, refere-se a principal diferença entre as sequências de mergulhos orientáveis e não-orientáveis.

**Observação 2.4.1** *Subsequências de sequências orbitais do tipo  $(\dots ij \dots ij \dots)$  só existem em mergulhos não-orientáveis. Já as subsequências do tipo  $(\dots ij \dots ji \dots)$  caracterizam regiões de mergulhos orientáveis. Evidentemente que este tipo de subsequência pode também existir em mergulhos não-orientáveis.*

O teorema seguinte, de Duke [?], é imprescindível na solução do problema da identificação dos mergulhos de  $K_n$ .

**Teorema 2.4.2** *Se  $m \leq k \leq n$  e  $G$  tem um mergulho de 2-células nas superfícies  $mT$  e  $nT$ , então  $G$  tem um mergulho de 2-células em  $kT$ .*

O Teorema 2.4.2 garante a existência de mergulhos de 2-células em superfícies de  $k$ ,  $m \leq k \leq n$ , um dos resultados mais importantes utilizados neste trabalho. Já o próximo resultado, não menos importante, garante a existência da unicidade do mergulho de 2-células.

**Teorema 2.4.3** [30] *Existe uma correspondência um-a-um entre os sistemas de rotações do grafo  $G$  e seus mergulhos sobre superfície orientável.*

O princípio do Teorema 2.4.3 garante que o número de modulações sobre superfícies orientáveis vindas do mergulho de  $G$  é igual ao seu número de mergulhos. Então, é importante saber qual o número de sistemas de rotações de um grafo  $G$ .

Seja  $G$  um grafo com  $p$  vértices e  $\deg v$  o grau (ou valência) do vértice  $v \in G$ . Então, o número de sistemas de rotações de  $G$  é dado por

$$|\Theta(G)| = \prod_{v \in V(G)} (\deg v - 1)!, \quad (2.12)$$

fórmula que garantirá se todos os mergulhos de um grafo foram identificados ou não. A sua demonstração é simples e não se deve ter maiores problemas em prová-la.

### 2.4.1 Propriedades de mergulhos do grafo completo $K_n$

As propriedades apresentadas a seguir foram demonstradas em [15] e são de interesse para o desenvolvimento deste trabalho.

**Proposição 2.4.4** *Seja  $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{t-1})$  uma sequência orbital de uma região  $R_t$  de um mergulho orientável de um grafo completo  $K_n$ . Então vale as seguintes propriedades:*

- i)  $t \geq 3$ ;*
- ii) Três elementos consecutivos de  $\gamma$  são sempre diferentes;*
- iii)  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  de  $K_n \hookrightarrow \Omega$  passam por um lado e de  $K_n$  se, e somente se, percorrem e em sentidos opostos.*
- iv) O conjunto  $\Gamma(K_n)$  das sequências orbitais de  $K_n \hookrightarrow \Omega$  é uma partição do dígrafo  $K_n$ .*
- v) A menos de deslocamentos cíclicos,  $\gamma$  está definida de forma única.*
- vi) O número de lados de todas as sequências de  $\Gamma(G)$  é igual a dobro do número de lados de  $G$ .*

Nas afirmações (i) e (ii) só são verdadeiras para o grafo completo  $K_n$ , um dos grafos abordados neste trabalho. As demais afirmações são válidas para qualquer tipo de grafos. Em outra categoria de grafos é importante estabelecer condições equivalentes às da Proposição 2.4.4 para possibilitar o processo de identificação das modulações QAMS's e *twisted* vindas de mergulhos destes.

## 2.4.2 Emaranhados pontual e linear

O conceito de emaranhado tem sido de extrema importância na análise de mergulhos. Os emaranhados referem-se a duas características das fronteiras de regiões de mergulhos que influenciam consideravelmente no desempenho das classes de modulações sobre superfícies. A classificação das classes de modulações podem até ser realizadas sem o uso do conceito de emaranhamento, mas teríamos classes de modulações contendo elementos de desempenhos diferentes as quais só seriam identificadas através dos seus tipos de emaranhados. Portanto é imprescindível que analisemos os tipos de emaranhados de um mergulho de grafo para identificarmos modulações com desempenhos diferentes.

**Definição 2.4.5** [15] *Diremos que  $G \hookrightarrow \Omega$  é um emaranhado se este possui pelo menos uma região  $R_\alpha$  com interseções entre pares de vértices ou entre pares de lados da fronteira de  $R_\alpha$ ,  $\partial(R_\alpha)$ . Diremos que  $G \hookrightarrow \Omega$  é um emaranhado pontual se as interseções ocorrem somente entre pares de vértices de  $\partial(R_\alpha)$ , e que  $G \hookrightarrow \Omega$  é um emaranhado linear, se as interseções ocorrem somente entre pares de lados. No caso de ocorrer os dois tipos de interseções, diremos que  $G \hookrightarrow \Omega$  é um emaranhado misto ou simplesmente um emaranhado.*

Se  $G \hookrightarrow \Omega$  é um emaranhado, então existe uma região  $R_\alpha$  em cuja fronteira  $\partial(R_\alpha)$  contém interseções. Neste caso, diremos que a própria  $R_\alpha$  é um *emaranhado pontual, linear ou misto* conforme a interseção ocorra entre pares de vértices, pares de lados ou ambos os casos, respectivamente. Se a fronteira  $\partial(R_\alpha)$  não possui auto interseções diremos, então, que  $R_\alpha$  é uma *região simples*.

**Definição 2.4.6** [15] *Seja  $M = G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^m R_{\alpha_i}$  o mergulho de  $G$  sobre a superfície  $\Omega$ . Denominaremos de grau do emaranhado pontual de uma região  $R_{\alpha_i}$  o número inteiro  $\varpi(R_{\alpha_i})$  de pares de vértices que se interceptam em  $\partial(R_{\alpha_i})$  e não pertencem a emaranhados lineares. Denominaremos de grau do emaranhado linear de uma região  $R_{\alpha_i}$  o número inteiro  $\sigma(R_{\alpha_i})$  de pares de lados que se interceptam em  $\partial(R_{\alpha_i})$ . O grau de emaranhado do mergulho  $M$ , indicado por  $\circ(M)$ , será definido pela soma dos graus de emaranhados pontuais e lineares das fronteiras das  $m$  regiões de  $M$ , isto é,*

$$\circ(M) = \sum_{i=0}^{m-1} (\varpi(R_{\alpha_i}) + \sigma(R_{\alpha_i})).$$

O fato de um mergulho possuir uma região emaranhada ou não faz muita diferença quanto ao formato do grafo dual e ao formato de suas sequências orbitais no que diz respeito a existência de elementos repetidos. A afirmação abaixo caracteriza o grafo completo  $K_n$  quanto à condição de que as suas regiões nunca serão do tipo emaranhados. A demonstração da afirmação pode ser vista em [15].

**Proposição 2.4.7** [15] *Não existem regiões emaranhadas  $R_\alpha$ ,  $\alpha = 3, 4, 5$ , em um mergulho de  $K_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

Os mergulhos máximos de 2-células de um grafo possuem propriedades particulares que podem ser expressa na forma de afirmações. Uma delas, de grande interesse neste trabalho, serve para caracterizar os mergulhos duais.

**Teorema 2.4.8** [15] *Seja  $|K_n(\max)|$  o número de regiões do mergulho máximo de  $K_n$ . Então, para todo  $n \geq 3$  e  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , temos que*

$$|K_n(\max)| = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 3 + 4k \text{ ou } n = 4 + 4k \\ 1, & \text{se } n = 5 + 4k \text{ ou } n = 6 + 4k. \end{cases} \quad (2.13)$$

Pelo Teorema 2.4.8, os mergulhos do grafo completo  $K_5$  atendem a última condição de (2.13), isto é, possuem somente uma região.

O número de modulações distintas de um mergulho de grafo é maior quando se usa uma sequência que caracteriza os mergulhos através do conceito de distância entre os emaranhados.

**Definição 2.4.9** [18] *Seja  $R_\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_\alpha)$  uma sequência orbital de um mergulho de  $G$ . A distância de Lee entre  $x_i$  e  $x_j$  de  $R_\alpha$  é a menor das distâncias  $d_{\text{Lee}}^+(x_i)$  e  $d_{\text{Lee}}^-(x_i)$ , onde  $d_{\text{Lee}}^+(v_i)$  é o número de elementos percorridos à direita de  $x_i$  em  $R_\alpha$  até chegar ao vértice  $x_j$ , e  $d_{\text{Lee}}^-(v_i)$  é o número de vértices percorridos à esquerda de  $x_i$  em  $R_\alpha$  até chegar ao vértice  $x_j$ . Em notação matemática temos que*

$$d_{\text{Lee}}(x_i, x_j) = \min \{d_{\text{Lee}}^+(x_i), d_{\text{Lee}}^-(x_j)\}. \quad (2.14)$$

Em um emaranhado pontual no vértice  $v_i$  os rótulos  $x_i$  e  $x_j$  de  $R_\alpha$  são iguais, então a distância de Lee do emaranhado pontual  $v_i$  é dada por  $d_{\text{Lee}}(x_i, x_j)$ , isto é,

$$d_{\text{Lee}}(v_i) = d_{\text{Lee}}(x_i, x_j).$$

Em um emaranhado linear sobre um lado  $(v_i, v_j)$  de  $G$  existem subsequência  $(x_i, x_{i+1})$  e  $(x_j, x_{j+1})$  de  $R_\alpha$  tais que

$$x_i = x_{j+1} \text{ e } x_{i+1} = x_j,$$

neste caso, a distância de Lee do emaranhado linear  $(v_i, v_j)$  será definido como a menor das distâncias de Lee entre os vértices de rótulos  $x_i$  e  $x_j$ , isto é,

$$d_{\text{Lee}}(v_i, v_j) = \min \{d_{\text{Lee}}(x_i, x_{j+1}), d_{\text{Lee}}(x_{i+1}, x_j)\}. \quad (2.15)$$

Se o emaranhado pontual ocorre nos vértices  $x_i$  e  $x_j$  de  $R_\alpha$ , a igualdade (2.14) é equivalente a

$$d_{\text{Lee}}(v_i) = d_{\text{Lee}}(x_i, x_j) = \min \{x_j - x_i, \alpha - x_j + x_i\}. \quad (2.16)$$

Se o emaranhado linear  $(v_i, v_j)$  ocorre nos vértices  $(x_i, x_{i+1})$  e  $(x_j, x_{j+1})$  de  $R_\alpha$  então, pela igualdade (2.16), a distância de Lee de  $(v_i, v_j)$  pode ser determinado pela fórmula

$$\begin{aligned} d_{\text{Lee}}(v_i, v_j) &= \min \{d_{\text{Lee}}(x_i, x_{j+1}), d_{\text{Lee}}(x_{i+1}, x_j)\} \\ &= \min \{x_{j+1} - x_i, \alpha - x_{j+1} + x_i, x_j - x_{i+1}, \alpha - x_j + x_{i+1}\} \end{aligned}$$

**Lema 2.4.10** [18] *Se o lado  $(v_i, v_j)$  de  $G$  é um emaranhado linear de  $R_\alpha$ ,  $d_{\text{Lee}}(v_j) = k$  e  $\alpha = 2k$ , então vale a igualdade*

$$d_{\text{Lee}}(v_i) + d_{\text{Lee}}(v_j) = \alpha - 2. \quad (2.17)$$

**Teorema 2.4.11** [18] *Se  $(v_i, v_j)$  é um lado emaranhado de  $R_a$  e  $d_{\text{Lee}}(v_i, v_j) = k$ , então  $a \geq 2k$ .*

O Teorema 2.4.11 estabelece o limitante inferior para a distância de Lee de um emaranhado linear  $R_a$  em função do número de lados  $\alpha$  de  $R_a$ .

O conceito de distância de Lee e suas propriedades relacionadas acima, tem por objetivo principal classificar os mergulhos de um grafo em classes em maior número do que usando somente o conceito de partição. Avaliado sob o aspecto de partição, as classes de mergulhos de um grafo possuem um determinado número e contém modulações com desempenhos diferentes. A distância poderá ser usada para distinguir tais modulações.

### 2.4.3 Mergulho dual

Modulações e códigos com padrões de um sistema integrado também são projetados sobre o mergulho dual. Este é alcançado após obtermos a construção do mergulho de um grafo. O grafo dual é construído, então, segundo as seguintes condições:

**Definição 2.4.12** [15] *Seja  $G(p, q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^m R_{\alpha_i}$  um mergulho orientado de  $G$ , chama-se mergulho dual de  $G$ , o mergulho  $G'(p', q') \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{j=1}^{m'} R_{\alpha_j}$ , tal que, cada região  $R_{\alpha_i}$  de  $G$  contém um único vértice  $v'_i$  de  $G'$  em seu interior e, para cada lado  $l_k = (v_k, v_h)$  de  $G$  com  $R_{\alpha_k} \cap R_{\alpha_h} = (v_k, v_h)$ , existe um único lado  $l'_k = (v'_k, v'_h)$  de  $G'$  tal que  $v'_k \in R_{\alpha_k}$ ,  $v'_h \in R_{\alpha_h}$ ,  $l_k \cap l'_k = \{p_k\}$  com  $p_k \neq v_k$  e  $p_k \neq v_h$ .*

### 2.4.4 Classe de mergulhos

O conjunto dos mergulhos de um grafo será utilizado neste trabalho para projetos de modulações e de codificações. O número de elementos do conjunto de mergulho é muito grande e foi observado que mergulhos distintos apresentam propriedade particulares como tipo de partição e emaranhamentos iguais. Pode ocorrer que os sistemas de códigos corretores de erros definidos neste trabalho dependam destas particularidades. Será que códigos vindos de mergulhos com mesmas partições não teriam o mesmo desempenho? E aqueles correspondentes a emaranhamentos idênticos? Para responder este tipo de questionamento, consideraremos uma partição no conjunto dos mergulhos de um grafo em subconjuntos denominados de classes conforme definido a seguir.

**Definição 2.4.13** [15] *Seja  $\Lambda_G = \{\lambda : \lambda = G(\Theta_\lambda) \hookrightarrow \Omega\}$  o conjunto de todos os mergulhos orientados de  $G$ , onde  $\Theta_\lambda$  é o sistema de rotações de  $G$  associado ao mergulho  $\lambda$ . Dizemos que dois mergulhos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  de  $\Lambda_G$  são semelhantes, e indicamos esta relação por  $\lambda_1 \sim \lambda_2$  se, e somente se, possuem o mesmo tipo de composição de regiões, e escrevemos*

$$\lambda_1 \sim \lambda_2 \Leftrightarrow \text{Part}(G(\Theta_{\lambda_1}) \hookrightarrow \Omega) = \text{Part}(G(\Theta_{\lambda_2}) \hookrightarrow \Omega) \quad (2.18)$$

onde  $\text{Part}(G_{\lambda_i} \hookrightarrow \Omega)$  é a partição do mergulho  $\lambda_i$ . O conjunto de todos mergulhos  $\lambda_i \in \Lambda_G$  que estão relacionados com  $\lambda$  será denominado de classe de  $\lambda$ , a qual será indicado por

$$\bar{\lambda} = \{\lambda_i \in \Lambda_G : \lambda \sim \lambda_i\}. \quad (2.19)$$

E o conjunto de todas as classes de mergulho de  $K_n$  será denominado de conjunto quociente de  $K_n$  pela relação de semelhança  $\sim$  e será denotado por

$$\Lambda_G / \sim = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_k\}.$$

Processos de identificação das classes de mergulhos do grafo completo  $K_n$  e do grafo completo bipartido  $K_{m,n}$  são apresentados em [15] e [18], respectivamente. Como se trata de problemas de alto processamento de dados, foram identificados os mergulhos do grafo completo  $K_5$ , do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ , do hexaedro  $H_{8,12}$  e do octaedro  $H'_{6,12}$ . Utilizaremos as classes de mergulhos destes grafos como os elementos que irão compor os sistemas de modulações sobre superfícies.

### 2.4.5 Mergulho com bordos

Uma superfície  $\Omega$  com  $k$  componentes de bordos, denotada por  $\Omega_k$ , é considerada, do ponto de vista da Topologia Algébrica, como uma superfície homeomorfa a  $\Omega$  menos  $k$  pontos. O conceito de mergulhos em superfícies com bordos foi introduzido por Lima e Palazzo [14], através da seguinte

**Definição 2.4.14** *Seja  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}$  um mergulho de um grafo  $G$ . Chamaremos de mergulho com  $\beta$  componentes de bordos, a todo mergulho obtido de  $G \hookrightarrow \Omega$  pela exérese de  $\beta$  regiões de  $\cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}$ , e o denotaremos por*

$$G \hookrightarrow \Omega_\beta \equiv \cup_{i=1}^{k-\beta} R_{\alpha_i}.$$

A Definição 2.4.14 introduz um tipo especial de mergulhos que irá permitir expandir o conjunto das modulações abrangendo um número maior de superfícies superior ao do conjuntos de superfícies sem bordos.

## 2.5 Canal Associado a uma Modulação QAMS

A nomenclatura de algumas das modulações utiliza, como padrão internacional, acrônimos oriundas do idioma inglês. A seguir apresentamos os acrônimos das principais modulações abordadas neste trabalho [21].

1. Modulação ASK (do inglês *Amplitude Shift Keying*) ou *modulação por salto de amplitude*: a informação da moduladora digital é impressa na característica de amplitude da portadora senoidal. Se o sinal é binário, teremos o ASK binário ou BASK. Se o sinal tiver  $m$  níveis (sinal multinível ou  $m$ -ário) teremos ASK multinível, ASK  $m$ -ário ou MASK. Os demais tipos de sinais adotam este tipo de nomenclatura.
2. Modulação PSK (do inglês *Phase Shift Keying*) ou *modulação por salto de fase*: a informação é impressa na característica de fase da portadora senoidal. Se o sinal é binário, teremos o PSK binário ou BPSK. No caso do sinal PSK  $m$ -ário este é denotado por MPSK.

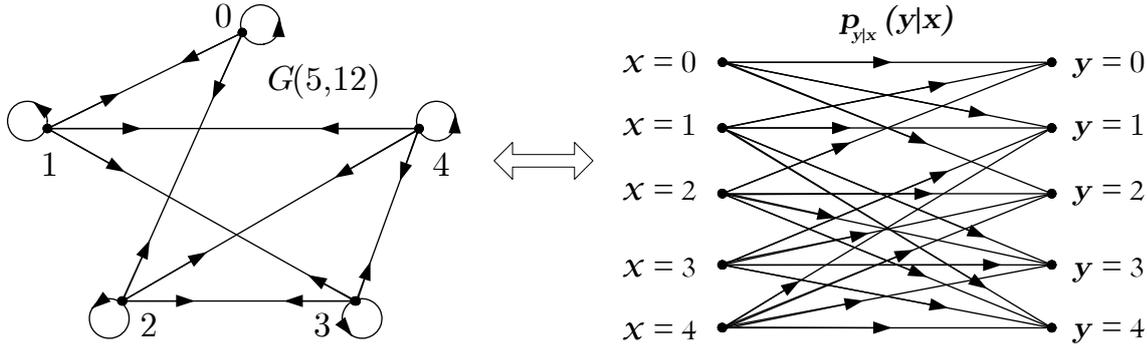


Figura 2.5.1: Associação, via Regra 1, do grafo  $G(5, 5 + 7)$  ao canal  $C_{5,5}$ . [15]

3. Modulação PRK (do inglês *Phase Reversing keying*) ou *modulação por oposição de fase*: é a aplicação mais importante do sistema BPSK e consiste em na inversão da fase de um estado para outro (ou seja, fases de  $0^\circ$  e  $180^\circ$ ).
4. Modulação ASK/SC (do inglês *Amplitude Shift Keying / Suppressed Carrier*) ou *modulação por salto de amplitude / portadora suprimida*.

Uma modulação QAMS é definida pela partição de uma variedade riemanniana topológica proveniente de um mergulho de um grafo  $G$ . Lima [15] além de definir uma modulação QAMS, analisar o seu desempenho, relacionar modulações vindas de mergulhos do grafo completo, mostra ainda que é possível associar um canal discreto sem memória, a toda modulação QAMS. Este processo de associação será descrito a seguir da mesma forma com que foi descrita em [15].

**Regra 1** Seja  $G(p, q)$  um dígrafo de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_p$  e de  $q$  lados. Se  $x_i$  é o símbolo do alfabeto  $F_x$  correspondente ao vértice  $v_i$ , e o alfabeto na saída do canal,  $F_y$ , é igual a  $F_x$ , chamaremos de canal associado ao dígrafo  $G$ , o canal  $C_m$ , que a cada lado  $(v_i, v_j)$  de  $G$  associa as duas transições de  $C_{m,n}$ ,  $(x_i, y_j)$  e  $(y_j, x_i)$ , correspondentes as probabilidades condicionadas

$$(v_i, v_j) \leftrightarrow p_{y_j|x_i}(y_j|x_i) \quad e \quad (v_j, v_i) \leftrightarrow p_{x_i|y_j}(x_i|y_j). \quad (2.20)$$

Pela Regra 1, o pontente ao vértice  $v_i$ , e o alfabeto na saída do canal,  $F_y$ , é igual a  $F_x$ , chamaremos de canal  $C_m$  associado a um dígrafo  $G(m, q)$  só não possuem as transições  $(x_i, y_j)$  e  $(y_j, x_i)$  se, e somente se,  $(v_i, v_j)$  não for um lado de  $G$ . Neste caso, faz sentido dizer que as probabilidades condicionadas  $p_{y_j|x_i}(y_j|x_i)$  e  $p_{x_i|y_j}(x_i|y_j)$  são ambas iguais a zero, se  $(v_i, v_j) \notin G$ .

A Figura 2.5.1 ilustra um caso de associação de um canal 5-ário a um grafo  $G(5, 7)$ . Observe na segunda construção desta figura referente ao canal 5-ário,  $C_5$  que o processo de associação da Regra 1, por considerar  $G$  como um dígrafo, dobra o número de representações de transições do canal em relação ao número de lados de  $G$ . Este aspecto pode ser visto

como um processo que maximiza as representações de um canal a partir do número de lados de um grafo, no sentido de conter o maior número de transições cruzadas, isto é, entre sinais distintos. Veja que cada lado produz duas transições e, portanto, o número de transições cruzadas no canal é igual o dobro do número de lados do grafo.

Apesar da Regra 1 ser eficiente em relação as probabilidades condicionadas entre sinais distintos, faltam as transições relativas as probabilidades de acertos de cada sinal. Em um canal, pode até não existir transições entre sinais distintos, mas não deve faltar as transições de acertos entre os sinais, ou seja, aquelas correspondentes as probabilidades condicionadas da forma  $p_{y_i|y_i} (y_i|y_i)$ .

Esse problema pode ser resolvido através da seguinte propriedade óbvia de mergulho de grafo: uma vez que o processo de associação envolve o mergulho do grafo  $G(p, q)$  sobre uma superfície  $\Omega$ , podemos acrescentar  $p$ -laços, um em cada vértice  $v_i$  de  $G$ , de tal modo que o grafo de  $p$  laços  $G(p, p + q)$  também esteja mergulhado em  $\Omega$ .

Neste caso, a Regra 1, quando aplicada ao grafo de  $p$  laços  $G(p, p + q)$ , associa um canal  $p$ -ário  $C_p$  ao grafo  $G$ , que contém todas transições de acertos, além de conter as transições cruzadas referentes aos lados de  $G$  que não são laços. Portanto, para incluir as probabilidades de acertos no processos de associação do canal ao grafo, basta acrescentar laços em cada vértice de  $G$  e aplicar a Regra 1.

Em particular, para o grafo de 5 laços  $G(5, 5 + 7)$  na parte à esquerda da Figura 2.5.1, ilustramos, à direita desta figura, o canal associado  $C_5$ , o qual foi obtido segundo as condições estabelecidas pela Regra 1.

A associação do grafo de  $p$  laços  $G(p, p + q)$  ao canal discreto sem memória - DMC (*Discrete Memoriless Channel*)  $C_p$ , realizada através da Regra 1, contém todas as transições que um grafo pode fornecer. Faltam somente as informações cruzadas em relação as probabilidades condicionadas  $p_{y_j|x_i} (y_j|x_i)$  e  $p_{x_i|y_j} (x_i|y_j)$ , as quais serão consideradas iguais a zero, quando o lado  $(v_i, v_j)$  não pertencer a  $G$ .

Dispomos agora dos elementos necessários para definir precisamente um processo de associação entre uma modulação QAMS e um canal DMC.

**Definição 2.5.1** [15] *Sejam  $k$ -QAMS e  $p$ -QAMS' as respectivas modulações oriundas dos mergulhos de  $G$  e seu dual  $G'$  dados por*

$$G(p, q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i \quad e \quad G'(m, q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{j=1}^p R_{\alpha_j}^j. \quad (2.21)$$

*Denominaremos de canal associado à modulação  $k$ -QAMS (canal associado à modulação dual  $p$ -QAMS') o canal discreto sem memória,  $C_k$ , associado ao grafo dual  $G'(k, p + q)$  (o canal discreto sem memória  $C'_p$  associado ao grafo  $G(p, p + q)$ ), através da Regra 1.*

Vale ressaltar que as notações do mergulho de grafo  $G$  e do seu dual em (2.21), contém as principais relações entre os elementos que irão definir as componentes das modulações  $k$ -QAMS e  $p$ -QAMS'.

## 2.6 Algoritmo Identificador de Mergulhos

Um algoritmo estabelecido por Lima [13] identifica as sequência orbitais de um mergulho de um grafo  $G$ . Conseqüentemente, o próprio mergulho é identificado, isto é, a superfície

sobre a qual  $G$  se encontra mergulhado pode ser identificada aplicando-se a característica de Eüler (2.5) da superfície uma vez que os números de lados, vértices e regiões de  $G$  são agora conhecidos. Uma versão deste algoritmo [13] é apresentada a seguir.

**Algoritmo 2.6.1** [15] *Dado o grafo  $G \{p, q\}$  definido sobre o conjunto de  $q$  lados e  $p$  vértices  $\{v_0, v_1, \dots, v_{p-1}\}$  e provido do sistema de rotações*

$$\Theta = \{\theta_0 (i_{01}, i_{02}, \dots, i_{0\alpha_0}), \theta_1 (i_{11}, i_{12}, \dots, i_{1\alpha_1}), \dots, \theta_{p-1} (i_{(p-1)1}, i_{(p-1)2}, \dots, i_{(p-1)\alpha_{p-1}})\},$$

então a  $j$ -ésima sequência orbital  $\gamma_j = (j_1, j_2, \dots, j_t)$  da região  $R_t^j$  do mergulho orientável  $G \{p, q\} (\Theta) \hookrightarrow \Omega$ , é dado por:

1. Para  $t \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  e  $s \in \{0, 1, \dots, d_k - 1\}$ ,  $d_k = \deg v_k$ , faça:
2. se  $i_{ts}$  é escolhido em  $\theta_t$ , então  $j_1 = i_{ts}$ ,  $j_2 = t$ ,  $j_3 = i_{t,s+1}, \dots, j_k = s_{\theta_{j_{k-1}}} (j_{k-2}), \dots$ ,
3. Para  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$  faça:
4. se  $u$  é o menor elemento de  $A$  tal que  $s_{\theta_{j_{s+1}}} (j_s) = j_1$  e  $s_{\theta_{j_{s+2}}} (j_{s+1}) = j_2$ , então
5.  $G \{p, q\} \hookrightarrow \Omega$  tem  $R_{s+1}^j$  definida por  $\gamma_j = (j_1, j_2, \dots, j_{s+1})$ ,  $\alpha_j = s + 1$ .
6. Para todo par de números  $(i_{ts}, t)$  em  $\Theta$  faça: se  $(i_{ts}, t)$  não é uma subsequência de  $\gamma_j$ , então
7. Repita as etapas 1-5 para construir outra sequência orbital  $\gamma_h = (h_1, h_2, \dots, h_{s_1+1})$ ,
8. Assim, o mergulho  $G \{p, q\} \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$  é determinado quando  $\sum_{c=1}^k \alpha_c = 2q$ .

O mergulho de um grafo qualquer pode ser identificado através do Algoritmo 2.6.1. Todos os mergulhos de grafos relativamente pequenos também podem ser identificados. Mas, devido ao grande número de mergulhos existentes, o conjunto dos mergulhos do grafo completo  $K_n$ ,  $n > 6$ , e do grafo completo bipartido  $K_{n,n}$ , com  $n > 4$  podem até ser possíveis de identificações, depende da robustez do equipamento.

## CAPÍTULO 3

### Modulação sobre Superfícies

Vimos no capítulo anterior, conceitos, definições e características dos mergulhos de grafo, as propriedades para um grafo completo  $K_n$ , o canal associado a uma modulação QAMS e apresentamos um algoritmo identificador de mergulhos.

Neste capítulo, mostraremos os tipos de modulações usuais e via mergulho de grafo e justificaremos o motivo pelo qual escolhemos trabalhar com modulações sobre superfícies.

### 3.1 O Canal em um sistema de comunicações

Em um sistema de transmissão digital de dados a informação é codificada através de uma *fonte* de símbolos composta de elementos os quais são denominados de alfabetos. Quando este é formado pelos  $m$  primeiros números de inteiros  $A = \{0, 1, \dots, m - 1\}$  o alfabeto é dito  $m$ -ário. Para uma descrição simplificada de como o canal transmite a mensagem formada pelos símbolos de  $A$ , consideremos o sistema de comunicações na Figura 3.1.1.

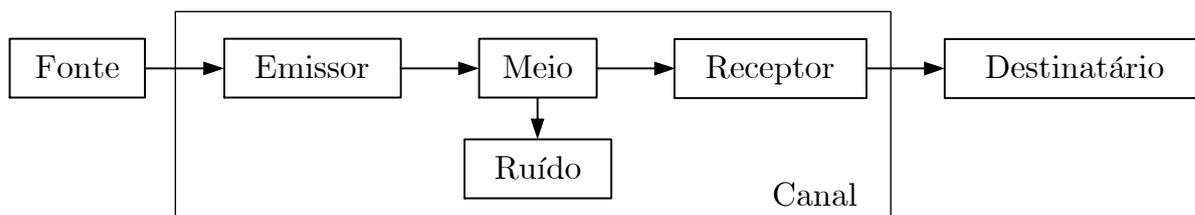


Figura 3.1.1: O canal em um sistema de comunicações [21]

O problema básico do ponto de vista técnico consiste em transmitir os símbolos de  $A$ , de modo que a informação associada não seja perdida. A transmissão de um símbolo  $u$  de  $A$  é feita pelo *emissor* no qual, acionado pela fonte, entrega um sinal de energia adequado ao meio e associado a  $u$ . Para tanto, dispõe de um componente interno, o *modulador*, que transforma  $u$  em sinais convenientes para serem transmitidos pelo meio.

O *meio* é o componente que propaga a energia correspondente ao sinal entregue pelo emissor até o receptor, permitindo que o sinal seja transmitido. O *receptor* é o dispositivo que retira a energia do meio e recupera o sinal, da forma mais precisa possível. Para tanto, dispõe de um componente interno, o *demodulador*, que recupera, a partir da energia recebida, os símbolos portadores da informação. Deste modo, o emissor e o receptor desempenham funções inversas e complementares e o meio os interliga.

O ideal seria que o receptor recuperasse fielmente a mensagem produzida pela fonte. Na prática isto não ocorre. Limitações físicas e outros fatores presentes no sistema alteram as características do sinal que se propaga, produzindo a distorção.

Além disso, sinais de natureza aleatória são adicionados ao sinal propagado produzindo o *ruído*. Um dos maiores problemas do projetista do sistema consiste em manter tanto a distorção como o ruído em níveis aceitáveis.

## 3.2 Modulações usuais

Geometricamente, um projeto de modulação pode ser visto como uma distribuição dos  $m$  sinais do alfabeto sobre um espaço métrico. A fim de justificar o estudo da modulação sobre superfícies introduzida neste capítulo ilustramos, na Figura 3.2.1, os modelos de modulações usuais.

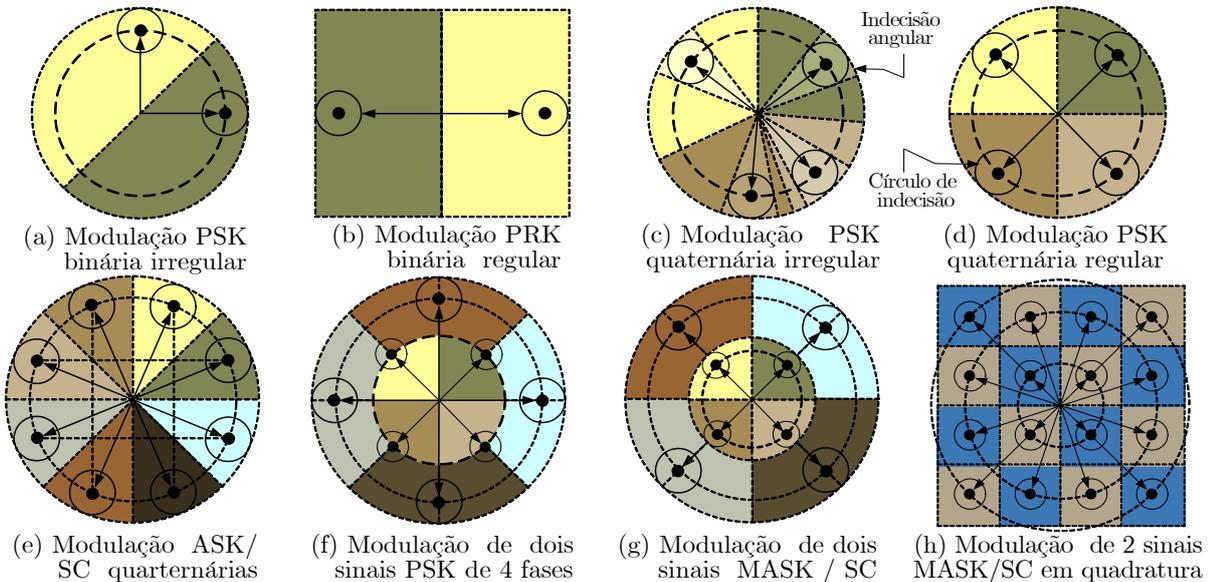


Figura 3.2.1: Modelos usuais de modulações

Nos modelos da Figura 3.2.1, observamos a existência de modulações irregulares ((a) e (c)) e regulares (demais modelos). Em geral, os sistemas de comunicações quase sempre requerem modulações irregulares, no entanto, por exigirem menos complexidade, as modulações regulares são mais fáceis de serem implementadas e, por isso, são as mais utilizadas. Na verdade, há um grande interesse por parte dos pesquisadores em identificar modulações

regulares, uma das prioridades deste trabalho.

O círculo de indecisão usado em torno de cada sinal, nas modulações da Figura 3.2.1, está de acordo com a uniformidade da análise da família ASK e com a praticidade de representar a zona de indecisão de um sinal. No demodulador real, tudo pode acontecer: um sinal transmitido, quando demodulado, pode pertencer ao círculo de indecisão de qualquer outro sinal da modulação e, mais ainda, pertencer a um ponto do espaço de modulação que não pertence a nenhum dos círculos de indecisões. O modelo do círculo é devido a sua praticidade, principalmente no que se refere à complexidade de cálculo. Sendo assim, o quadrado de indecisão em cada sinal das modulações (b) e (h), e as regiões angulares nas demais modulações da Figura 3.2.1, são modelos de regiões de indecisão mais coerentes com o comportamento do sinal no demodulador de um canal.

### 3.3 Modulações via mergulhos de grafos

Do ponto de vista de faixas angulares ou de regiões quadrangulares, as regiões de indecisão de uma modulação podem ser consideradas como os interiores de regiões, cuja fronteira é um grafo conexo mergulhado em uma superfície. No caso das modulações da Figura 3.2.1, os grafos que definem as modulações, superfícies e partições (regiões de indecisão sobre a superfície), são ilustrados na Figura 3.3.1.

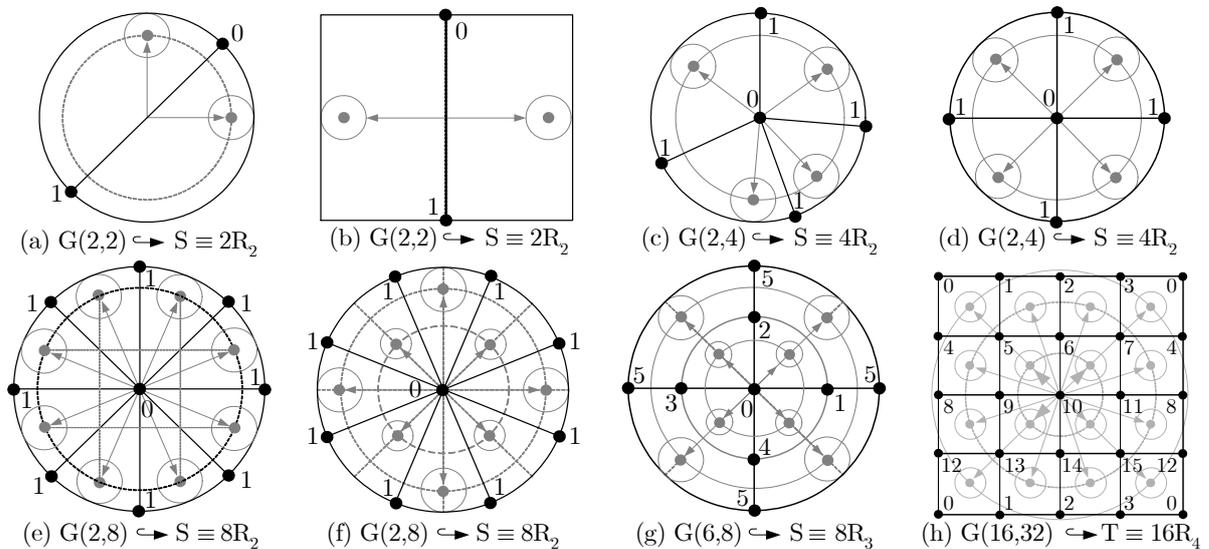


Figura 3.3.1: Grafos sobre superfícies que definem regiões de indecisão de modulações

Nos grafos da Figura 3.3.1 observam-se vértices distintos do plano com rótulos idênticos. O objetivo é encontrar um mergulho de um grafo simples sobre uma superfície que contenha uma modulação equivalente. No plano, as modulações seriam como os modelos da Figura 3.1.1, só que as regiões de indecisão seriam ilimitadas, pois não existiriam circunferências externas nas modulações (a), (c)-(g), e nem os quadrados externos nas modulações (b) e (h). (Estes foram colocados somente com o intuito de abstrair o formato geométrico da

modulação.) Modulações equivalentes em superfícies com regiões bem definidas podem ser obtidas utilizando procedimentos básicos da topologia algébrica.

No plano, os rotulamentos de grafos da Figura 3.3.1 não fazem sentido (dois vértices distintos com o mesmo rótulo), entretanto, no ambiente da topologia algébrica, os rotulamentos correspondem a grafo mergulhados em superfícies definindo precisamente uma modulação sobre uma superfície equivalente ao plano. Então, o primeiro objetivo deste trabalho será procurar soluções para o seguinte problema.

**Problema 3.3.1** *Dada uma modulação  $M_m$  para uma constelação de  $m$  sinais, encontrar um grafo  $G$  tal que  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=0}^{m-1} R_{\alpha_i}$  define um projeto de modulação sobre  $\Omega$  equivalente a  $M_n$ .*

A condição de equivalência entre  $M_m$  e  $M_p$  será estabelecida através de três condições, quanto ao número de sinais, regularidade e posicionamento de sinais.

**Definição 3.3.2** *Duas modulações  $M_m$  e  $M_p$  são equivalentes se, e somente se, possuem os mesmos números de sinais e suas regiões preservam as características de regularidades e de posicionamento de sinal.*

Se  $M_m$  e  $M_p$  são modulações equivalentes sobre os espaços métricos  $\Omega$  e  $\Omega'$ , respectivamente, então  $m = p$ , cada sinal  $s_i$  de  $M_m$  em  $\Omega$  corresponde a um sinal  $s'_i$  de  $M'_p$  em  $\Omega'$ . Além disso, se  $R_{s_i}$  e  $R_{s'_i}$  são as regiões de indecisão de sinais correspondentes, então a razão entre áreas de regiões de indecisão de sinais correspondentes são proporcionais. Com isto, modulações equivalentes  $M_m \sim M_p$  são caracterizadas pelas seguintes relações

$$M_m \sim M_p \Leftrightarrow \begin{cases} m = p \\ \frac{R_{s_1}}{R_{s'_1}} = \frac{R_{s_2}}{R_{s'_2}} = \dots = \frac{R_{s_m}}{R_{s'_m}} = k. \end{cases} \quad (3.1)$$

A condição de proporcionalidade em (3.1) corresponde a preservação da regularidade em modulações equivalentes, termo introduzido na Definição 3.3.2. O posicionamento de dois sinais correspondentes  $s_i$  e  $s'_i$  também devem ser relativos. Se  $s_i$  encontra-se no centro de  $R_{\alpha_i}$  em  $\Omega$ , então  $s'_i$  também deverá estar no centro de  $R_{\alpha'_i}$ , ou seja, sinais correspondentes devem ocupar posições equivalentes em suas respectivas regiões. Tal condição estabelece o posicionamento de sinal, termo também introduzido na Definição 3.3.2.

A Figura 3.3.2 mostra mergulhos dos grafos com os rotulamentos fixados na Figura 3.3.1, exceto (h), que possui modulações equivalentes sobre a esfera. Observe que somente em (g) foi utilizado um grafo normal, nas demais modulações os grafos mergulhados são todos multigrafos definidos sobre dois vértices.

A Figura 3.3.2 contém modelos de modulações sobre a esfera com as seguintes características: binária irregular em (a), em virtude da distribuição não uniforme dos dois sinais sobre um círculo máximo do toro; binária regular em (b); Em (c), a distribuição não-uniforme de quatro sinais sobre um círculo máximo de  $S$  caracteriza uma modulação 4-ária irregular; (d) contém o caso 4-ária regular; (e) corresponde a uma modulação 8-ária regular; e em (f) e (g), dois pares de conjuntos com 4 sinais são distribuídos uniformemente sobre círculos iguais não maximais de  $S$ , sendo que em (f), os sinais sobre um círculo estão rotacionados, em relação ao outro, por um ângulo de  $45^\circ$ .

Nas construções da Figura 3.3.2, usamos os métodos de construção de superfícies topológicas [29] para construir mergulhos de grafos sobre  $S$ , cuja partição resulta em uma modulação equivalente à da Figura 3.2.1. Neste tipo de construção, é comum a existência de mais de um vértice de uma modulação do plano ser levado em um único vértice de uma superfície  $\Omega$ . Isto só ocorre quando os vértices encontram-se na fronteira da modulação. Observe que muitos dos rótulos dos vértices dos grafos da Figura 3.3.1 são idênticos, estes são levados em um único vértice da esfera, como mostram as construções das Figuras 3.3.2 e 3.3.3.

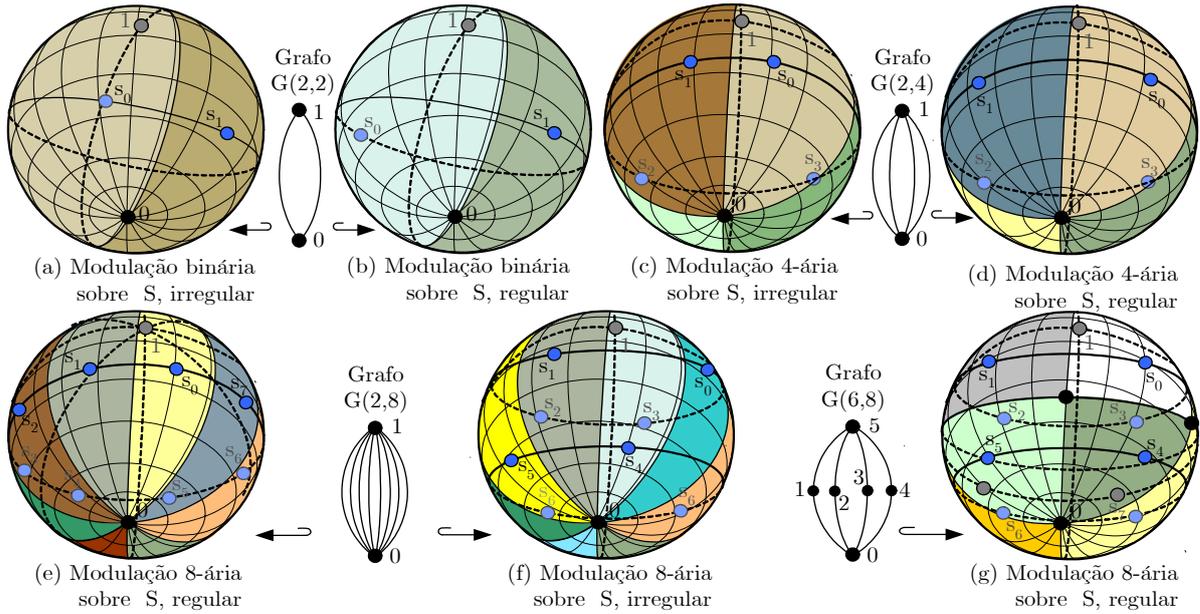


Figura 3.3.2: Modulações sobre a esfera equivalentes as modulações da Figura 3.3.1

Poderíamos ter utilizados outros mergulhos, inclusive sobre outros tipos de superfície. Mas a intenção era utilizar uma superfície conhecida, grafos simples e preservar, sempre que possível, as características de regularidades das modulações do plano.

A modulação (h), da Figura 3.3.1, é um caso especial de modulação 16-QAM. Apresenta características diferentes das demais, quanto à geometria e, especialmente, em relação à superfície na qual pode ser mergulhada. Como a fronteira do grafo é quadrangular, o modo mais natural de mergulho é, reconhecidamente, sobre a superfície toro ( $T$ ).

A Figura 3.3.3, mostra como transportar uma modulação do formato de (h) para o toro. Para isto é suficiente orientar a fronteira do grafo em (h), de modo semelhante ao modelo planar (a) do toro da Figura 3.3.3, e realizar a transformação geométrica estabelecida na Subseção 2.3, para obter o mergulho da modulação sobre o modelo espacial do toro (b).

Ressaltamos que a modulação da Figura 3.3.3 não é equivalente ao projeto de modulação em (h), é somente do mesmo tipo. Naturalmente que 16-QAM em (h) é uma modulação para uma constelação de 16 sinais enquanto a modulação na Figura 3.3.3 é do tipo 128-QAM e, portanto, uma modulação para uma constelação de 128 sinais. Devemos considerar aqui que a modulação 16-QAM em (h) pode ser realizado no toro do mesmo modo que 128-QAM foi realizada na Figura 3.3.3.

Vale ressaltar, da Topologia Algébrica, que o toro não é a única superfície que se pode transportar a modulação 16-QAM ou a 128-QAM. Basta mudar a orientação dos lados do polígono (a) para que estas modulações sejam realizadas sobre uma superfície não-orientável, como a garrafa de Klein. É bom que se saiba que, dependendo do polígono sobre o qual a modulação está definida, há um conjunto de superfícies nas quais a modulação equivalente pode ser realizada.

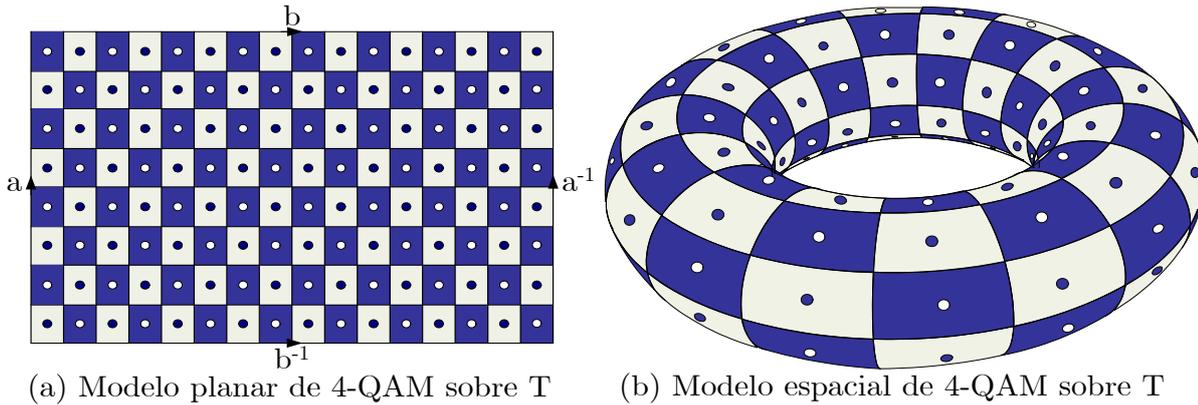


Figura 3.3.3: Modulação 128-QAM e sua equivalente sobre o toro [15]

As características comuns entre os grafos que definem as regiões de indecisão das modulações 16-QAM da Figura 3.3.1 (h) e o grafo de 128-QAM da Figura 3.3.3 (a), é por que ambas são definidas sobre reticulados bi-dimensionais  $A_2$  e possuem fronteiras quadrangulares, condições necessárias para que se tenha mergulhos torodais.

### 3.4 Propostas de soluções para o Problema 3.3.1

Analisando os espaços sobre os quais as modulações da Figura 3.2.1 encontram-se, a conclusão é de que elas podem ser projetadas sobre superfícies, como mostram as Figuras 3.3.2 e 3.3.3. Além disso, podemos considerar que os sinais de (b) encontram-se sobre a reta, os de (e) sobre uma circunferência, e os sinais das demais modulações encontram-se sobre o plano. Mas a reta, circunferência e plano são exemplos clássicos de variedades riemannianas. Como a esfera e o toro também são, então a conclusão é que em todo projeto de modulação, os sinais e regiões de indecisões podem ser considerados como pontos e regiões de uma variedade riemanniana.

#### 3.4.1 Solução para o Problema 3.3.1 a partir da modulação

Na Seção 3.4 apresentamos uma solução para Problema 3.3.1. Seria esta a solução mais viável? Do jeito que este foi colocado, uma estratégia de solução seria construir um grafo sobre a modulação, através de retas perpendiculares pelos segmentos que ligam sinais vizinhos [10], procedimento que define as regiões de decisão, quando os sinais são equiprováveis

na fonte. O caso de sinais não-equiprováveis é semelhante, só que as retas perpendiculares são traçadas de acordo a probabilidade de ocorrência dos sinais vizinhos na fonte. Os grafos definidos sobre as modulações na Figura 3.3.1 foram obtidos através dessa regra, considerando sempre que a fonte seleciona os sinais de forma equiprovável.

A construção referida acima resulta sempre em um problema. O que fazer com os lados da fronteira do grafo? Como rotulá-los? Como orientar a sua fronteira? A primeira questão é simples. Basta construir a fronteira de modo que esta tangencie os círculos de indecisões dos sinais externos, ou próximo destes, de modo que a fronteira defina uma região que contenha todos os sinais e círculos de indecisões em seu interior.

Quanto ao problema de orientação da fronteira, esta depende da superfície na qual se deseja colocar a modulação. Como a fronteira é um polígono de  $n$  lados, é preciso conhecer a orientação poligonal das superfícies para resolver este problema. Neste processo, há uma restrição quanto a escolha da superfície, uma vez que a fronteira da modulação possui um número finito  $n$  de lados. Identificado o conjunto de superfícies, escolhe-se uma delas  $\Omega$ , orienta-se a fronteira e rotulam-se seus vértices de acordo com a orientação de  $\Omega$ . Foi assim que as modulações equivalentes sobre superfícies nas Figuras 3.3.2 e 3.3.3 foram construídas.

Podemos sintetizar as conclusões da análise sobre a construção da modulação equivalente através do grafo que define a fronteira das regiões de indecisão de uma modulação através da seguinte afirmação.

**Proposição 3.4.1** *Seja  $M_m$  uma modulação para uma constelação de  $m$  sinais sobre um espaço métrico, digamos, o  $\mathbb{R}^n$  com a métrica euclidiana. Se existe um grafo  $G$  em  $\mathbb{R}^n$  definindo as regiões de indecisão dos  $m$  sinais de  $M_m$ , então podemos transportar  $M_m$  para uma variedade riemanniana bidimensional (ou superfície)  $\Omega$ .*

**Demonstração.** De fato, como  $m$  é finito e existe  $G$  definindo as regiões de indecisão dos  $m$  sinais de  $M_m$ , então existe uma representação planar do grafo  $G$ , isto é, os lados e vértices de  $G$  podem ser representados no plano. Assim,  $G$  possui uma fronteira  $\partial G$  definida sobre  $n$  lados de  $G$ . Se  $n$  é par da forma  $4p$ , então podemos orientar  $\partial G$  como fronteira de uma superfície orientável ou não-orientável. (Também pode ser possível o caso com bordo). Se  $n = 2p$ ,  $\partial G$  pode ser orientado como fronteira de uma superfície não-orientável (o caso com bordo também pode ser possível). Se  $n$  é ímpar, podemos usar três lados consecutivos de  $\partial G$  com a orientação de uma componente de bordo, neste caso,  $n - 3$  é par, recaímos no caso par e, conseqüentemente,  $\partial G$  pode ser orientável como uma superfície orientável ou não-orientável com um componente de bordo. Em quaisquer dos casos, o mergulho  $G$  pode ser realizado geometricamente sobre uma superfície  $\Omega$ . ■

O processo de construção acima depende exclusivamente do tipo de fronteira do grafo que define as regiões de indecisão da modulação. Ao serem fixados os vértices, têm-se um conjunto de superfícies que podem ser identificadas, nas quais os projetos de modulações podem ser realizados. Esta é uma excelente estratégia de resolução do Problema 3.3.1, porque o mergulho pode ser realizado, apesar de trabalhoso nos casos de grandes modulações e a descrição algébrica do mesmo em termo de sequências orbitais, também não resulta em maiores dificuldades. No entanto, foge ao escopo deste trabalho, pois a construção de projetos topológicos de modulações demanda muito tempo. Fica aqui, então, como sugestão para

trabalhos futuros, a proposta de construir modulações equivalentes em variedades riemannianas, utilizando o método do mergulho de grafos descrito acima.

### 3.4.2 Solução para o Problema 3.3.1 via mergulho de grafo

Neste trabalho, serão identificadas modulações diretamente das classes de mergulhos de um grafo qualquer. Esta opção deve-se ao manancial de resultados já existentes, que podem ser implementados na forma de algoritmos, o que permite análises melhor fundamentadas, agilidade do processo e abrangência de resultados. Serão identificadas modulações a partir de vários tipos de grafos, visando identificar suas características peculiares.

Enquanto a solução do Problema 3.3.1 apresentada na Seção 3.4.1, parte de uma modulação conhecida para identificar um conjunto de modulações equivalentes em superfícies, aqui o objetivo é identificar todos os projetos topológicos de modulações distintas vindas dos mergulhos de um grafo em específico. Uma das vantagens neste processo é a surpresa e o fato da descoberta de novos tipos de modulação nunca imaginadas antes. Melhor do que isto, muitas delas regulares e que podem ser trabalhadas no sentido de obter um espaço de modulação do tipo geometricamente uniforme.

Outro ponto positivo vem da praticidade do Algoritmo 2.6.1, o qual agiliza o processo de identificação de uma série de grafos, garante a existência da modulação e identifica aquelas que não podem ser realizadas através do mergulho de um determinado grafo, apesar da relação de Eüler demonstrar o contrário.

Uma vez que as modulações serão identificadas a partir de um grafo em específico, posteriormente apresentaremos, detalhadamente, este processo. Retornemos então ao objetivo desta seção que é justificar o porquê de se propor modulações sobre espaços métricos  $(\Omega, d)$ , sendo  $\Omega$  uma superfície e  $d$  uma métrica de  $\Omega$ .

## 3.5 Por que Modulações sobre Superfícies?

Modulação em superfície existe há algum tempo. Recentemente, pesquisas sobre o tema ([2], [5], [11], [20]) demonstram o interesse e a importância do uso de superfícies em projetos de modulação. Neste trabalho, estamos introduzindo um elemento novo neste processo, o mergulho de um grafo, como agente identificador de modulações. Também serão apresentadas justificativas do porquê do uso de modulações em superfícies.

### 3.5.1 Modulação *twisted* e mergulhos de grafo

Técnicas de modulação associadas a curvas no  $\mathbb{R}^n$ , introduzidas em 1976 [32], foram pioneiras no uso de superfícies para projetos de modulações. A interpretação geométrica deste método possibilita o projeto e análise de desempenho das modulações usando ferramentas da geometria riemanniana ou, de um modo mais particular, da geometria diferencial. Trata-se de uma *modulação não linear* (ou *twisted* - retorcido), e são conhecidas por produzirem um erro quadrado médio, que pode ser reduzido, em geral, somente pelo incremento de energia média de transmissão, quando é utilizada em sistemas de comunicações que usam um re-

ceptor de máxima verossimilhança. Análises e exemplos de modulações *twisted* podem ser vistas, por exemplo, em [2].

A modulação não linear é projetada sobre uma curva da superfície. Os lados de um grafo mergulhado são curvas sobre uma superfície. No caso específico do toro, o mergulho do grafo pode ser realizado na região fundamental (modelo planar) e conduzido, através de uma parametrização, para a superfície toro (modelo espacial). Então há uma relação entre modulações *twisted* e mergulho de grafos, uma vez que ambos são formados por curvas sobre superfícies.

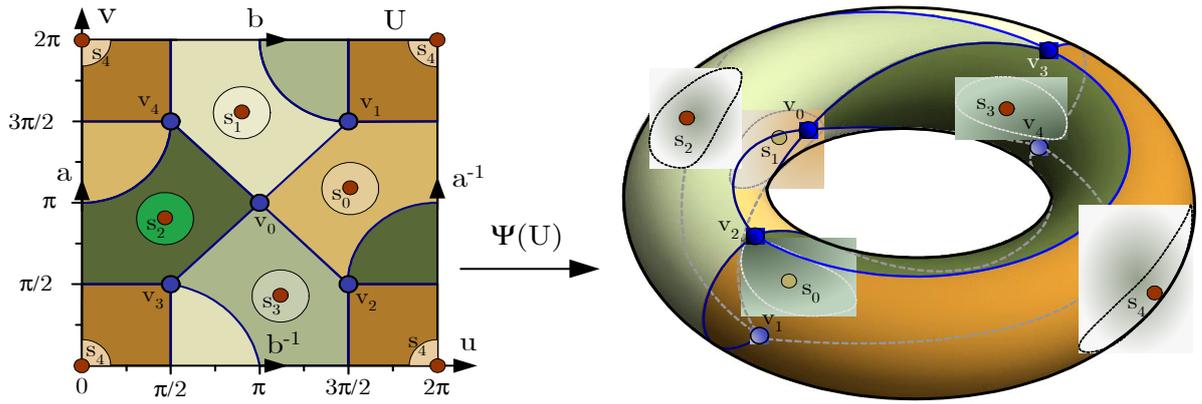


Figura 3.5.1: Modulação toroidal  $M_5$  vinda do mergulho de  $K_5$

Consideremos então os mergulhos do grafo completo  $K_5$ , ilustrados na Figura 3.5.1, sobre o modelo planar  $U$  e o modelo espacial  $\Psi(U)$  do toro, sendo  $U$  o aberto do plano dado por

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \in 2\pi\} = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi).$$

A fronteira da região  $U$  é um polígono 4-lados orientado pela palavra  $\omega = aba^{-1}b^{-1}$ , orientação da superfície toro. Sobre  $U$ , encontra-se o mergulho regular de  $K_5$  sobre o toro  $K_5 \hookrightarrow T \equiv 5R_4$ . A partição  $5R_4$  corresponde a 5 regiões quadrangulares definidas pelas sequências

$$\gamma_0 = (0, 1, 3, 4), \quad \gamma_1 = (0, 2, 4, 1), \quad \gamma_2 = (0, 3, 1, 2), \quad \gamma_3 = (0, 4, 2, 3), \quad \gamma_4 = (1, 4, 3, 2),$$

onde  $\gamma_i$  é denominada de *sequência orbital* da região  $R_4^i$ . Para efeito de simplificação, o elemento  $j$  de  $\gamma_i$  indica o índice do vértice  $v_j \in V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , conjunto dos vértices de  $K_5$ , dados pelos pontos do plano

$$v_0 = (\pi, \pi), \quad v_1 = (3\pi/2, 3\pi/2), \quad v_2 = (3\pi/2, \pi/2), \quad v_3 = (\pi/2, \pi/2) \quad \text{e} \quad v_4 = (\pi/2, 3\pi/2).$$

No mergulho toroidal da Figura 3.5.1, cada região  $R_4^i$  é destacada com uma cor diferente, tanto no modelo planar como no espacial, e contém, em seu interior, o sinal  $s_i$  da constelação  $A = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ , os quais foram associados aos pontos da região fundamental  $U$ , cujas coordenadas estão relacionadas na Tabela 3.5.1.

Os mergulhos da Figura 3.5.1 podem ser considerados como modulações equivalentes, as quais serão denominadas aqui de *modulação planar*  $5-M_p$ , a que vem do modelo planar, e de *modulação toroidal*  $5-M_s$ , à correspondente ao modelo espacial do mergulho de  $K_5$ .

Segundo conceitos da topologia das superfícies, a modulação toroidal  $5-M_s$  é, de fato, uma modulação sobre um toro e pode ser realizado neste, via geometria diferencial, através de uma parametrização do toro, em particular, pela parametrização

$$\Psi(u, v) = ((3 + \cos v) \cos u, (3 + \cos v) \sin u, \sin v), \quad (u, v) \in U.$$

A modulação toroidal  $5-M_s$  da Figura 3.5.1 foi construída por Costa [4], utilizando as ferramentas do *software* Mathematica, segundo a rotina de programação disponibilizada no Apêndice A.

Qualquer mergulho topológico sobre o toro pode ser transformado em um projeto geométrico de modulação toroidal, da forma como foi realizado na Figura 3.5.1. Qual a relação desse mergulho com uma modulação *twisted*? Em princípio, seria revelar curvas características sobre o toro adequadas, ou que apresentem desempenhos diferentes, para projetos de modulações *twisted*.

A vantagem do uso de um mergulho topológico é porque há liberdade de escolhas de lados e vértices, e quando se trata de um mergulho de 2-células a tendência deste é distribuir uniformemente os lados sobre a superfície, condições que permitem avaliar os tipos de curvas que mais se adequam à modulação *twisted*.

Evidentemente que a liberdade de escolhas de vértices e lados em um mergulho topológico também ajuda a encontrar uma distribuição uniforme de regiões sobre a superfície, quando o objetivo for o de priorizar a partição regular, como foi demonstrado por Costa [4], os quais provaram que há uma modulação planar  $5-M_p$  cuja modulação toroidal  $5-M_s$  equivalente é um espaço de sinais do tipo geometricamente uniforme.

### 3.5.2 Características das regiões de indecisões

Escolhamos o círculo de raio  $r_i = 0.4398$  centrado em  $s_i$  como região de indecisão do sinal  $s_i$ . Logo, a ação do ruído atua em um disco  $D_{s_i}$  de área  $d_{s_i} = 0.60765$ . Fixemos ainda, as coordenadas dos sinais de  $A$  como na segunda coluna da Tabela 3.5.1.

Constelação $A$	Coordenadas	Área de $\Psi(D_{s_i})$ em $T$
$s_0$	(4.7124, 3.4314)	1.60350
$s_1$	(2.8518, 4.7124)	2.32133
$s_2$	(1.5708, 2.8518)	1.60350
$s_3$	(3.4314, 1.5708)	2.32133
$s_4$	(0.0000, 0.0000)	3.0704

Tabela 3.5.1: Dados referentes as áreas de indecisões da modulação toroidal  $M_5$

Supondo que  $B = \{\omega_i : \omega_i = \Psi(s_i)\}$  é a constelação de sinais da modulação toroidal  $5-M_s$ , segue da terceira coluna da Tabela 3.5.1, que as áreas das regiões de indecisões dos sinais de  $B$  podem ser iguais ou não. Em particular, se  $h(s)$  é a área da região de indecisão

do sinal  $s$ , então as áreas das regiões dos sinais das modulações equivalentes  $5-M_p$  e  $5-M_s$  satisfazem as seguintes relações

$$h(s_0) = h(s_1) = \dots = h(s_4) < h(\omega_0) = h(\omega_2) < h(\omega_1) = h(\omega_3) < h(\omega_4). \quad (3.2)$$

Sob o aspecto de região de indecisão,  $5-M_p$  é uma modulação planar regular. Em relação a distância mínima entre os sinais vizinhos a regularidade só não existe no caso do sinal  $s_4$ . Observe, na Tabela 3.5.2, que a distância entre o sinal  $s_4$  e seus vizinhos é igual a 3.2558, enquanto a distância entre dois vizinhos quaisquer, em que um deles não é o  $s_4$ , é sempre igual a 2.2589.

$d(s_i, s_j)$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$
$s_0$	0.0000	2.2589			3.2558
$s_1$	2.2589	0.0000	2.2589		3.2558
$s_2$		2.2589	0.0000	2.2589	3.2558
$s_3$			2.2589	0.0000	3.2558
$s_4$	3.2558	3.2558	3.2558	3.2558	0.0000

Tabela 3.5.2: Distância euclidiana entre os sinais vizinhos da constelação  $A$

Obviamente, é um problema simples escolher os elementos de  $A$  de tal modo que a distância entre dois vizinhos seja constante e teríamos, portanto, uma  $5-M_p$  regular. Como não há interseções entre regiões de indecisões distintas de  $5-M_p$ , e pouca diferença do caso regular, podemos considerá-la como tal. Os seus desempenhos seriam praticamente os mesmos em um sistema de comunicações. O problema que nos interessa analisar é como seriam as regiões de indecisão da modulação toroidal  $5-M_e$ , dado que as regiões de modulação planar equivalente  $5-M_p$  são todas congruentes.

Pelas relações (3.2), vemos que as regiões de indecisões dos sinais  $\omega_i$ 's da constelação  $B$  podem ser diferentes ou iguais, apesar de serem imagens de regiões iguais. Em particular, possuem áreas bem maiores do que as regiões de indecisões de  $A$ . Como a probabilidade de erro de transmissão de sinal diminui com o aumento da área de região de indecisão do sinal, a conclusão é: modulações sobre superfícies podem apresentar melhores desempenhos do que as suas modulações planares equivalentes. Uma vez que as regiões de  $B$  possuem áreas maiores ou iguais as de  $A$ , podemos obter uma modulação toroidal  $5-M_e$ , de tal modo que a potência média do sinal de  $5-M_e$  é menor do que a de sua equivalente  $5-M_p$ , e com desempenho igual ou superior a de  $5-M_p$ .

## 3.6 Justificativas

A discussão acima sobre a modulação toroidal é apenas uma pequena amostra do potencial das modulações sobre superfícies. Foram abordados somente alguns aspectos do problema. A geometria diferencial foi utilizada para mostrar que podemos diminuir, simultaneamente, a probabilidade de erro de transmissão e a potência média de sinais, quando modulações sobre superfícies são usada em sistemas de comunicações. A geometria riema-

niana pode fazer mais ainda, contribuir com novas variedades para projetos de modulações, além de disponibilizar ferramentas que permitem análise da performance da modulação [2].

O problema do projeto de uma modulação  $p$ - $M$  sobre variedades riemannianas, consiste em distribuir os  $p$  sinais sobre  $\Omega$  de forma uniforme e com potência média apropriada a um processo de transmissão. Não existe um método geral para resolver este problema. Em geral, a distribuição de sinais é feita de modo intuitivo e depende da forma da variedade  $\Omega$ . Se simplesmente distribuimos os sinais sobre  $\Omega$ , não fazemos ideia do tipo de regiões que irão compor a partição de  $\Omega$ . Então, o que fazer? Distribui os sinais sobre  $\Omega$  e fazer a partição de modo intuitivo? Pode ser, mas fica sempre a dúvida se esta é a melhor distribuição ou a melhor partição.

Quando o mergulho de grafos é usado para projetar uma modulação  $p$ - $M$  sobre  $\Omega$ , podemos dar respostas para o problema de existência das partições. O que se pode fazer neste caso é construir um grafo  $G(p, q)$  sobre os  $p$  vértices e identificar o conjunto de partições possíveis sobre variedades topológicas vindas do mergulho de grafo  $G$ . Para  $G$  não suficientemente grande, pode-se prever todos os tipos de partições e identificar aquelas que realmente existem, usando o algoritmo 2.6.1.

No caso de  $G$  ser grande o suficiente de modo que o algoritmo não possa exibir todas as suas partições, é possível saber qual o conjunto de superfícies onde se encontram as partições de  $G$ , o número de partições e possíveis formatos. Só não é possível ainda determinar aquelas que não existem, entretanto, fixado um sistema de rotações  $\Theta$  para  $G$ , pode-se identificar a superfície, a partição e descrevê-la em termos de sequências orbitais.

A identificação da partição de  $\Omega$  vinda do mergulho de  $G(p, q)$  é fundamental para a obtenção da construção do modelo planar topológico da modulação  $p$ - $M_p$ . O modelo espacial, correspondente à modulação  $p$ - $M_s$  sobre  $\Omega$ , em termos de partição, só é possível se o seu equivalente  $p$ - $M_p$  é conhecido, como foi mostrado no caso da modulação toroidal da Figura 3.5.1. Pode-se até desenhar uma partição  $p$ - $M_s$  sobre  $\Omega$ , mas ficaria impossível realizar as operações desejadas sem conhecer os pontos (sinais) e curvas sobre  $D = p$ - $M_p$ , mesmo conhecendo uma parametrização  $\Psi : D \rightarrow \Omega$ .

Um dos objetivos deste trabalho é, portanto, identificar todas as modulações  $p$ - $M$  vindas de um mergulho do grafo  $G(p, q)$ , em particular, do grafo completo  $K_5$ , grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ , e dos grafos de Cayley do hexaedro (cubo) e octaedro.

Os casos de  $K_5$  e  $K_{4,4}$  foram escolhidos porque há muita informação sobre os seus mergulhos e tratam-se dos primeiros casos não triviais quanto ao problema de identificação. Além disso, há uma relação natural entre o grafo completo bipartido  $K_{m,n}$  e o modelo de canal [14]. Poderíamos ter escolhido outros tipos de grafos, mas o principal motivo da escolha dos quatro tipos de grafos abordados neste trabalho é porque a identificação completa de todos os mergulhos, sua classificação e identificação de emaranhados podem ser realizados. Outra razão é a existência de simetrias, o que pode contribuir para a geração de modulações regulares. Além disso, o processo detalhado de identificação dos grafos  $K_5$  e  $K_{4,4}$  é conhecido ([15], [18]) e as modulações dos grafos de Cayley do hexaedro e octaedro serão apresentadas, em primeira mão, no próximo capítulo.

## CAPÍTULO 4

# Modulações de Grafos Completos

Neste capítulo, serão identificados projetos de modulações obtidas através de mergulhos de quatro categorias de grafos conhecidos. Em princípio, serão estimados os possíveis modelos de modulações sobre superfícies orientáveis, não-orientáveis, com e sem bordos.

### 4.1 Processo de Identificação de $kM$

Antes de descrever o processo de identificação definiremos a notação que será utilizada neste capítulo.

Seja  $G(p, q)$  um grafo definido sobre um conjunto de  $p$  vértices, denotado por  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{p-1}\}$  e um conjunto de  $q$  lados. Então, existem conjuntos de superfícies nas quais  $G$  possui mergulhos de 2-células. Tais conjuntos serão denotados por

$\mathbb{S}(G) \triangleq$  conjunto das superfícies orientáveis de mergulhos de  $G$

$\overline{\mathbb{S}}(G) \triangleq$  conjunto das superfícies não-orientáveis de mergulhos de  $G$

$\mathbb{S}_b(G) \triangleq$  conjunto das superfícies orientáveis com bordos de mergulhos de  $G$

$\overline{\mathbb{S}}_b(G) \triangleq$  conjunto das superfícies não-orientáveis com bordos de mergulhos de  $G$ .

O símbolo  $\triangleq$  utilizado acima tem o significado de ‘*corresponde ao*’ ou ‘*representa o*’. Caso não queiramos especificar o tipo de superfície utilizaremos a notação  $\mathbb{S}_G$  para indicar o conjunto de superfícies para o mergulho de  $G$ . Neste caso, temos que

$$\mathbb{S}_G = \mathbb{S}(G) \cup \overline{\mathbb{S}}(G) \cup \mathbb{S}_b(G) \cup \overline{\mathbb{S}}_b(G).$$

Para cada superfície  $\Omega$  de  $\mathbb{S}(G)$  existe um *conjunto de modelos de partições sobre  $\Omega$*  correspondente aos mergulhos de  $G$ , o qual será denotado por  $\Xi(\Omega)$ . O conjunto  $\Xi(\Omega)$  é parte do conjunto de modelos possíveis de mergulhos de  $G$  que será indicado por  $\Xi_\epsilon(\Omega)$ .

Um mergulho de grafo é identificado a partir de uma rotação fixa de  $G$ , que será denotada por  $\Theta$ . O conjunto de todas rotações de  $G$  será representado por  $\Theta(G)$ . Uma rotação  $\Theta$  de  $G$  é definida por um determinado conjunto de rotações dos vértices de  $G$ . Então denotaremos

por  $\theta_i$  a rotação do vértice  $v_i$  de  $V$ . Sendo assim, em vez da representação entre chaves, iremos indicar uma rotação de  $G$  pela notação vetorial

$$\Theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-1}),$$

onde  $\theta_i = (n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{i3})$  é a rotação de  $v_i$  de  $V$ .

Fixada uma rotação  $\Theta$  de  $G$ , o mergulho de  $G$  munido desta rotação fica bem determinado no sentido de que o mesmo pode ser realizado de modo único sobre uma determinada superfície  $\Omega$ . O grafo  $G$  munido da rotação  $\Theta$  será denotado por  $G(\Theta)$ . O mergulho de  $G$ , munido da rotação  $\Theta$ , sobre a superfície  $\Omega$  será representado por

$$G(\Theta) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i \quad (4.1)$$

onde  $k$  é o número de regiões da partição e  $R_{\alpha_i}^i$  é a  $i$ -ésima região da partição com  $\alpha_i$ -lados.

Uma região  $R_{\alpha_i}^i$  de  $\cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$  será representada pela sequência  $\gamma_i = (x_i, x_2, \dots, x_\alpha)$  denominada de *sequência orbital*. Um mergulho é identificado quando o conjunto de sequências orbitais é determinado. O conjunto das sequências orbitais de um mergulho é, portanto, o conjunto das  $k$  sequências orbitais  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  de comprimentos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , respectivamente, e será denotado por  $\Gamma$ .

Ao identificarmos um mergulho de  $G$  sobre  $\Omega$ , o mergulho dual de  $G$  é imediatamente identificado. Pela Definição 2.4.12 o dual do mergulho (4.1) é dado por

$$G'(\Theta') \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{j=1}^p R_{\alpha_j}^j, \quad (4.2)$$

onde  $\alpha_j = \deg v_j$  e  $R_{\alpha_j}^j$  é a região do dual que contém  $v_j$  em seu interior. Como o mergulho (4.2) define uma partição sobre  $\Omega$  em  $p$  regiões, isto é, uma modulação  $kM$  sobre  $\Omega$ , o mergulho dual também define uma modulação  $pM$  sobre  $\Omega$  para uma constelação de  $p$  sinais, denominada de *modulação dual* de  $kM$ . Consequentemente, cada mergulho sobre uma superfície sem bordo define duas modulações,  $kM$  e sua dual  $pM$ . Para efeito de simplificação, a partição  $\cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$  de um mergulho de  $G$  será representada através da forma

$$R_{a_1, a_2, \dots, a_k}.$$

Identificada uma modulação  $kM$  vinda de um mergulho de  $G$ , o seu dual  $pM$  é facilmente identificável. O processo de identificação da modulação  $kM$  será dado a seguir na forma de um algoritmo. Evidentemente, o processo de identificação é idêntico ao dos mergulhos de  $G$ .

Dado um grafo  $G(p, q)$ , o processo de identificação das modulações  $kM$ 's vindas dos mergulhos de  $G$  consistem de várias etapas. A seguir, mostraremos como este processo é realizado.

### 4.1.1 Identificação dos mergulhos

A identificação do conjunto das superfícies de um grafo  $G$  depende somente dos gêneros  $\gamma$  e  $\gamma_M$  dos mergulhos mínimos e máximos, respectivamente. Pelo Teorema 2.4.2,  $G$  possui mergulhos em toda superfície orientável  $kT$  para todo  $\gamma \leq k \leq \gamma_M$ . Conhecidos os mergulhos

mínimo  $\gamma$  e máximo  $\gamma_M$  orientável e os mergulhos mínimo  $\bar{\gamma}$  e máximo  $\bar{\gamma}_M$  não-orientáveis, o conjunto das superfícies são dadas imediatamente por

$$\mathbb{S}(G) = \{\gamma T, (\gamma + 1)T, (\gamma + 2)T, \dots, \gamma_M T\} \quad (4.3a)$$

$$\bar{\mathbb{S}}(G) = \{\bar{\gamma}P, (\bar{\gamma} + 1)P, (\bar{\gamma} + 2)P, \dots, \bar{\gamma}_M P\}. \quad (4.3b)$$

Mergulhos mínimos e máximos de muitas famílias de grafos são conhecidos ([30]). Quanto ao grafo completo  $K_5$  e ao grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ , são conhecidos os mergulhos mínimo e máximo orientável e o mergulho mínimo não-orientável. Como iremos fazer apenas uma estimativa do caso não-orientável, é suficiente conhecer o mergulho mínimo deste.

Nos casos do cubo e octaedro os mergulhos mínimos orientáveis são fáceis de serem determinados, condição suficiente para identificar as modulações oriundas destes grafos.

Conhecer as superfícies não é suficiente para identificar a modulação, é preciso conhecer o tipo de partição de cada superfície, esta tem um número constante de regiões. O parâmetro importante usado na identificação do número de regiões da partição de uma superfície é o número de regiões do mergulho mínimo. Conhecido  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$ , o número de regiões  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  dos mergulhos mínimos orientável e não-orientável, são dados pela característica de Eüler (2.5)

$$\chi(\gamma T) = p - q + \alpha \quad (4.4a)$$

$$\chi(\bar{\gamma}T) = p - q + \bar{\alpha}. \quad (4.4b)$$

No caso de uma estimativa em que o mergulho mínimo de  $G(p, q)$  não é conhecido, pode-se tomar  $\alpha = 2q/t$ , onde  $R_t$  é a região com o menor número de lados, usar (4.4a) para obter  $\chi(\gamma T)$ , e as igualdades (2.6), (4.4a) e (4.4b) para obter as relações

$$\chi(\gamma T) = 2 - 2\gamma \Rightarrow 2 - 2\gamma = p - q + \alpha,$$

$$\chi(\bar{\gamma}P) = 2 - \bar{\gamma} \Rightarrow 2 - \bar{\gamma} = p - q + \bar{\alpha}.$$

Conseqüentemente, os gêneros para o mergulhos mínimos orientável e não-orientáveis do grafo  $G(p, q)$  são dados por

$$\gamma = 1 - \frac{p - q + \alpha}{2} \quad (4.5a)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1 - p + q - \bar{\alpha}}{2}. \quad (4.5b)$$

Pela igualdade (4.10), o número de regiões  $\alpha$  do mergulho mínimo ocorre no caso em que  $i = 0$ . Um mergulho máximo orientável possui duas regiões, se  $\alpha$  é par, e uma região, se  $\alpha$  é ímpar. No caso não-orientável o mergulho máximo tem uma região. Como o mergulho mínimo tem  $\alpha$  regiões e encontra-se sobre uma superfície de gênero  $\gamma$ , pelas condições de mergulhos maximais, os mergulhos orientáveis de  $G(p, q)$ , no caso em que  $\alpha$  é par, encontram-se sobre as seguintes superfícies e partições

$$\begin{aligned} \gamma T \equiv \cup_{i=1}^{\alpha} R_{\alpha_i}^i, \quad (\gamma + 1)T \equiv \cup_{i=1}^{\alpha-2} R_{\alpha_i}^i, \dots, \quad (\gamma + j)T \equiv \cup_{i=1}^{\alpha-2j} R_{\alpha_i}^i, \dots, \\ (\gamma + \alpha/2 - 1)T \equiv \cup_{i=1}^2 R_{\alpha_i}^i, \end{aligned} \quad (4.6)$$

e no caso em que  $\alpha$  é ímpar, têm-se que:

$$\gamma T \equiv \cup_{i=1}^{\alpha} R_{\alpha_i}^i, (\gamma+1) T \equiv \cup_{i=1}^{\alpha-2} R_{\alpha_i}^i, \dots, (\gamma+j) T \equiv \cup_{i=1}^{\alpha-2j} R_{\alpha_i}^i, \dots, (\gamma + (\alpha-1)/2) T \equiv R_{\alpha_1}^1. \quad (4.7)$$

Por motivos análogos deduzimos que mergulhos não-orientáveis de  $G(p, q)$  são da forma

$$\bar{\gamma} P \equiv \cup_{i=1}^{\bar{\alpha}} R_{\alpha_i}^i, \dots, (\bar{\gamma}+j) P \equiv \cup_{i=1}^{\bar{\alpha}-j} R_{\alpha_i}^i, \dots, (\bar{\gamma} + \bar{\alpha} - 1) P \equiv R_{\alpha_1}^1. \quad (4.8)$$

Segue de (4.6), (4.7) e (4.8), que o conjunto de superfícies que contém projetos de modulações  $kM$ , vindas dos mergulhos de  $G$ , são dados por

$$\mathbb{S}(G) = \begin{cases} \{\gamma T(\alpha M), (\gamma+1) T(\alpha-2) M, \dots, (\gamma + \frac{\alpha}{2} - 1) T(2M)\}, & \alpha=2k \\ \{g T(\alpha M), (g+1) T(\alpha-2) M, \dots, (g + \frac{\alpha-1}{2}) T(1M)\}, & \alpha=2k+1 \end{cases} \quad (4.9a)$$

$$\bar{\mathbb{S}}(G) = \{ \{\bar{\gamma} P(\bar{\alpha} M), (\bar{\gamma}+1) P((\bar{\alpha}-1) M), \dots, (\bar{\gamma} + \bar{\alpha} - 1) P(1M)\} \}. \quad (4.9b)$$

onde  $\Omega(kM)$  indica que as modulações sobre as superfícies  $M$  são para constelações de  $k$  sinais,  $u$  é o número de regiões do mergulho mínimo, o qual pode ser obtido pela igualdade (4.4a) ou (4.4b), desde que  $\Omega$  seja conhecida.

A modulação  $1M$  corresponde aos mergulhos maximais com uma região. Não é usada em sistemas de comunicações, pois trata-se de uma modulação para um sinal. A sua presença nos conjuntos (4.9a) e (4.9b) é somente para confirmar a sua existência. Observamos que quando  $u$  é ímpar, no caso orientável, a menor modulação existente é do tipo  $3M$ , isto é, para constelação de 3 sinais. No caso não-orientável, existe a modulação binária  $2M$ , como também existe no caso orientável em que  $u$  é um número par.

### 4.1.2 Identificações das partições

Dado um grafo  $G(p, q)$ , seja  $\Xi(G)$  o conjunto das partições sobre superfícies dos mergulhos de 2-células de  $G$ . A princípio, consideraremos que  $\Xi(G)$  é o conjunto de todas as possíveis partições, independente de que esta exista ou não. Em notação matemática temos

$$\Xi(G) = \{R_{a_1, a_2, \dots, a_k} : G(p, q) \hookrightarrow \Omega \equiv R_{a_1, a_2, \dots, a_k} \text{ é um 2-células} \}.$$

Um modo prático de obter todas as partições de  $\Xi(G)$  é conservar a relação de desigualdades  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ . O número de regiões  $k$  de um mergulho mínimo depende da região com o menor número de lados e do parâmetro  $2q$ . O valor de  $k$  e tipos de regiões variam com o tipo de grafo e será determinado para os grafos abordados neste trabalho.

Seja  $R_\alpha$  a região com o menor número de lados de um mergulho de  $G$  e  $2q = u\alpha + r$ ,  $0 \leq r < \alpha$ . Pelas igualdades em (2.6), as modulações  $kM$ 's em superfícies sem bordos são definidas pelas partições:

$$R_{a_1, a_2, \dots, a_{u-2i}}; \sum_{j=1}^{u-i} a_j = 2q, \Omega \in \begin{cases} \mathbb{S}(G) \Rightarrow \left\{ i \in \left\{ 0, 1, \dots, \frac{u-2}{2} \right\}, \text{ se } u = 2k \right. \\ \left. i \in \left\{ 0, 2, \dots, \frac{u-1}{2} \right\}, \text{ se } u = 2k+1 \right. \\ \bar{\mathbb{S}}(G) \Rightarrow i \in \{0, 1, \dots, u-1\}. \end{cases} \quad (4.10)$$

As condições de (4.10), além de identificar as partições que definem as modulações  $kM$ 's sobre superfícies compactas, são suficientes para identificar as modulações em superfícies com bordos.

**Definição 4.1.1** *Seja  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$  um mergulho de 2-células e suponha que  $\Xi_j^k = \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$ . Chamaremos de conjunto gerado do mergulho  $G \hookrightarrow \Omega$ , denotado por  $\Omega(\Xi_k)$ , o conjunto,*

$$\Omega(\Xi_k) = \{\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k\} \quad (4.11)$$

tal que, para todo  $0 \leq \mu \leq k$ ,  $\Omega_\mu$  é a superfície com  $\mu$  componentes de bordos que possui um mergulho com  $k - \mu$  regiões.

Por exemplo, se  $\Xi_6^6 = 4R_3 2R_4$  é composto por 6 regiões, então  $G$  possui mergulhos no conjunto de superfícies

$$\Omega(\Xi^6) = \{\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_6\}$$

e são mergulhos dos tipos

$$G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i, G \hookrightarrow \Omega_1 \equiv \cup_{i=1}^{k-1} R_{\alpha_i}^i, G \hookrightarrow \Omega_2 \equiv \cup_{i=1}^{k-2} R_{\alpha_i}^i, \dots, G \hookrightarrow \Omega_k \equiv G. \quad (4.12)$$

O processo de identificação de mergulhos com bordos consiste em tomar cada partição  $\cup_{i=1}^{k-\mu} R_{\alpha_i}^i$  do mergulho  $G \hookrightarrow \Omega_\mu \equiv \cup_{i=1}^{k-\mu} R_{\alpha_i}^i$  e determinar todas as partições possíveis de  $k - \mu$  regiões através das combinações possíveis destas regiões.

É evidente que se  $\Xi^k$  é uma partição de uma superfície  $\Omega$  em  $k$  regiões. Pelo mergulho de  $G$ , então  $\Omega(\Xi^k)$  possui  $k + 1$  superfícies, a própria superfície  $\Omega$ , e  $k$  superfícies com bordos  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ . As modulações orientáveis e não-orientáveis, principalmente as sem bordos, serão identificadas através da Definição 4.1.1. Neste processo, para cada superfície  $\Omega_\mu$  do conjunto (4.11) é determinado todas as possíveis partições satisfazendo as condições dos mergulhos em (4.12).

### 4.1.3 Identificação das rotações

Cada rotação  $\Theta$  do grafo  $G(p, q)$  está associada a uma modulação  $kM$ . Identificar todas as  $kM$  de  $G$ , equivale identificar todos os mergulhos de  $G$ . Se  $\Theta(G)$  é o conjunto de todas as rotações de  $G$ , então este número é dado por

$$|\Theta(G)| = \prod_{v \in V(G)} (\deg v - 1)!. \quad (4.13)$$

Para determinar as  $\prod_{v \in V(G)} (\deg v - 1)!$  rotações de  $G(p, q)$ , rotulamos os  $p$  vértices com os elementos de  $\mathbb{Z}_{p-1}$ , identificamos, para cada  $i \in \mathbb{Z}_{p-1}$ , a rotação  $\theta_i = (i_1, i_2, \dots, i_{\deg v_i})$  do vértice  $v_i$ , e a partir desta determinamos o conjunto das rotações distintas do vértice  $v_i$ , denotado por  $\Phi_i$ .

**Proposição 4.1.2** *O número de rotações distintas de  $v_i \in G$  é dado por*

$$|\theta_i| = (\deg v - 1)!. \quad (4.14)$$

**Demonstração.** Seja  $\theta_i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  uma rotação de  $v_i$ . As  $n$  rotações cíclicas de  $\theta_i$

$$\theta_i^0 = (i_1, i_2, \dots, i_n), \theta_i^1 = (i_n, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}), \dots, \theta_i^{n-1} = (i_2, i_3, \dots, i_n, i_1)$$

produzem o mesmo efeito quando se trata de mergulho de  $G$  e  $\theta_i$  contém  $n!$  permutações distintas. Então segue a igualdade (4.14). ■

**Definição 4.1.3** As rotações  $\theta_1$  e  $\theta_2$  do vértice  $v_i$  são ditas rotações distintas se, e somente se, pertencem a conjuntos de ciclos distintos.

As rotações  $\theta_1 = (0, 1, 3, 2)$  e  $\theta_2 = (0, 1, 2, 3)$  são distintas enquanto  $\theta_3 = (2, 0, 1, 3)$  e  $\theta_4 = (3, 2, 0, 1)$ , não. Observe que  $\theta_4 = \theta_3^1$ . Neste caso,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  produzem mergulhos distintos, o que não ocorre com  $\theta_3$  e  $\theta_4$ , caso sejam usadas para compor o sistema de rotações de um grafo.

No caso de um grafo  $G(p, q)$ , o número de rotações distintas dos vértices de  $G$  é dado pelo seguinte

**Corolário 4.1.4** O número de rotações distintas dos vértices de  $G(p, q)$  é dado por

$$|\Psi| = \sum_{i=0}^{p-1} (\deg v_i - 1)! \quad (4.15)$$

**Demonstração.** Pela Proposição 4.1.2, segue que

$$|\Theta(G)| = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\deg v_i!}{\deg v_i} = (\deg v_i - 1)!,$$

o que mostra o desejado. ■

Neste caso, o conjunto das rotações dos vértice de  $G$ ,  $\Psi = \{\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{p-1}\}$ , irá compor as rotações de  $G$ , isto é, cada rotação de  $G$  é da forma

$$\Theta = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{p-1}\}, \theta_i \in \Psi_i.$$

Portanto  $\Theta(G)$ , o conjunto das rotações de  $G$ , é dado pelo produto cartesiano  $\Psi_0 \times \Psi_1 \times \dots \times \Psi_{p-1}$ , por isso, o número de elementos de  $\Theta(G)$  é como na igualdade (4.13)

Um algoritmo simples de identificação dos elementos de  $\Psi$  é dado a seguir.

**Algoritmo 4.1.5** Dada a rotação  $\theta_1 = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  de  $v_i$  em  $G(p, q)$ , seja  $\bar{\theta}_1 = (i_n, i_{n-1}, \dots, i_1)$  a rotação inversa de  $\theta_1$ . Então:

1. Determine o conjunto dos  $n$  ciclos de  $\theta_i$  e  $\theta_i^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \theta_1^n &= \{\theta_1^0(i_1, i_2, \dots, i_n), \theta_1^1(i_n, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}), \dots, \theta_1^{n-1}(i_2, i_3, \dots, i_n, i_1)\} \\ \bar{\theta}_1^n &= \{\bar{\theta}_1^0(i_n, i_{n-1}, \dots, i_1), \bar{\theta}_1^1(i_1, i_n, i_{n-1}, \dots, i_2), \dots, \bar{\theta}_1^{n-1}(i_{n-1}, \dots, i_1, i_n)\} \end{aligned}$$

e considere o conjunto

$$\Psi_i^1 = \{\theta_1^0, (\theta_1^{-1})^0\}.$$

2. Se  $|\Psi_i| = 2$ , então  $\Psi_i$  é o conjunto de rotações distintas de  $v_i$ , caso contrário, escolha  $\theta_2 = (i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n-1})$  e determine o conjunto dos  $n$  ciclos de  $\theta_2$  e  $\theta_2^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \theta_2^n &= \{\theta_2^0(i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n-1}), \theta_2^1(i_{n-1}, i_1, i_2, \dots, i_n), \dots, \theta_2^{n-1}(i_2, i_3, \dots, i_{n-1}, i_1)\} \\ \bar{\theta}_2^n &= \{\bar{\theta}_2^0(i_{n-1}, i_n, \dots, i_1), \bar{\theta}_2^1(i_1, i_{n-1}, i_n, \dots, i_2), \dots, \bar{\theta}_2^{n-1}(i_n, i_{n-2}, \dots, i_1, i_{n-1})\} \end{aligned}$$

e considere o conjunto

$$\Psi_i^2 = \{\theta_1^0, \bar{\theta}_1^0, \theta_2^0, \bar{\theta}_2^0\}.$$

3. Se  $|\Psi_i| = 4$ , então  $\Psi_i$  é o conjunto de rotações de  $v_i$ , caso contrário, permuta os vértices  $i_{n-2}$  e  $i_{n-1}$  de  $\theta_1$  para obter  $\theta_3 = (i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_{n-2}, i_n)$ , aplique o mesmo procedimento da Etapa 2 e considere o conjunto

$$\Psi_i^3 = \{\theta_1^0, \bar{\theta}_1^0, \theta_2^0, \bar{\theta}_2^0, \theta_3^0, \bar{\theta}_3^0\}.$$

Se  $\Psi_i^3$  não for o sistema completo de rotações distintas de  $v_i$ , continue com processo até obter  $\Psi_i$ .

Estamos considerando  $G$  com número finito de vértices e de lados, logo o processo do Algoritmo 4.1.5 é finito e  $\Psi_i$  pode ser determinado. Como teste, identificamos, através do Algoritmo 4.1.5, o conjunto  $\Psi$  de rotações do grafo  $K_7$ , o qual é formado por

$$|\Psi(K_7)| = \sum_{i=0}^{p-1} (\deg v_i - 1)! = \sum_{i=0}^6 (6 - 1)! = 840 \text{ rotações.}$$

Nos passos do algoritmo 4.1.5 foi mencionado, para efeito de simplificação, somente as permutações de dois elementos consecutivos da rotação  $\theta_1$ . Este procedimento não é suficiente para determinar todas as rotações distintas de  $v_i$ , o processo deve continuar para dois elementos não consecutivos quaisquer e, se necessário, permutar 3, 4,  $r, \dots$ , elementos de  $\theta_1$  até obter  $\Psi_i$ . A fórmula (4.15) é o critério que irá estabelecer com precisão os elementos de  $\Psi_i$  e, conseqüentemente, todas as rotações de vértice de conjunto  $\Psi$ .

A implementação do algoritmo 4.1.5 é relativamente simples. Quando os grafos são pequenos, como é o caso dos grafos  $K_4$ ,  $K_5$  e  $K_{3,3}$ , os sistemas de rotações são facilmente determinados. No caso de grandes grafos tais como  $K_6$ ,  $K_7$  e  $K_{5,5}$ , o algoritmo 4.1.5 é de extrema utilidade devido a grande quantidade de rotações de um vértice destes grafos.

#### 4.1.4 Identificação das modulações

Esta etapa consiste em determinar a existência, de fato, das modulações distintas vindas do mergulho de  $G(p, q)$ . Nas Subseções 4.1.2-4.1.3 as identificações são genéricas, conhecemos as possíveis partições, o conjunto das superfícies e suas partições e o conjunto das rotações  $\Theta(G)$  que irão fornecer modulações distintas. Este conjunto é quem vai gerar as modulações. Os modelos de  $kM$  dependem deles e do tipo de orientabilidade da superfície.

Para o caso orientável, o algoritmo 2.6.1 gera todos os modelos possíveis de  $kM$ . Primeiro, é gerado um arquivo com os sistemas de rotações de  $G$ ,  $\Theta(G)$ , em seguida, este é processado e fornece todos os mergulhos de  $G$ , disponibilizando a rotação, a partição, na forma ordenada por número de regiões, visando facilitar a identificação das classes de mergulhos e o respectivo conjunto de seqüências orbitais. Por exemplo, para uma entrada composta pela rotação  $\Theta = A_0 A_1 \dots A_{p-1}$ ,  $A_0 \in \Psi_i$ , é criada a matriz de rotação

$$\Theta = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & x_{03} & \cdots & x_{0, \deg v_0} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1, \deg v_1} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2, \deg v_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{p-1,1} & x_{p-1,2} & x_{p-1,3} & \cdots & x_{p-1, \deg v_{p-1}} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

onde  $\theta_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i, \deg v_i})$  é a rotação de  $v_i$ . A partir da matriz  $\Theta$ , o Algoritmo fornece, como saída, os seguintes elementos:

- (a) A sequência de rotulamento  $A_0 A_1 \dots A_{p-1}$  correspondente à rotação  $\Theta$ ;
- (b) A sequência numérica  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$  correspondente à partição da modulação  $kM$  indicando que é uma partição da forma  $R_{\alpha_1}^1 R_{\alpha_2}^2 \dots R_{\alpha_k}^k$ ;
- (c) As sequências numéricas

$$\gamma_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{\alpha_1}), \gamma_2 = (\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{\alpha_2}), \dots, \gamma_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \dots, \gamma_{\alpha_k})$$

denotadas de *sequências orbitais*, correspondentes as regiões de indecisão de  $kM$ , sobre uma superfície  $\Omega$ . A região de decisão  $\gamma_i$  é definida pela sequência de vértices  $v_{\gamma_{i1}}, v_{\gamma_{i2}}, \dots, v_{\gamma_{i\alpha_i}}$  que pertencem a fronteira de  $R_{\alpha_i}^i$ ,  $\partial R_{\alpha_i}^i$ , quando esta é percorrida, a partir de  $v_{\gamma_{i1}}$ , no sentido anti-horário.

Das saídas (a)-(c) do algoritmo 2.6.1 e conjuntos (4.6)-(4.8), concluímos que a modulação  $kM$  vinda do mergulho de  $G$ , munido da rotação  $\Theta$  em (4.16), é da forma

$$G(\Theta) \hookrightarrow \Omega \equiv R_{\alpha_1}^1 R_{\alpha_2}^2 \dots R_{\alpha_k}^k \quad (4.17)$$

onde  $R_{\alpha_1}^1, R_{\alpha_2}^2, \dots, R_{\alpha_k}^k$  são regiões de indecisão de  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  lados, definidas pelas sequências orbitais  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ . Na maioria das vezes, a partição do mergulho 4.17 é representada na forma simplificada através da notação  $\cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$ .

### 4.1.5 Identificação das classes de modulações

A execução das etapas de identificação das Subseções 4.1.2-4.1.4 é parte fundamental do processo de identificação de modulações  $kM$  sobre superfície. Cada relação (4.17) identificada implica na existência de duas modulações,  $kM$  e a dual  $pM$  sobre  $\Omega$ . Conhecido o sistema de rotações  $\Theta$ , a superfície  $\Omega$ , as regiões  $R_{\alpha_i}^i$ 's e suas respectivas sequências orbitais, podemos investir na construção do modelo planar da modulação  $kM$ , tendo a certeza de que este existe.

O modelo planar da modulação dual  $pM$  pode ser obtido, independentemente ou não, do modelo planar de  $kM$ . Mas é mais fácil obtê-lo a partir do modelo de  $kM$ . Caso o modelo de  $pM$  seja obtido de forma independente, é possível contruir o modelo  $kM$ , uma vez que este é o dual de  $pM$ .

Seja qual for a escolha por um dos projetos da modulação, as construções dos modelos planares de  $kM$  e  $pM$  são absolutamente necessárias. Se  $kM$  é escolhido, os  $k$  sinais da constelação podem ser considerados como os vértices do dual de  $G$ . Se  $pM$  é a escolha, os  $p$  sinais da constelação podem ser considerados como os vértices de  $G$ . Utilizar a relação com o dual tem sido providencial para identificar modulações com desempenhos diferentes.

O fato é que existem muitos mergulhos com o mesmo tipo de partição. Se consideradas todas com o mesmo desempenho, seria relativamente pequeno o número de modulações distintas, quando comparado com o número de mergulhos de  $G$ . No entanto, foi mostrado que

modulações  $kM$ 's com o mesmo tipo de partição possuem desempenhos diferentes, quando vem de emaranhados distintos de mergulhos de  $G$  ([15], [18]). Como consequência, o número de modulações distintas de  $G$  é bem maior do que o número de partições distintas. Então devemos identificar as modulações distintas existentes no conjunto de modulações  $kM$ 's com o mesmo tipo de partição. Identificadas as modulações com desempenhos distintos de todas as partições de  $G$ , encerramos então, o processo de identificação das modulações de  $G$ .

A prova de que modulações  $kM$ 's vindas de emaranhados distintos possuem desempenhos diferentes é topológica, envolve o conceito de canal associado e isomorfismo de grafos. Até o presente, somente algumas modulações torodais foram implementadas [3] e todas oriundas de mergulhos simples (não-emaranhados). As modulações não serão analisadas através de simulações, a meta é a identificação de modulações. Quanto maior for o número de modulações distintas identificadas, melhor será o uso do conjunto dos mergulhos de um grafo, como projetos de modulações sobre superfícies.

Classificar as modulações quanto ao aspecto de emaranhados, já nos dá um número maior de modulações distintas, entretanto, o objetivo é identificar o maior número possível de modulações distintas vindas de mergulhos de um grafo. Para tanto, iremos utilizar a *distância de Lee* entre os emaranhados estabelecida na Definição 2.4.9.

**Definição 4.1.6** *Seja  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$  um mergulho de 2-células. Chamamos de sequência de Lee de  $\gamma$ , a sequência  $\eta_{\text{Lee}}(\gamma) = (d_{\text{Lee}}^1, d_{\text{Lee}}^2, \dots, d_{\text{Lee}}^\mu)$ , onde  $d_{\text{Lee}}^h$  é a distância de Lee do  $h$ -ésimo emaranhado de  $\gamma$ .*

Segue da notação da Definição 2.4.6, que o comprimento  $\mu$  da sequência de Lee  $\eta_{\text{Lee}}(\gamma)$  é dado por  $\mu = \varpi + \sigma$ , onde  $\varpi$  é o grau de emaranhado pontual de  $\gamma$  e  $\sigma$  é o grau de emaranhado linear de  $\gamma$ .

Uma região  $R_{\alpha_i}^i$  pode ser *simples* (sem emaranhados), um *emaranhado puro*, quando só possui um tipo de emaranhado (pontual ou linear) ou um *emaranhado misto*, quando contém emaranhados pontuais e lineares.

**Observação 4.1.7** *A sequência de Lee de uma região  $R_{\alpha_i}^i$  será indicada por:*

$$\eta_{\text{Lee}}(\gamma_i) = \begin{cases} 0, & \text{se } R_{\alpha_i}^i \text{ é simples} \\ (d_{\text{Lee}}^1, d_{\text{Lee}}^2, \dots, d_{\text{Lee}}^\mu), & \text{se } R_{\alpha_i}^i \text{ é pura} \\ (d_{\text{Lee}}^1, \bar{d}_{\text{Lee}}^2, \dots, d_{\text{Lee}}^\mu), & \text{se } R_{\alpha_i}^i \text{ é mista,} \end{cases} \quad (4.18)$$

onde  $d_{\text{Lee}}^1$  indica a distância do emaranhado pontual e  $\bar{d}_{\text{Lee}}^2$  indica a distância do emaranhado linear.

A Tabela 4.1.1 mostra exemplos dos tipos distintos de sequências orbitais e suas respectivas classificações quanto ao grau de emaranhados.

Na Tabela 4.1.1, têm-se: o emaranhado pontual no vértice  $v_i$  é indicado por  $i$ ; o emaranhado linear sobre o lado  $(v_i, v_j)$  é indicado por  $ij$ ; a linha Distância de Lee indica as respectivas distâncias dos emaranhados e; as Sequências de Lee indicam as respectivas distâncias dos emaranhados, à medida que estes ocorrem na sequência orbital (o emaranhado pontual é destacado com um número barrado superiormente).

Seq. orbital	$\gamma_1(02134)$		$\gamma_2(1012432)$		$\gamma_3(013531024)$		$\gamma_4(01342103124)$	
Graus	$\varpi = 0$	$\sigma = 0$	$\varpi = 2,$	$\sigma = 0$	$\varpi = 0$	$\sigma = 2$	$\varpi = 1$	$\sigma = 4$
Emaranhados	–	–	1, 2	–	–	01, 13	4	01, 13, 42, 21
Dist. de Lee	–	–	2, 3	–	–	3, 2	4	4, 5, 4, 3
Seq. de Lee	0		(2, 3)		(3, 2)		(4, 5, $\bar{4}$ , 4, 3)	
Emaranhado	simples		pontual (puro)		linear (puro)		misto	

Tabela 4.1.1: Classificação de mergulhos emaranhados

Uma modulação  $kM$  será identificada a partir de sua sequência de Lee. Utilizaremos a notação  $\eta_{Lee}^s(\gamma)$  para representar a  $s$ -ésima rotação cíclica da sequência de Lee  $\eta$  dos emaranhados de  $\gamma$ . Cada elemento de  $\eta$  é deslocado  $s$  posições à sua direita. Por exemplo, no caso da sequência  $\gamma_4$  da Tabela 4.1.1, as rotações cíclicas de  $\eta_{Lee}(\gamma_4)$  são dadas por

$$\begin{aligned}\eta_{Lee}^0 &= (4, 5, \bar{4}, 4, 3), \quad \eta_{Lee}^1 = (3, 4, 5, \bar{4}, 4), \quad \eta_{Lee}^2 = (4, 3, 4, 5, \bar{4}), \\ \eta_{Lee}^3 &= (\bar{4}, 4, 3, 4, 5), \quad \eta_{Lee}^4 = (5, \bar{4}, 4, 3, 4), \quad \eta_{Lee}^5 = (4, 5, \bar{4}, 4, 3).\end{aligned}$$

Note que  $\eta_{Lee}^5 = \eta_{Lee}^0$ ,  $\eta_{Lee}^6 = \eta_{Lee}^1$ ,  $\eta_{Lee}^7 = \eta_{Lee}^2$ , e assim por diante.

**Observação 4.1.8** *Se  $\eta_{Lee} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t)$  e  $\eta_{Lee}^{-s}$  é  $s$ -ésima rotação inversa de  $\eta_{Lee}^s$ , então  $\eta_{Lee}^s = \eta_{Lee}^{-s}$  se, e somente se,  $s \equiv 0 \pmod{\eta_t}$ .*

Segue, da Observação 4.1.8, que emaranhados com sequências de Lee distintas podem caracterizar modulações com desempenhos diferentes. Por exemplos, os dois casos seguintes serão considerados como emaranhados distintos

$$\eta_{Lee}^1 = (3, 4, 5, \bar{4}, 4) \neq (4, \bar{4}, 5, 4, 3) = \eta_{Lee}^{-1} \text{ e } \eta_{Lee}^2 = (4, 3, 4, 5, \bar{4}) \neq (\bar{4}, 5, 4, 3, 4) = \eta_{Lee}^{-2}.$$

As desigualdades acima fornecerão um número maior de modulações  $kM$ 's de desempenhos diferentes, do que o tipo de emaranhados, como fator de diferenciação de desempenhos de modulações  $kM$ 's.

**Definição 4.1.9** *Sejam  $kM$  e  $kN$  modulações sobre  $\Omega$  de partições idênticas de mergulhos de  $G$ . Diremos que  $kM$  e  $kN$  pertencem à mesma classe de modulação se, e somente se, para cada sequência  $\gamma$  de  $kM$ , existe  $\gamma'$  em  $kN$  tal que  $\eta_{Lee}(\gamma) = \eta_{Lee}^s(\gamma')$ , caso contrário, diremos que  $kM$  e  $kN$  pertencem a classes distintas de modulações. Se  $kM$  e  $kN$  pertencem a mesma classe, escrevemos  $kM \sim kN$ . O conjunto de todas as modulações que estão na mesma classe de  $kM$  será denominada de classe  $k\bar{M}$ . Seja  $\Xi(G)$  o conjunto de todas as modulações  $kM$  vindas de mergulhos de  $G$ , denominamos de conjunto quociente de  $\Xi(G)$  pela relação de equivalência  $\sim$  o conjunto  $\Xi(G)/\sim$  das classes  $k\bar{M}$  de  $\Xi(G)$ . Em notação matemática, temos*

$$k\bar{M} = \{kN \in \Xi(G) : kN = k\bar{M}\} \quad (4.19a)$$

$$\Xi(G)/\sim = \cup_{i=1}^n k\bar{M}. \quad (4.19b)$$

O objetivo é identificar todas as classes  $k\overline{M}$ , enumerar todas rotações de  $kN$  que compõem  $k\overline{M}$  e determinar o número de elementos de  $k\overline{M}$ , nos casos em que o número de mergulhos de  $G$  não é muito grande. Dos grafos abordados neste trabalho, somente  $K_{4,4}$  possui um número muito grande de mergulhos, o que torna difícil a identificação das classe de modulações  $k\overline{M}$ 's de  $\Xi(G)/\sim$  e inviável a relação de todas as suas rotações.

O grande número de mergulhos existentes  $\Xi(G)$  torna impraticável o processo de identificação de determinadas classes de  $\Xi(G)/\sim$ , caso seja usado, como fonte de inspeção, a saída do algoritmo 2.6.1. Teríamos que vasculhar cada mergulho de  $\Xi(G)$ , classificar os emaranhados do mesmo modo como foi feito na Tabela 4.1.1, identificar cada classe  $k\overline{M}$  de  $\Xi(G)/\sim$ , escolher e descrever o representante de classe e relacionar todas as rotações de  $k\overline{M}$ .

A solução encontrada para resolver o problemas da identificação de modulações com desempenhos distintos, foi criar um algoritmo que classificasse os emaranhados de cada  $kM$  de  $\Xi(G)$  e fornecesse a sequência de Lee de cada sequência orbital do mergulho associado a  $kM$ .

**Algoritmo 4.1.10 (Classificador de Emaranhados)** *Seja  $G(\Theta) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$  um mergulho de 2-células. Para toda sequência orbital  $\gamma_i = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\alpha_i})$  de  $R_{\alpha_i}^i$  em  $\cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$ , faça:*

1. Se para cada  $j \in \{1, 2, \dots, \alpha - 1\}$ , existe  $\gamma_k, \gamma_{k+1} \subset \gamma_i$  tal que  $\gamma_k = \gamma_{j+1}$  e  $\gamma_{k+1} = \gamma_j$ , determine:

$$d_{\text{Lee}}(\gamma_j, \gamma_{j+1}) = \begin{cases} \min\{k - j - 1, \alpha_i - k + j - 1\}, & \text{se } j + 1 < k < \alpha_i \\ \min\{j - 1, \alpha_i - j - 1\}, & \text{se } k = \alpha_i, \end{cases}$$

escreva a sequência de emaranhados lineares de  $\gamma_i$

$$(\gamma_{j_1} \gamma_{j_1+1}, \gamma_{j_2} \gamma_{j_2+1}, \dots, \gamma_{j_\sigma} \gamma_{j_\sigma+1}), \text{ com } j_1 < j_2 < \dots < j_\sigma, \quad (4.20)$$

e a sequência de distâncias de Lee dos emaranhados lineares de  $\gamma_i$

$$(d_{\text{Lee}}(\gamma_{j_1} \gamma_{j_1+1}), d_{\text{Lee}}(\gamma_{j_2} \gamma_{j_2+1}), \dots, d_{\text{Lee}}(\gamma_{j_\sigma} \gamma_{j_\sigma+1})); \quad (4.21)$$

2. Para cada  $h_i, t_i \in \{1, 2, \dots, \alpha_i\}$  tal que:  $h_i < t_i$ ,  $h_i, t_i \notin \{\gamma_{i_s}, \gamma_{i_s+1}, \gamma_{i_t}, \gamma_{i_t+1}\}$ ,  $\gamma_{h_i} = \gamma_{t_i}$ , escreva a sequência de emaranhados pontuais de  $\gamma_i$

$$(\gamma_{h_1}, \gamma_{h_2}, \dots, \gamma_{h_\varpi}), \text{ com } h_1 < h_2 < \dots < h_\varpi \quad (4.22)$$

e a sequência de distâncias de Lee dos emaranhados lineares de  $\gamma_i$

$$(d_{\text{Lee}}(\gamma_{h_1}), d_{\text{Lee}}(\gamma_{h_2}), \dots, d_{\text{Lee}}(\gamma_{h_\varpi})); \quad (4.23)$$

3. Dados os conjuntos  $J = \{j_1, j_2, \dots, j_\sigma\}$  e  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_\varpi\}$ , escreva a sequência dos elementos de  $J$  e  $H$

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\varpi+\sigma}) : x_i \in J \text{ ou } x_i \in H \text{ e } x_i < x_{i+1}, \forall i \in \{1, 2, \dots, \varpi + \sigma - 1\}$$

e a sequência de Lee dos emaranhados pontuais e lineares de  $\gamma_i$

$$\eta_{\text{Lee}}(\gamma_i) = (d_{\text{Lee}}(x_1), d_{\text{Lee}}(x_2), \dots, d_{\text{Lee}}(x_{\varpi+\sigma})) : d_{\text{Lee}}(x_i) = \begin{cases} \eta_i, & \text{se } x_i \in J \\ \overline{\eta}_i, & \text{se } x_i \in H. \end{cases}$$

O conjunto  $J$  da Etapa 3 do Algoritmo 4.1.10 seleciona, ordenadamente, o índice  $j_i$  do primeiro elemento da subsequência  $(\cdots \gamma_{j_i} \gamma_{j_i+1} \cdots \gamma_{j_i+1} \gamma_{j_i} \cdots)$  de  $\gamma_i$  que define o emaranhado linear sobre o lado  $(\gamma_{j_i}, \gamma_{j_i+1})$  do mergulho de  $G$ . O conjunto  $H$  seleciona o primeiro elemento da subsequência  $(\cdots \gamma_{h_j} \cdots \gamma_{h_j} \cdots)$  de  $\gamma_i$  que define o emaranhado pontual sobre o vértice  $\gamma_{h_j}$  do mergulho de  $G$ . O objetivo é compor as sequências de emaranhados e de distâncias de Lee, ordenadamente, à medida que estes vão ocorrendo em  $\gamma_i$ . Esta ordem permite classificar os mergulhos de  $G$  utilizando os ciclos distintos das sequências de Lee dos emaranhados de  $G$ . Como consequência, o número de modulações  $kM$ 's distintas de mergulhos de  $G$  é maior, quando a classificação por ciclos é usada, em vez do critério que usa o tipo de emaranhados.

Não devemos esquecer que sobre uma sequência de Lee  $\eta_{\text{Lee}}(\gamma_i)$  sempre existirá alguns elementos com barras superiores sempre que houverem emaranhados pontuais. A barra é somente uma maneira de diferenciar a distância de Lee de um emaranhado pontual da distância de Lee de um emaranhado linear.

O processo de identificação descrito na Seção 4.1 será utilizado nas próximas seções para identificar modulações de representantes das principais famílias de grafos. A escolha de representantes de família de grafos diferentes tem como propósito analisar o índice de incidências das partições, a existência de modulações regulares, e identificar propriedades que caracterizam grafos em relação ao número e tipos de modulações.

## 4.2 Principais Características das Modulações

Modulações sobre superfícies vindas de mergulhos de um grafo  $G$  podem ser identificadas sem que seja necessário construir o mergulho de  $G$ ? E quando se trata de modulações sobre superfícies não-orientáveis, é possível identificar ou construir o modelo topológico das modulações? Quanto as modulações sobre superfícies orientáveis, podemos dar informações detalhadas sobre modelos, construções e propriedades ([15] e [18]), porém, quando se trata de modulações sobre superfícies não-orientáveis, há pouquíssima informações, somente os modelos das partições foram identificado [18] e algumas construções isoladas foram apresentadas ([14] e [12]).

O grafo completo  $K_5$  é um laboratório de análise do comportamento das modulações sobre superfícies. Muitas propriedades importantes podem ser reveladas porque, apesar do trabalho para se conseguir um mergulho topológico, classificar e identificar os emaranhados, o caso orientável pode ser feito via algoritmo e todo modelo planar e espacial do projeto topológico pode ser construído. No caso não-orientável, não há algoritmo, porém, modelos particulares de projetos topológicos podem ser construídos e analisadas as suas principais características.

A vantagem, ainda do uso de  $K_5$ , é o grande número de modulações existentes e variedade dos tipos de regiões das partições.

### 4.2.1 Modulações sobre superfícies orientáveis

Para melhor entendimento, consideremos grafos completos  $K_5$  com rotulamentos fixos e de sistemas de rotações distintas. Mesmo rotulamento e rotações distintas, produzem modulações diferentes? É o problema que analisaremos.

No grafo completo  $K_5$ , (a), (b) e (c) da Figura 4.2.1, possuem rotulamentos iguais e os respectivos sistemas de rotações,

$$\Theta_1(K_5) = \{0(1432), 1(0432), 2(1043), 3(2104), 4(3210)\} \quad (4.24a)$$

$$\Theta_2(K_5) = \{0(2431), 1(0432), 2(1430), 3(2140), 4(3210)\} \quad (4.24b)$$

$$\Theta_3(K_5) = \{0(1243), 1(0243), 2(1043), 3(0124), 4(0312)\}. \quad (4.24c)$$

Apesar de (a), (b) e (c) representarem o grafo completo com o mesmo tipo de rotulamento, quando consideramos o sistema de rotações, a diferença entre os mesmo já é bem acentuada. Pelo Teorema 2.4.3, cada sistema de rotações produz, de forma única um único mergulho, desde que este seja um 2-células, quando não, existem vários mergulhos distintos com um mesmo sistema de rotações e, portanto, a característica de Eüler passa a ser uma relação

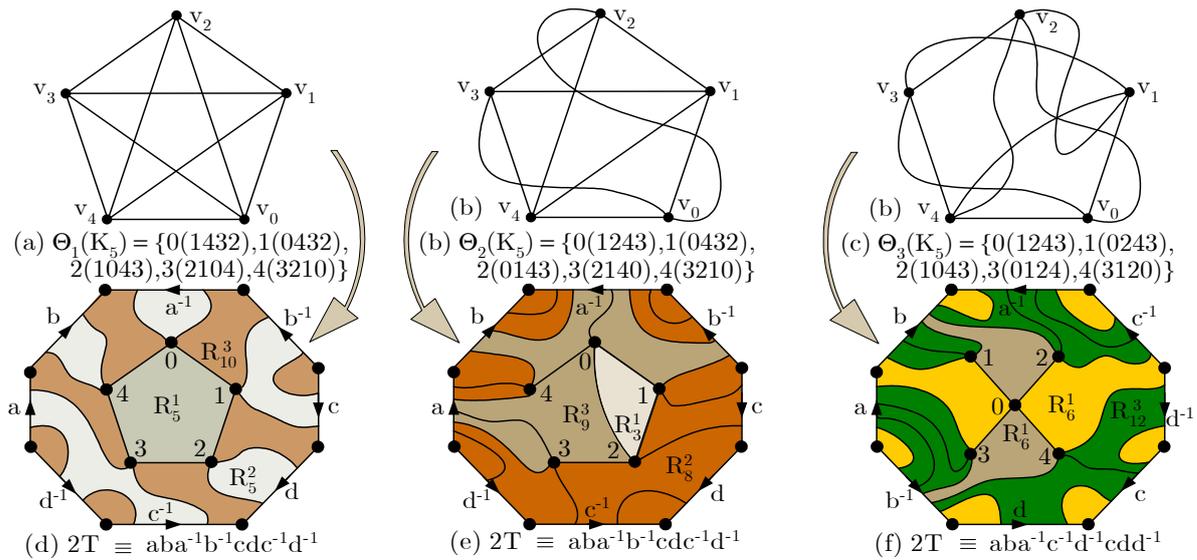


Figura 4.2.1: Modulações vindas de rotações distintas de  $K_5$

inválida neste tipo de mergulhos.

Na Figura 4.2.1, os mergulhos planares da (a) e (b) encontram-se sobre a forma normal de  $2T$  e (c), sobre a forma natural de  $2T$ . O que podemos concluir dos mergulhos planares (d), (e) e (f), correspondentes a (a), (b) e (c), da Figura 4.2.1, é que mesmo encontrando-se sobre superfície idênticas, no bitoro, as partições são diferentes. Portanto, tratam-se de projetos de modulações distintas sobre  $2T$ . Posteriormente, veremos que modulações sobre partições idênticas podem ter desempenhos diferentes.

Outras diferenças existentes são em relação aos mergulhos, que possuem partições e sequências orbitais diferentes e podem encontrar-se também em superfícies distintas. Mas

como verificar estas diferenças? A pior maneira de verificar seria através da forma geométrica de mergulho. Para começar, não sabemos sequer em qual superfície se encontra. Teríamos que tentar mergulhar na esfera, se não conseguirmos, tentaríamos o toro, depois o bitoro a assim por diante, investindo muito tempo neste processo. O modo simples, confiável e rápido de realizar as identificações, seria através do algoritmo 2.6.1. Sua aplicação direta nas rotações (4.24a)-(4.24c), nos dá os seguintes sistemas conjuntos de seqüências orbitais

$$\Gamma(K_5(\Theta_1)) = \{\gamma_1(10432), \gamma_2(4034231201), \gamma_3(30241)\} \quad (4.25a)$$

$$\Gamma(K_5(\Theta_2)) = \{\gamma_1(204301403), \gamma_2(102), \gamma_3(41342312)\} \quad (4.25b)$$

$$\Gamma(K_5(\Theta_3)) = \{\gamma_1(102403), \gamma_2(204301), \gamma_3(21423413)\}. \quad (4.25c)$$

Como todos os mergulhos possuem três regiões, e por  $K_5$  ser um grafo de 5 vértices e 10 lados, segue da igualdade (2.5), que características de Eüler para os três mergulhos são dados por

$$\chi(\Omega) = 5 - 10 + 3 = -2. \quad (4.26)$$

Portanto, pela igualdade (2.6), todos os mergulhos do grafo da Figura 3.5.1 encontram-se sobre uma superfície orientável de gênero  $m$ , tal que

$$\chi(\Omega) = 2 - 2m \Rightarrow -2m = -2 - 2 \Rightarrow m = 2,$$

logo, pelas igualdades (4.25a)-(4.25b), são mergulhos da forma

$$\Gamma(K_5(\Theta_1)) \hookrightarrow 2T \equiv 2R_5R_{10} \quad (4.27a)$$

$$\Gamma(K_5(\Theta_2)) \hookrightarrow 2T \equiv R_3R_8R_9 \quad (4.27b)$$

$$\Gamma(K_5(\Theta_3)) \hookrightarrow 2T \equiv 2R_6R_8. \quad (4.27c)$$

Conseqüentemente, (4.27a), (4.27b) e (4.27c) correspondem a três modulações sobre  $2T$ , todas para constelações de 3 sinais. Como vêm de partições distintas, são modulações distintas de  $2T$ .

No caso de duas modulações virem de partições idênticas estas ainda podem ser distintas, caso este que será analisado posteriormente.

## 4.2.2 Modulações sobre superfícies não-orientáveis

A respeito de modulações sobre superfícies não-orientáveis, não há quase informação. Abordagem superficial, existe em ([14], [18] e [12]), entretanto, analisaremos um pouco mais esta questão, uma vez que apresentaremos aqui a relação dos possíveis modelos de partições das modulações sobre superfícies não-orientáveis. Uma identificação completa requer estratégias e algoritmos diferentes do caso orientável.

Como mergulhos de grafos estão sendo tratados aqui como modulações, usaremos os termos *modulações orientáveis* (vindas de mergulhos orientáveis) e *modulações não-orientáveis* (vindas de mergulhos não-orientáveis).

Recordamos que a rotação de um vértice  $v \in G$  é a descrição ordenadas dos vértices adjacentes dos lados incidentes a  $v$ ; logo, independentemente do mergulho ser orientável ou não,

o conjunto dos sistemas de rotações de um grafo  $G$  é o mesmo para ambos os casos. Então, o número de modulações não-orientáveis é igual ao número de modulações orientáveis? Não. Existem mais modulações não-orientáveis do que orientáveis. Na verdade, foi constatado que há pelo menos duas vezes mais modulações não-orientáveis do que orientáveis [18]. Por que? Uma das razões, é que o número de superfícies para o mergulho não-orientável de 2-células de  $G$ , é aproximadamente igual ao dobro do número das superfícies orientáveis. Mas não é só por isto, há outras razões as quais não sabemos ainda as explicações.

Para analisar o comportamento das modulações não-orientáveis, construamos então alguns exemplos. Mas como fazer isto se não há algoritmos que nos passe alguma informação sobre rotações, seqüências orbitais e gênero da superfície? Novamente, o grafo  $K_5$  contribui para resolvermos este problema.

Como não há nenhum tipo de informações que nos possa ajudar, escolhamos uma superfície, por exemplo, o bitoro, para podermos comparar com os casos dos mergulhos orientáveis da Figura 4.2.1. Vimos que as modulações do bitoro, possuem uma propriedade em comum, são modulações para constelações de 3 sinais. Então, há uma superfície não-orientável  $\bar{\Omega}$  cuja modulação de  $K_5$  é para uma constelação de três sinais. Mas, quem é  $\bar{\Omega}$ ? Bem,  $\bar{\Omega}$  deve satisfazer a característica de Eüler (2.5) e, conseqüentemente, pela igualdade (4.26),  $\chi(\bar{\Omega}) = -2$ , o que não diferencia do caso orientável. Entretanto, pela segunda igualdade de (2.5) resulta que  $\bar{\Omega}$  é uma superfície de gênero  $\tilde{g}$ , isto é,  $\bar{\Omega} \equiv \tilde{g}P$ , satisfazendo a condição

$$\chi(\bar{\Omega}) = 2 - 2\tilde{g} \Rightarrow -2 = 2 - 2\tilde{g} \Rightarrow \tilde{g} = 4,$$

ou seja,  $\bar{\Omega} \equiv 4P$ . Mas no universo das superfícies, há várias opções de escolha para  $4P$ , qualquer uma da suas superfícies homeomorfas podem ser utilizadas para construir o mergulho de  $K_5$ . Em particular, podemos tomar a soma conexa,  $K$ , de duas superfícies de Klein. Como  $K \equiv 2P$ , então  $4P \equiv 2K$ . Independente de  $4P$  ou  $2K$  escolhida, um mergulho realizado em uma delas, também pode ser realizado em outra.

Então, usando somente da intuição, construamos mergulhos de  $K_5$  sobre as formas poligonais (planares) de  $4P$  e  $2K$ . O resultado foi os três mergulhos obtidos na Figura 4.2.2. Primeiramente, tentamos usar a rotação  $\Theta_3$  para conseguir um mergulho de  $K_5$  sobre  $4P$  e  $2K$  com três regiões. Constatamos de imediato, que isto não dava certo. Nas primeiras tentativas só encontrávamos partições com 4 regiões, como no caso de (b); depois foi pior, encontramos a partição com 5 regiões em (a); finalmente, foi quando percebemos que devíamos evitar regiões contidas totalmente no polígono orientável  $\bar{\omega}$  de  $\bar{\Omega}$ , isto é, regiões com lados que não se interceptam com lados de  $\bar{\omega}$ , para obter um mergulho com 3 regiões.

Foi uma surpresa, pois não esperávamos que mergulhos não-orientáveis não fossem unicamente determinados, como é o caso dos mergulhos de 2-células orientáveis. Esta talvez seja uma das maiores diferenças entre modulações orientáveis e não-orientáveis. Provavelmente, a falta de unicidade das modulações não-orientáveis seja um entrave no problema da identificação. Para resolver o problema do algoritmo identificador de mergulhos não-orientáveis, pensávamos que era suficiente gerar todas as rotações considerando que o polígono  $\bar{\omega}$  é da forma  $\bar{\omega} = aabb \cdots kk$ . No entanto, esta estratégia não é suficiente, pois temos que considerar todas as possibilidades de lados contidos no interior de  $\bar{\omega}$ . Como já foi dito, não faz parte do objetivo deste trabalho construir um método de identificação das modulações não-orientáveis.

Os sistemas de rotações de mergulhos não-orientáveis são determinados do mesmo modo do caso orientável quando os mesmos são identificados a partir dos modelos planares das

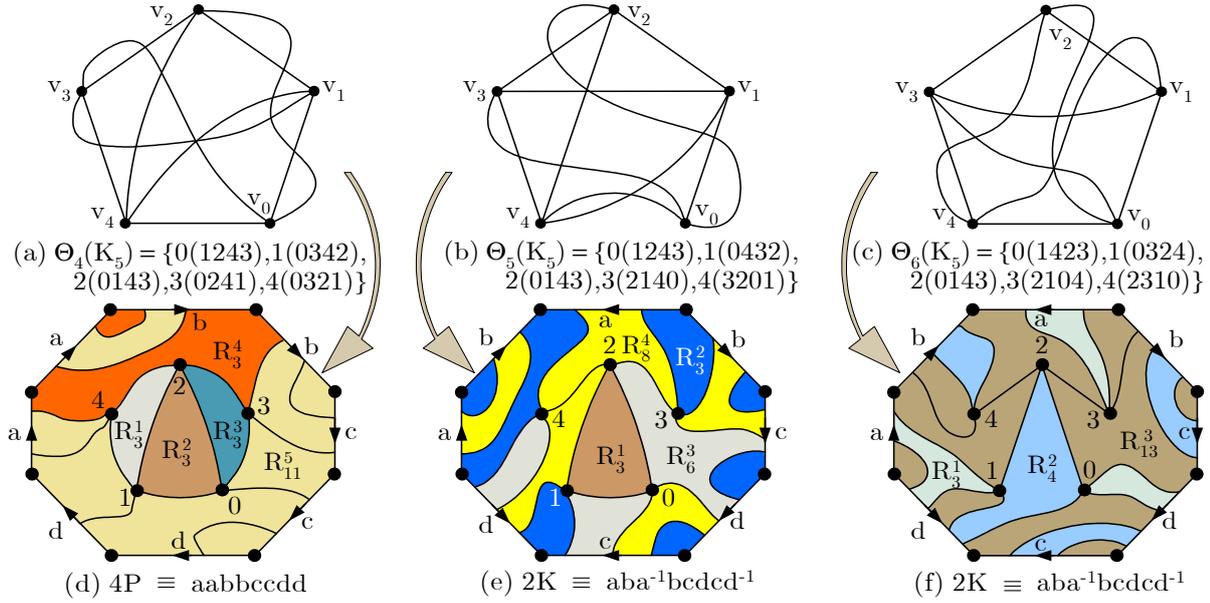


Figura 4.2.2: Projetos topológicos de modulações não-orientáveis de  $K_5$

superfícies. Os projetos de modulações sobre superfícies não-orientáveis de mergulhos de  $K_5$  vêm dos sistemas de rotações

$$\Theta_3(K_4) = \{0(1243), 1(0342), 2(0143), 3(0241), 4(0321)\} \quad (4.28a)$$

$$\Theta_4(K_5) = \{0(1243), 1(0432), 2(1430), 3(2140), 4(3201)\} \quad (4.28b)$$

$$\Theta_5(K_6) = \{0(1423), 1(0324), 2(0143), 3(2104), 4(2310)\}. \quad (4.28c)$$

Não podemos esperar que uma rotação produza resultados iguais quando aplicada em superfícies com orientações diferentes. Pode até ocorrer de uma delas ser realizável em um tipo de superfície orientável e nem existir no universo não-orientável.

Os conjuntos de seqüências orbitais relativas aos mergulhos de  $K_5$ , munidos das rotações em (4.28a)-(4.28c), são dados por

$$\Gamma(K_5(\Theta_4)) = \{\gamma_1(124), \gamma_2(102), \gamma_3(032), \gamma_4(423), \gamma_5(10431403)\} \quad (4.29a)$$

$$\Gamma(K_5(\Theta_5)) = \{\gamma_1(102), \gamma_2(143), \gamma_3(320410), \gamma_5(42312403)\} \quad (4.29b)$$

$$\Gamma(K_5(\Theta_6)) = \{\gamma_1(130), \gamma_2(0214), \gamma_3(1243023410423)\}. \quad (4.29c)$$

Portanto, os mergulhos da Figura 4.2.2, independentemente das condições destes serem mergulhos de 2-células ou não, que satisfaçam ou não a relação da característica de Eüler da superfície  $4P$ , podem ser perfeitamente utilizados como projetos topológicos de modulações não-orientáveis para constelações de 3, 4 e 5 sinais. Não há nenhuma restrição quanto ao uso desses mergulhos como projetos de modulações. Mais precisamente, são projetos de

modulações não-orientáveis sobre a superfície  $4P$  definidos pelos seguintes mergulhos

$$\Gamma(K_5(\Theta_4)) \hookrightarrow 4P \equiv 4R_3R_8 \quad (4.30a)$$

$$\Gamma(K_5(\Theta_5)) \hookrightarrow 2K \equiv 2R_3R_6R_8 \quad (4.30b)$$

$$\Gamma(K_5(\Theta_6)) \hookrightarrow 2K \equiv R_3R_4R_{13}. \quad (4.30c)$$

Quanta diferença para o caso orientável! Neste, cada superfície possui um número constante de regiões. Se em  $K_5$  foram encontrados, pelo menos, 3 partições com número de regiões distintas, o que dizer de  $K_{10}$ ,  $K_{20}$  e  $K_{100}$ ? Seriam os mergulhos (4.30a)-(4.30c) todos de 2-células? Ou somente (4.30c) seria um 2-células? Não encontramos referências que abordassem estas questões. É fácil ver que é impossível traçar uma curva fechada homotópica a um círculo, contida em uma região de qualquer um dos mergulhos (4.30a)-(4.30c). Então, trata-se de mergulhos não-orientáveis de 2-células. Mas como é possível existirem mergulhos com número de regiões distintas de  $4P$ ? Isto afetaria a característica de Eüler de  $4P$ ? A existência dos mergulhos (4.30a)-(4.30c) implicariam que as características de Eüler de  $\bar{\Omega}$  seriam dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \chi_1(\bar{\Omega}) &= 5 - 10 + 5 = 0 \Rightarrow \bar{\Omega} \equiv K \equiv 2P \\ \chi_2(\bar{\Omega}) &= 5 - 10 + 4 = -1 \Rightarrow \bar{\Omega} \equiv KP \equiv 3P \\ \chi_3(\bar{\Omega}) &= 5 - 10 + 3 = -2 \Rightarrow \bar{\Omega} \equiv 2K \equiv 4P. \end{aligned}$$

Neste caso temos várias contradições, já que todos os mergulhos encontram-se sobre  $4P$ . Como o mergulho de  $K_5$  deve satisfazer a característica de Eüler-Poincaré de  $4P$ , (4.30c) é o único que satisfaz esta condição, logo o mergulho de 2-células de  $K_5$  sobre  $4P$  é um projeto de modulação não-orientável para um constelação de três sinais.

Por outro lado, todos os mergulhos da Figura 4.2.2 são de 2-células. Concluimos, portanto, que existem muitos mergulhos não-orientáveis de 2-células sobre uma mesma superfície  $\bar{\Omega}$  que não satisfazem a característica de Eüler de  $\bar{\Omega}$ , porém, há somente uma partição de  $\bar{\Omega}$ , aquela que possui o mínimo de regiões, que satisfaz a característica de Eüler de  $\bar{\Omega}$ . Pela experiência adquirida nas construções dos mergulhos não-orientáveis da Figura 4.2.2, a partição mínima é obtida evitando-se a existência de regiões contidas totalmente no interior da forma poligonal (modelo planar) de  $\bar{\Omega}$ .

Dos comentários acima, deduzimos que as características de uma modulação não-orientável podem ser resumidas através da seguinte:

**Observação 4.2.1** *Seja  $kM$  uma modulação vinda de um mergulho  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$ . Então valem as seguintes propriedades:*

1. *Se  $\Omega$  é uma superfície orientável, então:*

- (a)  *$kM$  é definido de forma única por um mergulho de 2-células;*
- (b) *os emaranhados lineares são todos da forma  $(\dots xy \dots yx \dots)$ ;*

2. *Se  $\Omega$  é uma superfície não-orientável, então:*

- (a)  $kM$  não pode ser definida por qualquer mergulho de 2-células de  $\Omega$ ;
- (b)  $kM$  é definida pelo mergulho de 2-células que minimiza o número de regiões da partição  $\cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$ ;
- (c) os emaranhados lineares são do tipo  $(\cdots xy \cdots yx \cdots)$  e  $(\cdots vw \cdots vw \cdots)$ ;
- (d) o número de modulações não-orientáveis é aproximadamente igual ao dobro do número das modulações orientáveis.

A Observação 4.2.1 contém as principais características das modulações sobre superfícies destacando as diferenças básicas entre modulações orientáveis e não-orientáveis. Tais diferenças só foram possíveis de serem detectadas, devido ao grafo completo  $K_5$ , que permite obter projetos geométricos distintos de mergulhos orientáveis e não-orientáveis, com as características desejadas e sem muito esforço. Se tivéssemos que fazer este tipo de experiência com o grafo completo  $K_6$ , levaríamos muito tempo para obter os mergulhos requeridos. Para um outro grafo maior do que  $K_6$ , por exemplo o  $K_7$ , talvez nem sequer conseguíssemos um mergulho, mesmo que investíssemos muito esforço na construção do projeto geométrico.

À medida que o número de vértice do grafo completo aumenta, torna-se muito difícil conseguir um mergulho topológico. Por isso, faz-se necessário um investimento em técnicas de construções que permitam obter mergulhos de grandes grafos. Desconhecemos a existência de técnicas de construção de mergulhos de grafos, além daquelas introduzida por Lima ([16]). É quase nada diante da complexidade da construção de um projeto geométrico de mergulho.

Levando em consideração que há outras aplicações de mergulhos de grafos, é importante investir na solução do problema do mergulho topológico. Não é só por causa das modulações, o mergulho topológico é usado para minimizar o custo de placas de circuitos integrados utilizados em componentes eletrônico e portanto de extrema utilidade em aplicações tecnológicas.

Por outro lado, houve um avanço considerável nos métodos de identificação das modulações orientáveis através de processos algébricos que podem ser convertidos em algoritmos identificadores de mergulhos. Desde que se conheça a rotação, dispomos de algoritmos que identificam o mergulho orientável. Para grafos relativamente grandes, como é o caso de  $K_6$ , identificamos os seus 1 679 616 elementos. Então, grafos que possuem aproximadamente este número de mergulhos, são perfeitamente identificáveis. Desde que seja utilizado um equipamento robusto, é possível avançarmos no problema da identificação de mergulhos.

A seguir, retornamos as etapas do processo de identificação de modulações sobre superfícies da Seção 4.1, continuando com a identificação das modulações associadas aos mergulhos do grafo completo  $K_5$ .

### 4.3 Identificação das Modulações de $K_5$

Aplicando as etapas do processo de identificação de modulações sobre superfícies da Seção 4.1, iremos descrever, detalhadamente, como são realizadas todas as etapas do processo de identificação das modulações do grafo completo  $K_5$ .

### 4.3.1 Os mergulhos de $K_5$

A identificação dos mergulhos de um grafo  $G$  consiste em encontrar cada superfície  $\Omega$  na qual  $G$  possui mergulhos de 2-células e o número de regiões da partição, o que é uma constante para cada tipo de superfície  $\Omega$ .

Pelas igualdades (2.5) e (2.6) os gêneros dos mergulhos orientáveis mínimo e máximo de  $K_5$  são dados por

$$\begin{aligned}\gamma(K_5) &= \left\{ \frac{1}{12} (5-3)(5-4) \right\} = \left\{ \frac{1}{6} \right\} = 1 \\ \gamma_M(K_5) &= \left[ \frac{1}{4} (5-1)(5-2) \right] = [3] = 3.\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 2.4.2, o conjunto das superfícies orientadas nas  $K_5$  possuem projetos de modulações dados por

$$\mathbb{S}(K_5) = \{T, 2T, 3T\}$$

e os mergulhos orientáveis de  $K_5$  são da forma

$$K_5 \hookrightarrow T \equiv \cup_{i=1}^5 R_{\alpha}^i, K_5 \hookrightarrow 2T \equiv \cup_{i=1}^3 R_{\alpha}^i, K_5 \hookrightarrow T \equiv R_{20}. \quad (4.31)$$

Por outro lado, o gênero do mergulho mínimo não-orientável de  $K_5$ , pela fórmula (2.9), é dado por

$$\bar{\gamma}(K_5) = \left\{ \frac{(5-3)(5-4)}{6} \right\} = 1,$$

isto é, o mergulho mínimo orientável de  $K_5$  encontra-se sobre o plano projetivo  $P$ . Pela segunda igualdade de (2.6), a característica de Eüler de  $P$  é

$$\chi(P) = 2 - 1 = 1,$$

portanto, o número de regiões  $\bar{\alpha}$  do mergulho mínimo de  $K_5$  é obtido por

$$\chi(P) = v - e + \bar{\alpha} \Rightarrow 1 = 5 - 10 + \bar{\alpha} \Rightarrow \bar{\alpha} = 6.$$

Ou seja, o mergulho mínimo não-orientável de  $K_5$  é da forma

$$K_5 \hookrightarrow P \equiv \cup_{i=1}^6 R_{\alpha_i}^i.$$

Pela segunda igualdade de (2.6), as superfícies não-orientáveis possuem características de Eüler 1, 0, -1, -2, -3,  $\dots$ , então, segue da igualdade (2.5), que os mergulhos não-orientáveis de  $K_5$  são das formas

$$\begin{aligned}K_5 \hookrightarrow P &\equiv \cup_{i=1}^6 R_{\alpha_i}^i, K_5 \hookrightarrow 2P \equiv \cup_{i=1}^5 R_{\alpha_i}^i, K_5 \hookrightarrow 3P \equiv \cup_{i=1}^4 R_{\alpha_i}^i, \\ K_5 \hookrightarrow 4P &\equiv \cup_{i=1}^3 R_{\alpha_i}^i, K_5 \hookrightarrow 5P \equiv \cup_{i=1}^2 R_{\alpha_i}^i, K_5 \hookrightarrow 6P \equiv R_{20}.\end{aligned} \quad (4.32)$$

Logo, pelas igualdades (4.31) e (4.32), o conjunto das superfícies das modulações de  $K_5$  é dado por

$$\mathbb{S}_{K_5} = \{T, 2T, 3T, P, 2P, 3P, 4P, 5P, 6P\}. \quad (4.33)$$

As modulações orientáveis de  $K_5$  são para constelações de 5, 3 e 1 sinais e as não-orientáveis, para constelações de até 6 sinais. Em relação à quantidade de sinais da constelação, há o dobro de opções de modulações quando a escolha são as modulações não-orientáveis.

### A modulação dual de $K_5$

Em geral, o grafo dual  $G'$  do mergulho de um grafo  $G$  é completamente diferente de  $G$ . Mas, pode ser igual, como é o caso do tetraedro e do mergulho de  $K_5$  da Figura 3.5.1. Supondo que o mergulho de  $K_5$  é da forma

$$K_5(5, 10) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$$

então, pela Definição 2.4.12, o dual de  $K_5$  é o grafo  $K_5(k, 10)$  cujo mergulho é da forma

$$K_5(k, 10) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^5 R_4.$$

Então, existe uma única modulação dual quando esta é vista sob o aspecto da partição? É verdade, o que é diferente é o tipo de grafo, o dual de cada mergulho possui um grafo diferente em relação ao seu sistema de rotações. Sendo assim, os duais de  $K_5$  produzem modulações com o mesmo desempenho? Esta afirmação é falsa, apesar das partições duais serem iguais, as superfícies são distintas. Por (4.33), os duais encontram-se sobre 3 superfícies orientáveis e 6 não-orientáveis, isto é, os duais estão em 9 superfícies distintas. Consequentemente, existem pelo menos 9 modulações duais de desempenhos diferentes. Pode até haver mais, porém é necessária uma análise minuciosa para confirmar a veracidade desta afirmação.

### 4.3.2 As partições de $K_5$

Determinado o conjunto de superfícies para o mergulho do grafo completo  $K_5$ , denotado por  $\mathbb{S}_{K_5}$ , o passo seguinte do processo é identificar os tipos de partições de cada superfície  $\Omega$  de  $\mathbb{S}_{K_5}$ . Estas são obtidas através das condições em (4.10).

Basicamente, este processo consiste em usar as igualdades (4.31) e (4.32) para saber qual é o número  $k$  de regiões da partição da superfície  $\Omega$  e determinar todas as partições do número  $20 = 2q$  ( $q = 10$ ) em  $k$  inteiros  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , tal que

$$3 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \quad \text{e} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_k = 20.$$

Assim, são determinadas todas as partições possíveis que podem corresponder a um mergulho de  $K_5$ . Se todas as partições encontradas correspondem de fato a mergulhos de  $K_5$ , não se sabe.

O objetivo, por enquanto, é identificar todas as partições possíveis. Somente após esta identificação, é possível confirmar a existência de uma partição, caso seja possível aplicar o Algoritmo 2.6.1, no sentido do equipamento computacional utilizado ter condições de gerar todos os mergulhos. No início, tivemos dificuldades de gerar o conjunto de mergulhos, pois foi necessário recorrer a um equipamento mais robusto, em termos de processamento de cálculos, para exibir os mergulhos de  $K_6$ . Na verdade, só foi possível determiná-los porque o arquivo de saída foi particionado em 36 arquivos, contendo cada um deles, 1/36 dos mergulhos de  $K_6$ .

No caso de  $K_5$ , o número de mergulhos é bem menor. Na Tabela 4.3.1 relacionamos todas as partições possíveis de mergulhos de  $K_5$ . Lembramos que não significa a existência de todas as partições. É apenas uma estimativa do conjunto de todas as partições possíveis.

$P$	$T, 2P$	$3P$		$2T, 4P$		$5P$	$3T, 6P$
$R_{3,3,3,3,3,5}$	$R_{3,3,3,3,8}$	$R_{3,3,3,11}$	$R_{3,4,6,7}$	$R_{3,3,14}$	$R_{4,6,10}$	$R_{3,17}$	$R_{20}$
$R_{3,3,3,3,4,4}$	$R_{3,3,3,4,7}$	$R_{3,3,4,10}$	$R_{3,5,5,7}$	$R_{3,4,13}$	$R_{4,7,9}$	$R_{4,16}$	
	$R_{3,3,3,5,6}$	$R_{3,3,5,9}$	$R_{3,5,6,6}$	$R_{3,5,12}$	$R_{4,8,8}$	$R_{5,15}$	
	$R_{3,3,4,4,6}$	$R_{3,3,6,8}$	$R_{4,4,4,8}$	$R_{3,6,11}$	$R_{5,5,10}$	$R_{6,14}$	
	$R_{3,3,4,5,5}$	$R_{3,3,7,7}$	$R_{4,4,5,7}$	$R_{3,7,10}$	$R_{5,6,9}$	$R_{7,13}$	
	$R_{3,4,4,4,5}$	$R_{3,4,4,9}$	$R_{4,4,6,6}$	$R_{3,8,9}$	$R_{5,7,8}$	$R_{8,12}$	
	$R_{4,4,4,4,4}$	$R_{3,4,5,8}$	$R_{4,5,5,6}$	$R_{4,4,12}$	$R_{6,6,8}$	$R_{9,11}$	
			$R_{5,5,5,5}$	$R_{4,5,11}$	$R_{6,7,7}$	$R_{10,10}$	
2	7	15		16		8	1

Tabela 4.3.1: Modelos de partições de modulações de  $K_5$ 

A última linha da Tabela 4.3.1, indica a quantidade de modelos distintos de modulações existentes em uma superfície. A notação  $T, 2P$  indica que cada modelo desta coluna, tanto pode ser realizado na superfície  $T$  quanto na superfície  $2P$ .

Existiriam todos os modelos relacionados na Tabela 4.3.1? Não há como responder ainda este tipo de questão. Podemos verificar que todos eles satisfazem a relação da característica de Eüler, no entanto, iremos comprovar, com a implementação do Algoritmo 2.6.1, que alguns deles não podem ser realizados em superfícies orientáveis. E nas superfícies não-orientáveis? Também deve acontecer a mesma coisa, mas não iremos identificar quais dos modelos são realizados em superfícies não-orientáveis, pois nos falta um algoritmo identificador.

Observamos que todos os 49 modelos de modulações do grafo  $K_5$  correspondem a possíveis modelos de mergulhos sobre superfícies não-orientáveis. No entanto, somente 24 correspondem a possíveis modelos de mergulhos de superfícies orientáveis, isto é, o número dos modelos das modulações não-orientáveis é aproximadamente igual ao dobro das modulações orientáveis. Em geral, esta proporção é observada nos conjuntos de possíveis modelos de mergulhos de um grafo. O número de modelos não-orientáveis, não é exatamente o dobro dos orientáveis, às vezes aproxima-se inferiormente e outras vezes superiormente.

### 4.3.3 Os sistemas de rotações de $K_5$

Consideremos o rotulamento  $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$  dos vértices de  $K_5$  fixados nas Figuras 4.2.1 e 4.2.2. Observe que todo vértice de  $K_5$  é do quarto grau, isto é,  $\deg v_i = 4$ , para todo  $v_i \in V$ . Pela Proposição 4.1.2, o número de rotações distintas de  $v_i$  é dado por

$$|\theta_i| = (\deg v_i - 1)! = 3! = 6.$$

Então, para cada  $v_i \in V$ , devemos identificar as 6 rotações distintas de  $v_i$ . Quando  $|\theta_i|$  é um número relativamente grande, sugerimos o uso do Algoritmo 4.1.5. Em particular, não é difícil determinar os 6 elementos de cada  $\theta_i$ . Por exemplo, os elementos de  $\theta_0$  são determinados escolhendo a rotação  $A = (1234)$  como sendo a primeira rotação de  $v_0$ . Como o ciclo inverso de  $A$ ,  $a = (1234)$ , é diferente de  $A$ , então  $a$  é outra rotação de  $v_0$ . A seguir,

relacionamos todos os ciclos de  $A$  e  $a$ ,

$$\begin{aligned} A^0 &= (1234), A^1 = (4123), A^2 = (3412), A^3 = (2341), \\ a^0 &= (4321), a^1 = (1432), a^2 = (2134), a^3 = (3214), \end{aligned} \quad (4.34)$$

e procuramos uma rotação de  $v_0$  que não está em (4.34), por exemplo,  $F = (1243)$ , e tomamos o seu inverso  $f = (3421)$ . Aplicamos o mesmo procedimento anterior, relacionamos os ciclos de  $F$  e  $f$ , e escolhemos  $M = (1324)$  e  $m = (4231)$  como rotações de  $v_0$ . Sendo assim,  $\Psi_0 = \{A, F, M, a, f, m\}$  é o conjunto das rotações de  $v_0$ .

Com procedimentos análogos ao de  $v_0$ , as rotações distintas dos vértice de  $K_5$  foram identificadas, como mostra a relação da Tabela 4.3.2.

$\Psi$	Rotações distintas					
$\Psi_0$	$A = (1234)$	$F = (1243)$	$M = (1324)$	$a = (4321)$	$f = (3421)$	$m = (4231)$
$\Psi_1$	$B = (0234)$	$G = (0243)$	$N = (0324)$	$b = (4320)$	$g = (3420)$	$n = (4230)$
$\Psi_2$	$C = (0134)$	$H = (0143)$	$O = (0314)$	$c = (4310)$	$h = (3410)$	$o = (4130)$
$\Psi_3$	$D = (0124)$	$K = (0142)$	$P = (0214)$	$d = (4210)$	$k = (2410)$	$p = (4120)$
$\Psi_4$	$E = (0123)$	$L = (0132)$	$Q = (0213)$	$e = (3210)$	$l = (2310)$	$q = (3120)$

Tabela 4.3.2: Sistemas de rotações distintos dos vértices de  $K_5$  [15]

As rotações dos vértices de  $K_5$  relacionadas na Tabela 4.3.2, irão compor o conjunto de sistemas de rotações de  $K_5$ . Se  $\Phi(K_5)$  é o conjunto dos sistemas de rotações do grafo  $K_5$ , então cada rotação  $\Theta$  de  $\Phi(K_5)$  é da forma

$$\Theta = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} : \varphi_i \in \Psi_i.$$

Portanto, o conjunto dos sistemas de rotações de  $K_5$  é dado pelo produto cartesiano dos conjuntos  $\theta_i$ 's, isto é,

$$\Phi(K_5) = \Psi_0 \times \Psi_1 \times \Psi_2 \times \Psi_3 \times \Psi_4 = \prod_{i=0}^4 \Psi_i, \quad (4.35)$$

consequentemente, o número de sistemas de rotações de  $K_5$  é dado por

$$|\Phi(K_5)| = \prod_{i=0}^4 |\Psi_i| = 6^5 = 7776.$$

Sendo assim, existem exatamente 7.776 mergulhos distintos de  $K_5$  e, portanto, há o mesmo número de partições sobre a quais é possível realizar projetos de modulações vindas somente dos mergulhos orientáveis de  $K_5$ .

Pelo fato de  $\Phi(K_5)$ , em (4.35), ser dado pelo produto cartesiano de conjuntos, isto só vem a facilitar a obtenção dos elementos de  $K_5$ . *Softwares* como, *Maple*, *Mathematica* e *Matlab* fornecem os elementos de  $\Phi(K_5)$  com poucos comandos. Em outra linguagem de programação, basta utilizar cinco 'for' consecutivos.

Apenas para exemplificar o que seria de fato uma rotação de  $K_5$ , observe como uma rotação  $\Theta$  é escolhida: na primeira linha da Tabela 4.3.2, escolhemos um elemento, por

exemplo, a rotação  $M$ ; em seguida, fazemos o mesmo procedimento com as demais linhas e escolhemos, por exemplo, os respectivos elementos  $G, o, d$  e  $Q$  para obtermos a rotação

$$\Theta = MGodQ = \{0 (1324), 1 (0243), 2 (4130), 3 (4210), 4 (0213)\}$$

a qual corresponde a matriz de rotação

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

O Algoritmo, recebe um arquivo contendo todas as matrizes de rotação e processa as saídas. Em particular, para a entrada (4.36) é dada a seguinte saída

$$\begin{array}{ll} M G o d q & \text{(Rotação)} \\ 5 7 8 & \text{(Partição)} \\ 1 0 3 4 0 1 2 3 & (\gamma_1) \\ 3 0 2 4 1 & (\gamma_2) \\ 2 0 4 2 1 4 3 & (\gamma_3) \end{array} \quad (4.37)$$

Utilizando os elementos que se encontram na 6ª linha e 6ª coluna da Tabela 4.3.1 concluímos que se trata de uma modulação sobre o bitoro, definido pelo mergulho

$$K_5(\Theta) \hookrightarrow 2T \equiv R_5R_7R_8.$$

Além disso, concluímos também que pode existir uma modulação sobre a superfície não-orientável  $4P$ , ou sobre  $2K$ , da forma

$$K_5(\Theta) \hookrightarrow 4P, 2K \equiv R_5R_7R_8.$$

O que vai confirmar se a modulação não-orientável acima existe, é a construção do projeto geométrico ou a existência de um algoritmo que gere todos os mergulhos não-orientáveis de  $K_5$ , os quais não foram determinados ainda.

#### 4.3.4 Identificação das Modulações

Após o processamento do algoritmo 2.6.1, é disponibilizado um arquivo de texto com 2776 saídas da forma (4.37). A segunda linha, correspondente à partição, tem a função de identificar as classes de mergulhos com um mesmo tipo de partição.

Utilizando as partições das colunas de ordem par da Tabela 4.3.1, correspondentes as partições sobre as superfícies orientáveis da forma  $gT$  e não-orientáveis da forma  $kP$ , faz-se uma busca no arquivo de saída digitando a partição, conforme mostra a Figura 4.3.1, para o caso da identificação do número de partições da forma  $R_{3,3,3,3,8}$ .

Ao executar a função `<Substituir Tudo>` nos é dado o número de partições  $R_{3,3,3,3,8}$  encontradas que, neste caso, foram 152 partições. A versão *Word 2010*, já exibe o número de

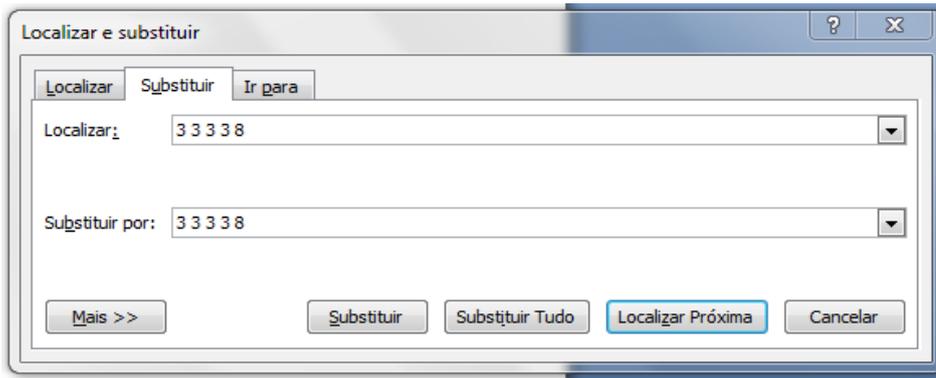


Figura 4.3.1: Pesquisa no arquivo de saída do Algoritmo 2.6.1

partições encontradas na parte inferior esquerda sem precisar executar a função  $\langle$ Substituir Tudo $\rangle$ .

Antes da execução de  $\langle$ Substituir Tudo $\rangle$  é acionada a função  $\langle$ Localizar Próximo $\rangle$  para encontrar a primeira partição  $R_{3,3,3,3,8}$  (Partição  $\bar{\Xi}_1$ ) do arquivo de saída.

A Tabela 4.3.3 relaciona todas as classes de modulações orientáveis de  $K_5$ . No caso do toro, a primeira partição encontrada é do tipo  $R_{3,3,3,3,8}$  (4ª Coluna), foi gerada pela rotação  $\Theta = \text{FnOpQ}$  (2ª Coluna), apresenta como conjunto de sequências orbitais  $\Gamma = \{(042), (034), (124), (132), (10230143)\}$  (5ª Coluna), corresponde a uma modulação irregular de  $T$  (3ª Coluna), é uma modulação para uma constelação de 5 sinais (6ª Coluna) e composta de 152 modulações (7ª Coluna).

Do processamento do Algoritmo 2.6.1 e identificação das classes de modulações da Tabela 4.3.3, deduzimos que das 24 modulações orientáveis possíveis relacionadas na Tabela 4.3.1, somente 3 projetos não são realizados,  $R_{3,3,3,5,6}$  e  $R_{3,4,4,4,5}$  sobre o toro e  $R_{6,7,7}$  sobre o bitoro. Portanto, o grafo completo possui um alto índice de projetos de modulações orientáveis, 84,5% dos modelos possíveis de modulações orientáveis existem, são realizáveis em termos de construção geométrica topológica e todos identificáveis em relação ao sistema de rotação, partição, superfície e sequências orbitais.

Mergulhos dos representantes de todas as classes de  $K_5$  juntamente com os duais, foram construídos em [15]. Os cinco mergulhos mínimos sobre o toro podem ser utilizados para projetos distintos de modulações utilizando a geometria diferencial, da forma como foi feita em [3]. Quanto aos 15 modelos de modulações sobre o bitoro, só depende da existência de uma parametrização desta superfície para que os mesmos sejam realizáveis nos moldes da modulação QAMS ou de modulação *twisted*.

O modelo sobre o tri-toro só pode ser realizado no que concerne a modulação *twisted* utilizando como sinais, curvas específicas do mergulho que maximizam distâncias e que são aquelas que possuem homologias não triviais. De um modo geral, todo mergulho pode ser utilizado para projeto de modulação *twisted*. Como foi dito anteriormente, o mergulho de 2-células tende a otimizar a ocupação do espaço pelas curvas do grafo, diversificando curvas e conservando grandes distâncias entre as mesmas, características que as tornam ideais como projeto de sinais para modulação *twisted*.

$\Xi_i$	$\Theta$	Partição	CGC	$\Omega$	$k$	$\#(\Xi_i)$
$\Xi_1$	FnOpQ	$T$	$R_{3,3,3,3,8}$	$\{(042), (034), (124), (132), (10230143)\}$	5	152
$\Xi_2$	FnOdQ	$T$	$R_{3,3,3,4,7}$	$\{(132), (042), (124), (0143), (1023403)\}$	5	116
$\Xi_3$	—	—	$R_{3,3,3,5,6}$	—	—	—
$\Xi_4$	FnOPQ	$T$	$R_{3,3,4,4,6}$	$\{(042), (124), (0143), (1023), (032134)\}$	5	122
$\Xi_5$	FncpE	$T$	$R_{3,3,4,5,5}$	$\{(034), (132), (0412), (01423), (10243)\}$	5	64
$\Xi_6$	—	—	$R_{3,4,4,4,5}$	—	—	—
$\Xi_7$	FnhPL	$T$	$R_{4,4,4,4,4}$	$\{(0143), (0324), (0412), (1023), (1342)\}$	5	14
Subtotal de códigos CGC's da classe do toro						468
$\Xi_8$	FnCKl	$2T$	$R_{3,3,14}$	$\{(042), (243), (10213412301403)\}$	3	950
$\Xi_9$	FnCPQ	$2T$	$R_{3,4,13}$	$\{(042), (0143), (1021340324123)\}$	3	948
$\Xi_{10}$	FnHpE	$2T$	$R_{3,5,12}$	$\{(034), (01423), (102132041243)\}$	3	244
$\Xi_{11}$	FnOpq	$2T$	$R_{3,6,11}$	$\{(132), (034124), (10230142043)\}$	3	240
$\Xi_{12}$	FncDl	$2T$	$R_{3,7,10}$	$\{(132), (0423412), (1024301403)\}$	3	352
$\Xi_{13}$	Fncke	$2T$	$R_{3,8,9}$	$\{(234), (01403213), (102412043)\}$	3	736
$\Xi_{14}$	FnCPL	$2T$	$R_{4,4,12}$	$\{(0143), (0324), (102134204123)\}$	3	238
$\Xi_{15}$	FnHKq	$2T$	$R_{4,5,11}$	$\{(0432), (01423), (10213412403)\}$	3	122
$\Xi_{16}$	FnHdq	$2T$	$R_{4,6,10}$	$\{(0432), (034124), (1021301423)\}$	3	412
$\Xi_{17}$	FnOPq	$2T$	$R_{4,7,9}$	$\{(1023), (0142043), (032134124)\}$	3	372
$\Xi_{18}$	FnOPq	$2T$	$R_{4,8,8}$	$\{(1023), (0142043), (032134124)\}$	3	66
$\Xi_{19}$	ABCDE	$2T$	$R_{5,5,10}$	$\{(01234), (03142), (1021324304)\}$	3	24
$\Xi_{20}$	FnokE	$2T$	$R_{5,6,9}$	$\{(10243), (014213), (041234032)\}$	3	116
$\Xi_{21}$	FnHKE	$2T$	$R_{5,7,8}$	$\{(01423), (0412432), (10213403)\}$	3	118
$\Xi_{22}$	ABCPl	$2T$	$R_{6,6,8}$	$\{(012314), (102134), (03243042)\}$	3	30
$\Xi_{23}$	—	—	$R_{6,7,7}$	—	—	—
Subtotal de CGC's da classe do bitoro						4968
$\Xi_{24}$	FnHDq	$3T$	$R_{20}$	$\{(10213204301423412403)\}$	1	2340
Total de CGC's dos mergulhos de $K_5$						7776

Tabela 4.3.3: Classes de modulações orientáveis de  $K_5$ 

Não é considerada a existência do projeto de modulação QAMS do grafo completo  $K_5$  sobre o tri-toro, porque a partição é formada por uma única região e não faz sentido transmitir dados utilizando uma modulação que usa um único sinal. No caso da modulação *twisted* veremos que o projeto pode fazer sentido.

### 4.3.5 Modulações em superfícies com bordos

O conceito de modulações em superfícies com bordos, estabelecido na Definição 2.4.14, além de ampliar o universo do conjunto de superfícies, podem ser, de fato, projetadas sobre superfícies mínimas, pois muitas delas possuem formas paramétricas. Não é só a quantidade de superfícies e de modelos, a grande vantagem é que muitas das superfícies com bordos possuem formas parametrizadas que possibilitam a execução do projeto quanto a geometria

riemanniana. Dentre as famílias de superfície incluídas no processo de modulação, está a família de superfícies mínimas, foco de pesquisa em matemática pura e visadas por sua propriedade de minimizar a área local.

Os mergulhos orientáveis de  $K_5$  foram identificados em [15], restando somente identificar os não-orientáveis. Evidentemente que a identificação das modulações não-orientáveis neste trabalho, trata-se de uma estimativa. Não sabemos qual o índice de incidência das modulações não-orientáveis de  $K_5$ , pode ser maior do que 85,5% ou não. De qualquer maneira, acreditamos que possa ser alto.

### Modulações de $K_5$ sobre $P$

As modulações não-orientáveis de  $K_5$  sobre  $P$  não possuem modelos equivalentes no ambiente das superfícies orientáveis, pois são modelos exclusivos das superfícies não-orientáveis. Para identificar os modelos das partições das modulações de  $K_5$  sobre  $P$ , usamos a segunda fórmula em (2.6), para obter a característica de Eüler de  $P$ , a qual é dada por

$$\chi(P) = 2 - 1 = 1,$$

logo, pela igualdade (2.5), o número de regiões dos mergulhos de  $K_5$  sobre  $P$  é dado por

$$\chi(P) = v - e + f \Rightarrow 1 = 5 - 10 + \alpha \Rightarrow \alpha = 6$$

e, portanto, todo mergulho de  $K_5$  sobre  $P$  é da forma  $K_5 \hookrightarrow P \equiv \cup_{i=1}^6 R_{\alpha_i}^i$ . Daí, o grafo  $K_5$  possui mergulhos nas superfícies homeomorfas a  $P$  com até 5 componentes de bordos e são mergulhos da forma

$$\begin{aligned} K_5 \hookrightarrow P &\equiv \cup_{i=1}^6 R_{\alpha_i}^i, & K_5 \hookrightarrow P_1 &\equiv \cup_{i=1}^5 R_{\alpha_i}^i, & K_5 \hookrightarrow P_2 &\equiv \cup_{i=1}^4 R_{\alpha_i}^i, \\ K_5 \hookrightarrow P_3 &\equiv \cup_{i=1}^3 R_{\alpha_i}^i, & K_5 \hookrightarrow P_4 &\equiv \cup_{i=1}^2 R_{\alpha_i}^i, & K_5 \hookrightarrow P_5 &\equiv \cup_{i=1}^1 R_{\alpha_i}^i. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Além disso, consideraremos o mergulho de  $K_5$  sobre  $P_6$  formado somente pelo grafo  $K_5$ , mergulho indicado por

$$K_5 \hookrightarrow P_6 \equiv K_5. \quad (4.39)$$

Neste caso, todos os mergulhos relacionados em (4.38) e (4.39), podem ser utilizados para projetos de modulações *twisted*, uma vez que estas são projetadas sobre curvas. Já as modulações do tipo QAMS exigem que a partição tenha pelo menos duas regiões, caso da modulação binária. Sendo assim, só não é possível projetar uma QAMS sobre o mergulho  $K_5 \hookrightarrow P_6 \equiv K_5$  e o último mergulho de  $K_5 \hookrightarrow P_5 \equiv \cup_{i=1}^1 R_{\alpha_i}^i$  de (4.38).

As modulações de  $K_5$  ocorrem sobre superfícies  $P_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, 6$ , com as respectivas partições relacionadas em (4.38) e (4.39). Com isto, devemos identificar todas as formas possíveis de partições, através da combinação de regiões  $R_3, R_4, \dots$ , que satisfazem as condições do número de regiões do mergulho  $K_5 \hookrightarrow P_j \equiv \cup_{i=1}^{6-j} R_{\alpha_i}^i$ . A Tabela 4.3.4, mostra todas as combinações possíveis que definem as modulações de  $K_5$  sobre  $P_\mu$ .

Na Tabela 4.3.4, as partições referentes às modulações regulares estão destacadas em azul. Este padrão será adotado nas demais tabelas. Uma inspeção nos modelos de modulações da Tabela 4.3.4 nos mostra que não há modulações regulares sobre  $P$ , porém, somente

Partição sem bordo		Partições de mergulhos com bordos						
$\Omega$	$P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	#
$\Xi_1$	$5R_3R_5$	$5R_3, 4R_3R_5$	$4R_3, 3R_3R_5$	$3R_3, 2R_3R_5$	$2R_3, R_3R_5$	$R_3, R_5$	$K_5$	12
$\Xi_2$	$4R_32R_4$	$4R_3R_4$ $3R_32R_4$	$4R_3, 3R_3R_4$ $2R_32R_4$	$3R_3, 2R_3R_4$ $R_32R_4$	$2R_3, R_3R_4$ $2R_4$	$R_3, R_4$	$K_5$	15
#	2	4	5	5	5	4	2	27

Tabela 4.3.4: Partições das modulações de  $K_5$  sobre  $P_\mu$ 

nas superfícies com bordos  $P_\mu$ , mais precisamente, as modulações definidas pelas seguintes partições

$$P_1 \equiv 5R_3, \quad P_2 \equiv 4R_3, \quad P_3 \equiv 3R_3, \quad P_4 \equiv 2R_3, 2R_4$$

onde  $P_4 \equiv 2R_3, 2R_4$  indicam que  $K_5$  possui mergulhos sobre  $P_4$  com partições do tipo  $2R_3$  e  $2R_4$ . Portanto, são 5 modulações não-orientáveis da forma QAMS de  $K_5$  sobre superfícies não-orientáveis com bordos homeomorfas a  $P_\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3, 4$ .

Por exemplo, se  $\Xi = 4R_32R_4$  é composto por 6 regiões, então, pela Definição 4.1.1,  $K_5$  possui mergulhos sobre as superfícies  $P, P_1, P_2, \dots, P_6$ , correspondentes aos mergulhos com  $0, 1, \dots, 6$  componentes de bordos. Neste caso, temos  $\Omega_6(\Xi) = \{P, P_1, P_2, \dots, P_6\}$ .

### Modulações de $K_5$ sobre $T$ ou $2P$

Do mesmo modelo como foram relacionadas as modulações do grafo completo  $K_5$  sobre a superfície  $P$ , as modulações de  $K_5$  sobre as superfícies  $T$  e  $2P$ , estarão relacionadas na Tabela 4.3.5. (Lembre-se que os modelos de  $T$  e  $2P$  são idênticos).

Na Tabela 4.3.5, as partições em vermelho indicam que as mesmas não foram encontradas nas superfícies não-orientáveis, pois é um modelo típico de uma modulação não-orientável no sentido de que se o mesmo existe, só poderá ser realizável através de um mergulho não-orientável.

Foi comprovado após o processamento do algoritmo 2.6.1, que existe uma única modulação regular de  $K_5$  e esta se encontra sobre o toro. É uma modulação para uma constelação de 5 sinais definida sobre 5 regiões quadrangulares sobre  $T$ . Seria esta, também, uma modulação de  $2P$ ? Não sabemos.

Além da modulação de  $K_5$  em superfícies sem bordo definidas pelo mergulho  $K_5 \hookrightarrow 2P \equiv 4R_5$ , existem ainda as modulações regulares sobre superfícies com bordos homeomorfas a  $T_\mu$  ou  $2P_\mu$ , definidas pelas seguintes partições:

$$T_1, 2P_1 \equiv 4R_3, 4R_4, \quad T_2, 2P_2 \equiv 3R_3, 3R_4, \quad T_3, 2P_3 \equiv 2R_3, 2R_4, 2R_5.$$

Portanto, são 8 modulações regulares de  $K_5$  sobre a superfície orientável  $T_\mu$  ou a não-orientável  $2P_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , sendo que, somente uma delas, a modulação vinda do mergulho  $K_5 \hookrightarrow T \equiv 5R_4$ , encontra-se sobre uma superfície sem bordo. Que estas modulações podem ser realizadas nas superfícies orientáveis, nós temos certeza, entretanto, não podemos afirmar se mesmas são realizáveis nas suas respectivas superfícies não-orientáveis.

Partição sem bordo		Partições de mergulhos com bordos					
$\Omega$	$T, 2P$	$T_1, 2P_1$	$T_2, 2P_2$	$T_3, 2P_3$	$T_4, 2P_4$	$T_5, 2P_5$	#
$\Xi_1$	$4R_3R_8$	$4R_3, 3R_3R_8$	$3R_3, 2R_3R_8$	$2R_3, R_3R_8$	$R_3, R_5$	$K_5$	10
$\Xi_2$	$3R_3R_4R_7$	$3R_3R_4, 3R_3R_7$ $2R_3R_4R_7$	$2R_3R_4, 2R_3R_7$ $3R_3, R_3R_4R_7$	$R_3R_4, R_3R_7$ $2R_3, R_4R_7$	$R_3, R_4$ $R_7$	$K_5$	16
$\Xi_3$	$3R_3R_5R_6$	$3R_3R_5, 3R_3R_6$ $2R_3R_5R_6$	$2R_3R_5, 2R_3R_6$ $3R_3, R_3R_5R_6$	$R_3R_5, R_3R_6$ $2R_3, R_5R_6$	$R_3, R_5$ $R_6$	$K_5$	16
$\Xi_4$	$2R_32R_4R_6$	$2R_32R_4$ $2R_3R_4R_6$ $R_32R_4R_6$	$2R_3R_4, 2R_3R_6$ $R_32R_4, 2R_4R_6$ $R_3R_4R_6$	$2R_3, R_3R_4$ $2R_4, R_3R_6$ $R_4R_6$	$R_3$ $R_4$ $R_6$	$K_5$	18
$\Xi_5$	$2R_3R_42R_5$	$2R_3R_4R_5$ $2R_32R_5$ $R_3R_42R_5$	$2R_3R_4, 2R_3R_5$ $R_32R_5, R_42R_5$ $R_3R_4R_5$	$2R_3, R_3R_5$ $2R_5, R_3R_5$ $R_4R_5$	$R_3$ $R_4$ $R_5$	$K_5$	18
$\Xi_6$	$R_33R_4R_5$	$R_33R_4, 3R_4R_5$ $R_32R_4R_5$	$R_3R_4R_5, R_32R_4$ $2R_4R_5, 3R_4$	$R_3R_4, R_3R_5$ $R_4R_5, 2R_4$	$R_3, R_4$ $R_5$	$K_5$	16
$\Xi_7$	$5R_4$	$4R_4$	$3R_4$	$2R_4$	$R_4$	$K_5$	6
#	7	18	25	25	18	7	100

Tabela 4.3.5: Partições das modulações de  $K_5$  sobre  $T_\mu$  ou  $2P_\mu$ 

A ausência de um algoritmo para o caso não-orientável nos faz falta neste momento. Pelo observado e pela aprendizagem com o caso orientável, estamos prevendo uma série de dificuldades. O nosso propósito para futuros trabalhos será construir um algoritmo identificador de mergulhos não-orientáveis.

### Modulações de $K_5$ sobre $3P$

Os modelos de modulações relacionados na Tabela 4.3.6, são exclusivos dos mergulhos de  $K_5$  sobre a superfície  $3P_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, 4$ , no sentido dos modelos das partições sobre superfícies sem bordos só serem realizados no caso específico da superfície  $3P$  e em nenhuma outra superfície orientável. Obviamente que foram determinadas com os mesmos procedimentos utilizados nos dois casos anteriores.

Segue, da Tabela 4.3.6, que os modelos de modulações regulares de  $K_5$  sobre a família de superfícies não-orientáveis  $3P_\mu$  são:

$$3P \equiv 4R_5, \quad 3P_1 \equiv 3R_3, 3R_4, 3R_5, \quad 3P_2 \equiv 2R_3, 2R_4, 2R_5, 2R_6, 2R_7, 3R_3,$$

portanto, existem 10 modulações regulares QAMS não-orientáveis de  $K_5$  sobre  $3P_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2$ . Dentre estas, destacamos a modulação para uma constelação de 4 sinais distribuídos sobre regiões de decisão pentagonais. É um dos exemplos raros de modulação regulares de  $K_5$  sobre superfície não-orientável. Será que ela existe de fato? Ainda não sabemos responder, com precisão, esta questão. Provavelmente, exista e seja a modulação QAMS sobre uma superfície sem bordo não-orientável e ainda será uma modulação não-orientável

de  $K_5$  com o número máximo de 4 sinais. É uma composição nada trivial formada por 4 regiões pentagonais.

Partição sem bordo		Partições de mergulhos com bordos				
$\Omega$	$3P$	$3P_1$	$3P_2$	$3P_3$	$3P_4$	#
$\Xi_1$	$3R_3R_{11}$	$3R_3, 2R_3R_{11}$	$2R_3, R_3R_{11}$	$R_3, R_{11}$	$K_5$	8
$\Xi_2$	$2R_3R_4R_{10}$	$2R_3R_4, 2R_3R_{10}$ $R_3R_4R_{10}$	$2R_3, R_3R_4$ $R_3R_{10}, R_4R_{10}$	$R_3, R_4$ $R_{10}$	$K_5$	12
$\Xi_3$	$2R_3R_5R_9$	$2R_3R_5, 2R_3R_9$ $R_3R_5R_9$	$2R_3, R_3R_5$ $R_3R_9, R_5R_9$	$R_3, R_5$ $R_9$	$K_5$	12
$\Xi_4$	$2R_3R_6R_8$	$2R_3R_6, 2R_3R_8$ $R_3R_6R_8$	$2R_3, R_3R_6$ $R_3R_8, R_6R_8$	$R_3, R_6$ $R_8$	$K_5$	12
$\Xi_5$	$2R_32R_7$	$2R_3R_7, R_32R_7$	$2R_3, 2R_7, R_3R_7$	$R_3, R_7$	$K_5$	9
$\Xi_6$	$R_32R_4R_9$	$R_32R_4, 2R_4R_9$ $R_3R_4R_9$	$R_3R_4, R_3R_9$ $2R_4, R_4R_9$	$R_3, R_4$ $R_9$	$K_5$	12
$\Xi_7$	$R_3R_4R_5R_8$	$R_3R_4R_5, R_3R_4R_8$ $R_3R_5R_8, R_4R_5R_8$	$R_3R_4, R_3R_5, R_4R_5$ $R_3R_8, R_4R_8, R_5R_8$	$R_3, R_4$ $R_5, R_8$	$K_5$	16
$\Xi_8$	$R_3R_4R_6R_7$	$R_3R_4R_6, R_3R_4R_7$ $R_3R_6R_7, R_4R_6R_7$	$R_3R_4, R_3R_6, R_4R_6$ $R_3R_7, R_4R_7, R_6R_7$	$R_3, R_4$ $R_6, R_7$	$K_5$	16
$\Xi_9$	$R_32R_5R_7$	$R_32R_5, 2R_5R_7$ $R_3R_5R_7$	$R_3R_5, R_3R_7$ $2R_5, R_5R_7$	$R_3, R_5$ $R_7$	$K_5$	12
$\Xi_{10}$	$R_3R_52R_6$	$R_32R_6, R_52R_6$ $R_3R_5R_6$	$R_3R_5, R_3R_6$ $R_5R_6, 2R_4$	$R_3, R_5$ $R_6$	$K_5$	12
$\Xi_{11}$	$3R_4R_8$	$3R_4, 2R_4R_8$	$2R_4, R_4R_8$	$R_4, R_8$	$K_5$	8
$\Xi_{12}$	$2R_4R_5R_7$	$2R_4R_5, 2R_4R_7$ $R_4R_5R_7$	$2R_4, R_4R_5$ $R_4R_7, R_5R_7$	$R_4, R_5$ $R_7$	$K_5$	12
$\Xi_{13}$	$2R_42R_6$	$2R_4R_6, R_42R_6$	$2R_4, 2R_6, R_4R_6$	$R_4, R_6$	$K_5$	9
$\Xi_{14}$	$R_42R_5R_6$	$R_42R_5, 2R_5R_6$ $R_4R_5R_6$	$2R_5, R_4R_5$ $R_4R_6, R_5R_6$	$R_4, R_5$ $R_6$	$K_5$	12
$\Xi_{15}$	$4R_5$	$3R_5$	$2R_5$	$R_5$	$K_5$	5
#	15	41	55	41	15	167

Tabela 4.3.6: Partições das modulações de  $K_5$  sobre  $3P_\mu$ 

Uma tentativa de construir modulações não-orientáveis de  $K_5$  sobre  $3P$ , resultou na obtenção dos seguintes projetos topológicos mostrados na Figura 4.3.2.

Embora tenham sido feitas várias tentativas de se obter a modulação regular  $4R_5$  de  $3P$ , o mergulho (b) da Figura 4.3.2, cuja partição é da forma  $R_42R_5R_6$ , foi o modelo mais próximo do regular obtido. Em (a), apesar das regiões não estarem contidas em uma única região do polígono  $\omega(3P)$ , é um mergulho com 5 regiões, diferente do modelo de 4 regiões procurado.

Novamente nos deparamos com um problema de incompatibilidade com a fórmula de Eüler (2.5). De fato, pela segunda igualdade de (2.6) a característica de Eüler, de  $3P$ , é

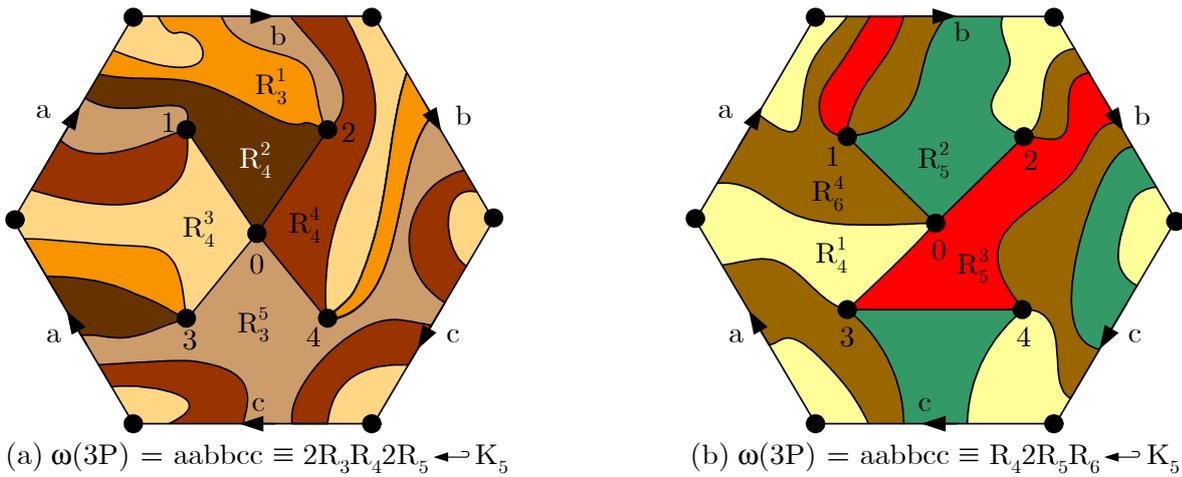


Figura 4.3.2: Projetos topológicos de classes de modulações de  $K_5$  sobre  $3P$

dada por

$$\chi(3P) = 2 - 3 = -1,$$

no entanto, se verificarmos a relação de Eüler, para os mergulhos (a) e (b), da Figura 4.3.2, teremos

$$\begin{aligned} (a) & : 5 - 10 + 5 = 0 = \chi(2P) \\ (b) & : 5 - 10 + 4 = -1 = \chi(3P). \end{aligned}$$

Mas (a) é um mergulho sobre  $3P$  e não sobre  $2P$ . Qual seria a explicação para este fenômeno? Ou (a) não é um mergulho de 2-células, o que é um absurdo, pois assim (b) também não o seria, ou existem mergulhos de 2-células distintos em uma mesma superfície não-orientável. A segunda afirmação é a que faz mais sentido.

### 4.3.6 Modulações de $K_5$ sobre $2T$ ou $4P$

O conjunto de modulações de  $K_5$  sobre  $2T$  ou  $4P$  contém o maior número de modulações orientáveis quando comparado com as modulações de  $K_5$  sobre o toro e o tritoro. Pela Tabela 4.3.3, são 15 modelos distintos de modulações de  $K_5$  sobre  $2T$ , contra 5 de modulações do toro  $T$  e somente uma do tritoro  $3T$ . Dos 16 modelos de modulações previstos na Tabela 4.3.1, somente o modelo  $R_{6,7,7}$  não é realizável sobre  $2T$ , porém, como o mesmo pode ser realizável na superfície não-orientável  $4P$ , incluiremos, na Tabela 4.3.7, todas as partições sobre superfícies com bordos não-orientáveis, provenientes do mergulho  $K_5 \hookrightarrow 3T \equiv R_{6,7,7}$ . As partições oriunda de  $R_{6,7,7}$ , encontram-se destacadas em vermelho na Tabela 4.3.7, e só serão computadas no processo de contagem das modulações QAMS's e *twisted* do grafo completo  $K_5$ . Obviamente, não serão computadas no caso orientável já que foi constatado pelo Algoritmo 2.6.1 que a mesma não existe.

Partição sem bordo		Partições de mergulhos com bordos			
$\Omega$	$2T, 4P$	$2T_1, 4P_1$	$2T_2, 4P_2$	$2T_3, 4P_3$	#
$\Xi_1$	$2R_3R_{14}$	$2R_3, R_3R_{14}$	$R_3, R_{14}$	$K_5$	6
$\Xi_2$	$R_3R_4R_{13}$	$R_3R_4, R_3R_{13}, R_4R_{13}$	$R_3, R_4, R_{13}$	$K_5$	8
$\Xi_3$	$R_3R_5R_{12}$	$R_3R_5, R_3R_{12}, R_5R_{12}$	$R_3, R_5, R_{12}$	$K_5$	8
$\Xi_4$	$R_3R_6R_{11}$	$R_3R_6, R_3R_{11}, R_6R_{11}$	$R_3, R_6, R_{11}$	$K_5$	8
$\Xi_5$	$R_3R_7R_{10}$	$R_3R_7, R_3R_{10}, R_7R_{10}$	$R_3, R_7, R_{10}$	$K_5$	8
$\Xi_6$	$R_3R_8R_9$	$R_3R_8, R_3R_9, R_8R_9$	$R_3, R_8, R_9$	$K_5$	8
$\Xi_7$	$2R_4R_{12}$	$2R_4, R_4R_{12}$	$R_4, R_{12}$	$K_5$	6
$\Xi_8$	$R_4R_5R_{11}$	$R_4R_5, R_4R_{11}, R_5R_{11}$	$R_4, R_5, R_{11}$	$K_5$	8
$\Xi_9$	$R_4R_6R_{10}$	$R_4R_6, R_4R_{10}, R_6R_{10}$	$R_4, R_6, R_{10}$	$K_5$	8
$\Xi_{10}$	$R_4R_7R_9$	$R_4R_7, R_4R_9, R_7R_9$	$R_4, R_7, R_9$	$K_5$	8
$\Xi_{11}$	$R_4R_8R_8$	$R_4R_8, 2R_8$	$R_4, R_8$	$K_5$	6
$\Xi_{12}$	$R_5R_5R_{10}$	$2R_5, R_5R_{10}$	$R_5, R_{10}$	$K_5$	6
$\Xi_{13}$	$R_5R_6R_9$	$R_5R_6, R_5R_9, R_6R_9$	$R_5, R_6, R_9$	$K_5$	8
$\Xi_{14}$	$R_5R_7R_8$	$R_5R_7, R_5R_8, R_7R_8$	$R_5, R_7, R_8$	$K_5$	8
$\Xi_{15}$	$2R_6R_8$	$2R_6, R_6R_8$	$R_6, R_8$	$K_5$	6
$\Xi_{16}$	$R_62R_7$	$R_6R_7, 2R_7$	$R_6, R_7$	$K_5$	6
#	16	42	42	16	116

Tabela 4.3.7: Partições das modulações de  $K_5$  sobre  $2T_\mu$  ou  $4P_\mu$ 

As modulações regulares de  $K_5$  sobre a família de superfícies  $2T_\mu$  ou  $4P_\mu$  encontram-se sobre uma superfície,  $2T_1$  ou  $4P_1$ , definidas pelas seguintes partições

$$K_5 \hookrightarrow 2T_1, 4P_1 \equiv 2R_3, 2R_4, 2R_5, 2R_6, 2R_7, 2R_8.$$

Observamos que todas as modulações regulares de  $K_5$  sobre  $2T_1$  ou  $4P_1$  são binárias e podem ser escolhidas sobre regiões de 3 até 8 lados, sendo  $2R_8$  o projeto com o melhor desempenho, uma vez que este está definido sobre regiões com o maior número de lados.

### 4.3.7 Modulações de $K_5$ sobre $5P$

Como se trata de modulações não-orientáveis, novamente será apresentado, na Tabela 4.3.8, somente a estimativa de todos os modelos possíveis de modulações de  $K_5$  sobre  $5P$ . Quando falamos em estimativa devemos ter em mente que a maioria dos modelos de partições relacionados na Tabela 4.3.8 existem de fato.

As construções de mergulhos não-orientáveis realizada ao longo dos últimos anos, mostraram que a probabilidade de se obter um mergulho não-orientável é bem maior do que o orientável. Pelo menos foi esta a sensação que tivemos. Vale lembrar, como ocorreu nos mergulhos das Figuras 4.2.1, 4.2.2 e 4.3.2, que sobre um mesmo tipo de superfície não-orientável existe mais de um mergulho de 2-células, o que nos leva a conclusão sobre a probabilidade de existência ser maior nas classes de superfícies não-orientáveis.

Partição sem bordo		Partições com bordos			Partição sem bordo		Partições com bordos		
$\Omega$	$5P$	$5P_1$	$5P_2$	#	$\Omega$	$5P$	$5P_1$	$5P_2$	#
$\Xi_1$	$R_3R_{17}$	$R_3, R_{17}$	$K_5$	4	$\Xi_5$	$R_7R_{13}$	$R_7, R_{13}$	$K_5$	4
$\Xi_2$	$R_4R_{16}$	$R_4, R_{16}$	$K_5$	4	$\Xi_6$	$R_8R_{12}$	$R_8, R_{12}$	$K_5$	4
$\Xi_3$	$R_5R_{15}$	$R_5, R_{15}$	$K_5$	4	$\Xi_7$	$R_9R_{11}$	$R_9, R_{11}$	$K_5$	4
$\Xi_4$	$R_6R_{14}$	$R_6, R_{14}$	$K_5$	4	$\Xi_8$	$2R_{10}$	$R_{10}$	$K_5$	3
#	4	8	4	16	#	4	7	4	15

Tabela 4.3.8: Partições das modulações de  $K_5$  sobre  $5P$

Todos os modelos de mergulhos em superfícies com bordos  $5P_\mu$ , de  $K_5$ , são compostos de uma região, logo, não existe modulações QAMS em superfícies com bordos sobre a família de  $5P$ , portanto, são todas modulações do tipo *twisted*. Modulações QAMS sobre esta família, somente existem na superfície sem bordo  $5P$ , na qual possui a modulação binária de maior desempenho de  $K_5$ , ou seja, a modulação regular  $2R_{10}$ .

Observamos, que no caso orientável a modulação binária de maior desempenho é da forma  $2R_8$  e se encontra sobre a superfície com bordo  $2T_1$  (ou  $4P_1$ ).

### 4.3.8 A quantidade de modulações de $K_5$

Cada partição  $\Xi$  existente nas Tabelas 4.3.4-4.3.8 corresponde a um projeto de modulação vindo de um mergulho de  $K_5$ . No caso da partição se encontrar sobre uma superfície orientável  $gT_\mu$ , a modulação só existe se a partição  $\Xi_s$  da superfície sem bordo  $gT$  é uma das relacionadas na 4ª linha da Tabela 4.3.3. Quanto à partição não-orientável sem bordo  $\Xi_s$ , não se tem certeza de sua existência, as Tabelas 4.3.4-4.3.8 relacionam todas as suas partições. Só teremos certeza de que a modulação com bordo  $\Xi_b \equiv \Omega_\mu$  existe se, e somente se, o mergulho sem bordo  $\Xi_s \equiv \Omega$  é realizável.

A Tabela 4.3.9 mostra a quantidade de classes de modulações QAMS regulares e irregulares nas diversas famílias de mergulhos de  $K_5$ . Os dados referentes aos casos orientáveis são reais. O número de modulações correspondentes as partições  $\Xi$ , realmente existem e todos os seus modelos topológicos podem ser construídos, inclusive os casos com bordos. Os dados referentes as modulações não-orientáveis referem-se a todos os possíveis modelos de partições de mergulhos não-orientáveis de  $K_5$ .

$P_\mu$			$T_\mu$ ou $2P_\mu$				$3P_\mu$					$2T_\mu$ ou $4P_\mu$						$5P_\mu$			$2T_\mu$ ou $4P_\mu$											
$\Xi$	$\Xi_s$	$\Xi_b$	$\Xi$	$\Xi_s$	$\Xi_b$	$\Xi$	$\Xi_s$	$\Xi_b$	$\Xi$	$\Xi_s$	$\Xi_b$	$\Xi$	$\Xi_s$	$\Xi_b$	$\Xi$	$\Xi_s$	$\Xi_b$	$\Xi$	$\Xi_s$	$\Xi_b$	$\Xi$	$\Xi_s$	$\Xi_b$									
$\bar{\Omega}$	$R$	$I$	$R$	$I$	$\Omega$	$\bar{\Omega}$	$R$	$I$	$R$	$I$	$\bar{\Omega}$	$R$	$I$	$R$	$I$	$\Omega$	$\bar{\Omega}$	$R$	$I$	$R$	$I$	$\Omega$	$\bar{\Omega}$	$R$	$I$	$R$	$I$					
2	—	2	6	21	5	7	1	4	15	31	15	1	14	16	121	15	16	0	16	6	36	8	1	7	—	—	1	1	—	—	—	—
	2	27				5	46				15	137						16	42			8	—			—	—					
2		29			7		51		7		152			16		58		8		8		1									—	

Tabela 4.3.9: Quantidades de classes de modulações QAMS de  $K_5$

Os modelos de modulações das superfícies  $gT_\mu$  ou  $2gP_\mu$  são idênticos. Por isto, na Tabela 4.3.9, indicamos as superfícies orientáveis e não-orientáveis sem bordos por  $\Omega_s$  e as orientáveis e não-orientáveis com bordos por  $\Omega_b$ . Nas superfícies da forma  $\bar{g}P_\mu$  só há modelos típicos de superfícies não-orientáveis, daí a notação  $\bar{\Xi}_s$  e  $\bar{\Xi}_b$  para indicar as respectivas partições em superfícies não-orientáveis sem e com bordos.

As linhas da Tabela 4.3.9 indicam os seguintes elementos das classes de modulações QAMS do grafo completo  $K_5$ :

- a) A primeira linha indicamos as famílias de superfícies sem bordos  $\Omega_\mu$ ;
- b) A segunda refere-se aos modelos orientáveis  $\Xi$  e não-orientáveis  $\bar{\Xi}$  com e sem bordos das classes de modulações QAMS do grafo completo  $K_5$ ;
- c) Na terceira linha nos referimos aos modelos regulares  $R$  e irregulares  $I$  das partições  $\Xi$  referentes a mergulhos sem bordos (no caso das superfícies da forma  $gT_\mu$  ou  $2gP_\mu$  o número de partições em superfícies orientáveis  $\Omega$  é diferente do número das partições em superfícies não-orientáveis);
- d) A quarta linha contém os respectivos subtotais de todas as classes de modulações;
- e) A quinta linha apresenta os totais de classes de modulações sem bordos e com bordos e;
- f) A sexta linha contém os respectivos totais.

Após a construção da Tabela 4.3.9, percebemos que no caso das superfícies  $gT_\mu$  ou  $2gP_\mu$ , os números de modulações vindos de mergulhos sem bordos  $\Xi_s$  e com bordos  $\Xi_c$  expressam somente o número de partições do caso não-orientável  $2gP_\mu$ . Como dois modelos de  $T$  e um modelo de  $2T$  não são realizáveis, o número de modelos  $\Xi_s$  e  $\Xi_c$  nestas superfícies são menores do que os expressados na Tabela 4.3.9. A seguir, iremos tratar desta pequena discrepância.

Ao nos referirmos a uma determinada modulação, por exemplo, a modulação  $R_{3,3,8}$  sobre  $2T$ , devemos saber que, pela Tabela 4.3.3, esta modulação é realizada por 950 mergulhos de  $K_5$ . Então, ao nos referirmos a uma modulação em particular, estamos, na verdade, falando de uma classe de modulações. Sendo assim, concluímos dos dados contidos na Tabela 4.3.9, que existem 297 classes de modulações orientáveis de  $K_5$ .

QAMS								<i>Twisted</i>		
$\Omega$	Sem bordo			Com bordo			Tot	Sem bordo	Com bordo	Tot
	<i>R</i>	<i>I</i>	Sub	<i>R</i>	<i>I</i>	Sub				
$T$	1	4	5	11	35	46	51	5	65	70
$2T$	–	15	15	5	35	40	55	15	55	70
$3T$	–	–	–	–	–	–	–	1	1	2
3	1	19	20	16	70	86	116	21	121	142
QAMS								<i>Twisted</i>		
$\bar{\Omega}$	Sem bordo			Com bordo			Tot	Sem bordo	Com bordo	Total
	<i>R</i>	<i>I</i>	Sub	<i>R</i>	<i>I</i>	Sub				
$P$	–	2	2	6	13	19	21	2	25	27
$2P$	1	6	7	16	52	68	75	7	93	100
$3P$	1	14	15	16	80	96	111	15	152	167
$4P$	–	16	16	6	78	84	100	16	142	158
$5P$	1	7	8	–	15	15	23	8	46	54
5	3	45	48	44	238	282	330	48	458	506
8	4	64	68	60	308	368	446	69	579	648

Tabela 4.3.10: Cardinalidade das classes de Modulações de  $K_5$ 

Os dados obtidos na Tabela 4.3.10 fornecem, precisamente, o número de modulações orientáveis existentes em mergulhos de  $K_5$ . Vale ressaltar que todos os 116 mergulhos orientável de  $gT$ ,  $g = 1, 2, 3$ , podem ser construídos, logo, temos a certeza de que 116 projetos de modulações de  $K_5$  podem ser realizáveis. No caso particular de  $T$ , todas as 5 modulações em superfícies sem bordo, e todas as 46 modulações em superfícies com bordos, podem ser utilizadas em sistemas de comunicação, como modulações QAMS [3] e *twisted* [32].

A realização dos projetos de modulações QAMS e *twisted* de  $K_5$ , só depende da existência da parametrização da superfície do conjunto  $\mathbb{S}(K_5)$  determinado em (4.33). Se a parametrização de  $\Omega$  existe, então as modulações QAMS e *twisted* de  $K_5$  podem ser realizáveis em  $\Omega$ , via geometria diferencial, desde que exista um mergulho de 2-células de  $K_5$  sobre  $\Omega$ .

Concluimos ainda, da Tabela 4.3.10, que o número de modulações *twisted* de um grafo é maior do que as QAMS, que existem mais modulações em superfícies não-orientáveis do que nas orientáveis e que o número de modulações em superfícies com bordos é maior do que o número de modulações em superfícies sem bordos.

Em particular, o grafo  $K_5$  possui 446 modulações QAMS, sendo 116 orientáveis e 330 não-orientáveis, e 648 possíveis modelos de modulações *twisted*, sendo 142 orientáveis e 506 não-orientáveis. Logo, o número de modulações QAMS não-orientáveis é aproximadamente igual a 2,8448 vezes o número de orientáveis, e o número de modulações *twisted* não-orientáveis é aproximadamente igual a 3,5634 vezes o número de orientáveis.

É importante ainda observar, na Tabela 4.3.10, a diferença de números de modulações nas diferentes classes de superfícies. As 446 modulações QAMS's são distribuídas da seguinte forma: das 68 sem bordos, 20 são orientáveis e 48 são não-orientáveis, o que corresponde

a 2,4 vezes às orientáveis; das 368 com bordos, 86 são orientáveis e 282 não-orientáveis com bordos, o que equivale a 3,28 vezes ao número de orientáveis. As 648 modulações *twisted*s apresentam a seguinte distribuição: das 69 sem bordos, 21 são orientáveis e 48 são não-orientáveis, correspondendo a 2,286 vezes das orientáveis; das 579 com bordos, 121 são orientáveis e 488 não-orientáveis com bordos, o que equivale a 4,033 vezes ao número de orientáveis.

Quando comparamos o número de modulações sem bordos com o número de modulações com bordos, a diferença é bem mais acentuada. Observe que são 137 modulações sem bordos e 947 com bordos, o que totaliza um número de 6,9 vezes maior do que as sem bordos. Consequentemente, são 1084 modulações vindos de mergulhos de  $K_5$ .

Da análise acima sobre o número de modulações das classes de superfícies distintas, concluímos que é importante explorarmos as modulações em superfícies não-orientáveis. A estimativa mostra que há aproximadamente três vezes mais modulações não-orientáveis. Pela construção dos modelos não-orientáveis apresentados na Figura 4.2.2, deduzimos que o número de modulações não-orientáveis pode ser bem superior ao valor estimado, uma vez que é possível encontrar mais de um modelo de partição com números de regiões distintas sobre uma mesma superfície.

Quanto às modulações em superfícies com bordos, estas representam os maiores índices de existência dentre todas as famílias de superfícies. Além disso, muitas superfícies com bordos possuem formas parametrizadas que permitem a realização destes projetos. Por isto, os mergulhos com bordo são altamente recomendados para projetos de modulações sobre superfícies.

## 4.4 Modulações do Grafo Completo Bipartido $K_{4,4}$

Apresentaremos aqui as principais características das modulações sobre superfícies vindas de mergulhos do grafo completo bipartido  $K_{m,n}$ . A menos das propriedades particulares, pois  $K_{m,n}$  possui algumas características diferentes, o processo de identificação é análogo ao do grafo completo  $K_n$ . Como o processo de identificação foi detalhado para o caso do grafo completo  $K_5$ , a identificação de  $K_{4,4}$  será feita de modo um pouco mais resumido.

### 4.4.1 Características particulares das modulações de $K_5$ e $K_{4,4}$

As principais diferenças entre grafos completos e grafos completos bipartidos, relacionadas a questão dos mergulhos, são apresentadas a seguir. Para isto, consideraremos  $R_{\alpha_{\min}}(G)$  como sendo a região com o menor número de lados dos mergulhos de  $G$ , e  $d_{\text{Lee}}^{\min}(R_s)$  como sendo a distância mínima de um emaranhado  $R_s$  de um mergulho de  $G$  determinada entre todos os emaranhados de  $G$ .

**Afirmção 4.4.1** *Em relação as sequências orbitais, as principais diferenças entre o grafo completo  $K_n$  e o grafo completo bipartido  $K_{m,n}$  são:*

1.  $R_{\alpha_{\min}}(K_n) = R_3$  e  $R_{\alpha_{\min}}(K_{m,n}) = R_4$ ;

2. Se  $R_s \in K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$ , então  $m$  é par maior ou igual a 4, isto é,

$$m = 4 + 2t, t \in \{0, 1, 2, \dots\};$$

3. Se  $R_s \in K_{m,n} \hookrightarrow \Omega$ , então  $m$  é par ou ímpar maior ou igual a 3;

4. A distância de Lee mínima de um emaranhado  $R_s$ ,  $d_{\text{Lee}}^{\min}(R_s)$ , satisfaz a condição

$$d_{\text{Lee}}^{\min}(R_s) = \begin{cases} 3, & \text{se } R_s \in K_m \hookrightarrow \Omega \\ 4, & \text{se } R_s \in K_{m,n} \hookrightarrow \Omega. \end{cases} \quad (4.40)$$

**Demonstração.** As provas das afirmações acima encontram-se em [15] e [18]. ■

A Afirmação 4.4.1 mostra como são as regiões de mergulhos de  $K_n$  e  $K_{m,n}$ . Observamos que todas as regiões de mergulhos de  $K_{m,n}$  possuem números de lados pares maiores ou iguais a 4, enquanto as regiões de mergulhos de  $K_n$  possuem regiões com números de lados ímpares ou pares com números de lados maiores ou iguais a 3.

Concluimos ainda, da Afirmação 4.4.1, que a distância de Lee mínima de um emaranhado de  $G$  é igual ao número de lados da região com o menor número de lados. A região mínima é avaliada no conjunto das regiões de todos os mergulhos de  $G$  e não em mergulhos particulares. Sendo assim, a distância de Lee mínima de um emaranhado de  $G$  é dada por

$$d_{\text{Lee}}^{\min}(G) = \alpha_{\min}(G). \quad (4.41)$$

No caso dos grafos  $K_n$  e  $K_{m,n}$ , as distâncias de Lee mínimas são dadas respectivamente por

$$d_{\text{Lee}}^{\min}(K_n) = 3 = \alpha_{\min}(K_n) \quad \text{e} \quad d_{\text{Lee}}^{\min}(K_{m,n}) = 4 = \alpha_{\min}(K_{m,n}). \quad (4.42)$$

Se  $d_{\text{Lee}}^{\min}$  é o fator que decide pela escolha da modulação, as igualdades em (4.42) são úteis neste processo decisório.

#### 4.4.2 Os modelos das modulações de $K_{4,4}$

Conhecidas as características das regiões do grafo completo bipartido  $K_{m,n}$ , nos concentraremos agora no grafo  $K_{4,4}$ . Pelas igualdades (2.7), (2.8) e (2.9), os gêneros mínimos orientável e não-orientável do grafo  $K_{4,4}$  são dados por

$$\gamma(K_{4,4}) = \left\{ \frac{(4-2)(4-2)}{4} \right\} = 1$$

e

$$\bar{\gamma}(K_n) = \left\{ \frac{(4-2)(4-2)}{2} \right\} = 2.$$

Conseqüentemente,  $K_{4,4}$  encontra-se mergulhado minimamente sobre as superfícies  $T$  e  $2P$ . Utilizando as igualdades de (2.6) deduzimos que

$$\chi(T) = 2 - 2 = 0 = \chi(2T)$$

$T$ e $2P$	$3P$	$2T$ e $4P$	$5P$	$3T$ e $6P$	$7P$	$4T$ e $8P$	$9P$		
$8R_4$	$6R_4R_8$ $5R_42R_6$	$R_{4,4,4,4,4,12}$ $R_{4,4,4,4,6,10}$ $R_{4,4,4,4,8,8}$ $R_{4,4,4,6,6,8}$ $R_{4,4,6,6,6,6}$	$R_{4,4,4,4,16}$ $R_{4,4,4,6,14}$ $R_{4,4,4,8,12}$ $R_{4,4,4,10,10}$ $R_{4,4,6,6,12}$ $R_{4,4,6,8,10}$ $R_{4,4,8,8,8}$	$R_{4,4,4,20}$ $R_{4,4,6,18}$ $R_{4,4,8,16}$ $R_{4,4,10,14}$ $R_{4,4,12,12}$ $R_{4,6,6,16}$ $R_{4,6,8,14}$ $R_{4,6,10,12}$	$R_{4,8,8,12}$ $R_{4,8,10,10}$ $R_{6,6,6,14}$ $R_{6,6,8,12}$ $R_{6,6,10,10}$ $R_{6,8,8,10}$ $R_{8,8,8,8}$	$R_{4,4,24}$ $R_{4,6,22}$ $R_{4,8,20}$ $R_{4,10,18}$ $R_{4,12,16}$ $R_{4,14,14}$ $R_{6,6,20}$	$R_{6,8,18}$ $R_{6,10,16}$ $R_{6,12,14}$ $R_{8,8,16}$ $R_{8,10,14}$ $R_{8,12,12}$ $R_{10,10,12}$	$R_{4,28}$ $R_{6,26}$ $R_{8,24}$ $R_{10,22}$ $R_{12,20}$ $R_{14,18}$ $R_{16,16}$	$R_{32}$
1	2	5	7	15	14	7	1		

Tabela 4.4.1: Partições das classes de mergulhos orientáveis e não-orientáveis de  $K_{4,4}$

e, portanto, ambos os mergulhos mínimos de  $K_{4,4}$  possuem os mesmos tipos de partições. De fato, como  $K_{4,4}$  possui 8 vértices e 16 lados, segue da igualdade (2.5), que

$$\chi(T) = \chi(2P) = 8 - 16 + \alpha \Rightarrow 0 = 8 - 16 + \alpha \Rightarrow \alpha = 8.$$

Mas a região mínima de  $K_{4,4}$  é  $R_4$ , sendo assim, existe um único mergulho mínimo de  $K_{4,4}$ , tanto no caso orientável quanto no caso não-orientável, e este é da forma

$$K_{4,4} \hookrightarrow T, 2P \equiv 8R_4,$$

o qual corresponde a uma modulação regular de  $K_{4,4}$  para uma constelação de 8 sinais. Se o mergulho mínimo é conhecido, os demais mergulhos de  $K_{4,4}$ , pela Subseção 4.1.1, são das formas

$$\begin{aligned} T, 2P &\equiv 8R_4, \quad 3P \equiv \cup_{i=1}^7 R_{\alpha_i}^i, \quad 2T, 4P \equiv \cup_{i=1}^6 R_{\alpha_i}^i, \quad 5P \equiv \cup_{i=1}^5 R_{\alpha_i}^i, \\ 3T, 6P &\equiv \cup_{i=1}^4 R_{\alpha_i}^i, \quad 7P \equiv \cup_{i=1}^3 R_{\alpha_i}^i, \quad 4T, 8P \equiv \cup_{i=1}^2 R_{\alpha_i}^i, \quad 9P \equiv R_{32}. \end{aligned}$$

Em seguida, utilizaremos as igualdades em (4.10) para obter as partições dos mergulhos de  $K_{4,4}$ , conforme a relação estabelecida na Tabela 4.4.1.

Observamos que são 28 partições orientáveis e 52 não-orientáveis, um número que se aproxima inferiormente do dobro de 28. (Veja que o número de partições não-orientáveis é 1,9259 vezes o de orientáveis). A existência das classes de modulações de  $K_{4,4}$  só depende da existência das partições dos mergulhos. Analogamente ao caso  $K_5$ , identificaremos todas as classes de modulações orientáveis de  $K_{4,4}$  e considerar as modulações não-orientáveis somente no campo hipotético das possíveis 28 partições relacionadas na Tabela 4.4.1

### 4.4.3 Identificação dos mergulhos de $K_{4,4}$

Recorramos, então, ao Algoritmo 2.6.1 para determinar as classes de modulações orientáveis de  $K_{4,4}$ . Inicialmente, precisamos determinar um conjunto de sistema de rotações

distintos dos vértices de  $K_{4,4}$ . Com este objetivo, fixaremos um rotulamento de  $K_{4,4}$ , de acordo com o grafo esboçado na Figura 4.4.1.

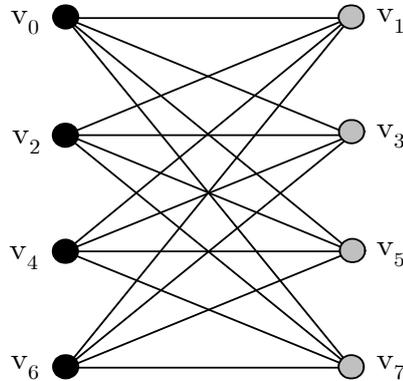


Figura 4.4.1: Grafo completo bipartido  $K_{4,4}$

Usando os procedimentos da Subseção 4.1.3, deduzimos que as rotações distintas dos vértices pares de  $K_{4,4}$  são dadas por

$$A = (1, 3, 5, 7), B = (1, 3, 7, 5), C = (1, 5, 3, 7), a = (7, 5, 3, 1), b = (5, 7, 3, 1), c = (7, 3, 5, 1)$$

e as rotações distintas de um vértices ímpares de  $K_{4,4}$  são dadas por

$$D = (0, 2, 4, 6), E = (0, 2, 6, 4), F = (0, 4, 2, 6), d = (6, 4, 2, 0), e = (4, 6, 2, 0), f = (6, 2, 4, 0).$$

Como  $K_{4,4}$  têm 8 vértices de grau igual a 4, segue da fórmula 2.12, que o número de sistemas de rotações de  $K_{4,4}$  é dado por

$$|\Theta(K_{4,4})| = \prod_{v \in V(G)} (\deg v - 1)! = ((4 - 1)!)^8 = 1679616. \quad (4.43)$$

Uma rotação de  $K_{4,4}$  é formada por 8 rotações dos vértices de  $K_{4,4}$  e portanto é da forma

$$\Theta = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7\}$$

onde

$$\theta_i \in \begin{cases} P = \{A, B, C, a, b, c\}, & \text{se } i \text{ é par} \\ I = \{D, E, F, d, e, f\}, & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (4.44)$$

Em particular, o sistema de rotações do grafo  $K_{4,4}$ , da Figura 4.4.1, é dado pelo conjunto de rotações de vértices

$$\begin{aligned} \Theta &= \{AdAdAdAd\} \\ &= \{0(1357), 1(6420), 2(1357), 3(6420), 4(1357), 5(6420), 6(1357), 7(6420)\} \end{aligned}$$

ou, equivalentemente, na forma matricial, temos que

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os 1 679 616 sistemas de rotações de  $\Theta(K_{4,4})$ , são obtidos através do seguinte produto cartesiano de conjuntos  $P$  e  $I$  definidos em (4.44),

$$\Theta(K_{4,4}) = P \times I \times P \times I \times P \times I \times P \times I. \quad (4.45)$$

Uma partição homogênea do conjunto  $\Theta(K_{4,4})$  em 36 subconjuntos de 46 656 sistemas de rotações distintos, estabelecidos em [18], permitiu determinar, através da implementação do algoritmo 2.6.1, todos os 1 679 616 mergulhos orientáveis de  $K_{4,4}$ . Foi feita uma contagem em todas as 36 partições e constatou-se que todas elas eram constituídas pelos mesmos tipos de partições e com os mesmos números de mergulhos. Na verdade, todos os resultados de contagens e identificação de classes de partições foram idênticos ao da Tabela 4.4.2.

Observamos, da última linha da Tabela 4.4.2, que a soma das partições referentes às modulações em cada classe de superfícies orientáveis de  $K_5$  é dada por

$$3 + 694 + 13080 + 2615 + 30264 = 46\,656.$$

Como são 36 partições, no total temos

$$46\,656 \cdot 36 = 1\,679\,616 \text{ modulações,}$$

correspondentes aos mergulhos de  $K_4$ . Observe que este número coincide com o valor obtido em 4.43, o que prova que todos os mergulhos de  $K_{4,4}$  foram identificados e, portanto, todos os projetos de modulações de  $K_{4,4}$  também foram identificados.

Classes do toro		Classes do bitoro		Classes do tritoro				Classes do 4-toro	
$\overline{R}_8$	#	$\overline{R}_6$	#	$\overline{R}_4$	#	$\overline{R}_4$	#	$\overline{R}_2$	#
$R_{4,4,4,4,4,4,4,4}$	3	$R_{4,4,4,4,4,12}$	112	$R_{4,4,4,20}$	2 096	$R_{4,8,8,12}$	384	$R_{4,28}$	11 984
		$R_{4,4,4,4,6,10}$	288	$R_{4,4,6,18}$	2 016	$R_{4,8,10,10}$	1 408	$R_{6,26}$	3 840
		$R_{4,4,4,4,8,8}$	150	$R_{4,4,8,16}$	2 448	$R_{6,6,6,14}$	96	$R_{8,24}$	2 872
		$R_{4,4,4,6,6,8}$	112	$R_{4,4,10,14}$	2 208	$R_{6,6,8,12}$	544	$R_{10,22}$	4 320
		$R_{4,4,6,6,6,6}$	32	$R_{4,4,12,12}$	1 016	$R_{6,6,10,10}$	144	$R_{12,20}$	3 136
				$R_{4,6,6,16}$	832	$R_{6,8,8,10}$	0	$R_{14,18}$	2 272
				$R_{4,6,8,14}$	864	$R_{8,8,8,8}$	39	$R_{16,16}$	1 840
		$R_{4,6,10,12}$	1 600						
Subtotal	3	Subtotal	694	Subtotal	13 080	Subtotal	2 615	Subtotal	30 264

Tabela 4.4.2: Cardinalidades das partições das classes de modulações de  $K_{4,4}$  [18]

A seguir, apresentaremos as principais características dos mergulhos orientáveis de  $K_5$  e  $K_{4,4}$  em relação aos projetos de modulações QAMS e *twisted* que estes podem dispor.

**Observação 4.4.2** *Analisando os dados contidos nas Tabelas 4.3.3 e 4.4.2 chegamos as seguintes conclusões referentes aos mergulhos orientáveis de  $K_5$  e  $K_{4,4}$ :*

1. São os primeiros casos de suas respectivas famílias que até podem ser identificados sem a ajuda de recursos computacionais, mas levaria muito tempo para concluir o processo, principalmente no caso do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ ;
2. Apesar da grande diferença no número de rotações, possuem números de modulações relativamente próximos, são 21 em  $K_{5,5}$  e 27 em  $K_{4,4}$ ;
3. A única superfície de  $K_{4,4}$  que não possui modulação de  $K_5$  é  $4T$ , nas demais,  $T$ ,  $2T$  e  $3T$ , tanto  $K_5$  como  $K_4$  possuem modelos de modulações;
4. Os números de classes de modulações orientáveis de  $K_5$  sobre  $T$  e  $2T$  são bem maiores do que as de  $K_{4,4}$ : são 5 classes de  $K_5$  sobre  $T$  e somente uma de  $K_{4,4}$ , 15 classes  $K_5$  sobre  $2T$  e 5 classes de  $K_{4,4}$ ;
5. A classe de  $T$  em  $K_5$  é a única que possui um número de mergulhos maior do que em  $K_{4,4}$ , nas demais superfícies o número de mergulhos de  $K_{4,4}$  é bem maior do que o número de mergulhos de  $K_5$ .
6. O índice de incidência dos modelos de modulações é maior em  $K_{4,4}$ : apenas a classe  $R_{6,8,8,10}$  de  $K_{4,4}$  não é realizável, enquanto em  $K_5$ , existem três classes não realizáveis,  $R_{3,3,3,5,6}$ ,  $R_{3,4,4,4,5}$  e  $R_{6,7,7}$ ;
7. O número de modulações regular de  $K_{4,4}$  é três vezes maior do que as de  $K_5$ : enquanto  $K_5$  possui as modulações regulares  $5R_4$  sobre  $T$ ,  $K_{4,4}$  possui  $8R_4$  sobre  $T$ ,  $4R_8$  sobre  $3T$  e  $2R_{16}$  sobre  $4T$ .

A Tabela 4.4.3 mostra os principais dados referentes as modulações de  $K_5$  e  $K_{4,4}$ , de forma sucinta, que nos levaram as conclusões relacionadas na Observação 4.4.2.

Número de elementos	Grafos	Superfícies				Total
		$T$	$2T$	$3T$	$4T$	
Classes de modulações	$K_5$	5	15	1	0	21
	$K_{4,4}$	1	5	14	7	27
Mergulhos	$K_5$	468	4 968	2 340	0	7776
	$K_{4,4}$	108	24 984	565 020	1 089 504	1 679 616

Tabela 4.4.3: Cardinalidades das partições das classes de mergulhos de  $K_{4,4}$  [18]

Quais dos grafos são melhores para projetos de modulação, depende do projeto visado. Em  $K_{4,4}$  há mais opções, inclusive de modulações regulares. Sob este aspecto  $K_{4,4}$  leva

vantagem sobre  $K_5$ , entretanto, devemos lembrar que os mergulhos de  $K_5$  são todos construtíveis, ao passo que os de  $K_{4,4}$  ainda não foram sequer construídos. Além disso,  $K_5$  tem a vantagem de ter regiões com números pares e ímpares de lados, enquanto  $K_{4,4}$  só possui regiões com um número par de lados. Enfim, a escolha depende do tipo de modulação que se pretende projetar.

#### 4.4.4 As modulações QAMS e *twisted* de $K_{4,4}$

As partições referentes as modulações com bordos foram determinadas em [18]. No Apêndice B relacionamos, na Tabela B.0.1, todas as partições de modulações vindas de mergulhos de  $K_{4,4}$ . Na Tabela 4.4.4, apresentamos o resultado da contagem nas partições correspondentes as modulações de  $K_{4,4}$ , realizadas nas classes de superfícies e nas categorias de modulações QAMS e *twisted*.

Apesar de muitos modelos de partições na Tabela B.0.1 serem idênticos, eles vêm de partições diferentes, razão pela qual foram considerados modelos de modulações distintos. Inicialmente, as partições foram divididas em duas categorias, referentes às modulações QAMS's e *twisted*. As modulações QAMS's permitem ainda uma subclassificação, modulações em superfícies sem bordos e com bordos, e pelo que sabemos, este tipo de divisão não existe ainda nas modulações *twisted*.

Além disso, foi realizada uma contagem separada nas classes de modulações orientáveis e não-orientáveis. Na Tabela 4.4.4, o total de modulações QAMS's sem bordos orientáveis de cada família de superfície  $gT_\mu$ , foi determinada na coluna  $S_1$ , o equivalente caso não-orientável foi determinado na coluna  $S_2$ , a coluna  $S_1 + S_2$  expressa o número de modulações QAMS's da família de superfícies orientáveis  $gT_\mu$  e  $S_3$  contém o número de modulações *twisted* da superfície  $gT_\mu$ . A contagem das modulações não-orientáveis foi realizada de forma semelhante. Nas Linhas  $T_1$  e  $T_2$ , foram computados os totais das colunas das respectivas modulações orientáveis e não-orientáveis e, na última linha,  $T_1 + T_2$ , as somas referentes as linhas  $T_1$  e  $T_2$ .

QAMS								<i>Twisted</i>		
$\Omega$	Sem bordo			Com bordo			$S_1 + S_2$	Sem bordo	Com bordo	$S_3$
	$R$	$I$	$S_1$	$R$	$I$	$S_2$				
$T_\mu$	1	0	1	6	0	6	7	1	8	9
$2T_\mu$	–	5	5	18	45	63	68	5	80	85
$3T_\mu$	1	13	14	17	70	87	101	14	139	153
$4T_\mu$	1	6	7	0	0	0	7	7	20	27
$T_1$	3	24	27	41	115	156	183	27	247	274
QAMS								<i>Twisted</i>		
$\bar{\Omega}$	Sem bordo			Com bordo			$S_4 + S_5$	Sem bordo	Com bordo	$S_6$
	$R$	$I$	$S_4$	$R$	$I$	$S_5$				
$2P_\mu$	1	0	1	6	0	6	7	1	8	9
$3P_\mu$	0	2	2	10	14	24	26	2	32	34
$4P_\mu$	0	5	5	18	45	63	68	5	80	85
$5P_\mu$	0	10	10	22	68	90	100	10	127	137
$6P_\mu$	1	14	15	18	73	91	106	15	143	158
$7P_\mu$	0	6	6	2	14	16	22	6	38	44
$8P_\mu$	1	6	7	0	0	0	7	7	20	27
$T_2$	3	43	45	76	214	290	336	46	448	494
$T_1 + T_2$	6	67	72	117	329	446	519	73	695	768

Tabela 4.4.4: Modulações QAMS's e *twisted* por classes de superfícies de  $K_{4,4}$ 

Da Tabela 4.4.4, deduzimos que há um total de 457 projetos de modulações orientáveis sobre mergulhos de  $K_{4,4}$  distribuídos da seguinte maneira:

- a) 183 correspondem às modulações QAMS's;
- b) 274 às modulações *twisted*;
- c) 1287 projetos não-orientáveis, sendo 768 modulações QAMS's e 519 modulações *twisted*.
- d) Total: 1744 projetos de modulações vindos de mergulhos do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ .

A Tabela 4.4.4 contém os dados referentes a cada classe de superfícies com e sem bordos, orientáveis e não-orientáveis, das modulações QAMS's e *twisted*, dos grafos completo  $K_5$  e completo bipartido  $K_{4,4}$ ; no entanto, devido ao grande número de informações, fica difícil avaliar o comportamento destes grafos em termos da existência de modulações por família de superfícies.

Para termos uma ideia precisa dos números de projetos de modulações vindas por famílias de superfícies, apresentaremos, na Tabela 4.4.5, dados referentes aos índices de existência e

taxas de variação dos números de modulações QAMS's e *twisted* nas famílias de superfícies  $\Omega_s, \Omega_c, \bar{\Omega}_s$  e  $\bar{\Omega}_c$ , do grafo completo  $K_5$  e do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ . Os números de modulações das famílias de superfícies  $\Omega_s, \Omega_c, \bar{\Omega}_s$  e  $\bar{\Omega}_c$  das respectivas modulações QAMS's e *twisted* foram obtidos diretamente da Tabela 4.4.4.

Modulações		Orientável				Não-orientável			
		Sem bordo		Com bordo		Sem bordo		Com bordo	
$K_5$	QAMS	20		86		48		282	
	$I_p, I_t$	18, 87	4, 59	81, 13	19, 72	14, 55	11, 01	85, 45	64, 68
	<i>twisted</i>	21		121		48		458	
	$I_p, I_t$	14, 79	3, 24	85, 21	18, 67	9, 49	7, 41	90, 51	70, 68
Taxa de variação (%)		4, 08	1, 35	4, 08	1, 05	5, 06	3, 6	5, 06	6, 0
$K_{4,4}$	QAMS	27		156		45		290	
	$I_p, I_t$	4, 75	5, 21	85, 25	30, 17	13, 43	8, 69	86, 57	55, 98
	<i>twisted</i>	27		247		46		448	
	$I_p, I_t$	9, 85	3, 52	90, 15	32, 16	9, 31	5, 99	90, 69	58, 33
Taxa de variação (%)		5, 1	1, 69	4, 9	1, 99	4, 12	2, 7	4, 12	2, 35

Tabela 4.4.5: Taxa de variação dos índices de existências das classes de modulações QAMS's e *twisted* nas famílias de superfícies de mergulhos dos grafos  $K_5$  e  $K_{4,4}$

Na Tabela 4.4.5, as linhas denominadas por  $I_p, I_t$  indicam, respectivamente, o índice de incidência parcial (porcentagem relativa à família de superfícies orientáveis ou a família das não-orientáveis) e o índice de incidência total (porcentagem relativa ao total de classes de modulações existentes nas superfícies orientáveis e nas não-orientáveis). A variação entre os números de modulações QAMS's e *twisted*, nas famílias de modulações de  $K_5$  e  $K_{4,4}$ , são indicadas na linha 'Taxa de variação'.

**Proposição 4.4.3** *Analizando os dados contidos na Tabela 4.4.5 chegamos as seguintes conclusões sobre as taxas de variações do número de modulações QAMS's e *twisted*, existentes nas famílias de superfícies de mergulhos de  $K_5$  e  $K_{4,4}$ :*

1. O índice de existência é maior quando se considera isoladamente um dos casos, o orientável ou o não-orientável. Observe que em cada par de índices  $I_p$  e  $I_t$ , de uma classe de superfície, tem-se

$$I_p(\Omega) < I_t(\Omega), \text{ para todo } \Omega \in \{\Omega_s, \Omega_b, \bar{\Omega}_s, \bar{\Omega}_b\} \quad (4.46)$$

independente da modulação ser QAMS ou *twisted*;

2. As modulações de  $K_5$  preservam as classes de superfícies dos índices parciais e totais de existências mínimo e máximo, isto é,  $I^{\min}(\text{QAMS})$  e  $I^{\min}(\textit{twisted})$  ocorrem numa mesma classe de superfícies, como também  $I^{\max}(\text{QAMS})$  e  $I^{\max}(\textit{twisted})$ ;

3. As modulações de  $K_{4,4}$  só não preservam as classes de superfícies dos índices parciais de existência mínimo;
4. A taxa de variação do número de modulações QAMS's e *twisted* possuem as seguintes propriedades:
  - (a) máximo de 6% na classe  $\overline{\Omega}_b$  de  $K_5$ ;
  - (b) mínimo de 1,05% na classe de  $\Omega_b$  de  $K_5$ ;
  - (c) variações médias dos índices parciais: de 4.57% em  $K_5$  e de 4.56% em  $K_{4,4}$  (diferença de 0,01% e, portanto, são praticamente iguais);
  - (d) variações médias dos índices totais: de 3,0% em  $K_5$  e de 2,18% em  $K_{4,4}$ , (diferença de 0,82%);
  - (e) desvio padrão máximo de índices parciais: de 0,98% em  $K_5$  e  $K_{4,4}$  (diferença de 0,98%);
  - (f) desvio padrão máximo de índices totais: de 4,6% : em  $K_5$  e de 1,01% em  $K_{4,4}$  (diferença de 3,6%).

**Demonstração.** As afirmações da observação são provadas através das seguintes justificativas:

- 1) No cálculo de  $I_t$  a percentagem é computada sobre os elementos dos conjuntos  $\Omega_s, \Omega_b, \overline{\Omega}_s$  e  $\overline{\Omega}_b$  e em  $I_p$ , a percentagem incide em apenas 2, ou sobre os elementos de  $\Omega_s$  e  $\Omega_b$ , ou sobre  $\overline{\Omega}_s$  e  $\overline{\Omega}_b$  o que vai implicar necessariamente na desigualdade (4.46).
- 2) Se  $I(\overline{S}|_M)$  é o índice da taxa de existência da modulação  $M$  sobre a família de superfície  $\overline{S}$ , então, em particular, para o caso das modulações de  $K_5$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 I_p^{\min}(\overline{\Omega}_s|_{\text{QAMS}}) &= 14,55\% \quad \text{e} \quad I_p^{\max}(\overline{\Omega}_b|_{\text{QAMS}}) = 85,45\% \\
 I_p^{\min}(\overline{\Omega}_s|_{\text{Twister}}) &= 9,49\% \quad \text{e} \quad I_p^{\max}(\overline{\Omega}_b|_{\text{Twister}}) = 90,51\% \\
 I_t^{\min}(\overline{\Omega}_s|_{\text{QAMS}}) &= 4,59\% \quad \text{e} \quad I_t^{\max}(\overline{\Omega}_b|_{\text{QAMS}}) = 85,45\% \\
 I_t^{\min}(\overline{\Omega}_s|_{\text{Twister}}) &= 14,55\% \quad \text{e} \quad I_t^{\max}(\overline{\Omega}_b|_{\text{Twister}}) = 90,51\%.
 \end{aligned}$$

Portanto, uma avaliação nas igualdades acima de índices máximos e mínimos de existências de modulações, deduzimos que o índice mínimo de existência parcial  $I_p^{\min}$  da modulação QAMS é realizado na mesma classe de superfícies não-orientáveis sem bordos e o índice máximo de existência parcial  $I_p^{\max}$  da modulação *twisted*, é realizado na mesma classe de superfícies não-orientáveis com bordos.

- 3) No caso das modulações de  $K_{4,4}$ , verificamos que

$$\begin{aligned}
 I_p^{\min}(\Omega_s|_{\text{QAMS}}) &= 4,75\% \quad \text{e} \quad I_p^{\max}(\overline{\Omega}_b|_{\text{QAMS}}) = 86,57\% \\
 I_p^{\min}(\overline{\Omega}_s|_{\text{Twister}}) &= 9,31\% \quad \text{e} \quad I_p^{\max}(\overline{\Omega}_b|_{\text{Twister}}) = 90,89\% \\
 I_t^{\min}(\Omega_s|_{\text{QAMS}}) &= 5,21\% \quad \text{e} \quad I_t^{\max}(\overline{\Omega}_b|_{\text{QAMS}}) = 55,98\% \\
 I_t^{\min}(\Omega_s|_{\text{Twister}}) &= 3,52\% \quad \text{e} \quad I_t^{\max}(\overline{\Omega}_b|_{\text{Twister}}) = 58,33\%
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

o que mostra que somente  $I_p^{\min}$  encontra-se em classes de superfícies diferentes  $\Omega_s$  e  $\bar{\Omega}_s$ . Observamos que nos casos de índices de (4.47), diferentes de  $I_p^{\min}$ , as classes de superfícies são preservadas, demonstrando assim a afirmação 3) da Proposição 4.4.3.

4) Pela Tabela 4.4.5, as variações médias de índices parcial ( $\text{var}_p$ ) e total ( $\text{var}_t$ ) do número de modulações das classes de superfícies de mergulhos de 2-células do grafo completo  $K_5$  são dadas por,

$$\begin{aligned}\text{var}_p(K_5) &= \frac{4,08 + 4,08 + 5,06 + 5,06}{4} = 4,57 \\ \text{var}_t(K_5) &= \frac{1,35 + 1,05 + 3,6 + 6,0}{4} = 3,0\end{aligned}$$

e os desvios padrões máximos parcial ( $\text{des}_p$ ) e total ( $\text{des}_t$ ) são dados por

$$\begin{aligned}\text{des}_p(K_5) &= 5,06 - 4,08 = 0,98 \\ \text{des}_t(K_5) &= 6,0 - 1,35 = 4,65.\end{aligned}$$

No caso de  $K_{4,4}$ , as variações médias parcial e total são dadas por

$$\begin{aligned}\text{var}_p(K_{4,4}) &= \frac{5,1 + 4,9 + 4,12 + 4,12}{4} = 4,56 \\ \text{var}_t(K_{4,4}) &= \frac{1,69 + 1,99 + 2,7 + 2,35}{4} = 2,18\end{aligned}$$

e o desvio médio padrão máximo das variações parcial e total são dadas por

$$\begin{aligned}\text{des}_p(K_{4,4}) &= 4,12 - 5,1 = 0,98 \\ \text{des}_t(K_{4,4}) &= 2,7 - 1,69 = 1,01.\end{aligned}$$

Estes resultados mostram que as afirmações (a)-(f), da parte 4, são verdadeiras, encerrando assim as demonstrações das afirmações da Proposição 4.4.3. ■

Como era esperado, em ambos os grafos, a variação média total é menor do que a variação média parcial, isto é

$$\text{var}_t(G) < \text{var}_p(G), \text{ se } G = K_5 \text{ ou } G = K_{4,4},$$

Esta propriedade é uma consequência direta da parte 1, da Proposição 4.4.3. Além disto, segue da demonstração da parte 4., que o desvio padrão da variação total também é menor do que o desvio padrão da variação parcial, isto é,

$$\text{des}_t(G) < \text{des}_p(G), \text{ se } G = K_5 \text{ ou } G = K_{4,4}.$$

Quanto as diferenças das variações médias e desvios padrões dos grafos  $K_5$  e  $K_{4,4}$ , valem as seguintes relações

$$\begin{aligned}\text{var}_p(K_5) - \text{var}_p(K_{4,4}) &= 4,57 - 4,56 = 0,01\% \\ \text{var}_t(K_5) - \text{var}_t(K_{4,4}) &= 3,0 - 2,18 = 0,12\% \\ \text{des}_p(K_5) - \text{des}_p(K_{4,4}) &= 0,98 - 0,98 = 0,00\% \\ \text{des}_t(K_5) - \text{des}_t(K_{4,4}) &= 4,65 - 1,01 = 3,64\%\end{aligned}\tag{4.48}$$

Pelas igualdades em (4.48), vemos que, apesar da grande diferença do número de modulações dos grafos  $K_5$  e  $K_{4,4}$ , pois esta é dada por

$$|M(K_{4,4})| - |M(K_5)| = 1.679.616 - 7.776 = 1.671.840,$$

as variações nos índices de existência de modulações nas classes de superfícies é muito pequena. Observe que nas três primeiras igualdades de (4.48), as diferenças entre variação média de desvio padrão é bem próxima de zero e só chega a ser um pouco acentuada no último caso da diferença entre os desvios padrões totais, que é de 3,64%. Tais resultados mostram que as classes de modulações tendem a apresentar um crescimento proporcional. A Figura 4.4.2, ilustra o gráfico dos números de modulações QAMS's e *twisted* existentes em cada classe de superfícies de mergulhos do grafo completo  $K_5$  e do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ .

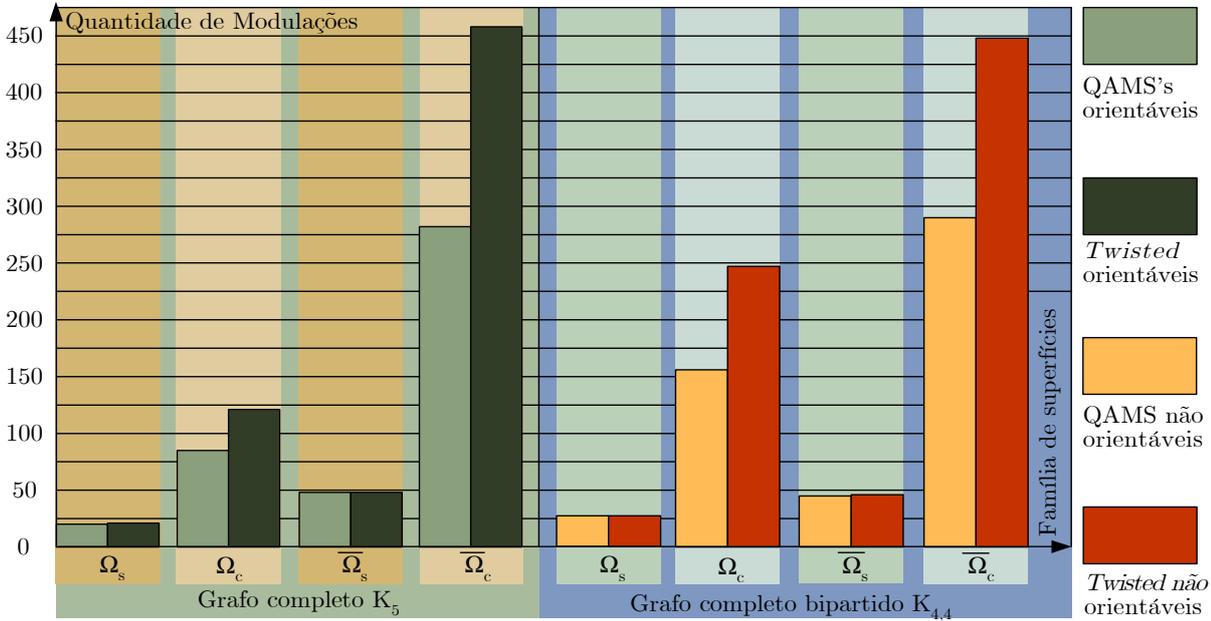


Figura 4.4.2: Gráfico dos números de modulações QAMS's e *twisted* por famílias de superfícies dos grafos  $K_5$  e  $K_{4,4}$ .

Observe que as distribuições de modulações pelas classes de superfícies  $\Omega_s, \Omega_c, \bar{\Omega}_s, \bar{\Omega}_c$  são muito parecidas. Por enquanto não há dados referentes às modulações vinda de mergulhos do grafo completo  $K_m, m > 5$ , e de  $K_{n,n}$  com  $n > 4$ . Entretanto, da análise acima para os casos particulares de  $K_5$  e  $K_{4,4}$ , deduzimos que os gráficos dos números de modulações por família de superfícies apresentam comportamentos idênticos aos da Figura 4.4.2.

Utilizando a notação da Seção 4.1 e a análise acima, concluímos que os conjuntos de superfícies e de modulações de um grafo qualquer  $G$ , satisfazem as relações

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{S}}(G) &\cong 2\mathbb{S}(G), \mathbb{S}_s(G) < \mathbb{S}_c(G) < \bar{\mathbb{S}}_c(G) \\ \bar{M}(G) &\cong 2M(G), M_s(G) < M_c(G) < \bar{M}_c(G). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ou seja, o número de superfícies não-orientáveis é aproximadamente igual ao dobro das superfícies orientáveis, o número de superfícies sem bordos é menor do que o número de superfícies com bordos (orientáveis ou não) e o número de superfícies com bordos orientáveis é menor do que o número de superfícies com bordos não-orientáveis. As mesmas relações de desigualdade valem ainda para o caso do número de modulações.

De um modo geral, valem as seguintes relações de ordem referente aos números de modulações nas classes de superfícies de mergulhos de um grafo

$$|M(\Omega_s)| < |M(\overline{\Omega}_s)| < |M(\Omega_c)| < |M(\overline{\Omega}_c)|. \quad (5.2)$$

As conclusões anteriores nos levam a considerar as superfícies sem bordos como já sendo um grande celeiro de projetos de modulações QAMS's e *twisted*, depois vem o conjunto das superfícies sem bordos não-orientáveis, das superfícies com bordos orientáveis e finalmente, o maior deles, o conjunto das superfícies com bordos não-orientáveis.

Quanto ao desenvolvimento de projetos de modulações sobre superfícies, as modulações QAMS's encontram-se em seu estágio inicial, somente um modelo regular sobre a superfície toro, vindo de um mergulho regular de  $K_5$ , foi explorado até o presente momento, gerando excelentes resultados [3].

Segue dos resultados das Tabelas 4.3.10 e 4.4.4 que dispomos de 2 828 projetos de modulações disponíveis, identificadas neste trabalho, a maioria deles podem ser utilizados para projetos de modulações QAMS's e no caso das modulações *twisted*, qualquer um deles pode ser utilizado. Aliás, este tipo de modulação existe desde 1976 [32], tem sido alvo de intensa pesquisa, resultando em excelentes trabalhos [5], mas há muito ainda o que explorar, principalmente no que se refere ao uso de superfície e da escolha da curva utilizada para o sinal de transmissão.

Enfim, há um grande manancial de projetos identificados neste trabalho, muitos deles de uso imediato, a nossa disposição, para serem utilizados como projetos de modulações QAMS ou *twisted*.

Apesar do grande número de modulações identificadas, achamos que os dois casos de grafos estudados não são suficientes para tirarmos conclusões sobre propriedades e comportamentos gerais das modulações sobre variedades riemannianas. Foram avaliados duas classes de grafos, o grafo completo  $K_5$  e o grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ . Vimos que o comportamento destes em relação aos índices de incidências de projetos de modulações por famílias de superfícies são bastante similares. Como seria o comportamento e propriedades de outros tipos de grafos, é o que iremos comprovar no próximo capítulo.



## CAPÍTULO 5

# Modulações Oriundas do Cubo e do Octaedro

Até, então, só sabíamos informações de modulações sobre superfícies vindas de mergulhos ou do grafo completo ou do grafo completo bipartido. E sobre outros tipos de grafos, como seriam os projetos de modulações sobre superfícies? Existiriam regulares? Quantas seriam? Poderiam ser realizadas em superfícies não-orientáveis? E em superfícies com bordos? Poderiam ser identificados de modo análogo ao dos completos, isto é, através do Algoritmo 2.6.1? Fornecer respostas a cada uma destas interrogações será o objetivo deste capítulo.

E qual seria o grafo diferente da classe de grafos completos que poderíamos escolher? Esta é a primeira questão a ser tratada. Em primeiro lugar, devemos saber que o grafo não pode ser muito grande porque senão não poderíamos identificar as suas classes de mergulhos. Em segundo, não faz sentido optar por um grafo que não produz mergulhos regulares. Escolhemos, então, o grafo correspondente ao cubo. Este é um poliedro regular convexo e, portanto, um projeto de modulação regular sobre a esfera de uso consagrado; além disso, a sua simetria deverá produzir outros projetos de modulações regulares. Por outro lado, a sua quantidade relativamente pequena de elementos permite identificar todos os seus mergulhos, através do Algoritmo 2.6.1.

A escolha do cubo resolve o nosso problema. Mas os projetos de modulações vindos de mergulhos de grafos têm uma forte relação com os seus grafos duais. Mas o dual do hexaedro é o octaedro, e este também é um poliedro regular, ou seja, uma modulação regular da esfera, com um número relativamente pequeno de vértices e lados, que permite identificar todos os seus mergulhos. Então incluiremos também o octaedro em nosso estudo. Existiria alguma relação entre as modulações de um grafo e as modulações de seu dual? Esta é a principal motivação pela qual nos fez incluir, neste capítulo, o estudo das modulações do octaedro.

### 5.1 Modulações Oriundas do Hexaedro

O cubo, devido ao seu formato, é um dos poliedros que mais se tem notabilizado através do uso de objetos. Quem não conhece o dado e quem nunca viu uma caixa de presente ou porta-jóias em formato de um cubo (hexaedro)? Em teoria da informação, o uso do cubo também é notável porque o mesmo personaliza um projeto de modulações do tipo

geometricamente uniforme para uma constelação de 6 sinais sobre a esfera.

A escolha não foi o tetraedro, por este ser um grafo muito pequeno, possuir dual idêntico e por produzir pouquíssimos projetos de modulações. Os seus projetos de modulações até já foram identificados em [15].

O hexaedro é realmente famoso, possui grupo de isometrias de ordem 48 e tem todos os atrativos e propriedades requeridas para um projeto de modulações. Além disso, diferentemente do tetraedro, o hexaedro possui um dual totalmente diferente com um número de elementos relativamente pequenos, que atende aos nossos propósitos.

O hexaedro é um grafo da forma  $H_{8,12}$ , isto é, definido sobre um conjunto com 8 vértices  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_7\}$ , com rotulamento fixado conforme o grafo da Figura 5.1.1 e um conjunto de 12 lados.

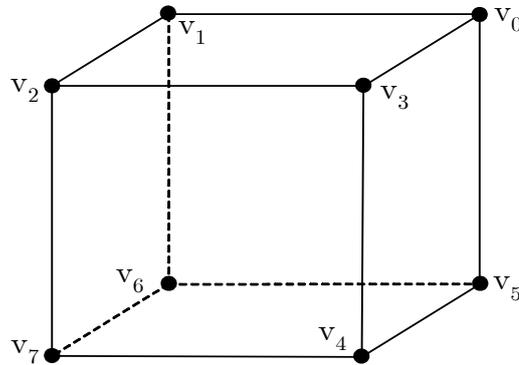


Figura 5.1.1: Rotulamento de vértices fixo sobre o hexaedro

O hexaedro  $H_{8,12}$  da Figura 5.1.1, visto como um grafo planar, possui por sistema de rotações,

$$\Theta = \{0(1, 5, 3), 1(0, 6, 2), 2(1, 3, 7), 3(0, 4, 2), 4(3, 5, 7), 5(0, 4, 6), 6(1, 5, 7), 7(2, 6, 4)\},$$

ou na forma matricial

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

O objetivo é encontrar todas as modulações geradas pelos mergulhos do grafo  $H_{8,12}$ .

Observe que o mergulho correspondente a rotação  $\Theta$  não é o hexaedro sobre a esfera. Pelo Algoritmo 2.6.1, o mergulho hexaedro  $H_{8,12}(\Theta)$  é composto pelas seguintes seqüências orbitais

$$\gamma_1 = (1, 0, 5, 4, 7, 2), \quad \gamma_2 = (5, 0, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 3, 2, 7, 6, 1, 2, 3, 0, 1, 6),$$

isto é, formado por duas regiões,  $R_6^1$  e  $R_{18}^2$ . Pela fórmula de Eüler (2.5), o mergulho de  $H_{8,12}(\Theta)$  encontra-se sobre uma superfície  $\Omega$  de característica  $\chi(\Omega) = 8 - 12 + 2 = -2$ , isto é, sobre o bitoro e portanto resulta em um mergulho da forma

$$H_{8,12}(\Theta) \hookrightarrow 2T \equiv R_6 R_{18}.$$

Concluimos, então, que a rotação  $\Theta$  que representa o grafo planar da Figura 5.1.1 não corresponde ao tão conhecido cubo sobre a esfera. O sistema de rotação que gera o cubo é bem diferente de  $\Theta$ . Na verdade, existem somente duas rotações que produzem o cubo esférico (hexaedro), são elas:

$$\Theta_c = \{0(1, 5, 3), 1(2, 6, 0), 2(1, 3, 7), 3(0, 4, 2), 4(3, 5, 7), 5(6, 4, 0), 6(7, 5, 1), 7(4, 6, 2)\},$$

e

$$\Theta_c^{-1} = \{0(3, 5, 1), 1(0, 6, 2), 2(7, 3, 1), 3(2, 4, 0), 4(7, 5, 3), 5(0, 4, 6), 6(1, 5, 7), 7(2, 6, 4)\}.$$

De fato, pelo Algoritmo 2.6.1, o mergulho de  $H_{8,12}(\Theta)$  é formado pelas seguintes sequências orbitais

$$\gamma_1(1, 0, 5, 6), \gamma_2(5, 0, 3, 4), \gamma_3(3, 0, 1, 2), \gamma_4(2, 1, 6, 7), \gamma_5(3, 2, 7, 4), \gamma_6(5, 4, 7, 6)$$

e o mergulho do grafo  $H_{8,12}(\Theta)$  é composto das sequências

$$\gamma_1^{-1}(6, 5, 0, 1), \gamma_2^{-1}(4, 3, 0, 5), \gamma_3^{-1}(2, 1, 0, 3), \gamma_4^{-1}(7, 6, 1, 2), \gamma_5^{-1}(4, 7, 2, 3), \gamma_6^{-1}(6, 7, 4, 5).$$

O nosso objetivo é obter todas as modulações vindas de mergulhos do hexaedro. Até o presente momento, não havíamos percebido da necessidade de definirmos o conjunto de mergulhos de um grafo  $G$  e, conseqüentemente, o conjunto das modulações vindas de um grafo  $G$ . O problema é que o hexaedro é um grafo trivalente e, com um rotulamento diferente do apresentado na Figura 5.1.1, poderia gerar modelos distintos.

Observe que o grafo da Figura 5.1.2 é trivalente, contém os mesmos números de vértices e lados do hexaedro, entretanto, possui duas regiões triangulares e, como veremos posteriormente, estes tipos de regiões não fazem parte dos mergulhos do hexaedro.

Visando obter a unicidade do mergulho, é necessário definirmos as modulações de um mergulho de grafo, conforme estabelecido a seguir.

**Definição 5.1.1** *Seja  $G(p, q)$  um grafo planar e  $\Theta = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{p-1}\}$  o seu sistema de rotações. Denominaremos de conjunto das modulações de  $G$ , o conjunto formado por todos os mergulhos de 2-células de  $G(p, q)$  ( $\Theta'$ ), onde  $\Theta' = \{\theta'_0, \theta'_1, \dots, \theta'_{p-1}\}$  é uma rotação obtida de  $\Theta$  tal que  $\theta'_i$  é uma rotação de  $\Psi(\theta_i)$ , para todo  $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ .*

Na Definição 5.1.1,  $\Psi(\theta_i)$  é um conjunto de rotações distintas do vértice  $v_i$  e a expressão ‘todos os mergulhos de 2-células’ refere-se a todos os mergulhos orientáveis, não-orientáveis com e sem bordos de  $G$ . As modulações de  $K_5$  e  $K_{4,4}$  obtidas no Capítulo 4, atendem as condições da Definição 5.1.1. O mais importante destas condições é, sem dúvida, o fato do conjunto das modulações de um grafo  $G$  ser definido de modo único.

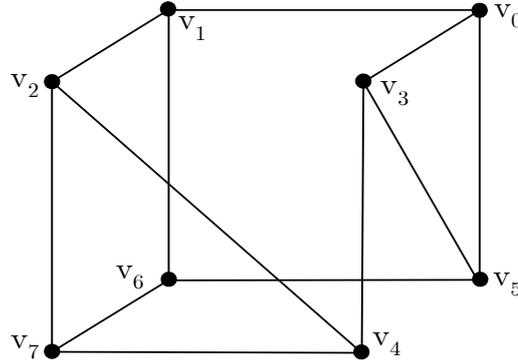


Figura 5.1.2: Grafo trivalente e com mesmo número de vértices e lados do hexaedro

$\Psi_0$	$\Psi_1$	$\Psi_2$	$\Psi_3$	$\Psi_4$	$\Psi_5$	$\Psi_6$	$\Psi_7$
$A(1, 5, 3)$	$B(0, 6, 2)$	$C(1, 3, 7)$	$D(0, 4, 2)$	$E(3, 5, 7)$	$F(0, 4, 6)$	$G(1, 5, 7)$	$H(2, 6, 4)$
$a(3, 5, 1)$	$b(2, 6, 0)$	$c(7, 3, 1)$	$d(2, 4, 0)$	$e(7, 5, 3)$	$f(6, 4, 0)$	$g(7, 5, 1)$	$h(4, 6, 2)$

Tabela 5.1.1: Rotações distintas dos vértices do hexaedro  $H(8, 12)$

Pela Seção 4.1, o processo de identificação de modulações tem início com a identificação das rotações distintas de vértices. Pela Proposição 4.1.2, o número de rotações distintas do vértice  $v_i \in V$  é dado por

$$|\theta_i| = (\deg v_i - 1)! = 2! = 2.$$

Sendo assim, cada  $\Psi(\theta_i)$  é formado por dois elementos. Então, escolhemos as rotações de vértices e suas inversas do sistema de rotações  $\Theta$ , do grafo da Figura 5.1.1, para obter o conjunto de rotações distintas do vértice  $v_i$ ,  $\Psi_i$ , de  $H(p, q)$ , conforme os sistemas relacionados na Tabela 5.1.1.

Com o rotulamento adotado na Tabela 5.1.1, veja que a modulação do grafo do hexaedro  $H_{8,12}$  é realizado sobre a esfera na forma de um cubo, quando os sistemas de  $\Phi = AbCDEfgh$  e  $\Phi^{-1} = aBcdeFGH$  são os escolhidos para  $H_{8,12}$ , bem diferentes do sistema  $\Theta = AMCDEFGH$  do grafo da Figura 5.1.1.

Voltando ao problema da identificação das modulações do hexaedro, devemos identificar todos os seus sistemas de rotações de  $H_{8,12}$ . Como este é da forma

$$\Theta = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7\}$$

com  $\theta_i \in \Psi_i$  e  $|\Psi_i| = 2$ , então o conjunto de sistemas de rotações de  $H_{8,12}$  é dado pelo produto cartesiano

$$\Theta(H_{8,12}) = \Psi_0 \times \Psi_1 \times \Psi_2 \times \Psi_3 \times \Psi_4 \times \Psi_5 \times \Psi_6 \times \Psi_7$$

e, conseqüentemente, o número de elementos do conjunto das rotações de  $H_{8,12}$  é dado por

$$|\Theta(H_{8,12})| = 2^8 = 256. \quad (5.3)$$

Os sistemas de rotações de  $\Theta(H_{8,12})$  estão relacionados no Apêndice C.

### 5.1.1 As possíveis partições do hexaedro

Antes de aplicarmos o Algoritmo 2.6.1, vejamos quais são as possíveis partições de mergulhos do hexaedro. Se  $H_{8,12}$  possui 12 lados, então a soma dos lados de todas as regiões da partição de um mergulho de  $H_{8,12}$  é igual a 24. O problema é saber qual a região mínima (com o menor número de lados) de um mergulho de  $H_{8,12}$ . O número de lados da região seria menor que 4? Mostraremos a seguir que não.

**Teorema 5.1.2** *A região mínima de  $H_{8,12}$  é quadrangular.*

**Demonstração.** O cubo é uma partição de  $H_{8,12}$  formada por seis regiões quadrangulares. Suponha que exista uma região triangular de uma partição de  $H_{8,12}$  ( $\Theta$ ) que passa pelos vértices  $v_i, v_j$  e  $v_h$  de  $H_{8,12}$ , isto é,  $R_3 = (i, j, k)$ . Consideremos a região triangular  $R_3$ , cujas orientação e rotações de vértices são fixadas conforme a Figura 5.1.3. Então, os sistemas de

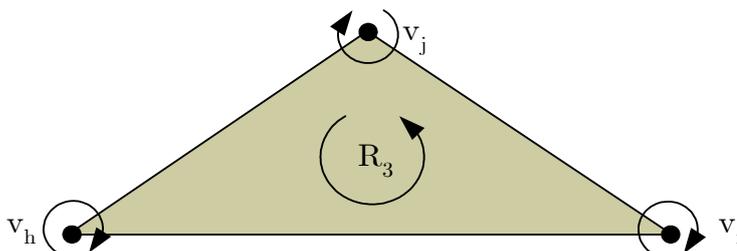


Figura 5.1.3: Rotações fixas de vértices e região de um mergulho de um grafo

rotações dos vértices  $v_i, v_j$  e  $v_h$  é dada por

$$\theta_i = (\dots, h, j, \dots), \theta_j = (\dots, i, h, \dots), \theta_h = (\dots, j, i, \dots). \quad (5.4)$$

Podemos supor, sem perda de generalidades, que  $i = 0$  e que  $\theta_0 = (1, 5, 3)$ . Neste caso,  $j = 3, 4$  ou  $6$ . Se  $j = 3$ , então, por (5.4), devemos ter que

$$\theta_i = \theta_0 = (1, 5, 3) \Rightarrow \begin{cases} h = 1 \text{ e } j = 5 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_5 = (0, 1, \_) \notin \Psi_5 \\ \theta_h = \theta_1 = (5, 0, \_) \notin \Psi_1 \end{cases} \\ h = 5 \text{ e } j = 3 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_3 = (0, 5, \_) \notin \Psi_3 \\ \theta_h = \theta_5 = (3, 0, \_) \notin \Psi_1 \end{cases} \\ h = 3 \text{ e } j = 1 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_1 = (0, 3, \_) \notin \Psi_5 \\ \theta_h = \theta_3 = (1, 0, \_) \notin \Psi_1. \end{cases} \end{cases} \quad (5.5)$$

Observe que todos os casos em (5.5) são contraditórios, conseqüentemente  $\theta_i$  não poderia ser  $(1, 5, 3)$ . Então só resta a opção  $\theta_i = (3, 5, 1)$ . Neste caso temos que

$$\theta_i = \theta_0 = (3, 5, 1) \Rightarrow \begin{cases} h = 3 \text{ e } j = 5 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_5 = (0, 3, \_) \notin \Psi_5 \\ \theta_h = \theta_3 = (5, 0, \_) \notin \Psi_3 \end{cases} \\ h = 5 \text{ e } j = 1 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_1 = (0, 5, \_) \notin \Psi_3 \\ \theta_h = \theta_5 = (1, 0, \_) \notin \Psi_5 \end{cases} \\ h = 1 \text{ e } j = 3 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_3 = (0, 1, \_) \notin \Psi_5 \\ \theta_h = \theta_1 = (3, 0, \_) \notin \Psi_1 \end{cases} \end{cases} \quad (5.6)$$

e portanto todos os casos em (5.6) também são contraditórios. Conseqüentemente,  $\theta_i \notin \Psi_0$ . De modo análogo, deduzimos que  $\theta_i \notin \Psi_j$ , para todo  $j \in \{1, 2, 3, \dots, 7\}$  (veja Apêndice D). Portanto, não existe partição em mergulhos de  $H_{8,12}$  que contenham regiões triangulares. Logo, a região mínima de mergulhos de  $H_{8,12}$  é quadrangular. ■

Conhecer a região mínima de mergulhos de um grafo, já é uma informação de peso para o processo de identificação do conjunto das superfícies e de suas partições. Agregada a esta informação, o fato de mergulhos de  $H_{8,12}$  não possuírem regiões de lados ímpares, o conjunto de partições passa a ser uma estimativa bem próxima da realidade e menos difícil de ser determinado.

**Teorema 5.1.3** *Se  $R_\alpha$  é uma região de um mergulho de  $H_{8,12}$ , então  $\alpha$  é par maior ou igual a 4.*

**Demonstração.** Mostraremos que não existe  $R_5 = (a, b, c, d, e)$  sobre um mergulho de  $H_{8,12}$ . De fato, se  $R_5$  existisse, sua orientação e orientações de vértices seriam como na Figura 5.1.4. Conseqüentemente, os sistemas de rotações de  $R_5$  seriam dados por

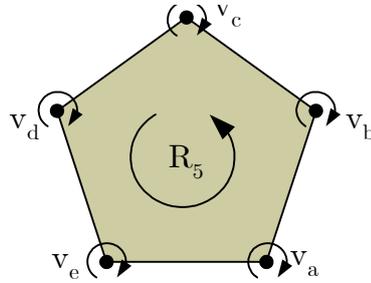


Figura 5.1.4: Região pentagonal de um mergulho orientável

$$\theta_a = (e, b, \_), \theta_b = (c, a, \_), \theta_c = (d, b, \_), \theta_d = (c, e, \_), \theta_e = (d, a, \_).$$

Suponhamos que  $\theta_a = \theta_0 = (1, 5, \_)$ . Então,

$$\theta_a = \theta_0 = (1, 5, \_) \Rightarrow \begin{cases} \theta_e = \theta_1 = (6, 0, \_) \Rightarrow \theta_d = \theta_6 = (4, 1, \_) \notin \Psi_6 \\ \theta_b = \theta_5 = (4, 0, \_) \Rightarrow \theta_c = \theta_4 = (6, 5, \_) \notin \Psi_4 \\ \theta_e = \theta_1 = (2, 0, \_) \Rightarrow \theta_d = \theta_2 = (4, 1, \_) \notin \Psi_2 \\ \theta_b = \theta_5 = (4, 0, \_) \Rightarrow \theta_c = \theta_4 = (2, 5, \_) \notin \Psi_4 \\ \theta_e = \theta_1 = (2, 0, \_) \Rightarrow \theta_d = \theta_2 = (6, 1, \_) \notin \Psi_2 \\ \theta_b = \theta_5 = (6, 0, \_) \Rightarrow \theta_c = \theta_2 = (4, 5, \_) \notin \Psi_6 \end{cases}$$

$S$	$P$	$T$ e $2P$		$5P$		$2T$ e $4P$		$5P$
$6R_4$	$4R_4R_8$ $3R_42R_6$	$3R_4R_{12}$ $2R_4R_6R_{10}$	$2R_42R_8$ $4R_6$	$2R_4R_{16}$ $R_4R_6R_{14}$ $R_4R_8R_{12}$ $3R_8$	$R_42R_{10}$ $2R_6R_{12}$ $R_6R_8R_{10}$	$R_4R_{20}$ $R_6R_{18}$ $2R_{12}$	$R_8R_{16}$ $R_{10}R_{14}$	$R_{24}$
1	2	4		7		5		1

Tabela 5.1.2: Partições das classes de mergulhos orientáveis e não-orientáveis de  $H_{8,12}$ 

As contradições acima mostram que não existe  $R_5$  que passa por  $v_a$  com  $\theta_a = (1, 5, \_)$ . De modo análogo, provam-se os demais casos. ■

Como ficou comprovado na existência do cubo através do mergulho de  $H_{8,12}(\Theta_c)$  (grafo  $H_{8,12}$  munido do sistema de rotações  $\Theta_c$  mostrado na Seção 5.1), a partição do mergulho mínimo do grafo do hexaedro é da forma  $6R_4$ , isto é, composto por seis regiões quadrangulares. Portanto, o mergulho mínimo do hexaedro encontra-se sobre uma superfície  $\Omega$ , cuja característica de Eüler é dada por

$$\chi(\Omega) = 8 - 12 + 6 = 2,$$

ou seja,  $\Omega$  é uma superfície homeomorfa a esfera  $S$ .

Por outro lado, não existe superfície não-orientável com característica de Eüler igual a 2, o máximo valor assumido por uma superfície deste tipo ocorre no caso do plano projetivo  $P$ , isto é, quando  $\chi(P) = 1$ . Mas, a partição de mergulhos sobre  $H_{8,12}$  que satisfaz a característica de  $P$  deve ser formada por 5 regiões, de fato,

$$\chi(\Omega) = 8 - 12 + 5 = 1.$$

Portanto,  $\Omega$  é uma superfície homeomorfa ao plano projetivo  $P$ .

Conhecidos os números de regiões e as superfícies mínimas para os mergulhos orientáveis e não-orientáveis de  $H_{8,12}$  e utilizando os Teorema 5.1.2 e 5.1.3, concluímos que as partições de mergulhos das respectivas superfícies orientáveis e não-orientáveis de  $H_{8,12}$ , são como os relacionados na Tabela 5.1.2.

Deduzimos, então, da Tabela 5.1.2, que existem 20 possíveis partições para os mergulhos de  $H_{8,12}$ , sendo 10 modelos orientáveis e 19 não-orientáveis. Portanto, o conjunto das superfícies para as modulações de  $H_{8,12}$  é dado por

$$\mathbb{S}(H_{8,12}) = \{S, T, 2T, P, 2P, 3P, 4P, 5P\}. \quad (5.7)$$

A partir daqui, somente a construção de um mergulho de um dos representantes de classe ou o algoritmo 2.6.1 irá confirmar se o modelo da partição relacionado na Tabela 5.1.2 existe ou não. Novamente, só temos condições, por enquanto, de confirmar a existência das modulações orientáveis, através da implementação do Algoritmo 2.6.1.

Só resta identificar, agora, quais as classes de modulações de  $H_{8,12}$  e seus respectivos números de elementos. Utilizando um arquivo formado pelo conjunto de rotações de  $H_{8,12}$ ,

relacionados na Tabela C.0.1, como entrada para o algoritmo 2.6.1, constatamos que as classes de modulações orientáveis e o número de mergulhos de classe são como o mostrado na Tabela 5.1.3.

Na Tabela 5.1.3, cada classe de modulação de  $H_{8,12}$  é identificada através do sistema de rotações  $\Theta$ , a superfície  $\Omega$ , o tipo de partição, o conjunto de seqüências orbitais, o número de sinais  $k$  da moduação e a cardinalidade da classe  $\#$ .

$\Xi_i$	$\Theta$	$\Omega$	Partição	Seqüências orbitais	$k$	$\#$
$\Xi_1$	AbCDEfgh	$S$	$R_{4,4,4,4,4,4}$	$\{(1056), (0123), (0345), (1672), (2743), (4765)\}$	6	2
Total dos mergulhos das classes da esfera						2
$\Xi_2$	AbCDefgh	$T$	$R_{4,4,4,12}$	$\{(1056), (0123), (1672), (034765432745)\}$	4	16
$\Xi_3$	ABCDEFgh	$T$	$R_{4,4,6,10}$	$\{(0345), (2743), (105672), (0165476123)\}$	4	24
$\Xi_4$	ABcDEFgh	$T$	$R_{4,4,8,8}$	$\{(0345), (1276), (10567432), (01654723)\}$	4	6
$\Xi_5$	ABcDeFgh	$T$	$R_{6,6,6,6}$	$\{(105432), (016723), (034765), (127456)\}$	4	8
Total dos mergulhos das classes do toro						54
$\Xi_6$	ABcDefGH	$2T$	$R_{4,20}$	$\{(1276), (10567450347230165432)\}$	2	72
$\Xi_7$	ABCDEFgh	$2T$	$R_{6,18}$	$\{(105472), (016503456743276123)\}$	2	72
$\Xi_8$	—	$2T$	$R_{8,16}$	—	2	0
$\Xi_9$	ABCDeFgh	$2T$	$R_{10,14}$	$\{(0167456123), (10543276503472)\}$	2	24
$\Xi_{10}$	ABCDeFGh	$2T$	$R_{12,12}$	$\{(105432745672), (016503476123)\}$	2	32
Total dos mergulhos das classes do bitoro						200
Total geral dos mergulhos de $H_{8,12}$						256

Tabela 5.1.3: Classes de modulações orientáveis de  $H_{8,12}$

Observe, na Tabela 5.1.3, que ao todo são 256 mergulhos identificados pelo Algoritmo 2.6.1; logo, pela igualdade (5.3), foram identificados todos os modelos de projetos de modulações orientáveis de  $H_{8,12}$ . De imediato, vemos que todas as superfícies orientáveis de  $\mathbb{S}(H_{8,12})$  possuem os seguintes modelos de modulações regulares:  $6R_4$  sobre a esfera,  $4R_6$  sobre o toro e  $2R_{16}$  sobre o bi-toro. Dentre os projetos de modulações identificados neste trabalho o hexaedro é o único que apresenta um índice de 100% de existência de modulações regulares nos conjuntos de superfícies orientáveis. Além do mais, há somente um dos possíveis modelos de partição,  $R_8R_{16}$  que não é realizado em superfícies orientáveis.

Apesar do número reduzido de mergulhos (256) de superfícies orientáveis (3) e modelos de partições (10), a conclusão é que o hexaedro possui um alto índice de existência de modulações regulares em superfícies sem bordos (100%) e um alto índice de partições realizáveis (90%).

## 5.2 Modulações do Hexaedro

O processo de identificação das modulações do hexaedro em superfícies com bordos é análogo ao processo de identificação do Capítulo 4, utilizado nos grafos  $K_5$  e  $K_{4,4}$ .

A primeira tentativa de organizar os dados relativos às modulações de um grafo, significa identificar dois tipos de modulações em quatro classes de superfícies distintas. É uma etapa importante do processo porque fornece, além dos modelos, as classes de superfície e a quantidade de modulações. A partir dos dados da Tabela 5.2.1, fica mais fácil classificar e analisar as modulações QAMS's e *twisted* do hexaedro.

Modulações orientáveis de $H_{8,12}$ sobre $S_\mu$										
Sem bordo		Partições de mergulhos com bordos								
$\Omega$	$S$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	#		
$\Xi_1$	$6R_4$	$5R_4$	$4R_4$	$3R_4$	$2R_4$	$R_4$	$H_{8,12}$	6		
#	1	1	1	1	1	1	1	6		
Modulações de $H_{8,12}$ sobre $P_\mu$										
Sem bordo		Partições de mergulhos com bordos								
$\Omega$	$P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$		#		
$\Xi_1$	$4R_4R_8$	$4R_4, 3R_4R_8$	$3R_4, 2R_4R_8$	$2R_4, R_4R_8$	$R_4, R_8$	$H_{8,12}$		10		
$\Xi_2$	$3R_42R_6$	$3R_4R_6$ $2R_42R_6$	$3R_4, 2R_4R_6$ $R_42R_6$	$2R_4$ $2R_6$	$R_4$ $R_6$	$H_{8,12}$		11		
#	2	4	5	4	4	2		21		
Modulações de $H_{8,12}$ sobre $T_\mu$ e $2P_\mu$										
Sem bordo		Partições de mergulhos com bordos								
$\Omega$	$T, 2P$	$T_1, 2P_1$	$T_2, 2P_2$	$T_3, 2P_3$	$T_4, 2P_5$			#		
$\Xi_1$	$3R_4R_{12}$	$3R_4, 2R_4R_{12}$	$2R_4, R_4R_{12}$	$R_4, R_{12}$	$H_{8,12}$			8		
$\Xi_2$	$2R_4R_6R_{10}$	$2R_4R_6, 2R_4R_{10}$ $R_4R_6R_{10}$	$2R_4, R_4R_{10}$ $R_4R_6, R_6R_{10}$	$R_4, R_6$ $R_{10}$	$H_{8,12}$			12		
$\Xi_3$	$2R_42R_8$	$2R_4R_8$ $R_42R_8$	$2R_4, 2R_8$ $R_4R_8$	$R_4R_8$	$H_{8,12}$			8		
$\Xi_4$	$4R_6$	$3R_6$	$2R_6$	$R_6$	$H_{8,12}$			5		
#	4	8	10	7	4			33		
Modulações de $H_{8,12}$ sobre $3P_\mu$						Modulações sobre $2T_\mu$ e $4P_\mu$				
Sem bordo		Partições de mergulhos com bordos				Sem bordo		Com bordo		
$\Omega$	$3P$	$3P_1$	$3P_2$	$3P_3$	#	$\Omega$	$2T, 4P$	$2T_1, 4P_1$	$2T_2, 4P_2$	#
$\Xi_1$	$2R_4R_{16}$	$2R_4, R_4R_{16}$	$R_4, R_{16}$	$H_{8,12}$	6	$\Xi_1$	$R_4R_{20}$	$R_4, R_{20}$	$H_{8,12}$	4
$\Xi_2$	$R_4R_6R_8$	$R_4R_6, R_4R_{14}$ $R_6R_{14}$	$R_4, R_6$ $R_{14}$	$H_{8,12}$	8	$\Xi_2$	$R_6R_{18}$	$R_6, R_{18}$	$H_{8,12}$	4
$\Xi_3$	$R_4R_8R_{12}$	$R_4R_8, R_4R_{12}$ $R_8R_{12}$	$R_4, R_8$ $R_{12}$	$H_{8,12}$	8	$\Xi_3$	$R_8R_{16}$	$R_8, R_{16}$	$H_{8,12}$	4
$\Xi_4$	$R_42R_{10}$	$R_4R_{10}, 2R_{10}$	$R_4, R_{10}$	$H_{8,12}$	6	$\Xi_4$	$R_{10}R_{14}$	$R_{10}, R_{14}$	$H_{8,12}$	4
$\Xi_5$	$2R_6R_{12}$	$2R_6, R_6R_{12}$	$R_6, R_{12}$	$H_{8,12}$	6	$\Xi_5$	$R_{10}R_{10}$	$R_{10}$	$H_{8,12}$	3
$\Xi_6$	$R_6R_8R_{10}$	$R_6R_8, R_6R_{10}$ $R_8R_{10}$	$R_6, R_8$ $R_{10}$	$H_{8,12}$	8	#	5	9	5	19
$\Xi_7$	$3R_8$	$2R_8$	$R_8$	$H_{8,12}$	4	Modulações sobre $5P_\mu$				
#	7	16	16	7	46	Sem bordo		Com bordo		
						$\Omega$	$5P$	$5P_1$		#
						$\Xi_1$	$R_{20}$	$H_{8,12}$		2
						#	1	1		2

Tabela 5.2.1: Partições das modulações de  $H_{8,12}$  sobre  $2T_\mu$  ou  $4P_\mu$ 

Usando a Tabela 5.2.1, determinamos, na Tabela 5.2.2 os números de modulações QAMS's

e *twisted* existentes em cada classe de superfícies orientáveis e não-orientáveis, com e sem bordos, discriminando as regulares e as irregulares.

No caso das modulações orientáveis de  $H_{8,12}$ , a estimativa é precisa e qualquer um dos projetos identificados na Tabela 5.2.1 podem ser realizados, desde que o mergulho geométrico seja obtido. Os dados referentes às modulações não-orientáveis não são precisos, trata-se de uma estimativa dos modelos de partições possíveis.

Observamos, na Tabela 5.2.2, que os dados referentes às superfícies das formas  $gT$  e  $2gP$  são idênticos, quando todos os mergulhos sobre as superfícies orientáveis  $gT$  são realizados, por exemplo, no caso dos mergulhos de  $H_{8,12}$  sobre  $T$  e  $2P$ . Obviamente, a igualdade entre os números de elementos das partições de  $T$  e  $2P$  não implica, necessariamente, que um modelo orientável realizável sobre  $T$ , também seja realizável em  $2P$ . Pode ser que sim. Pode ser que não.

QAMS							<i>Twisted</i>			
$\Omega$	Sem bordo			Com bordo			$S_1 + S_2$	Sem bordo	Com bordo	$S_3$
	$R$	$I$	$S_1$	$R$	$I$	$S_2$				
$S_\mu$	1	0	1	4	0	4	5	1	6	7
$T_\mu$	1	3	4	6	11	17	21	4	29	33
$2T_\mu$	1	3	4	0	0	0	4	4	11	15
$T_1$	3	6	9	10	11	21	30	9	46	55
QAMS							<i>Twisted</i>			
$\bar{\Omega}$	Sem bordo			Com bordo			$S_4 + S_5$	Sem bordo	Com bordo	$S_6$
	$R$	$I$	$S_4$	$R$	$I$	$S_5$				
$P_\mu$	0	2	2	6	7	13	15	2	19	21
$2P_\mu$	1	3	4	6	11	17	21	4	29	33
$3P_\mu$	1	6	7	4	12	16	23	7	39	46
$4P_\mu$	1	3	4	0	0	0	4	5	14	19
$5P_\mu$	1	0	1	0	0	0	1	1	1	2
$T_2$	4	14	18	16	30	46	64	19	102	121
$T_1 + T_2$	7	20	27	26	41	67	94	28	148	176

Tabela 5.2.2: Modulações QAMS's e *twisted* por classes de superfícies de  $H_{8,12}$

Quanto ao número de modulações das principais famílias de superfícies de mergulhos de  $H_{8,12}$ , segue da Tabela 5.2.2, que: 85 projetos correspondem as modulações orientáveis, sendo 30 QAMS's e 55 *twisted* e 185 correspondem as superfícies não-orientáveis, sendo 64 QAMS's e 121 *twisted*. Sobre superfícies sem bordos, vemos que existem 27 projetos de modulações QAMS, sendo 9 orientáveis e 18 não-orientáveis, 28 projetos de modulações *twisted*, sendo 9 orientáveis e 19 não-orientáveis. Sobre superfícies com bordos, são 67 projetos de modulações QAMS's, sendo 21 em superfícies orientáveis e 46 em superfícies não-orientáveis, 176 projetos de modulações *twisted*, sendo 55 orientáveis e 121 não-orientáveis. Logo, há um total de 270

classes de modulações do hexaedro.

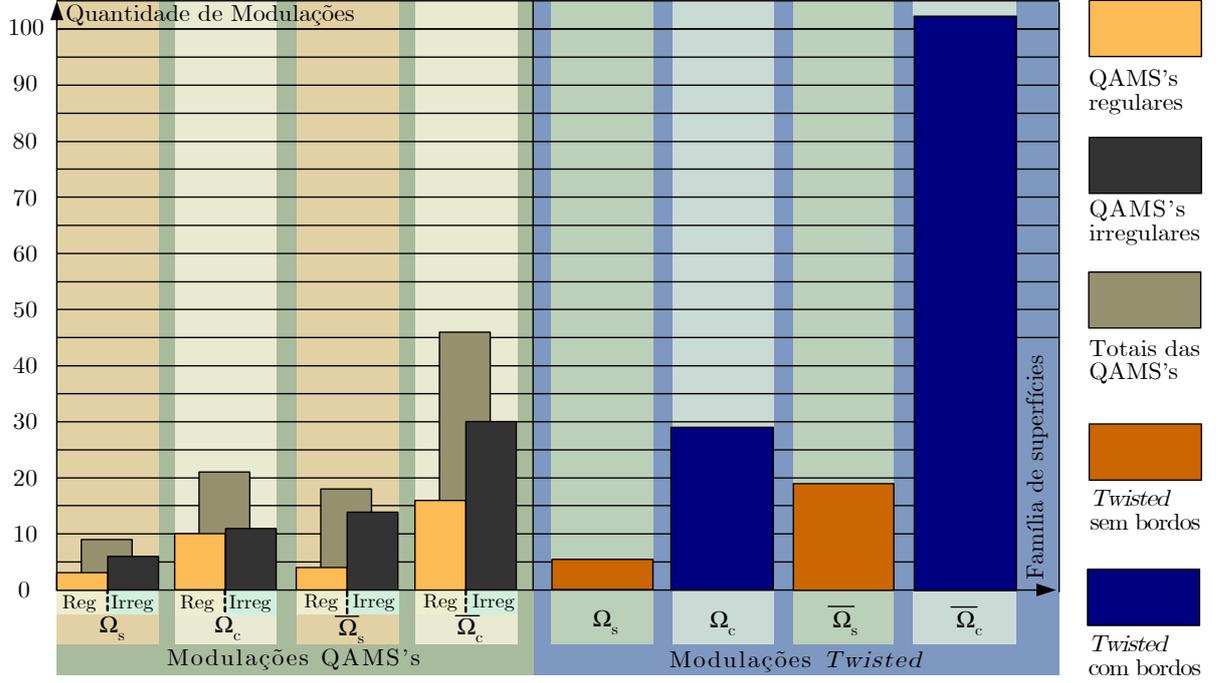


Figura 5.2.1: Gráfico da quantidade de modulações QAMS's e *twisted* por família de superfícies de mergulhos do hexaedro  $H_{8,12}$

O gráfico da Figura 5.2.1 mostra o número de modulações QAMS's regulares, irregulares e totais das classes de superfícies de mergulhos de  $H_{8,12}$ : sem bordos orientáveis  $\Omega_s$ , com bordos orientáveis  $\Omega_c$ , sem bordos não-orientáveis  $\overline{\Omega}_s$  e com bordos não-orientáveis  $\overline{\Omega}_c$ . Mostra, ainda, o número de modulações *twisted* nas classes de superfícies de mergulhos de  $H_{8,12}$ :  $\Omega_s$ ,  $\Omega_c$ ,  $\overline{\Omega}_s$  e  $\overline{\Omega}_c$ .

De um modo geral, as classes de modulações de  $H_{8,12}$  têm comportamentos semelhantes às modulações de  $K_5$  e  $K_{4,4}$ . No caso destas últimas duas, os dois tipos de modulações QAMS e *twisted*, regulares e irregulares, apresentam as mesmas desigualdades

$$|\text{Reg}(\Omega_s)| < |\text{Reg}(\overline{\Omega}_c)| < |\text{Reg}(\Omega_s)| < |\text{Reg}(\overline{\Omega}_c)| \quad (5.8a)$$

$$|\text{Irreg}(\Omega_s)| < |\text{Irreg}(\overline{\Omega}_c)| < |\text{Irreg}(\Omega_s)| < |\text{Irreg}(\overline{\Omega}_c)|. \quad (5.8b)$$

Entretanto, a classe de modulações QAMS's irregulares é a única das classes de modulações de  $H_{8,12}$  que não satisfazem as condições de (5.8a). Neste caso, valem as desigualdades

$$|\text{Irreg}(\Omega_s)| < |\text{Irreg}(\Omega_c)| < |\text{Irreg}(\overline{\Omega}_s)| < |\text{Irreg}(\overline{\Omega}_c)|.$$

Além das conclusões acima, observamos que as modulações de  $H_{8,12}$ , por apresentarem um número bastante baixo em relação as modulações de  $K_5$  e  $K_{4,4}$ , apresentam taxas de variações bem maiores do que destas duas últimas. Na Tabela 5.2.3, apresentamos os índices de incidências parcial  $I_p$ , total  $I_t$  e a taxa de variação entre as modulações QAMS's e *twisted*.

Modulações		Orientável				Não-orientável			
		Sem bordo		Com bordo		Sem bordo		Com bordo	
$K_5$	QAMS	9		21		18		46	
	$I_p, I_t$	30,00	9,57	70,00	19,72	28,13	19,149	71,87	48,94
	<i>twisted</i>	9		46		19		102	
	$I_p, I_t$	16,36	5,114	83,64	18,67	15,702	10,78	84,298	57,96
Taxa de variação (%)		13,64	4,456	13,64	1,05	12,428	8,369	12,428	9,02

Tabela 5.2.3: Taxa de variação dos índices de existências das classes de modulações QAMS's e *twisted* nas famílias de superfícies de mergulhos do grafo  $K_{4,4}$

Para efeito de comparação, apresentamos, na Tabela 5.2.4, os dados referentes às taxas de variações das Tabela 5.2.3 e 4.4.5. De imediato, vemos que a taxa de variação entre modulações QAMS's e *twisted* é maior nas modulações de  $H_{8,12}$ .

Taxa de variação do grafo	Orientável				Não-orientável			
	Sem bordo		Com bordo		Sem bordo		Com bordo	
	Reg	Irreg	Reg	Irreg	Reg	Irreg	Reg	Irreg
Var ( $K_5$ )	4,08	1,35	4,08	1,05	5,06	3,6	5,06	6,0
Var ( $K_{4,4}$ )	5,1	1,69	4,9	1,99	4,12	2,7	4,12	2,35
Var ( $H_{8,12}$ )	13,64	4,46	13,64	1,05	12,428	8,37	12,428	9,02

Tabela 5.2.4: Taxas de variações dos índices de existências das classes de modulações QAMS's e *twisted* nas famílias de superfícies de mergulhos dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$  e  $H_{8,12}$

No gráfico da Figura 5.2.2, apresentamos as taxas de variações entre modulações QAMS's e *twisted* por família de superfícies dos grafos completo  $K_5$ , completo bipartido  $K_{4,4}$  e do hexaedro  $H_{8,12}$ . Observamos, que a variação máxima para estes respectivos grafos são 4,95, 3,41 e 12,59. Portanto, há uma variação maior entre o número de modulações QAMS's e *twisted* nas famílias do grafo  $H_{8,12}$  e o grafo completo bipartido  $K_{4,4}$  apresenta a menor taxa de variação.

Observe, ainda, que as taxas de variações entre os grafos completo  $K_5$  e o grafo completo bipartido  $K_{4,4}$  estão muito próximas e possuem curvas bem parecidas. Apesar da variação em  $H_{8,12}$  ser maior, o tipo de curva não é muito diferente em termos de variação. Concluímos, portanto, que independente do tipo de grafo, as curvas de taxas de variações são idênticas, com uma pequena diferença nas modulações do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ . Diferentemente de  $K_5$  e  $H_{8,12}$ , a família de modulações não-orientáveis irregulares de  $K_{4,4}$  apresentam a maior taxa de variação.

As taxas de variações das famílias de grafos completos e dos grafos completos bipartidos estão muito próximas, porém, grafos que não pertencem a estas famílias possuem variações

muito diferentes. Contudo, as variações de taxas não são muito diferentes.

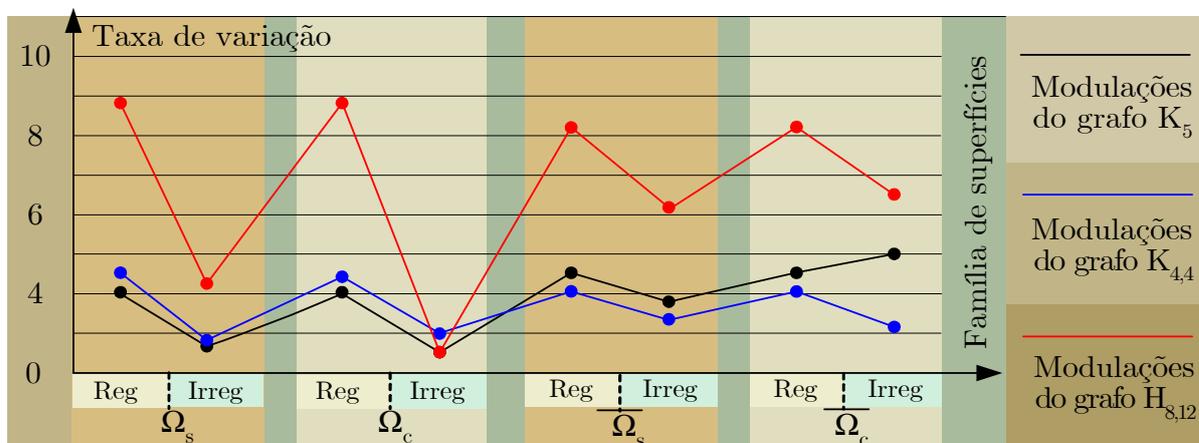


Figura 5.2.2: Gráfico da taxa de variação entre modulações QAMS's e *twisted* por famílias de superfícies dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$  e  $H_{8,12}$

Para termos uma idéia precisa das variações de taxas entre as famílias de superfícies, na Tabela 5.2.5, apresentamos o desvio padrão entre a taxa de variação das modulações regulares e irregulares nas famílias de superfícies orientáveis e não-orientáveis. Consta, ainda, a taxa de variação média das superfícies sem bordos e com bordos (calculadas nas superfícies orientáveis e não-orientáveis), a taxa de variação média nas famílias de superfícies orientáveis e não-orientáveis e a variação total.

Grafo	Desvio padrão				Variação média				
	Orientável		Não-orientável		Sem bordo	Com Bordo	Orientável	Não-Orientável	Total
	Reg	Irreg	Reg	Irreg					
$K_5$	0,00	0,30	0,00	2,40	3,52	4,05	2,64	4,93	3,79
$K_{4,4}$	0,20	0,30	0,00	0,35	3,40	3,34	3,42	3,32	3,37
$H_{8,12}$	0,00	3,41	0,00	0,65	9,72	9,03	8,20	10,562	9,38

Tabela 5.2.5: Taxas de variações dos índices de existências das classes de modulações QAMS's e *twisted* nas famílias de superfícies de mergulhos dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$  e  $H_{8,12}$

Por exemplo, no grafo  $K_5$  o desvio padrão das modulações regulares das superfícies orientáveis,  $Dp(\Omega(\text{Reg}))$ , é dado pela diferença entre as taxas de variações das modulações QAMS e *twisted* desta família de superfícies, isto é,

$$Dp(\Omega(\text{Reg})) = \text{Var}(\text{QAMS}) - \text{Var}(\text{twister}) = 4,08 - 4,08 = 0,00.$$

Nos casos das demais famílias, temos:

$$\begin{aligned} \text{Dp}(\Omega(\text{Irreg})) &= \text{Var}(\text{QAMS}) - \text{Var}(\text{twister}) = 1,35 - 1,05 = 0,30 \\ \text{Dp}(\overline{\Omega}(\text{Reg})) &= \text{Var}(\text{QAMS}) - \text{Var}(\text{twister}) = 5,06 - 5,06 = 0,00 \\ \text{Dp}(\overline{\Omega}(\text{Irreg})) &= \text{Var}(\text{QAMS}) - \text{Var}(\text{twister}) = 6,00 - 3,60 = 2,40. \end{aligned}$$

A variação média  $V_m$  foi calculada, no caso do grafo  $K_5$  para a família de superfícies sem bordo, tomando-se a média aritmética das taxas de variações das superfícies sem bordos orientáveis e não-orientáveis. Neste caso, os cálculos foram realizados do seguinte modo:

$$\begin{aligned} V_m(M_s) &= \frac{1}{4} [\text{Var}(\Omega_s(\text{Reg})) + \text{Var}(\Omega_s(\text{Irreg})) + \text{Var}(\overline{\Omega}_s(\text{Reg})) + \text{Var}(\overline{\Omega}_s(\text{Irreg}))] \\ &= \frac{1}{4} (4,08 + 1,35 + 5,06 + 6) = 3,52. \end{aligned}$$

No caso da família de superfícies com bordos, a variação média é dada por

$$\begin{aligned} V_m(M_s) &= \frac{1}{4} [\text{Var}(\Omega_c(\text{Reg})) + \text{Var}(\Omega_c(\text{Irreg})) + \text{Var}(\overline{\Omega}_c(\text{Reg})) + \text{Var}(\overline{\Omega}_c(\text{Irreg}))] \\ &= \frac{1}{4} (4,08 + 1,05 + 5,06 + 6,0) = 4,05. \end{aligned}$$

A variação média da taxa de variação das modulações QAMS's e *twisted* das superfícies orientáveis é dada por

$$\begin{aligned} V_m(M) &= \frac{1}{4} [\text{Var}(\Omega_s(\text{Reg})) + \text{Var}(\Omega_s(\text{Irreg})) + \text{Var}(\Omega_c(\text{Reg})) + \text{Var}(\Omega_c(\text{Irreg}))] \\ &= \frac{1}{4} (4,08 + 1,35 + 4,08 + 1,05) = 2,64 \end{aligned}$$

e a variação média da taxa de variação das modulações QAMS's e *twisted* das superfícies não-orientáveis é dada por

$$\begin{aligned} V_m(\overline{M}) &= \frac{1}{4} [\text{Var}(\overline{\Omega}_s(\text{Reg})) + \text{Var}(\overline{\Omega}_s(\text{Irreg})) + \text{Var}(\overline{\Omega}_c(\text{Reg})) + \text{Var}(\overline{\Omega}_c(\text{Irreg}))] \\ &= \frac{1}{4} (5,06 + 3,6 + 5,06 + 6,0) = 4,93. \end{aligned}$$

Por último, a variação média total  $V_{mt}$  das modulações QAMS's e *twisted* das superfícies de  $K_5$  é determinada sobre a soma de todas as variações,

$$V_{mt}(K_m) = \frac{1}{8} (4,08 + 1,35 + 4,08 + 1,05 + 5,06 + 3,6 + 5,06 + 6,0) = 3,79.$$

Os demais dados da Tabela 5.2.5, ou sejam, aqueles correspondentes aos grafos  $K_{4,4}$  e  $H_{8,12}$ , foram determinados de modo análogo ao de  $K_5$ .

Em relação aos dados da Tabela 5.2.5, observamos que os dois representantes do grafo completo apresentam desvio padrão zero, para os casos de modulações regulares e próximo de zero, na taxa de variação das modulações QAMS's e *twisted* irregulares, exceto a família

de modulações irregulares não-orientáveis, cujo desvio padrão é de 2,40%, o que não é muito alto.

No caso de  $H_{8,12}$ , o desvio padrão é também nulo para os casos regulares e também são baixos nos casos irregulares, atingindo o valor máximo de 3,41%, no caso da família de modulações irregulares orientáveis.

Quanto a variação média, as modulações dos grafos completos  $K_5$  e  $K_{4,4}$  apresentam um índice baixo de variação, com mínima de 2,64%, na família de modulações orientáveis e máxima de 4,93%, na família de modulações não-orientáveis. A variação média nas modulações de  $H_{8,12}$  é bem maior, com mínima de 8,20%, na família de modulações orientáveis e máxima de 10,59%, na família de modulações não-orientáveis. Observe que as variações médias mínima e máxima ocorrem nas mesmas famílias de superfícies.

Resta observar da Tabela 5.2.3, que as modulações QAMS preservam a relação: o número de modulações em superfícies não-orientáveis é aproximadamente igual ao dobro das modulações em superfícies orientáveis. Na verdade, ocorre igualdade no caso QAMS sem bordo e é quase igual ao dobro, no caso *twisted* sem bordo. Em  $H_{8,12}$ , os valores das famílias de modulações não-orientáveis aproxima-se do dobro das respectivas famílias orientáveis bem mais do que nos grafos completos  $K_5$  e  $K_{4,4}$ .

## 5.3 Modulações do Octaedro

Um dos principais objetivos deste trabalho é analisar se as modulações de um grafo e de seu dual possuem algum tipo de relação. Nada melhor do que o hexaedro e o octaedro para realizar este propósito. Talvez sejam os exemplos mais famosos de grafos duais com o número reduzido de elementos que permite realizar esta tarefa.

### 5.3.1 As partições e superfícies de modulações do octaedro

O octaedro é um sólido platônico e, portanto, trata-se de um poliedro regular convexo. Como é o dual do cubo, o octaedro é necessariamente um grafo com 6 vértices, todos de grau 4 com o mesmo número de lados do cubo e composto de 8 regiões triangulares. O octaedro será denotado, então, por  $H'_{6,12}$ .

Na Figura 5.3.1 apresentamos o modelo espacial (a) e o grafo de Cayley (b) do octaedro com o rotulamento fixo utilizado para determinar o conjunto dos sistemas de rotações de  $H'_{6,12}$ .

Lembramos que o rotulamento é fundamental para definir os sistemas de rotações e os modelos de modulações através das sequências orbitais. Observe que os rotulamentos do octaedro nos modelo espacial (a) e planar (b) coincidem quando estes são determinados nos seus respectivos ambientes. Em particular, ambos os grafos (a) e (b) apresentam o mesmo sistema de rotações de  $H'_{6,12}$ , dado por

$$\Theta = \{0(1, 2, 3, 4), 1(0, 4, 5, 2), 2(0, 1, 5, 3), 3(0, 2, 5, 4), 4(0, 3, 5, 1), 5(1, 4, 3, 2)\}. \quad (5.9)$$

Ambos definem um mergulho sobre a esfera composto de 8 regiões triangulares dadas pelo

mesmo conjunto de sequências orbitais

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (021), \quad \gamma_2 = (032), \quad \gamma_3 = (125), \quad \gamma_4 = (014), \\ \gamma_5 &= (043), \quad \gamma_6 = (154), \quad \gamma_7 = (235), \quad \gamma_8 = (345). \end{aligned}$$

Não é simples mapear regiões no modelo espacial vindas de mergulhos de grafos. No caso do octaedro (a) da Figura 5.3.1, devemos abstrair a transformação geométrica do modelo planar (b) em (a) e seguir a orientação. Além do mais, devemos considerar o fato de que as faces não visíveis do sólido geométrico em (a) possuem orientações oposta as das faces visíveis. Seguindo estas observações, podemos verificar que (a) e (b) correspondem ao mesmo poliedro e preservam o rotulamento.

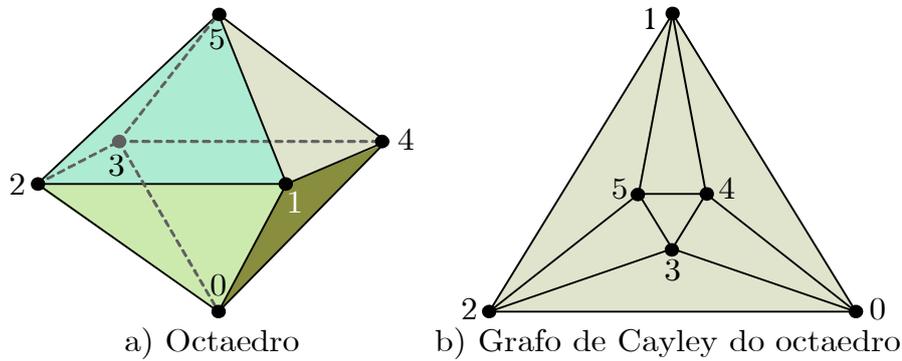


Figura 5.3.1: Modelo espacial do octaedro e seu grafo de Cayley

Como  $\deg(v) = 4$ , para todo vértice  $v$  de  $H'_{6,12}$ , então, pela igualdade (4.14), cada vértice  $v_i$  de  $H'_{6,12}$  tem

$$|\Psi_i| = (\deg v - 1)! = (4 - 1)! = 6$$

rotações distintas. Por outro lado, pela fórmula (4.13), o grafo  $H'_{6,12}$  tem

$$\prod_{v \in V(G)} (\deg v - 1)! = [(4 - 1)!]^6 = 6^6 = 46\,656 \tag{5.10}$$

sistemas de rotações distintas e, conseqüentemente, são 46 656 mergulhos ou projetos de modulações distintas de  $H'_{6,12}$ .

Pelo Algoritmo 4.1.5, um conjunto de sistemas de rotações distintos do octaedro  $H'_{6,12}$  é dado na Tabela 5.3.1.

$\Psi$	$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_3$	$\Phi_4$	$\Phi_5$	$\Phi_6$
$\Psi_0$	$A = (1234)$	$G = (1243)$	$O = (1324)$	$a = (4321)$	$g = (3421)$	$o = (4231)$
$\Psi_1$	$B = (0452)$	$H = (0425)$	$P = (0542)$	$b = (2540)$	$h = (5240)$	$p = (2450)$
$\Psi_2$	$C = (1530)$	$K = (1503)$	$Q = (1350)$	$c = (0351)$	$h = (3051)$	$q = (0531)$
$\Psi_3$	$D = (0254)$	$L = (0245)$	$R = (0524)$	$d = (4520)$	$l = (5420)$	$r = (4250)$
$\Psi_4$	$E = (0351)$	$M = (0315)$	$S = (0531)$	$e = (1530)$	$m = (5130)$	$s = (1350)$
$\Psi_5$	$F = (1432)$	$N = (1423)$	$T = (1342)$	$f = (2341)$	$n = (3241)$	$t = (2431)$

Tabela 5.3.1: Conjunto dos sistemas de rotações distintos dos vértices de  $H'_{6,12}$

Uma vez que o octaedro possui uma região triangular, então o mergulho mínimo de  $H'_{6,12}$  encontra-se sobre a esfera. A rotação  $\Theta$ , em (5.9), já produz o mergulho. Logo, este é da forma

$$H'_{6,12}(\Theta) \hookrightarrow S \equiv 8R_3.$$

Por ser o mergulho mínimo do octaedro formado por uma triangulação, cuja região mínima, o triângulo, tem número de lados menor que a região mínima de mergulhos do hexaedro, que neste caso é uma região quadrangular, o conjunto das partições de mergulhos do octaedro irá ser bem maior do que o do cubo.

Considerando que o triângulo é a região mínima de um mergulho do octaedro, utilizaremos as igualdades em (4.10) para relacionar, na Tabela 5.3.2, todos os possíveis modelos de partições de mergulhos do octaedro  $H'_{6,12}$ .

$S$	$P$	$T$ e $2P$	$3P$	$2T$ e $4P$	$5P$	$3T$ e $6P$	$7P$			
$8R_3$	$6R_3R_6$	$R_{3,3,3,3,3,9}$	$R_{3,3,3,3,12}$	$R_{3,3,6,6,6}$	$R_{3,3,3,15}$	$R_{3,6,7,8}$	$R_{3,3,18}$	$R_{4,9,11}$	$R_{3,21}$	$R_{24}$
	$5R_3R_4R_5$ $4R_33R_4$	$R_{3,3,3,3,4,8}$	$R_{3,3,3,4,11}$	$R_{3,4,4,4,9}$	$R_{3,3,4,14}$	$R_{3,7,7,7}$	$R_{3,4,17}$	$R_{4,10,10}$	$R_{4,20}$	
		$R_{3,3,3,3,5,7}$	$R_{3,3,3,5,10}$	$R_{3,4,4,5,8}$	$R_{3,3,5,13}$	$R_{4,4,4,12}$	$R_{3,5,16}$	$R_{5,5,14}$	$R_{5,19}$	
		$R_{3,3,3,3,6,6}$	$R_{3,3,3,6,9}$	$R_{3,4,4,6,7}$	$R_{3,3,6,12}$	$R_{4,4,5,11}$	$R_{3,6,15}$	$R_{5,6,13}$	$R_{6,18}$	
		$R_{3,3,3,4,4,7}$	$R_{3,3,3,7,8}$	$R_{3,4,5,5,7}$	$R_{3,3,7,11}$	$R_{4,4,6,10}$	$R_{3,7,14}$	$R_{5,7,12}$	$R_{7,17}$	
		$R_{3,3,3,4,5,6}$	$R_{3,3,4,4,10}$	$R_{3,4,5,6,6}$	$R_{3,3,8,10}$	$R_{4,4,7,9}$	$R_{3,8,13}$	$R_{5,8,11}$	$R_{8,16}$	
		$R_{3,3,3,5,5,5}$	$R_{3,3,4,5,9}$	$R_{3,5,5,5,6}$	$R_{3,3,9,9}$	$R_{4,4,8,8}$	$R_{3,9,12}$	$R_{5,9,10}$	$R_{9,15}$	
		$R_{3,3,4,4,4,6}$	$R_{3,3,4,6,8}$	$R_{4,4,4,4,8}$	$R_{3,4,4,13}$	$R_{4,5,5,10}$	$R_{3,10,11}$	$R_{6,6,12}$	$R_{10,14}$	
		$R_{3,3,4,4,5,5}$	$R_{3,3,4,7,7}$	$R_{4,4,4,5,7}$	$R_{3,4,5,12}$	$R_{4,5,6,9}$	$R_{4,4,16}$	$R_{6,7,11}$	$R_{11,13}$	
		$R_{3,4,4,4,4,5}$	$R_{3,3,5,5,8}$	$R_{4,4,4,6,6}$	$R_{3,4,6,11}$	$R_{4,5,7,8}$	$R_{4,5,15}$	$R_{6,8,19}$	$R_{12,12}$	
		$R_{4,4,4,4,4,4}$	$R_{3,3,5,6,7}$	$R_{4,4,5,5,6}$	$R_{3,4,7,10}$	$R_{4,6,6,8}$	$R_{4,6,14}$	$R_{6,9,9}$		
					$R_{3,4,8,9}$	$R_{4,6,7,7}$	$R_{4,7,13}$	$R_{7,7,10}$		
					$R_{3,5,5,11}$	$R_{5,5,5,9}$	$R_{4,8,12}$	$R_{7,8,9}$		
					$R_{3,5,6,10}$	$R_{5,5,6,8}$		$R_{8,8,8}$		
			$R_{3,5,7,9}$	$R_{5,5,7,7}$						
			$R_{3,5,8,8}$	$R_{5,6,6,7}$						
			$R_{3,6,6,9}$	$R_{6,6,6,6}$						
1	3	11	22	34	27	10	1			

Tabela 5.3.2: Partições das classes de mergulhos orientáveis e não-orientáveis de  $H'_{6,12}$

Observamos, nos dados da Tabela 5.3.2, que são 56 modelos orientáveis e 109 sobre superfícies não-orientáveis, o que representa um valor aproximadamente igual ao dobro das partições orientáveis, propriedade comum a todos os grafos analisados neste trabalho. As partições da Tabela 5.3.2, tanto se refere aos prováveis modelos de partições do octaedro, quanto aos prováveis modelos do hexaedro. Os Teoremas 5.1.2 e 5.1.3, reduzem acentuadamente os números de partições para somente 10 modelos orientáveis e 19 não-orientáveis, o

que representam reduções de 5,5 vezes nos modelos orientáveis e, aproximadamente, 5,63 dos modelos não-orientáveis. Tal redução é impossível de ser realizada no caso do dual  $H'_{6,12}$ , uma vez que não há resultados de restrições equivalentes aos Teoremas 5.1.2 e 5.1.3. A solução para o octaedro é trabalhar com os 109 modelos disponíveis na Tabela 5.3.2.

Observe o quanto é diferente, em número e tipos, as partições do octaedro da Tabela 5.3.2, em relação às do hexaedro da Tabela 5.1.2. Entretanto, verificamos que todas as partições do hexaedro na Tabela 5.1.2 também são partições do octaedro na Tabela 5.3.2. Quer dizer, então, que as partições do hexaedro estão contidas no conjunto das partições do octaedro? É verdade. Dados os grafos  $G$  e  $G'$ , então as partições de um deles estão contidas no conjunto das partições do outro.

A primeira propriedade observada da relação de um grafo  $G$  e seu dual  $G'$ , refere-se ao conjunto de superfícies  $\mathbb{S}(G)$  e de partições  $\Xi(G)$  para os mergulhos de  $G$ , a priori, podemos considerar estes conjuntos iguais, como mostram as próximas afirmações.

**Lema 5.3.1** *Uma partição  $\Xi$  de  $\Omega$  é um modelo provável de uma modulação de  $G$  se, e somente se,  $\Xi$  é um modelo de uma modulação de  $G'$ .*

**Demonstração.** De fato, a priori, os modelos de partição de uma modulação só dependem do número de lados do grafo e da região mínima que pode ser sempre considerada como a triangular. Como  $G$  e  $G'$  possuem o mesmo número de lados e considerando que as regiões mínimas são triangulares, então segue a afirmação do lema. ■

Como consequência do Lema 5.3.1, segue que os prováveis modelos de mergulhos de  $G$  e  $G'$  são iguais. A priori, podemos considerar que os conjuntos das partições de  $G$  e  $G'$  são iguais, ou seja,  $\Xi(G) = \Xi(G')$  e que o conjunto de superfícies também são iguais,  $\mathbb{S}(G') \subseteq \mathbb{S}(G)$ . Somente conhecendo os mergulhos mínimos, as respectivas regiões mínimas e os tipos de regiões dos mergulhos de  $G$  e  $G'$  é que os conjuntos de superfícies e de partições passam a ser diferenciados. O certo é que valem relações de inclusões entre estes conjuntos, como mostra a próxima afirmação.

**Proposição 5.3.2** *Quaisquer que sejam os grafos  $G$  e  $G'$ ,  $\mathbb{S}(G) \subseteq \mathbb{S}(G')$  ou  $\mathbb{S}(G') \subseteq \mathbb{S}(G) \neq \emptyset$  e  $\Xi(G) \subseteq \Xi(G')$  ou  $\Xi(G') \subseteq \Xi(G)$ .*

**Demonstração.** De fato, pela Definição 2.4.12, o mergulho mínimo do grafo  $G(p, q)$  e do dual  $G'(k, q)$  satisfazem as condições

$$G(p, q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i \quad \text{e} \quad G'(k, q) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{j=1}^p R_{\alpha_j}^j. \quad (5.11)$$

Se  $k = p$ , então os mergulhos de  $G$  e  $G'$  possuem os mesmos números de vértices, lados e regiões e, portanto, encontram-se sobre uma mesma superfície  $\Omega$ . Por outro lado, partições do mesmo tipo dos grafos  $G(p, q)$  e  $G'(k, q)$  encontram-se sobre uma mesma superfície e como  $\Xi(G) = \Xi(G')$ , pelo Lema 5.3.1, segue a relação de igualdade entre os conjuntos de superfícies,  $\mathbb{S}(G) = \mathbb{S}(G')$ . Ou seja, se os mergulhos mínimos em (5.11) são tais que  $k = p$ , então prevalecem as relações de igualdades

$$\mathbb{S}(G) = \mathbb{S}(G') \quad \text{e} \quad \Xi(G) = \Xi(G').$$

Se  $k < p$ , então os mergulhos mínimos de  $G$  e  $G'$  encontram-se em superfícies distintas de gêneros  $\gamma$  e  $\gamma'$  com  $\gamma' < \gamma$ ; logo,  $G$  não possui mergulhos em superfícies de gêneros menores que  $\gamma$ . Mas, pelo Lema 5.3.1, toda partição  $\Xi$  de  $\Xi(G)$  é também de  $\Xi(G')$ , o que implica  $\Xi(G) \subset \Xi(G')$  e toda superfície  $\Omega$  de  $\mathbb{S}(G)$  é também superfície de  $\mathbb{S}(G')$  o que implica  $\mathbb{S}(G) \subset \mathbb{S}(G')$ .

Se  $p < k$ , concluímos, de modo análogo ao caso de  $k < p$ , que ocorre as relações de inclusões restritas  $\mathbb{S}(G') \subset \mathbb{S}(G)$  e  $\Xi(G') \subset \Xi(G)$ , encerrando assim a demonstração da proposição. ■

Na Proposição 5.3.2, trabalhamos com a hipóteses de que  $\Xi(G)$  e  $\Xi(G')$  são os conjuntos das prováveis partições de mergulhos de  $G$  e  $G'$ . A princípio, não se tem certeza se uma partição é realizável e a maior probabilidade apresentada da partição ser realizável foi a do grafo completo  $K_{4,4}$ . Posteriormente, apresentaremos dados referentes a probabilidade de realização de uma partição.

**Observação 5.3.3** *No caso do hexaedro  $H_{8,12}$  e o seu dual, octaedro  $H'_{6,12}$ , o conjunto interseção das superfícies é aquele cuja região mínima contém o maior número de lados, ou seja,*

$$\mathbb{S}(H_{8,12}) \cap \mathbb{S}(H'_{6,12}) = S(H_{8,12}) = \{S, P, T, 2P, 2T, 3P, 4P, 5P\}.$$

Segue, portanto, da Proposição 5.3.2 que o conjunto das superfícies das modulações de octaedro é o mesmo conjunto dado em (5.7).

**Observação 5.3.4** *Em relação as partições, a priori, o conjunto interseção  $\Xi(G) \cap \Xi(G')$  seria compostos pelas seguintes partições do octaedro, relacionadas na Tabela 5.3.2:*

1. 11 partições de  $T$  e  $2P$  correspondentes às de  $S$ , no hexaedro;
2. 22 partições de  $3P$  correspondentes às de  $P$ , no hexaedro;
3. 34 partições de  $2T$  e  $4P$  correspondentes às de  $T$  e  $2P$ , no hexaedro;
4. 27 partições de  $5P$  correspondentes às de  $3P$ , no hexaedro;
5. 34 partições de  $3T$  correspondentes às de  $2T$  e  $4P$ , no hexaedro e;
6. a partição de  $7P$  correspondente às de  $5P$ , no hexaedro.

Por (5.10), conhecemos o número de modulações de  $H'_{6,12}$ , a Tabela 5.3.1 fornece os sistemas de rotações distintos, os modelos da partição constam na Tabela 5.3.2 e uma matriz de rotação de  $H'_{6,12}$  é formada por 6 linhas e 4 colunas. Estes são dados suficientes para a implementação do Algoritmo 2.6.1. O processamento deste, forneceu o conjunto das classes de modulações existentes em mergulhos orientáveis de  $H'_{6,12}$  e o número de elementos de cada classe.

### 5.3.2 Classes de modulações do octaedro

Na Tabela 5.3.3, apresentamos todas as classes de modulações do octaedro identificadas através do Algoritmo 2.6.1. Cada classe, representa a realização de todos os mergulhos encontrados na última coluna #, da tabela.

Tabela 5.3.3: Classes de modulações de  $H'_{6,12}$  e suas respectivas cardinalidades

$\Xi_i$	$\Theta$	$\Omega$	Partição	Sequências orbitais	$k$	#
$\Xi_1$	ABCDEF	$S$	$R_{3,3,3,3,3,3,3,3}$	(102),(014),(032),(043),(154),(125),(235),(345)	8	2
Total dos mergulhos das classes da esfera						2
$\Xi_2$	ABCDEN	$T$	$R_{3,3,3,3,3,9}$	{(102), (014), (032), (043), (154), (125345235)}	6	64
$\Xi_3$	ABCDMT	$T$	$R_{3,3,3,3,4,8}$	{(102), (032), (043), (125), (1534), (01452354)}	6	108
$\Xi_4$	ABCLsf	$T$	$R_{3,3,3,3,5,7}$	{(102), (014), (032), (354), (15234), (0451253)}	6	48
$\Xi_5$	ABCDEF	$T$	$R_{3,3,3,3,6,6}$	{(102), (014), (032), (043), (152354), (125345)}	6	24
$\Xi_6$	AHkLST	$T$	$R_{3,3,3,4,4,7}$	{(014), (032), (354), (1025), (1234), (0452153)}	6	48
$\Xi_7$	ABCLSt	$T$	$R_{3,3,3,4,5,6}$	{(102), (014), (032), (0453), (15234), (125435)}	6	48
$\Xi_8$	–	$T$	$R_{3,3,3,5,5,5}$	–	6	–
$\Xi_9$	ABQlSn	$T$	$R_{3,3,4,4,4,6}$	{(102), (014), (0352), (1534), (2543), (045123)}	6	80
$\Xi_{10}$	AHcrSt	$T$	$R_{3,3,4,4,5,5}$	{(014), (152), (0453), (2543), (10235), (03412)}	6	96
$\Xi_{11}$	–	$T$	$R_{3,4,4,4,4,5}$	–	6	–
$\Xi_{12}$	GHqRsT	$T$	$R_{4,4,4,4,4,4}$	{(1025), (0143), (0412), (0354), (1532), (2345)}	6	8
Total dos mergulhos das classes do toro						524
$\Xi_{13}$	ABCDMN	$2T$	$R_{3,3,3,15}$	{(102), (032), (043), (014523512534154)}	4	864
$\Xi_{14}$	ABCLmt	$2T$	$R_{3,3,4,14}$	{(102), (032), (0453), (01435125415234)}	4	1.416
$\Xi_{15}$	obCref	$2T$	$R_{3,3,5,13}$	{(041), (145), (01253), (4021523543203)}	4	624
$\Xi_{16}$	ABCDeN	$2T$	$R_{3,3,6,12}$	{(102), (032), (041543), (014523512534)}	4	480
$\Xi_{17}$	ABCLeN	$2T$	$R_{3,3,7,11}$	{(102), (032), (0145234), (04154351253)}	4	336
$\Xi_{18}$	ABCLMN	$2T$	$R_{3,3,8,10}$	{(102), (032), (04351253), (0145234154)}	4	840
$\Xi_{19}$	ABCDef	$2T$	$R_{3,3,9,9}$	{(102), (032), (014512534), (041523543)}	4	560
$\Xi_{20}$	ABKlSn	$2T$	$R_{3,4,4,13}$	{(014), (0352), (1534), (1023045125432)}	4	912
$\Xi_{21}$	ABQRsn	$2T$	$R_{3,4,5,12}$	{(102), (0352), (12345), (014304153254)}	4	912
$\Xi_{22}$	ABKLSt	$2T$	$R_{3,4,6,11}$	{(014), (0453), (125435), (10234152032)}	4	720
$\Xi_{23}$	ABQlSn	$2T$	$R_{3,4,7,10}$	{(102), (0352), (0143254), (0415345123)}	4	384
$\Xi_{24}$	ABCRsN	$2T$	$R_{3,4,8,9}$	{(102), (2345), (03512532), (014304154)}	4	1.584
$\Xi_{25}$	ABKrsT	$2T$	$R_{3,5,5,11}$	{(125), (03452), (04153), (10235401432)}	4	480
$\Xi_{26}$	ABKLsT	$2T$	$R_{3,5,6,10}$	{(125), (04153), (014354), (1023452032)}	4	528
$\Xi_{27}$	ABQRsn	$2T$	$R_{3,5,7,9}$	{(102), (04153), (0143254), (034512352)}	4	384
$\Xi_{28}$	ABKreT	$2T$	$R_{3,5,8,8}$	{(102), (04153), (10235432), (01452034)}	4	240
$\Xi_{29}$	ABCdet	$2T$	$R_{3,6,6,9}$	{(102), (041523), (041523), (014532034)}	4	240
$\Xi_{30}$	ABCReN	$2T$	$R_{3,6,7,8}$	{(102), (041543), (0145234), (03512532)}	4	144
$\Xi_{31}$	–	$2T$	$R_{3,7,7,7}$	–	4	–
$\Xi_{32}$	AHKRmn	$2T$	$R_{4,4,4,12}$	{(0352), (1254), (1532), (102340143045)}	4	216
$\Xi_{33}$	AHKrmt	$2T$	$R_{4,4,5,11}$	{(0453), (1254), (10235), (01432152034)}	4	288
$\Xi_{34}$	AHKLmt	$2T$	$R_{4,4,6,10}$	{(0453), (1254), (032152), (1023401435)}	4	336
$\Xi_{35}$	AHKRen	$2T$	$R_{4,4,7,9}$	{(0352), (1532), (0412543), (102340145)}	4	240
$\Xi_{36}$	ABKlMn	$2T$	$R_{4,4,8,8}$	{(0352), (1534), (10230432), (01451254)}	4	336
$\Xi_{37}$	AhqImN	$2T$	$R_{4,5,5,10}$	{(1432), (03512), (04523), (1025340154)}	4	192
$\Xi_{38}$	ABclet	$2T$	$R_{4,5,6,9}$	{(2543), (03512), (014534), (102304152)}	4	624

Continua na próxima página

Tabela 5.3.3 - Continuação da página anterior

$\Xi_i$	$\Theta$	$\Omega$	Partição	Sequências orbitais	$k$	#
$\Xi_{39}$	AHQlsn	$2T$	$R_{4,5,7,8}$	$\{(0352), (04123), (0143254), (10215345)\}$	4	144
$\Xi_{40}$	AhKlsf	$2T$	$R_{4,6,6,8}$	$\{(1432), (102304), (125345), (01520354)\}$	4	12
$\Xi_{41}$	AhKrmf	$2T$	$R_{4,6,7,7}$	$\{(1432), (102354), (0152034), (0451253)\}$	4	24
$\Xi_{42}$	–	$2T$	$R_{5,5,5,9}$	–	4	–
$\Xi_{43}$	AHKreN	$2T$	$R_{5,5,6,8}$	$\{(10235), (15432), (041253), (01452034)\}$	4	216
$\Xi_{44}$	GHKrmT	$2T$	$R_{5,5,7,7}$	$\{(10235), (01453), (0432152), (0341254)\}$	4	24
$\Xi_{45}$	ABcLsT	$2T$	$R_{5,6,6,7}$	$\{(04153), (014354), (014354), (1023452)\}$	4	96
$\Xi_{46}$	ABcDeF	$2T$	$R_{6,6,6,6}$	$\{(102352), (014534), (032512), (041543)\}$	4	42
Total dos mergulhos das classes do bitoro						14.438
$\Xi_{47}$	ABCRef	$3T$	$R_{3,21}$	$\{(102), (014512532035430415234)\}$	2	8.320
$\Xi_{48}$	ABKLmt	$3T$	$R_{4,20}$	$\{(0453), (10234014351254152032)\}$	2	5.664
$\Xi_{49}$	ABKLen	$3T$	$R_{5,19}$	$\{(04153), (1023401451254352032)\}$	2	3.264
$\Xi_{50}$	ABKDeN	$3T$	$R_{6,18}$	$\{(041543), (102351253401452032)\}$	2	2.544
$\Xi_{51}$	ABKLMf	$3T$	$R_{7,17}$	$\{(0451253), (10234014354152032)\}$	2	1.152
$\Xi_{52}$	ABKLMN	$3T$	$R_{8,16}$	$\{(04351253), (1023415401452032)\}$	2	2.520
$\Xi_{53}$	ABKDef	$3T$	$R_{9,15}$	$\{(014512534), (102354304152032)\}$	2	3.168
$\Xi_{54}$	ABKLmn	$3T$	$R_{10,14}$	$\{(0451254153), (10234014352032)\}$	2	2.184
$\Xi_{55}$	ABKLMf	$3T$	$R_{11,13}$	$\{(10234152032), (0145125304354)\}$	2	1.920
$\Xi_{56}$	ABKDmf	$3T$	$R_{12,12}$	$\{(102354152032), (014304512534)\}$	2	956
Total dos mergulhos das classes do tritoro						31.692
Total geral dos mergulhos de $H'_{6,12}$						46.656

A primeira linha da Tabela 5.3.3 indica a única classe vinda do mergulho mínimo de  $H'_{6,12}$ , representada pela partição  $\Xi_1 = 8R_3$ , realizada pelo sistema de rotação ABCDEF e produz um mergulho de 8 regiões triangulares definidas pelas sequências orbitais

$$\gamma_1(102), \gamma_2(014), \gamma_3(032), \gamma_4(043), \gamma_5(154), \gamma_6(125), \gamma_7(235), \gamma_8(345),$$

sobre a superfície esfera  $S$ , correspondente, portanto, a uma modulação QAMS de 8 sinais sobre  $S$ . A última coluna # indica que classe  $\Xi_1$  é composta somente por 2 elementos.

Nas ausências dos Teoremas 5.1.2 e 5.1.3, as partições referentes às modulações orientáveis do hexaedro seriam, naturalmente, as 56 partições de  $T, 2T$  e  $3T$  relacionadas na Tabela 5.3.4, um número de partições expressivamente maior do que as 10 relacionadas na Tabela 5.1.3. Um levantamento da probabilidade de realização da partição referente às modulações orientáveis do hexaedro, calculada nos dados das Tabelas 5.1.3 e 5.3.3, dão resultados bem diferentes.

A Tabela 5.3.4 mostra os índices de existências das partições realizáveis de modelos de modulações orientáveis dos grafos completo  $K_5$ , completo bipartido  $K_{4,4}$ , hexaedro  $H_{8,12}$  e octaedro  $H'_{6,12}$ .

Observe que a falta de informação sobre a região mínima e o tipo de regiões de mergulhos do grafo afeta, demasiadamente, a taxa de incidência dos modelos de modulações do octaedro.

Veja que a diferença de índices, no caso da esfera, chega a ser de 90% e no caso total, a diferença é de 73,93%. Isto prova o quão é importante conhecer a região mínima de mergulhos de um grafo e o tipo de região.

Tabela	Grafo	Superfícies orientáveis					Índice total de existência
		$S$	$T$	$2T$	$3T$	$4T$	
Tabela 4.3.3	$K_5$	0%	71,43%	93,75%	100%	0%	87,50%
Tabela 4.4.2	$K_{4,4}$	0%	100%	100%	93,33%	100%	96,429%
Tabela 5.1.3	$H_{8,12}$	100%	100%	80%	0%	0%	90,00%
Tabela 5.3.3	$H_{8,12}$	9,09%	11,76%	40%	0%	0%	16,07%
	$H'_{6,12}$	100%	81,82%	94,12%	100%	0%	92,86%

Tabela 5.3.4: Índices de existências das modulações de  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$

Caso não tivéssemos conhecimento da região mínima e tipo de regiões de mergulhos de  $K_{4,4}$ , este certamente não teria o maior índice de existência dentre as famílias de grafos estudadas neste trabalho. Utilizando a região mínima e o tipo de região de mergulhos no processo de identificação das classes de mergulhos orientáveis de um grafo, chegamos a conclusão que, nos casos analisados, o grafo completo bipartido  $K_{n,n}$  apresenta o maior índice de existência (96,49%), seguido do octaedro  $H'_{6,12}$  (92,86%), hexaedro  $H(8,12)$  (90,00%) e, por último, o grafo completo  $K_n$  (87,50%) apresenta o menor índice de existência.

Obviamente, as informações acima são exatas no que se refere aos casos particulares dos grafos do hexaedro e do octaedro, entretanto, apesar de ter sido analisado somente um caso para as famílias de grafos completos  $K_n$  e  $K_{n,n}$ , prevalece a relação entre os índices de incidências entre  $K_n$  e  $K_{n,n}$ , isto é, o índice de  $K_{n,n}$  vai ser sempre maior do que o de  $K_n$ . Observamos que o índice de existência em uma família de grafos tende a aumentar, quando é calculado dentre os elementos de uma mesma família.

**Conjectura 5.3.5** *Se  $I(G)$  é o índice de existência total dos modelos de modulação de  $G$ , então*

$$I(G) < I(G) < I(G) < I(G) < I(G) < I(G) < \dots < I(G) = 100\%. \tag{5.12}$$

**Demonstração. (Justificativa da Conjectura)** Observamos, nos casos das famílias de grafos completos  $K_n$  e  $K_{n,n}$ , que o número de modulações de  $K_{n+1}$  ( $K_{n+1,n+1}$ ) é, consideravelmente, maior do que o de  $K_n$  ( $K_{n,n}$ ), porém, a diferença entre o número de modelos não realizáveis de  $K_n$  e  $K_{n+1}$  ( $K_{n,n}$  e  $K_{n+1,n+1}$ ) é muito pequena. Então, se aumentarmos consideravelmente o número de modelos realizáveis e aumentarmos muito pouco o número de modelos não realizáveis, o cálculo do índice de existência tende a aumentar sempre e o limite tende para 100%. ■

A demonstração da conjectura depende da prova da não existência de um modelo de modulação, ou seja, de provar que um modelo de mergulho de um grafo não é realizável, problema em aberto que não tem ainda uma demonstração definitiva. Existe somente a demonstração de três casos particulares, dois casos de  $K_5$  demonstrados em [15] e um caso de  $K_{4,4}$  demonstrado em [18].

Na análise inicial das modulações do octaedro apresentada acima, já colhemos informações bem significativas. Dentre as quatro categorias de grafos, é o que apresenta o maior número de modulações, inclusive as regulares em superfícies sem bordos orientáveis. A priori, todas as classes de superfícies orientáveis e não-orientáveis do octaedro possuem modulações regulares, o único a apresentar esta propriedade. No caso dos modelos de modulações orientáveis, todos são realizáveis, propriedade verificada para todos os grafos estudados.

O conjunto das classes das modulações do octaedro é formado por 56 modelos de modulações orientáveis e 108 não-orientáveis. É o caso com o maior número de modelos, apesar de possuir o mesmo número de mergulhos do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ . Como também possui o maior número de modulações regulares, é fundamental que identifiquemos as modulações com bordos, como foi feito nos demais casos.

### 5.3.3 Modulações com bordos do octaedro

O conjunto das classes de modulações do octaedro é, destacadamente, o que apresenta o maior número de classes de modulações e o maior número de modulações regulares. Relacionamos, na Tabela 5.3.5, todos os modelos de modulações QAMS's e *twisted* do octaedro sobre as superfícies  $S_\mu$  e  $P_\mu$ .

Modulações do octaedro sobre $S_\mu$										
S/b	Partições de mergulhos com bordos									
$\Omega$	$S$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	#
$\Xi_1$	$8R_3$	$7R_3$	$6R_3$	$5R_3$	$4R_3$	$3R_3$	$2R_3$	$R_3$	$H'_{6,12}$	6
#	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8
Modulações do octaedro sobre $P_\mu$										
S/b	Partições de mergulhos com bordos									
$\Omega$	$P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$		#
$\Xi_2$	$6R_3R_6$	$6R_3$ $5R_3R_6$	$5R_3$ $4R_3R_6$	$4R_3$ $3R_3R_6$	$3R_3$ $2R_3R_6$	$2R_3$ $R_3R_6$	$R_3$ $R_6$	$H'_{6,12}$		14
$\Xi_3$	$5R_3R_4R_5$	$5R_3R_4$ $5R_3R_5$ $4R_3R_4R_5$	$5R_3, 4R_3R_4$ $3R_3R_4R_5$ $4R_3R_5$	$4R_3, 3R_3R_4$ $3R_3R_5$ $2R_3R_4R_5$	$3R_3, 2R_3R_4$ $2R_3R_5$ $R_3R_4R_5$	$2R_3, R_3R_4$ $R_3R_5$ $R_4R_5$	$R_3$ $R_4$ $R_5$	$H'_{6,12}$		24
$\Xi_4$	$4R_33R_4$	$4R_32R_4$ $3R_33R_4$	$4R_3R_4$ $3R_32R_4$ $2R_33R_4$	$4R_3, 3R_3R_4$ $2R_32R_4$ $R_33R_4$	$3R_3, 3R_4$ $2R_3R_4$ $R_32R_4$	$2R_3$ $R_3R_4$ $2R_4$	$R_3$ $R_4$	$H'_{6,12}$		20
#	0/3	1/6	2/7	3/7	4/6	4/5	0/7	0/3		14/44

Tabela 5.3.5: Partições das classes de modulações sobre superfícies do octaedro  $H'_{6,12}$

Como o conjunto das partições referentes às modulações do octaedro é relativamente grande, a relação completa das partições encontra-se na Tabela E.0.1, do Apêndice E. Uma

avaliação das modulações QAMS's e *twisted*, na Tabela E.0.1, mostram que as modulações sem e com bordos das famílias de superfícies do octaedro possuem os seguintes dados relacionados na Tabela 5.3.6.

QAMS								<i>Twisted</i>		
$\Omega$	Sem bordo			Com bordo			$S_1 + S_2$	Sem bordo	Com bordo	$S_3$
	$R$	$I$	$S_1$	$R$	$I$	$S_2$				
$S_\mu$	1	0	1	6	0	6	7	1	7	8
$T_\mu$	1	8	9	29	101	130	139	9	163	172
$2T_\mu$	1	31	32	29	209	238	270	32	340	370
$3T_\mu$	1	9	10	0	0	0	10	10	29	39
$T_1$	4	48	52	64	310	374	426	52	539	589
QAMS								<i>Twisted</i>		
$\bar{\Omega}$	Sem bordo			Com bordo			$S_4 + S_5$	Sem bordo	Com bordo	$S_6$
	$R$	$I$	$S_4$	$R$	$I$	$S_5$				
$P_\mu$	0	3	3	14	25	39	42	3	41	44
$2P_\mu$	1	10	11	36	125	161	172	11	201	212
$3P_\mu$	0	22	22	41	242	283	305	22	374	396
$4P_\mu$	1	31	32	33	213	246	278	32	380	412
$5P_\mu$	1	26	27	8	64	72	99	27	171	198
$6P_\mu$	1	9	10	0	0	0	10	10	29	39
$6P_\mu$	1	0	1	0	0	0	1	1	1	2
$T_2$	5	101	106	132	669	801	907	106	1.197	1.303
$T_1 + T_2$	9	149	158	196	979	1.175	1.333	158	1.736	1.892

Tabela 5.3.6: Modulações QAMS's e *twisted* por classes de superfícies de  $H_{8,12}$

O octaedro  $H'_{6,12}$  é um grafo definido sobre 6 vértices e 12 lados. Dos grafos analisados, os elementos de  $H'_{6,12}$  superam somente os elementos de  $K_5$ . Então, esperava-se que o número de classes de modulações do octaedro  $H'_{6,12}$ , em todas as famílias de superfícies, superasse as do grafo  $K_5$ , no entanto, foi uma surpresa que superasse também o número de classes modulações, em todas as famílias de superfícies, aos dos grafos  $K_{4,4}$  e  $H_{8,12}$ . O hexaedro  $H_{8,12}$  supera em duas unidades o número de vértices e iguala-se ao octaedro  $H'_{6,12}$  em números de lados, porém, as diferenças entre os números de classes de modulações por famílias é relativamente grande em prol do hexaedro. Por outro lado, o grafo completo bipartido  $K_{4,4}$  está definido sobre 8 vértices e 16 lados, superando os números de vértices e de lados do octaedro. Entretanto, em todas as famílias de superfícies, o número de classes modulações do octaedro é bem superior ao do grafo  $K_{4,4}$ .

O fator responsável pela superioridade do octaedro e a sua região mínima, esta neste ser triangular, enquanto o hexaedro e o grafo  $K_{4,4}$  possuem regiões mínimas quadrangulares. Mas a região mínima de  $K_5$  também é triangular e por que seu número de classes de mo-

dulações é inferior? O número de lados e vértices de  $K_5$  são inferiores aos do octaedro, daí a superioridade no número de classes de modulações do octaedro em relação ao grafo completo  $K_5$ .

As magnitudes dos números de classes modulações QAMS's e *twisted*, nas principais famílias de superfícies, são mostradas, na forma de grafo, na Figura 5.3.2.

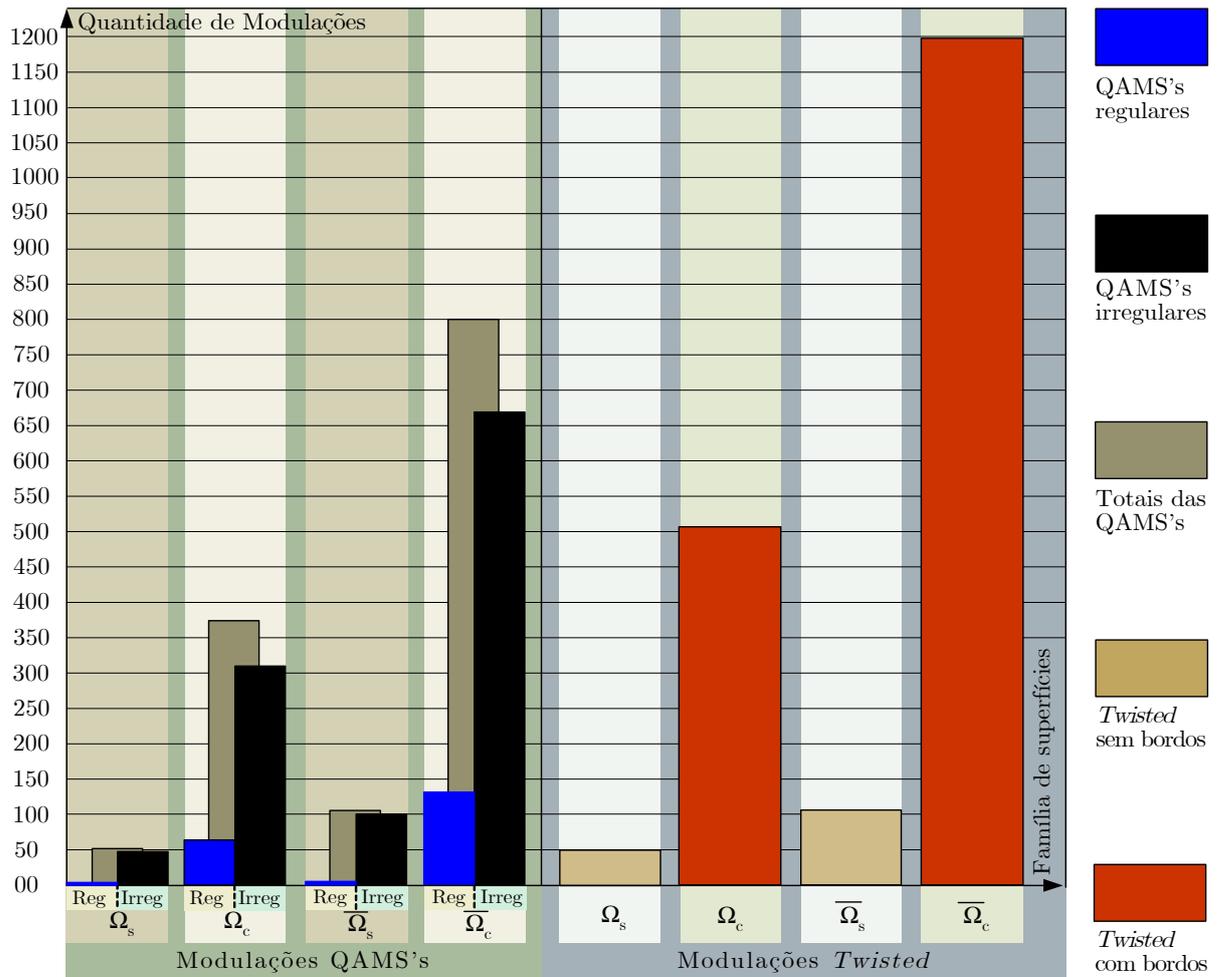


Figura 5.3.2: Número de classes de modulações QAMS e *twisted* do octaedro

Se a região mínima de  $K_{4,4}$  não fosse quadrangular e seus mergulhos não tivessem somente regiões com números pares de lados, o número de modulações de  $K_{4,4}$  superaria, em muito as do octaedro. A região mínima e o tipo de regiões são fatores decisivos para o número de classes de modulações sobre superfícies oriundas de mergulhos de um grafo. A análises dos principais fatores que contribuem para o número e tipo de modulações, são informações valiosas para conhecer o potencial de um grafo, quando da aplicação deste em projetos de modulação.

## 5.4 Análise Geral das Modulações

Os quatro tipos de grafos analisados neste trabalho não possuem números de elementos tão distintos assim, há coincidência nos números de vértices de  $K_{4,4}$  e de  $H_{8,12}$ , pois são 8 vértices cada,  $K_5$  e  $H'_{6,12}$  possuem 5 e 6 vértices, respectivamente, o que representa diferenças de 3 e 2 vértices o que não é uma diferença acentuada. Quanto aos números de lados,  $K_5$ ,  $H_{8,12}$ ,  $H'_{6,12}$  e  $K_{4,4}$  possuem 10, 12, 12 e 16 lados, respectivamente, uma diferença máxima de 4 lados. Baseado nos números de vértices e lados, era de se esperar que o número de classes de modulações desses grafos obedecessem as relações

$$|K_5| < |H'_{6,12}| < |H_{8,12}| < |K_{4,4}|. \quad (5.13)$$

Mas não é isto que ocorre. Segue, da Tabela 5.3.6, que o número de classes de modulações QAMS's das famílias de superfícies de  $H'_{6,12}$  são

$$\begin{aligned} |\text{QAMS}| &= |\text{QAMS}_s| + |\text{QAMS}_c| + |\overline{\text{QAMS}}_s| + |\overline{\text{QAMS}}_c| \\ &= 52 + 374 + 106 + 801 = 1.333, \end{aligned}$$

o número de classes de modulações *twisted* é dado por

$$\begin{aligned} |\text{Tw}| &= |\text{Tw}_s| + |\text{Tw}_c| + |\overline{\text{Tw}}_s| + |\overline{\text{Tw}}_c| \\ &= 52 + 539 + 106 + 1.197 = 1.894 \end{aligned}$$

e, portanto, o número de classes de modulações do grafo octaedro  $H'_{6,12}$  é dado por

$$|H'_{6,12}| = 1.333 + 1.894 = 3.227. \quad (5.14)$$

Além disso, pelos cálculos equivalentes realizados com os dados contidos nas Tabelas 4.3.10, 4.4.4 e 5.2.2, os números de classes de modulações dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$  e  $H_{8,12}$  são dados por

$$|K_5| = 1084, \quad |K_{5,5}| = 1744 \quad \text{e} \quad |H_{8,12}| = 270. \quad (5.15)$$

Como consequência de (5.14) e (5.15), segue que a relação entre os números de classes das modulações dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$  é dada por

$$|H_{8,12}| < |K_5| < |K_{4,4}| < |H'_{6,12}|, \quad (5.16)$$

relação de desigualdade totalmente diferente da esperada, em (5.13).

O processo de identificação das classes de modulações de grafos distintos é absolutamente necessário porque apresenta muitas surpresas. Apesar do processo de identificação apresentado na Seção 4.1 ser aplicado a toda categoria de grafos, há de se levar em consideração que cada grafo apresenta características particulares distintas tais como, números de vértices, graus dos vértices, números de lados, sistemas de rotações, conjuntos de superfícies, regiões mínimas e tipos de regiões. Cada um destes atributos contribuem, de forma decisiva, para a formação dos modelos das modulações. Concluimos, que não se pode prever, em um conjunto de grafos com números de vértices e lados relativamente próximos, qual deles terá o maior número de classes de modulações.

O gráfico da Figura 5.4.1 fornece uma visão geral dos números de classes de modulações dos quatro grafos aqui estudados. Neste, podemos confirmar, para cada tipo de modulação QAMS e *twisted* existente nas diversas famílias de superfícies, que o número de classes do hexaedro  $H'_{6,12}$  sempre supera o número de classes de modulações nos demais grafos e que, com raríssimas exceções, ocorrem as desigualdades em (5.16).

### 5.4.1 Fatores que contribuem para o número de modulações

Os números de vértices e lados de dois grafos, não são dados suficientes para determinar qual deles possui mais classes de modulações. Os graus dos vértices de um grafo contribuem diretamente para o número de mergulhos, maior grau, implica, necessariamente, em maior número de sistemas de rotações, conseqüentemente, maior número de classes de modulações. Os outros atributos decisivos são a região mínima e as restrições nos tipos de regiões.

Suponhamos que  $G(p, q)$  e  $G'(p', q')$  são dois grafos distintos com números de vértices e de lados relativamente próximos. Admita que  $G$  e  $G'$  estão definidos sobre os respectivos conjuntos de vértices  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  e  $V'(G) = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_p\}$ . Consideremos  $R_\alpha$  e  $R_{\alpha'}$  como sendo as regiões mínimas de  $G$  e  $G'$ , respectivamente, e considere que um dos grafos, por exemplo,  $G'$  não possui regiões ímpares, enquanto os mergulho de  $G$  as tem. Com estas hipóteses podemos fazer as seguintes afirmações.

**Proposição 5.4.1** *Se  $G(p, q)$  e  $G'(p', q')$  são grafos com números de lados e vértices relativamente próximos, então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

- (i) *Se  $\alpha \leq \alpha'$ , então,  $\deg v_i \leq \deg v'_i \Leftrightarrow |\Theta(G)| \leq |\Theta(G')|$ ;*
- (ii)  *$\alpha \leq \alpha' \Rightarrow |\Xi(G')| \leq |\Xi(G)|$ ;*
- (iii) *Se  $R_{2t-1} \in |\Xi(G)|$  e  $R_{2t-1} \notin |\Xi(G')|$  então  $|\Xi(G)| < |\Xi(G')|$ .*

**Demonstração.** Se  $\alpha \leq \alpha'$ , então existe um conjunto de vértices  $V'' \subset V'$  de  $G'$  tal que  $\deg v_i \leq \deg v'_i$ , para todo  $v_i \in V$  e todo  $v'_i \in V''$ . Se  $\sum_{i=1}^p \deg v_i \leq \sum_{i=1}^{p'} \deg v'_i$ , então, por (2.12), temos que

$$\begin{aligned} \deg v_i \leq \deg v'_i &\Leftrightarrow \deg v_i - 1 \leq \deg v'_i - 1 \Leftrightarrow (\deg v_i - 1)! \leq (\deg v'_i - 1)! \\ &\Leftrightarrow \prod_{v_i \in V(G)} (\deg v_i - 1)! \leq \prod_{v'_i \in V(G)} (\deg v'_i - 1)! \Leftrightarrow |\Theta(G)| \leq |\Theta(G')|. \end{aligned}$$

o que mostra a afirmação (i). Se  $\alpha = \alpha'$ , então, a priori,  $R_\alpha$  é a região mínima dos mergulhos de ambos os grafos  $G$  e  $G'$ . Como  $G$  e  $G'$  possuem  $q$  lados, pelas igualdades em (4.10),  $\Xi(G) = \Xi(G')$ , e portanto,  $|\Xi(G)| = |\Xi(G')|$ . Por outro lado, podemos considerar, a priori, que  $\Xi(G) = \Xi(G')$ , pois o conjunto das partições de grafos só depende da região mínima e de  $q$ . A igualdade resulta que  $\Xi(G) \subset \Xi(G')$  e  $\Xi(G') \subset \Xi(G)$ . A hipótese adicional,  $\alpha < \alpha'$  implica necessariamente que  $R_\alpha \in \Xi(G)$  e  $R_\alpha \notin \Xi(G')$ , conseqüentemente,  $\Xi(G')$  está contido em  $\Xi(G)$  e  $\Xi(G') \neq \Xi(G)$ ; logo,  $|\Xi(G')| \leq |\Xi(G)|$ , o que mostra a afirmação (ii). Como  $G$  e  $G'$  têm  $q$  lados, podemos supor, a priori, que  $\Xi(G) = \Xi(G')$ . A hipótese  $R_{2t-1} \in |\Xi(G)|$  e  $R_{2t-1} \notin |\Xi(G')|$  resulta que  $\Xi(G) \subset \Xi(G')$  e  $\Xi(G) \neq \Xi(G')$ , isto é,  $|\Xi(G)| < |\Xi(G')|$ , o que prova a afirmação (iii). ■

A estimativa dos conjuntos das classes de modulações de grafos distintos passa, obrigatoriamente, pela avaliação simultânea das condições da Proposição 5.4.1. São os três fatores determinantes na estimativa do número de classes de modulações de grafos com número de elementos relativamente próximos. As afirmações foram mostradas para grafos de números de lados constantes, porque facilita a demonstração. Entretanto, a demonstração pode ser feita para casos em que os números de lados dos grafos são diferentes. Obviamente, ocorrerá restrições nos modelos de mergulhos máximos dos grafos com um menor número de lados, porém, não seria um problema tão sério para a demonstração, uma vez que poderíamos sempre contar com a relação de inclusão entre os conjuntos de partições.

### 5.4.2 Índices de incidências e taxas de variações

Um dos dados relevante que vem sendo levantado neste trabalho diz respeito aos índices de incidências parcial (calculado somente em uma classe de superfície orientável ou não-orientável) e total (calculado nas classes de superfície orientável e não-orientável) e a taxa de variação. Este tipo de análise tem como objetivo avaliar as relações entre as classes de modulações vindas de grafos distintos. É uma maneira de obter informações sobre a questão da existência de modulações quanto aos aspectos da variação do número de classes por tipos de famílias de superfícies.

Com o objetivo de analisar a variação entre o número de modulações QAMS's e *twisted*, nas famílias de superfícies de mergulhos do octaedro, a Tabela 5.4.1 apresenta os índices de existências  $I_p$ ,  $I_t$  e as respectivas taxas de variações das classes de modulações de  $H'_{6,12}$ .

Modulações		Orientável				Não-orientável			
		Sem bordo		Com bordo		Sem bordo		Com bordo	
$H'_{6,12}$	QAMS	52		374		106		801	
	$I_p, I_t$	12, 21	3, 90	87, 79	28, 057	11, 69	7, 95	88, 31	60, 09
	<i>twisted</i>	50		539		106		1.197	
	$I_p, I_t$	8, 49	2, 64	91, 51	28, 49	8, 13	5, 60	91, 87	63, 27
Taxa de variação (%)		3, 72	0, 26	3, 72	1, 05	3, 56	2, 35	3, 56	3, 18

Tabela 5.4.1: Índices de existências das classes de modulações QAMS's e *twisted* nas famílias de superfícies de mergulhos do grafos  $H'_{6,12}$

Inicialmente, é possível perceber, da Tabela 5.4.1, que os índices de incidências parcial e total das classes de modulações do octaedro apresentam taxas de variações bem pequenas. Incluindo-se as taxas de variações do octaedro mostrado na Tabela 5.4.1 aos dados da Tabela 5.2.5, obtemos as taxas de variações das classes de modulações de todos os grafos analisados neste trabalho, conforme mostra a Tabela 5.2.3. Com isto podemos comprovar que, de fato, as modulações do octaedro apresentam as menores taxas de variações dentre os quatro tipos de grafos analisados.

Taxa de variação do grafo	Orientável				Não-orientável				Variação Média
	Sem bordo		Com bordo		Sem bordo		Com bordo		
	Reg	Irreg	Reg	Irreg	Reg	Irreg	Reg	Irreg	
$\text{Var}(K_5)$	4,08	1,35	4,08	1,05	5,06	3,6	5,06	6,0	3,78
$\text{Var}(K_{4,4})$	5,1	1,69	4,9	1,99	4,12	2,7	4,12	2,35	3,37
$\text{Var}(H_{8,12})$	13,64	4,46	13,64	1,05	12,428	8,37	12,428	9,02	9,38
$\text{Var}(H'_{6,12})$	3,72	0,26	3,72	1,05	3,56	2,35	3,56	3,18	2,67

Tabela 5.4.2: Taxas de variações dos índices de incidências das classes de modulações QAMS's e *twisted* nas famílias de superfícies de mergulhos dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$

Observe, na Tabela 5.4.2, que todas as taxas de variações dos índices de incidências do octaedro são inferiores as taxas de variações dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$  e  $H_{8,12}$ , exceto o da modulação QAMS irregular sobre superfície com bordo orientável do hexaedro, o único caso cuja taxa de variação é igual ao do octaedro.

Em relação a variação média  $V_m$  nas taxas de variações dos índices de existências das classes de modulações dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$ , valem as seguintes desigualdades

$$\text{Var}(H'_{6,12}) < \text{Var}(K_{4,4}) < \text{Var}(K_5) < \text{Var}(H_{8,12}). \quad (5.17)$$

Observe que, nas relações de desigualdade (5.17), a ordem dos grafos é a inversa à ordem dos grafos, nas relações de desigualdade, dos números das classes de modulações em (5.16). Portanto, para o conjunto de grafos abordados neste trabalho, a ordem da variação média dos índices de existências das classes de modulações é inversa à ordem do número de classes de modulações. Esta afirmação pode ser expressada através da seguinte

**Afirmção 5.4.2** *Quanto maior for o número de classes de modulações de um grafo  $G$ , menor será a variação média dos índices de existências das classes de modulações das famílias de superfícies de  $G$ .*

**Demonstração.** Resulta dos comentários acima. ■

A Afirmção 5.4.2 mostra a relação entre o número de classes de modulações e as variações médias dos índices de incidências das classes de modulações. De um modo geral, esta afirmação é verdadeira. Em nenhuma das escolhas dos grafos considerados houve preocupação prévia em beneficiar ou punir as condições entre esta relação. A tendência é que as condições da afirmação sejam sempre verificáveis quando se trata de grafos com um número muito grande de elementos. Talvez, em alguns casos isolados, possivelmente quando se trata de pequenos grafos, não ocorra as condições da Afirmção 5.4.2.

Uma visão precisa da taxa de variação dos índices de incidências das classes de modulações dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$  é ilustrada, na forma de gráficos de linhas, através da Figura 5.4.2.

Observe, nas linhas de variações dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$  da Figura 5.4.2, que a variação média entre os dois elementos da família dos grafos completos ( $K_5$  e  $K_{4,4}$ ) é a menor

dentre todos as variações médias, apesar da variação média de  $H'_{6,12}$  estar muito próxima da variação média de  $K_{4,4}$ . São poucos exemplos analisados para que as conclusões sejam contundentes, mas tudo nos leva a crer que a afirmação seguinte tem um grande teor de verdade.

**Conjectura 5.4.3** *As variações das taxas de incidência das classes de modulações de grafos têm comportamentos de variações idênticos e tendem a zero, quando o número de elementos dos grafos são relativamente grandes.*

As afirmações feitas na Conjectura 5.4.3 podem ser verificadas diretamente dos gráficos da Figura 5.4.2. O fato das variações tenderem a zero quando o número de elementos do grafo é relativamente grande, foi justificado, quando da apresentação das justificativas da Conjectura 5.3.5.

## 5.5 Comentários Complementares

Nos Capítulos 4 e 5 foram identificados 3.227 projetos topológicos de modulações QAMS's e *twisted* sobre 4 tipos de grafos: o grafo completo  $K_5$ , o grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ , o hexaedro  $H_{8,12}$  e octaedro  $H'_{6,12}$ . Cada escolha de grafo representa, em suas respectivas famílias o primeiro caso não trivial de identificação. Não trivial porque não seria viável identificar todos os mergulhos destes grafos sem a utilização o Algoritmo 2.6.1, as condições de restrições da região mínima e tipo de regiões.

Queremos chamar a atenção para o fato dos grafos escolhidos serem os primeiros casos não triviais. Os casos seguintes das famílias aqui consideradas representam um grande desafio. Até o presente momento, o único avanço ocorreu no caso da família do grafo completo, conseguimos gerar, com uma certa dificuldade, os mergulhos do grafo completo  $K_6$ . A partir daqui, acreditamos que só é possível avançar no problema da identificação das modulações, caso utilizemos equipamentos de alta capacidade de processamento.

O problema não é o algoritmo, mas a grande quantidade de mergulhos que a máquina pode exibir. O arquivo das sequência correspondentes aos mergulhos de um grafo é extremamente grande. Algumas das máquinas utilizadas não conseguiram gerar arquivos com todas as sequências identificadoras de mergulhos. O jeito foi utilizar uma partição do arquivo de saída em 256 arquivos para poder resolver o problema do  $K_6$ . No entanto, prevemos sérias dificuldades na identificação dos próximos casos: grafo completo  $K_7$ , grafo completo bipartido  $K_{5,5}$ , dodecaedro  $D_{20,30}$  e icosaedro  $I_{12,30}$ .

O que podemos fazer, então, para avançarmos no processo de identificação? A primeira saída é utilizar equipamentos de alto desempenho, avançaríamos um pouco no problema, mas logo a seguir no depararíamos com o mesmo problema de processamento. A segunda alternativa seria utilizar as relações matemáticas para identificar os projetos de modulações mais viáveis e trabalhar na construção desses mergulhos. O foco seriam os mergulhos regulares. Como estes são de grande interesse e não são muitos, pois cada superfície sem bordo pode ter, no máximo, um único um mergulho regular, o esforço estaria concentrado nos mergulhos regulares.

Não é difícil identificar o conjunto de mergulhos regulares, estamos nos referindo aqueles que se encontram sobre superfícies sem bordos. Estes dependem das condições da região

mínima, tipo de região e dos divisores de  $2q$ . Portanto, os mergulhos regulares são identificáveis, como foi feito nos casos de  $K_5$  e  $K_{4,4}$  ([15] e [18]). Pelo que temos observado, os índices de incidências dos modelos de mergulhos regulares, chega a ser de 100%. Todos os modelos regulares identificados até o presente momento foram realizáveis, isto é, sempre existe rotações que geram estes mergulhos. Se este é o comportamento geral, não temos que nos preocupar que o esforço despendido no processo de identificação seja em vão. Neste caso, temos várias técnicas de construção da rotação para identificar os mergulhos regulares ([1], [6], [7], [8], [9], [19], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [30][31], [33]).

Será através da utilização de técnicas de construções de mergulhos regulares e do desenvolvimento de novas técnicas, que se irá obter resultados cada vez mais significativos. Não que devamos descartar a identificação por algoritmos. Não é isto. É impossível identificar todos os mergulhos de um grafo  $G$ , sem a utilização de um algoritmo, quando o número de elementos deste é relativamente grande. Pode-se utilizar o Algoritmo 2.6.1 numa situação desta para determinar mergulhos particulares a partir de uma rotação previamente escolhida. Neste caso, não se tem controle do que será obtido. O resultado é sempre uma surpresa. Ficamos na dúvida se o modelo vai ser ou não regular. Como o número de rotações de um grafo é extremamente grande, ficamos a mercê da sorte, caso escolhamos, aleatoriamente, uma rotação para obter um mergulho regular.

Outro aspecto que vale ser ressaltado a respeito das modulações sobre superfícies vindas de mergulhos de grafos, é a questão da própria pesquisa. As modulações QAMS's praticamente ainda não foram exploradas. Há muito o que se fazer nesta direção. As ferramentas disponíveis são bastante promissoras, pois dispomos das geometrias diferencial e riemanniana para desenvolver novos projetos e ferramentas de análises de desempenhos destas modulações. Por outro lado, as modulações *twisted* utilizam curvas sobre superfícies e, novamente, dispomos de um grande ferramentário matemático para explorar este tipo de modulação: teoria do grafo, topologia algébrica, álgebra dos quatérnios, geometria diferencial e geometria riemanniana.

Apesar da proposta da modulação QAMS encontrar-se em seu estágio embrionário, há de ressaltar que o mesmo não se encontra somente no campo da hipótese. Diversos tipos de modulações QAMS's já foram implementados com sucesso [3] e demonstraram ter um bom desempenho. Obviamente, há muito o que se fazer nesta direção, o que nos motiva bastante a desenvolver este tipo de modulação em futuros trabalhos.

Quanto as modulações *twisted*, os inúmeros trabalhos existentes nesta direção ([2], [5], [11], [20] e [32]) mostram a importância deste tipo de modulação. A teoria de mergulhos de grafo só tem a contribuir para a escolha apropriada das curvas componentes da modulação *twisted*. Como foi visto no Capítulo 4, em um mergulho de grafo, as curvas deste tendem a se afastar umas das outras, maximizando a distância entre suas curvas, propriedade excelente para a escolha de sinais em um projeto de modulação *twisted*.

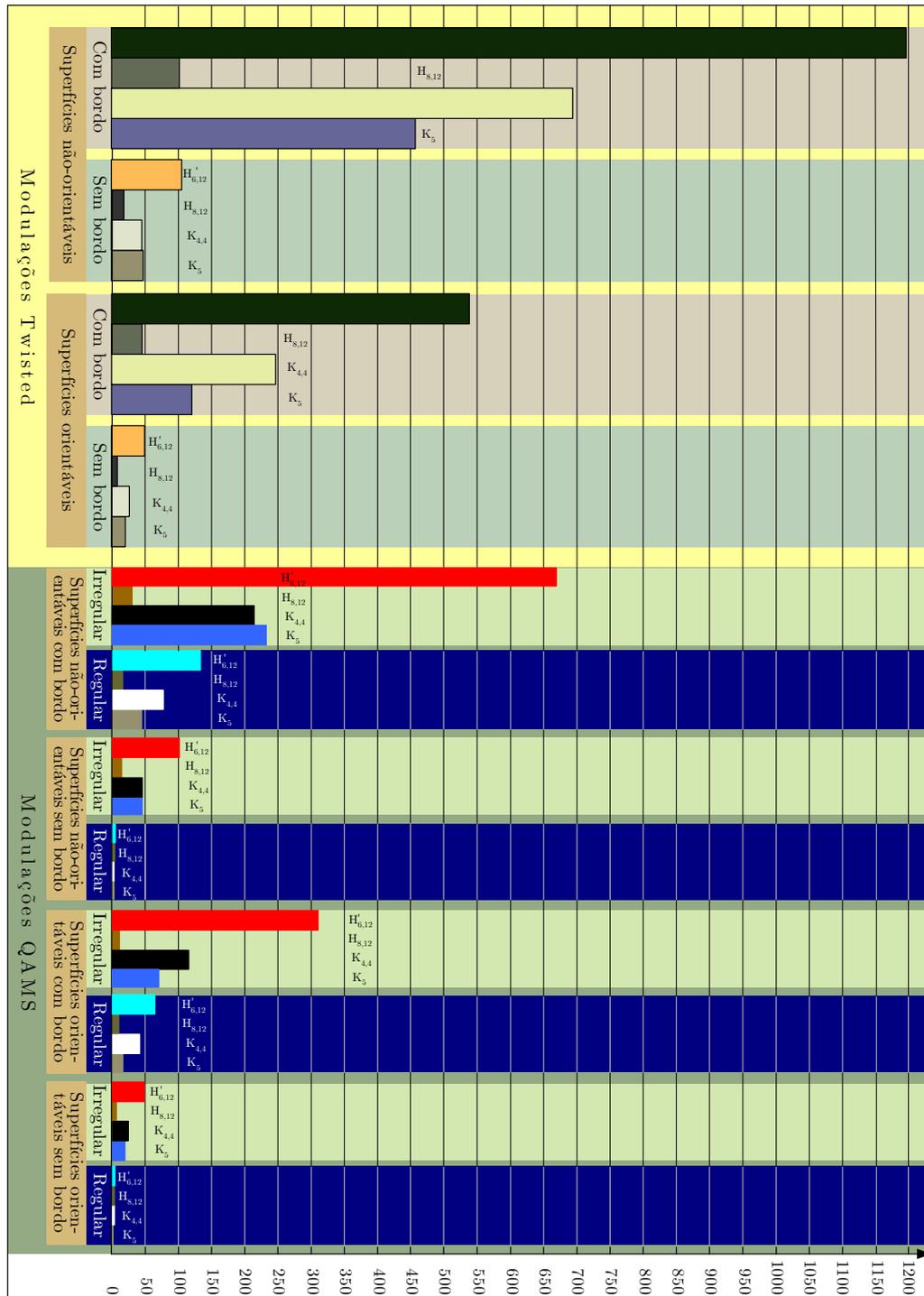


Figura 5.4.1: Gráfico de barras horizontais indicando o número de classes de modulações QAMS's e *twisted* nas famílias de superfícies dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$

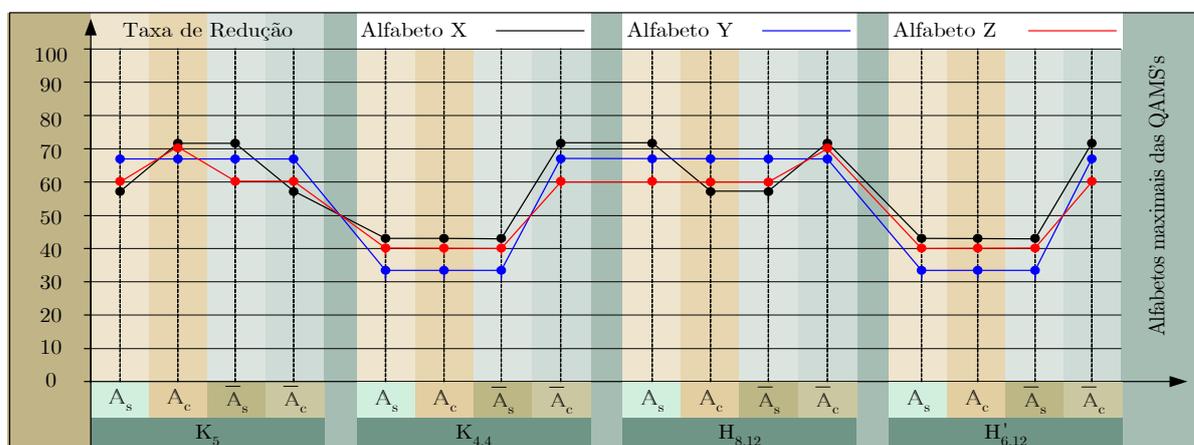


Figura 5.4.2: Gráfico de linhas indicando a variação média dos índices de existências das classes de modulações por famílias de superfícies dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$



## CAPÍTULO 6

### Modulações QAMS's, *twisted* e TV Digital

Até o momento, vimos resultados das modulações QAMS e *twisted* em quatro tipos distintos de superfícies: grafo completo  $K_5$ , grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ , hexaedro  $H_{8,12}$  e octaedro  $H'_{6,12}$ . Estes conceitos podem ser aplicados no estudo de transmissão de dados, além de mostrar a possibilidade de compactação de dados para otimizar a transmissão dos mesmos.

Neste capítulo, identicaremos os alfabetos associados as modulações QAMS e *twisted* nas quatro superfícies estudadas, além de mostrar a capacidade de compacticidade de dados em um sistema de televisão em cores.

### 6.1 A Televisão Digital

O problema da modulação QAMS sobre superfícies é parte de um sistema de transmissão proposto por Lima-Palazzo [14], no qual os componentes codificação e canal estão associados à modulação, através de um grafo mergulhado [12]. Este sistema vem sendo desenvolvido desde 2002 e foram observadas determinadas características que o apontam como provável uso na transmissão da televisão digital. Visando uma análise do uso das modulações sobre superfícies no processo de modulações de sinais da televisão digital, introduziremos alguns dados básicos, porém essenciais, do processo de transmissão através da televisão digital. Todos os dados relacionados abaixo encontram-se em [21].

A origem da televisão remonta a década de 1920. O primeiro serviço de alta definição apareceu na Alemanha em março de 1935, mas estava disponível apenas em 22 salas públicas. Uma das primeiras grandes transmissões de televisão foi a dos Jogos Olímpicos de Berlim de 1936. Desde o primeiro lançamento da televisão em preto-e-branco a tecnologia tem evoluído, passando pela televisão em cores, de alta definição e a transmissão 3D. Atualmente existem os mais variados tipos aparelhos de televisão disponíveis no mercado que utilizam tecnologias diversificadas.

A evolução das tecnologias de transmissão de imagem digitais exigem uma busca constante por sistemas de comunicações mais eficientes. Os processos de modulações existentes não deixam de ser eficientes, mas a gama de serviços previstos que serão disponibilizados pela

televisão do futuro e a tecnologia da televisão 3D exigem sistemas cada vez mais eficientes, confiáveis e que operem em tempo real. Sistemas de modulações devem acompanhar este processo evolutivo da transmissão e da prestação de serviços da televisão digital. Norteados nesta perspectiva, iniciamos aqui uma análise inicial das modulações sobre superfícies no uso da transmissão de imagem digital.

A televisão em cores surgiu em 1954 na rede norte-americana NBC. Um ano antes o governo dos Estados Unidos aprovou o sistema de transmissão a cores proposto pela rede CBS, mas quando a RCA apresentou um novo sistema que não exigia alterações nos aparelhos antigos em preto e branco, a CBS abandonou sua proposta em favor da nova. No Brasil, a primeira transmissão de televisão deu-se por conta do leopoldinense Olavo Bastos Freire, que construiu os equipamentos necessários e transmitiu uma partida de futebol em 28 de setembro de 1948, na cidade de Juiz de Fora, Minas Gerais.

Os elementos de imagem da televisão são definidos de acordo com o formato de tela da televisão, do tipo de transmissão e os parâmetros de imagem. A Figura 6.1.1 mostra o modelo convencional dos elementos de imagem da televisão em preto-e-branco.

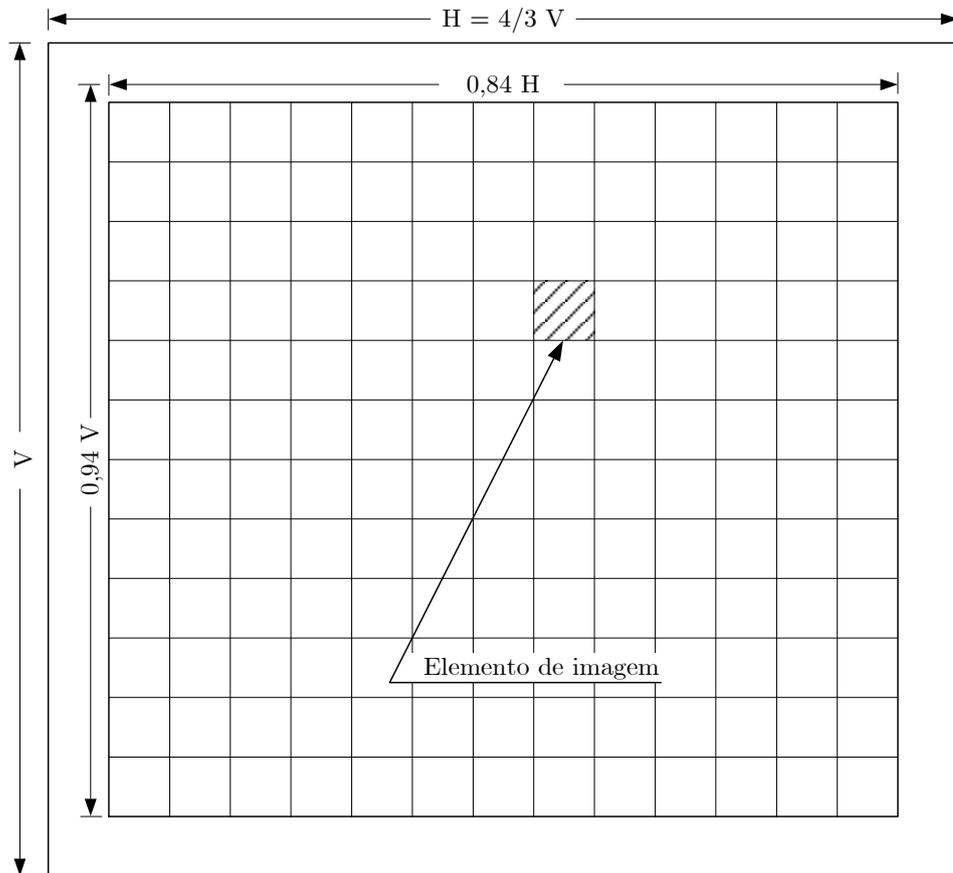


Figura 6.1.1: Elementos de imagem na televisão em preto-e-branco [21]

Quando se compara os elementos de imagem entre a televisão em preto-e-branco e a colorida com a mesma dimensão de tela, a maioria dos dados coincidem, como mostram

os dados da Tabela 6.1.1 referentes aos elementos de imagem utilizadas neste dois tipos de transmissão.

É assumido que cada imagem pode ser tomada como um símbolo formado de  $m$  elementos de imagem, cada um podendo assumir  $n$  níveis distintos e, se tem porta, a variedade  $v = m \log_2 n$ .

Devido as características próprias da televisão em cores, uma transmissão utilizando os mesmos elementos de imagens da Figura 6.1.1, preserva a maioria dos elementos da imagem da televisão em preto-e-branco, porém, alguns elementos tais como variedade, velocidade de transmissão e capacidade de canal, apresentam dados diferentes, como mostra a Tabela 6.1.1.

Televisão	Preto e branco	Televisão em cores
Linhas de varreduras	525 linhas	525 linhas
Fator de utilização vertical	0,94	0,94
Fator de utilização horizontal	0,84	0,84
Geometria da tela	$H/V = 4/3 = 1,33$	$H/V = 4/3 = 1,33$
Faixa de sinal de vídeo	0 – 4,2 MHz	0 – 4,2 MHz
Resolução horizontal	0,90 × resol. vertical	0,90 × resol. vertical
Frequência de exposição	30 quadros p/seg.	30 quadros por/seg.
Relação sinal/ruído	50 dB = $10^5$	50 dB = $10^5$
Número de elementos verticais	495	495
Número de elementos horizontais	528	528
Número máximo de elementos de imagem	$\cong 2,6 \cdot 10^5$	$\cong 2,6 \cdot 10^5$
Variedade correspondente a uma imagem	$v \cong 2,17 \times 10^{-6}$ bit/s	$v \cong 2,03$ Mbit/s
Velocidade	$V_S = 45,6$ Mbit/s	$V_S = 61,0$ Mbit/s
Capacidade de reprodução	$C_t = 69,8$ Mbit/s	$C_t = 69,8$ Mbit/s

Tabela 6.1.1: Elementos de imagem nas televisão em preto-e-branco e televisão em cores

A grande diferença entre a transmissão da televisão em preto-e-branco e a televisão em cores, começa na geração de cada elemento de imagem na câmera, esta contém as informações de brilho  $X = \{x_i\}$  e de cor  $Y = \{y_j\}$ . Portanto, cada elemento de imagem  $z_k$  funciona como um símbolo duplo. Por outro lado, sabe-se que, por efeito do ruído, o sistema só consegue reconhecer aproximadamente 317 níveis de brilho, isto é, para a luminância  $X = \{x_i\}$ ,  $i$  varia de 1 a 317. A cor pode ser reconhecida distinguindo-se as 7 matizes do arco-íris, dentro de cada elemento de imagem, isto é, para crominância  $Y = \{y_j\}$ ,  $j$  varia de 1 a 7.

Para que a transmissão em cores fosse possível, é evidente que, além de dispositivos eletrônicos, sistemas de transmissões como a modulação e a codificação tiveram que evoluir.

Só para citar outro exemplo, a televisão de alta definição (HDTV - *Hight Definition Television*) apresenta uma resolução de 1920 por 1080 pontos de imagem, quase o dobro de linha da televisão em preto-e-branco, o que representa um aumento significativo dos elementos da informação. No entanto, apesar deste aumento, a qualidade de imagem é

bem superior ao da televisão em cores. Neste processo, paga-se um preço pela qualidade da imagem, pois o aumento de elementos causa um atraso no processo de transmissão da informação, o que não chega a ser um problema para o usuário, já que este não é muito acentuado.

A evolução dos sistemas de transmissão digital vive um momento crucial. A demanda por serviços para atender uma sociedade exigente por informação, serviços eficientes e cada vez mais rápidos, são as causas de uma intensa pesquisa no setor de telecomunicações. Ultimamente, os sistemas de telecomunicações têm evoluído bastante. Novos conceitos e técnicas não surgem assim de repente. Procedimentos usuais tiveram que ser repensados, adaptados e reaplicados para acompanhar a evolução da transmissão de imagens. Mas, novos desafios surgem a todos os instantes. Neste processo, a modulação e codificação de imagens são fatores de extrema importância. No estágio atual, boa parte da pesquisa está direcionada à televisão tri-dimensional, que requer sistemas de modulação e codificação constantemente mais eficientes.

Neste capítulo, analisaremos o potencial das modulações QAMS's e *twisted*, no processo de transmissão de imagens digitais. Será uma abordagem inicial do aspecto da compactação da informação, em termos da redução do comprimento das palavras da codificação da informação. Este tipo de análise irá dizer, inicialmente, se as modulações QAMS's e *twisted* são viáveis ou não ao processo de transmissão de imagens. Futuramente, esta informação poderá ser utilizada nas escolhas das modulações adequadas, fase em que será testada a sua eficiência através de simulações.

## 6.2 Modulação e a Codificação de Imagens

Em um processo de transmissão de dados, a informação é produzida por uma fonte que dispõe de elementos simples e símbolos. O elemento é o componente mais simples que entra na composição representativa da informação. Um símbolo é formado por um conjunto ordenado de elementos. Por exemplo, dispendo-se de um alfabeto de elementos  $A, B, C, \dots$ , pode-se compor os símbolos  $AA, AB, BB, \dots$  ou os símbolos  $AAA, AAB, ABB, \dots$ . Ou, dispendo-se do alfabeto de elementos 0 e 1 podem-se compor os símbolos  $000, 001, 010, 100, \dots$ . É claro que o elemento do alfabeto pode se confundir com o próprio símbolo quando este é composto de apenas um elemento.

Os símbolos de que dispõe a fonte são fixos e definidos. O conjunto completo de símbolos é chamado de alfabeto. A mensagem produzida pela fonte é constituída de um conjunto ordenado de símbolos selecionados do alfabeto. Na modulação, os sinais da constelação são associados aos elementos do alfabeto. Por exemplo, se em um alfabeto binário,  $A$  é associado ao símbolo 010 e se o canal não possui ruído, o sistema envia três sinais correspondentes aos elementos do símbolo 010. Evidentemente que dois deles devem ser iguais correspondentes ao sinal 0.

No caso do processo de identificação de mergulhos de grafos da Seção 4.1, foi utilizado um rotulamento de vértices com os elementos do conjunto das classes de resto módulo  $p$ ,  $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ , onde  $p$  é o número de vértices do grafo. Então, dado um grafo  $G\{p, q\}$ , o alfabeto de elementos associado a  $G$  será tomado como sendo  $\mathbb{Z}_p$ . Neste capítulo, a informação da fonte e, conseqüentemente, as modulações QAMS's e *twisted* serão codificadas

com os elementos de  $\mathbb{Z}_p$ , onde  $p$  é o número de vértice do grafo  $G\{p, q\}$ , cujo mergulho define o projeto topológico de modulação.

### 6.3 Modulação QAMS e Televisão em Cores

Alfabetos diferentes produzem codificações diferentes. No que se refere ao comprimento das palavras códigos, quanto menor for o comprimento, maior será a taxa de transmissão, fator importante para transmissão de imagens. Será analisado o potencial de compactação de dados das modulações QAMS's na codificação de modulações da televisão em cores, com os dados da Tabela 6.1.1.

A imagem da televisão em cores é composta por 495 linhas e 528 colunas, ou seja, por uma matriz de 261 360 elementos de imagem. Cada elemento de imagem  $z_k$  terá dupla codificação contendo a informação de brilho  $X = \{x_i\}$ ,  $1 \leq i \leq 317$ , e a informação de cor  $Y = \{y_j\}$ ,  $1 \leq j \leq 7$ .

Na condição em que o canal de transmissão não apresenta erro, a codificação de um elemento de imagem sem nenhum tipo de redundância é da forma

$$z_k = (XY) = ((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7), (y_1, y_2, y_3)), \quad x_i, y_j \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}. \quad (6.1)$$

Note que cada elemento de imagem é codificado com uma sequência binária de comprimento 10. Este tipo de codificação representa a informação somente na fonte. A codificação para a modulação depende do ruído do canal. À medida que a relação sinal/ruído aumenta, obrigatoriamente aumentam os comprimentos das sequências de informação  $X$  e  $Y$ . Só é possível transmitir nas condições em (6.1) se não houver ruído no canal de transmissão, situação que existe somente no campo das hipóteses, uma vez que todo canal apresenta ruído.

As condições em (6.1), representam as condições mínimas de codificação da modulação ou a codificação de fonte. A codificação de canal será analisada tendo em vista os comprimentos do códigos  $X$  e  $Y$ . Como o comprimento das palavras em  $Y$  é aproximadamente o dobro do comprimento das de  $X$ , espera-se que haja o dobro de erros de *bits* nas transmissões das sequências de  $Y$  em comparação com os erros de *bits*, nas transmissões das sequências de  $X$ .

Outra questão a ser analisada é o uso dos alfabetos envolvidos no processo de mergulhos de um grafo na codificação da modulação. Dado um grafo  $G(p, q)$  existiria mais de um alfabeto associado às modulações QAMS's de  $G$ ? Quais seriam estes alfabetos e quais superfícies eles estariam atrelados? Recordemos, então, as condições básicas de mergulhos de grafos para definir, da forma mais natural possível, o alfabeto de codificação associado a uma modulação QAMS.

A princípio, devemos saber que todo mergulho de um grafo  $G(p, q)$  define uma partição sobre uma superfície  $\Omega$  em  $k$  regiões. Seja, então,

$$G\{p, q\}(\Theta) \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i \quad (6.2)$$

o mergulho de  $G$ . Como a partição  $\cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$  de  $\Omega$  em (6.2) é composta de  $k$  regiões e cada uma delas é a região de decisão de um sinal da modulação QAMS para uma constelação de  $k$  sinais, então o alfabeto deve ser necessariamente composto de  $k$  sinais, isto é, uma

modulação do tipo  $k$ -QAMS. Por outro lado, o dual do mergulho (6.2) é da forma

$$G' \{k, q\} (\Theta') \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{j=1}^p R_{\alpha_j}^j, \quad (6.3)$$

logo, trata-se de um grafo definido sobre  $k$  vértices  $v'_0, v'_1, v'_2, \dots, v'_{k-1}$  com  $v'_i$  no interior da região  $R'_{\alpha_i}$  de  $\cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$ . Consequentemente, o alfabeto associado à modulação QAMS vinda do mergulho (6.2) está atrelado aos vértice do grafo  $G'$  do mergulho dual (6.3).

Além disso, os grafos mergulhados  $G$  e  $G'$  em (6.2) e (6.3) satisfazem a condição de dualidade  $(G')' = G$ , e os vértices  $v_0, v_1, \dots, v_{p-1}$  de  $G$  são tais que  $v_j$  está no interior da região  $R_{\alpha_j}^j$  de  $\cup_{j=1}^p R_{\alpha_j}^j$ . Como  $G' \{k, q\}$  encontra-se também mergulhado em  $\Omega$  particionando-a em  $p$  regiões, pelas mesmas razões acima, deduzimos que o alfabeto associado à modulação dual  $p$ -QAMS é constituído de  $p$  elementos.

## 6.4 Alfabetos das Modulações QAMS's

Da análise acima, deduzimos que os alfabetos associados as modulações QAMS devem satisfazer as condições estabelecidas a seguir.

**Definição 6.4.1** *Seja  $G(p, q)$  um grafo mergulhado em uma superfícies  $\Omega$  particionando-a em  $k$  regiões. Chamaremos de alfabeto associado à modulação  $k$ -QAMS o alfabeto formado pelos  $k$  primeiros números inteiros  $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ .*

A Definição 6.4.1 estabelece as condições do alfabeto a partir do número de regiões da partição, independentemente do mergulho ser o dual ou não. O alfabeto associado a QAMS não poderia ser diferente, uma vez que as regiões de decisão estão relacionadas biunivocamente com os sinais da constelação.

**Teorema 6.4.2** *Sejam  $\mu$  e  $\bar{\mu}$  os números de regiões do mergulhos mínimos orientados e não-orientados do grafo  $G \{p, q\}$ . Se  $\mathbb{Z}_\alpha$  é um alfabeto associado a modulação QAMS de  $G$ , então:*

(i)  $\alpha = p$  se  $\mathbb{Z}_\alpha$  está associada à modulação dual QAMS';

(ii) se  $\mathbb{Z}_\alpha$  está associada à modulação QAMS, então

$$\Omega \equiv \begin{cases} gT \Rightarrow \alpha \in \begin{cases} \{\mu, \mu-2, \mu-4, \dots, 6, 4, 2\}, & \text{se } \mu \text{ é par} \\ \{\mu, \mu-2, \mu-4, \dots, 7, 5, 3\}, & \text{se } \mu \text{ é ímpar} \end{cases} \\ \bar{g}P \Rightarrow \alpha \in \{\bar{\mu}, \bar{\mu}-1, \bar{\mu}-2, \dots, 4, 3, 2\}. \end{cases} \quad (6.4)$$

**Demonstração.** Todo mergulho do grafo dual de  $G(p, q)$  é da forma (6.3). Logo, existe um único alfabeto associado à modulação dual e este é da forma  $\mathbb{Z}_p$ . Por outro lado, segue da Definição 6.4.1 que  $\mathbb{Z}_\alpha$  é um alfabeto associado a modulação  $\mu$ -QAMS de  $G$ , sempre que  $G$  possuir um mergulho na superfície  $\Omega$ , cuja partição é da forma  $\Xi = \cup_{i=1}^\alpha R_{\alpha_i}^i$  e  $\alpha \geq 2$ . Mas, as partições de  $G$  com  $\alpha \geq 2$  satisfazem as condições

$$\Omega \equiv \begin{cases} gT \Rightarrow \Xi \in \begin{cases} \{\cup_{i=1}^\mu R_{\alpha_i}^i, \cup_{i=1}^{\mu-2} R_{\alpha_i}^i, \dots, \cup_{i=1}^6 R_{\alpha_i}^i, \cup_{i=1}^4 R_{\alpha_i}^i, \cup_{i=1}^2 R_{\alpha_i}^i\}, & \text{se } \mu \text{ é par} \\ \{\cup_{i=1}^\mu R_{\alpha_i}^i, \cup_{i=1}^{\mu-2} R_{\alpha_i}^i, \dots, \cup_{i=1}^7 R_{\alpha_i}^i, \cup_{i=1}^5 R_{\alpha_i}^i, \cup_{i=1}^3 R_{\alpha_i}^i\}, & \text{se } \mu \text{ é ímpar} \end{cases} \\ \bar{g}P \Rightarrow \Xi \in \{\cup_{i=1}^{\bar{\mu}} R_{\alpha_i}^i, \cup_{i=1}^{\bar{\mu}-1} R_{\alpha_i}^i, \dots, \cup_{i=1}^3 R_{\alpha_i}^i, \cup_{i=1}^2 R_{\alpha_i}^i, \cup_{i=1}^1 R_{\alpha_i}^i\}, \end{cases}$$

o que prova as condições em (6.4). ■

Nos casos particulares das famílias de grafos completos  $K_n$  e completo bipartido  $K_{m,n}$ , o número de regiões  $\mu$  e  $\bar{\mu}$  dos mergulhos mínimos orientável e não-orientável podem ser determinados em função dos parâmetros  $m$  e  $n$ , possibilitando estimar precisamente a quantidade de alfabetos associados as modulações QAMS's.

**Corolário 6.4.3** *Se  $\mu$  é o número de regiões do mergulho mínimo orientável do grafo completo  $K_n$ , então o alfabeto  $\mathbb{Z}_\alpha$  de uma modulação QAMS de  $K_n$  sobre superfícies orientáveis satisfaz as condições*

$$\alpha \in \begin{cases} \{\mu, \mu - 2, \mu - 4, \dots, 6, 4, 2\}, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ e } n \equiv 3 \pmod{4} \\ \{\mu, \mu - 2, \mu - 4, \dots, 7, 5, 3\}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{4} \text{ e } n \equiv 2 \pmod{4}, \end{cases} \quad (6.5)$$

**Demonstração.** Pelas igualdades (2.6) e (2.7), a característica de Eüler de  $\Omega$  para o mergulho mínimo de  $K_n$  é dada por

$$\chi(\Omega) = 2 - 2g = 2 - 2\gamma = 2 - 2\{(n-3)(n-4)/12\}. \quad (6.6)$$

Por outro lado, o grafo completo  $K_n$  possui  $n$  vértices e  $n(n-1)/2$  lados, logo, pela característica de Eüler de  $\Omega$ , em (2.5), temos que

$$\chi(\Omega) = n - n(n-1)/2 + \mu.$$

Se  $\mu$  é o número de regiões do mergulho mínimo orientável de  $K_n$ , então pela igualdade (6.6) temos que

$$\begin{aligned} \chi(\Omega) &= n - n(n-1)/2 + \mu \\ \Rightarrow \mu &= -n + n(n-1)/2 + 2 - 2\left\{\frac{1}{12}(n-3)(n-4)\right\}. \end{aligned}$$

Mas  $\left\{\frac{1}{12}(n-3)(n-4)\right\}$  é um número inteiro e, portanto,  $2\left\{\frac{1}{12}(n-3)(n-4)\right\}$  é par. Consequentemente, a paridade de  $\mu$  só depende da paridade de  $\varphi = -n + n(n-1)/2$ : se  $\varphi$  é par, então  $\mu$  também o será e o mesmo ocorre no caso em que  $\varphi$  é ímpar. Analisemos os quatro casos de congruência de  $n$  módulo 4:

1) Se  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , então  $n = 4s$ , para algum inteiro  $s$ . Então, segue que

$$\varphi = -n + n(n-1)/2 = -4s + 4s(4s-1)/2 = 2s(4s-3)$$

e, portanto,  $\varphi$  é par;

2) Se  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , então  $n = 4s + 1$ , para algum inteiro  $s$ ; logo, temos que

$$\varphi = -4s - 1 + (4s+1)(4s+1-1)/2 = 8s^2 - 2s - 1$$

e, portanto,  $\varphi$  é ímpar;

3) Se  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , então  $n = 4s + 2$ , para algum inteiro  $s$ ; logo, temos que

$$\varphi = -4s - 2 + (4s+2)(4s+2-1)/2 = 8s^2 + 2s - 1$$

e, portanto,  $\varphi$  é ímpar;

3) Se  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , então  $n = 4s + 3$ , para algum inteiro  $s$ ; logo, temos que

$$\varphi = -4s - 3 + (4s + 3)(4s + 3 - 1)/2 = 2s(4s + 3)$$

e, portanto,  $\varphi$  é par.

Dos quatro casos anteriores, concluímos que  $\mu$  é par, se  $n \equiv 0 \pmod{4}$  e  $n \equiv 3 \pmod{4}$  e que  $\mu$  é ímpar, se  $n \equiv 1 \pmod{4}$  e  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Portanto, segue do Teorema 6.4.2 que, se  $\mu$  é o número de regiões do mergulho mínimo de  $K_n$ , então o alfabeto  $\mathbb{Z}_\alpha$  de uma modulação QAMS de  $K_n$  sobre superfícies orientáveis satisfaz as condições

$$\alpha \in \begin{cases} \{\mu, \mu - 2, \mu - 4, \dots, 6, 4, 2\}, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ e } n \equiv 3 \pmod{4} \\ \{\mu, \mu - 2, \mu - 4, \dots, 7, 5, 3\}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{4} \text{ e } n \equiv 2 \pmod{4}, \end{cases}$$

o que mostra as condições em (6.5). ■

**Corolário 6.4.4** *Se  $\mu$  é o número de regiões do mergulho mínimo orientável do grafo completo bipartido  $K_{n,n}$ , então o alfabeto  $\mathbb{Z}_\alpha$  de uma modulação QAMS de  $K_{n,n}$  sobre superfícies orientáveis satisfaz as condições*

$$\alpha \in \begin{cases} \{\mu, \mu - 2, \mu - 4, \dots, 6, 4, 2\}, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \{\mu, \mu - 2, \mu - 4, \dots, 7, 5, 3\}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \quad (6.7)$$

**Demonstração.** De modo análogo à demonstração do Corolário 6.4.3, vemos que o número  $\mu$  de regiões do mergulho mínimo orientável de  $K_{n,n}$  satisfaz a condição

$$\begin{aligned} \chi(\Omega) &= 2n - n^2 + \mu \\ \Rightarrow \mu &= -2n + n^2 + 2 - 2 \left\{ \frac{(n-2)(n-2)}{4} \right\} \\ \Rightarrow \mu &= n^2 + 2 \left( 1 - n - \left\{ \frac{(n-2)(n-2)}{4} \right\} \right). \end{aligned}$$

Consequentemente, a paridade de  $\mu$  só depende da paridade de  $n$ : se  $n$  é par então  $\mu$  o será e se  $n$  é ímpar,  $\mu$  também o será. Segue então, do Teorema 6.4.2, as condições do alfabeto  $\mathbb{Z}_\alpha$  das modulações QAMS de  $K_{n,n}$  em (6.7). ■

O Teorema 6.4.2 e os seus dois corolários são úteis para identificar os alfabetos nas famílias de grafos que dependem de parâmetros, tais como as famílias de grafos completos e completos bipartidos. Apesar do Corolário 6.4.4 restringir a sua ação a grafos completos bipartidos da forma  $K_{n,n}$ , também é possível determinar os alfabetos das modulações de grafos da família de grafos completos  $K_{m,n}$ , como será visto a seguir.

**Corolário 6.4.5** *Se  $\mu$  é o número de regiões do mergulho mínimo orientável do grafo completo bipartido  $K_{n,n}$ , então o alfabeto  $\mathbb{Z}_\alpha$  de uma modulação QAMS de  $K_{m,n}$  sobre superfícies orientáveis satisfaz as condições*

$$\alpha \in \begin{cases} \{\mu, \mu - 2, \mu - 4, \dots, 6, 4, 2\}, & \text{se } m, n \equiv 0 \pmod{2} \\ \{\mu, \mu - 2, \mu - 4, \dots, 7, 5, 3\}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.8)$$

**Demonstração.** De modo análogo à demonstração do Corolário 6.4.3, deduzimos que se  $\mu$  é o número de regiões do mergulho mínimo orientável do grafo completo bipartido  $K_{n,n}$ . Então,

$$\begin{aligned}\chi(\Omega) &= m + n - mn + \mu \\ \Rightarrow \mu &= mn - m - n + 2 \left( 1 - \left\{ \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\} \right).\end{aligned}$$

Portanto, a paridade de  $\mu$  só depende da paridade de  $\varphi = mn - m - n$ : se  $\varphi$  é par. Então,  $\mu$  o será; e se  $\varphi$  é ímpar,  $\mu$  também o será. Analisemos, então, os casos em que  $m$  e  $n$  dependem das classes de congruências módulo 2:

1) Se  $m, n \equiv 0 \pmod{2}$ , então existem inteiros  $r$  e  $s$  tais que  $m = 2r$  e  $n = 2s$ . Disto segue que

$$\varphi = (2r)(2s) - 2r - 2s = 2(-r - s + 2rs)$$

e, portanto,  $\varphi$  é par;

2) Se  $m \equiv 0 \pmod{2}$  e  $n \equiv 1 \pmod{2}$ , então  $m = 2r$  e  $n = 2s + 1$ , para alguns inteiros  $r$  e  $s$ . Neste caso, temos que

$$\varphi = (2r)(2s + 1) - 2r - 2s - 1 = -2s + 4rs - 1 = 2(2rs - s) - 1.$$

Logo,  $\varphi$  é ímpar;

3) A conclusão sobre  $\varphi$  é análoga a 2), se  $m \equiv 1 \pmod{2}$  e  $n \equiv 0 \pmod{2}$ ;

4) Se  $m \equiv 1 \pmod{2}$  e  $n \equiv 1 \pmod{2}$ , então  $m = 2r + 1$  e  $n = 2s + 1$ , para alguns inteiros  $r$  e  $s$ . Neste caso, temos que

$$\varphi = (2r + 1)(2s + 1) - 2r - 1 - 2s - 1 = 4rs - 1$$

Logo,  $\varphi$  é ímpar.

Dos casos analisados acima, deduzimos que  $\mu$  é par se, e somente se,  $m, n \equiv 0 \pmod{2}$ ; caso contrário,  $\mu$  é ímpar, o que mostra as condições em (6.8). ■

Outra atribuição do Teorema 6.4.2 e seus corolários é que os mesmos podem ser utilizados para determinar o número de alfabetos das modulações orientáveis QAMS's da família de grafos completos. Por exemplo, como  $5 \equiv 1 \pmod{4}$ , pelo Corolário 6.4.3, o alfabeto  $\mathbb{Z}_\alpha$  da QAMS de  $K_5$  tem número de elemento ímpar, isto é,  $a$  é ímpar. Logo, pela segunda relação de (6.5),  $K_5$  possui

$$(\mu - 3)/2 + 1 \text{ alfabetos,}$$

ou seja, como o mergulho mínimo é composto de  $\mu = 5$  regiões, então existem 2 alfabetos nas modulações orientáveis da  $K_5$ , a saber:  $\mathbb{Z}_5$  e  $\mathbb{Z}_3$ .

No caso do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ ,  $4 \equiv 0 \pmod{2}$ , então segue do Corolário 6.4.4 que os alfabetos das modulações orientáveis possuem números pares de elementos, isto é,  $\mu$  é par. Logo, pela primeira relação de (6.7), deduzimos que o número de alfabetos de modulações QAMS's de  $K_{4,4}$  é dado por

$$(\mu - 2)/2 + 1 \text{ alfabetos.}$$

Basta determinar o número  $\mu$  de regiões do mergulho mínimo de  $K_{4,4}$  para saber o número de modulações QAMS's. Em particular,  $\mu = 8$ , conseqüentemente as modulações QAMS's de  $K_{4,4}$  possuem

$$(8 - 2) / 2 + 1 = 4$$

alfabetos, a saber:  $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4$  e  $\mathbb{Z}_2$ .

Os comentários precedentes demonstram que o número de alfabetos das modulações QAMS's de um grafo satisfaz as condições da próxima afirmação.

**Proposição 6.4.6** *O número de alfabetos das modulações QAMS's de um grafo  $G$  é igual ao número de superfícies orientáveis onde  $G$  possui mergulhos de 2-células, isto é,*

$$\Omega \equiv \begin{cases} gT \Rightarrow |\mathbb{Z}_\alpha| = \begin{cases} \frac{\mu-2}{2} + 1, & \text{se } \mu \text{ é par} \\ \frac{\mu-3}{2} + 1, & \text{se } \mu \text{ é ímpar} \end{cases} \\ \bar{g}P \Rightarrow |\mathbb{Z}_\alpha| = \bar{\mu} - 2 + 1. \end{cases} \quad (6.9)$$

**Demonstração.** Seja  $\Xi_\Omega(G)$  o conjunto dos modelos das classes de mergulhos de  $G$  sobre a superfície  $\Omega$ . Os modelos  $\Xi_i$ 's são todos distintos, porém, para todo  $i$ , o número de regiões de  $|\Xi_i|$  é uma constante  $\alpha_\Omega$ . Mas, pela Definição 6.4.1, o número de elementos do alfabeto da modulação QAMS sobre  $\Omega$  é igual ao número de regiões de  $\Xi_i$ , portanto, todo alfabeto de uma modulação QAMS de  $G$  sobre  $\Omega$  possui  $\alpha_\Omega$  elementos, ou seja, é um alfabeto da forma  $\mathbb{Z}_{\alpha_\Omega}$ . A quantidade de elemento do alfabeto  $|\mathbb{Z}_\alpha|$ , dado em (6.9), pode ser deduzido diretamente da contagem dos elementos dos conjuntos em (6.4). ■

O resultado da Proposição 6.4.6 refere-se aos alfabetos das modulações QAMS's sobre superfícies sem bordos. As condições da Definição 6.4.1 não são diferentes dos alfabetos para as superfícies com bordos. Para este tipo de superfície, vale a seguinte afirmação.

**Proposição 6.4.7** *Seja  $\mathbb{Z}_\alpha$  o alfabeto da modulação QAMS de  $G$  sobre  $\Omega$ . Então, o conjunto dos alfabetos sobre as modulações em superfícies com bordos geradas pelo mergulho  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^\alpha R_{\alpha_i}^i$  é dado por*

$$\mathbb{A}(G \hookrightarrow \Omega) = \{\mathbb{Z}_\alpha, \mathbb{Z}_{\alpha-1}, \mathbb{Z}_{\alpha-2}, \mathbb{Z}_{\alpha-3}, \dots, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}. \quad (6.10)$$

**Demonstração.** De fato, pela Definição 6.4.1, o número de elementos do alfabeto de uma modulação QAMS sobre um superfície com bordo  $\Omega_c$  é igual ao número de regiões da partição do mergulho de  $G$  sobre  $\Omega_c$ . Então, pela Definição 2.4.14, o mergulho sem bordo  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^\alpha R_{\alpha_i}^i$  geram os seguintes mergulhos em superfícies com bordos

$$\begin{aligned} \Omega_1 \equiv \cup_{i=1}^{\alpha-1} R_{\alpha_i}^i, \quad \Omega_2 \equiv \cup_{i=1}^{\alpha-2} R_{\alpha_i}^i, \quad \Omega_3 \equiv \cup_{i=1}^{\alpha-3} R_{\alpha_i}^i, \dots, \quad \Omega_k \equiv \cup_{i=1}^{\alpha-k} R_{\alpha_i}^i, \\ \dots, \quad \Omega_{\alpha-3} \equiv \cup_{i=1}^3 R_{\alpha_i}^i, \quad \Omega_{\alpha-2} \equiv \cup_{i=1}^2 R_{\alpha_i}^i, \quad \Omega_{\alpha-1} \equiv \cup_{i=1} R_{\alpha_i}^i, \quad \Omega_\alpha \equiv G. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Mas, as partições em (6.11) que geram modulações QAMS's são aquelas que possuem até 2 regiões. Conseqüentemente, os alfabetos das modulações em superfícies com bordos geradas pelo mergulhos  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^\alpha R_{\alpha_i}^i$  são  $\mathbb{Z}_{\alpha-1}, \mathbb{Z}_{\alpha-2}, \mathbb{Z}_{\alpha-3}, \dots, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2$ , o que mostra a igualdade (6.10). ■

O conjunto dos alfabetos relacionados na igualdade (6.10) inclui o alfabeto da QAMS na superfície sem bordo para mostrar quem é o gerador dos mergulhos com bordos. Obviamente, na lista (6.10), há somente um mergulho sem bordo.

## 6.5 Exemplos dos Alfabetos das Modulações QAMS's

O objetivo é relacionar, utilizando as definições e resultados introduzidos nas Seções 6.1 - 6.4, os alfabetos das modulações dos grafos completos e dos dois grafos de Cayley dos sólidos platônicos identificados nos Capítulos 4 e 5. Isto nos ajuda a avaliar a variação do número de elementos dos alfabetos de moduações QAMS's do grafo e obter informação precisa do alfabeto sobre cada superfície na qual o grafo considerado possui projeto de modulação. Tais informações são de extrema relevância para o projetista do sistema de transmissão de dados na decisão pelo projeto de modulação que mais se adequa aos seus propósitos. O certo é que, com os dados fornecidos nesta seção, o projetista ficará indeciso em relação ao número de elementos do alfabeto que utilizará na modulação QAMS's de um grafo sobre uma determinada superfície.

### 6.5.1 Alfabetos das modulações QAMS's do grafo completo $K_5$

Pelos resultados e definições apresentados nas Seções 6.1 - 6.4, para identificar o alfabeto de uma modulação QAMS, é suficiente identificar cada superfície  $\Omega$  e o número de regiões de uma partição de  $\Omega$ , o que é uma constante  $\alpha_\Omega$ . Com isto, o alfabeto da QAMS sobre  $\Omega$  é dado por  $\mathbb{Z}_{\alpha_\Omega}$ . Em relação ao grafo completo  $K_5$ , estes dados podem ser obtidos diretamente das Tabelas 4.3.4 - 4.3.8.

Utilizando os dados das Tabelas 4.3.4 - 4.3.8 referentes as partições das modulações orientáveis e não-orientáveis do grafo completo  $K_5$ , relacionamos, na Tabela 6.5.1, os alfabetos das modulações QAMS's orientáveis e não-orientáveis, sem e com bordos, juntamente com as suas respectivas superfícies.

Alfabetos de $P_\mu$						Alfabetos de $T_\mu$ e $2P_\mu$						Alfabetos de $3P_\mu$			
S/bordo		Com bordo				S/bordo		Com bordo				S/bordo		C/bordo	
$\Omega$	$P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$\Omega$	$T, 2P$	$T_1, 2P_1$	$T_2, 2P_2$	$T_3, 2P_3$	$\Omega$	$3P$	$3P_1$	$3P_2$	
$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	
Alfabetos de $2T_\mu$ e $4P_\mu$						Alfabetos de $5P_\mu$						Alfabetos de $3T_\mu$ e $6P_\mu$			
Sem bordo		C/bordo				Sem bordo		Com bordo				Sem bordo		Com bordo	
$\Omega$	$2T, 4P$	$2T_1, 4P_1$				$\Omega$	$5P$	$5P_1$				$\Omega$	$3T, 6P$	$\emptyset$	
$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$				$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_2$	$\emptyset$				$\mathbb{Z}_\alpha$	$\emptyset$	$\emptyset$	

Tabela 6.5.1: Alfabetos das modulações QAMS's do grafo completo  $K_5$

Como podemos verificar nos dados da Tabela 6.5.1, as opções de alfabetos para as modulações QAMS's orientáveis de  $K_5$  variam de 2 a 5 elementos e as não-orientáveis, de 2 a 6 elementos. Portanto, são 5 e 4 opções de alfabetos possíveis, com o caso não-orientável apresentando o maior número de elementos.

Está claro que o maior número de elementos do alfabeto é apresentado pelo modulação que se encontra sobre os mergulhos mínimos: 5 elementos para o caso orientável e 6 do mergulho

mínimo não-orientável. O mergulho máximo orientável de  $K_5$  é o único que não possui alfabeto, uma vez que é formado somente de uma única região. Mas, devemos saber que existem casos em que os mergulhos máximos de  $K_n$  são formado por duas regiões e, portanto, são modulações típicas do alfabeto binário. Já o mergulho máximo não-orientável nunca possui alfabeto, pois trata-se sempre de um mergulho composto de uma região. Observe que os alfabetos das regiões em superfícies sem bordos orientáveis variam de 2 em 2 elementos ( $\mathbb{Z}_5$  e  $\mathbb{Z}_3$ ) enquanto que nas não-orientáveis ( $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3$  e  $\mathbb{Z}_2$ ) e nas superfícies com bordos, a variação do número de elementos é de uma em uma unidade. Os alfabetos da família de modulações com bordos gerada pelo mergulho  $K_5 \hookrightarrow T$  são:  $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3$  e  $\mathbb{Z}_2$ . Com outra família de superfícies com bordos ocorre o mesmo, a variação do número de elementos do alfabeto é sempre unitária e a relação de alfabetos é sempre da forma  $\alpha - 1, \alpha - 2, \dots, 4, 3, 2$ , onde  $\alpha$  é o número de elementos do mergulho gerador sem bordo.

### 6.5.2 Alfabetos associados às modulações QAMS's do grafo $K_{4,4}$

Como foi vista na Seção 6.5.1, para o caso de identificação dos alfabetos das modulações QAMS's do grafo completo  $K_5$ , estes são obtidos diretamente das relações de superfícies e dos seus tipos de partições, dados que, no caso do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ , podem ser coletados através dos dados disponíveis na Tabela B.0.1, contida no Apêndice B.

Na Tabela 6.5.2, apresentamos os alfabetos das modulações QAMS's do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$  e as respectivas superfícies sobre as quais encontram-se os projetos de modulações.

Alfabetos de $T_\mu$ e $2P_\mu$								Alfabetos de $3P_\mu$						
Sem bordo		Com bordo						S/bordo		Com bordo				
$\Omega$	$T$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$\Omega$	$3P$	$3P_1$	$3P_2$	$3P_3$	$3P_4$	$3P_5$
$\Omega$	$2P$	$2P_1$	$2P_2$	$2P_3$	$2P_4$	$2P_5$	$2P_6$							
$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$
Alfabetos de $2T_\mu$ e $4P_\mu$						Alfabetos de $5P_\mu$					Alfabetos de $3T_\mu$ e $6P_\mu$			
Sem bordo		Com bordo				Sem bordo		Com bordo			Sem bordo		Com bordo	
$\Omega$	$2T$	$2T_1$	$2T_2$	$2T_3$	$2T_4$	$\Omega$	$5P$	$5P_1$	$5P_2$	$5P_3$	$\Omega$	$3T$	$3T_1$	$3T_2$
$\Omega$	$4P$	$4P_1$	$4P_2$	$4P_3$	$4P_4$						$\Omega$	$6P$	$6P_1$	$6P_2$
$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$
Alfabetos de $7P_\mu$					Alfabetos de $4T_\mu$ e $8P_\mu$					Alfabetos de $9P_\mu$				
Sem bordo		Com bordo			Sem bordo		Com bordo			S/bordo		C/bordo		
$\Omega$	$7P$	$7P_1$			$\Omega$	$4T$ e $8P$	$4T_\mu$ e $8P_\mu$			$\Omega$	$9P$	$9P_\mu$		
$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$			$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_2$	$\emptyset$			$\mathbb{Z}_\alpha$	$\emptyset$	$\emptyset$		

Tabela 6.5.2: Alfabetos das modulações QAMS's do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$

Foram observadas, nos alfabetos das modulações QAMS's do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ , os mesmos tipos de comportamentos dos alfabetos do grafo completo  $K_5$ , descritos nos comentários após a Tabela 6.5.1. O que diferencia basicamente os alfabetos de  $K_5$  e de  $K_{4,4}$  são os números de elementos. Enquanto  $K_5$  apresenta alfabeto com o máximo de 6 elementos

e este se encontra sobre uma superfície não-orientável, os alfabetos de  $K_{4,4}$  possuem até 8 elementos e tanto se encontra em superfície orientável quanto não-orientável. Portanto, há uma maior variedade no número de elementos dos alfabetos nas modulações QAMS's do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ .

### 6.5.3 Alfabetos das modulações QAMS's do hexaedro $H_{8,12}$

Os dados para identificação dos alfabetos das modulações QAMS's do hexaedro  $H_{8,12}$  encontram-se na Tabela 5.2.1. Esta contém todas as modulações sobre superfície orientáveis e não-orientáveis, com e sem bordos, e os respectivos números de regiões das partições das superfícies, elementos que permitem identificar os alfabetos.

Na Tabela 6.5.3, relacionamos os alfabetos das modulações QAMS's do hexaedro  $H_{8,12}$  em função das superfícies que contém os projetos de modulações.

Alfabetos de $S_\mu$						Alfabetos de $P_\mu$					Alfabetos de $T_\mu$ e $2P_\mu$			
S/bordo		Com bordo				S/bordo		Com bordo			S/bordo		C/bordo	
$\Omega$	$S$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$\Omega$	$P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$\Omega$	$T, 2P$	$T_1, 2P_1$	$T_2$ e $2P_2$
$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$
Alfabetos de $3P_\mu$			Alfabetos de $2T_\mu$ e $4P_\mu$			Alfabetos de $5P_\mu$								
Sem bordo		C/bordo	Sem bordo		Com bordo	Sem bordo		Com bordo						
$\Omega$	$3P$	$3P_1$	$\Omega$	$2T, 4P$	$2T_1, 4P_1$	$\Omega$	$5P$	$5P_1$						
$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_2$	$\emptyset$	$\mathbb{Z}_\alpha$	$\emptyset$	$\emptyset$						

Tabela 6.5.3: Alfabetos das modulações QAMS's do hexaedro  $H_{8,12}$

Uma inspeção nos alfabetos das modulações QAMS's, da Tabela 6.5.3, nos surpreende com o fato dos alfabetos das modulações QAMS's do hexaedro serem os mesmos do grafo completo  $K_5$ . Evidentemente que não há coincidência no conjunto de superfícies. Esta igualdade só foi detectada porque a identificação das classes de superfícies foi realizada, simultaneamente, em ambos os tipos de orientações, isto é, nas orientáveis e nas não-orientáveis. Esta é uma das vantagens de se identificar, ao mesmo tempo, as modulações orientáveis e não-orientáveis de um grafo, pois encontramos relações que só são possíveis quando ambos os casos são tratados simultaneamente.

O processo de identificação de modulações teve início em 1999 [14], porém, o processo de identificação simultânea só começou a ser realizado quando da identificação da modulações do grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ , em 2010 [18]. Neste trabalho, começamos a usufruir da vantagem do processo simultâneo de identificação de modulações sobre superfícies vindas de mergulhos de grafos.

Observe, nas Tabelas 5.2.1 e 6.5.3, que os alfabetos do hexaedro que se encontram sobre  $S_\mu$  são os mesmos alfabetos de  $K_5$  que estão sobre  $P_\mu$ . Para sermos mais precisos, observamos

que ocorrem as seguintes igualdades entre os alfabetos de  $K_5$  e do hexaedro

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{P_\mu}(K_5) &= \{\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\} = \mathbb{A}_{S_\mu}(H_{8,12}) \\ \mathbb{A}_{T_\mu, 2P_\mu}(K_5) &= \{\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\} = \mathbb{A}_{P_\mu}(H_{8,12}) \\ \mathbb{A}_{3P_\mu}(K_5) &= \{\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\} = \mathbb{A}_{T_\mu, 2P_\mu}(H_{8,12}) \\ \mathbb{A}_{2T_\mu, 4P_\mu}(K_5) &= \{\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\} = \mathbb{A}_{3P_\mu}(H_{8,12}) \\ \mathbb{A}_{5P_\mu}(K_5) &= \{\mathbb{Z}_2\} = \mathbb{A}_{2T_\mu, 4P_\mu}(H_{8,12}) \\ \mathbb{A}_{3T_\mu, 6P_\mu}(K_5) &= \emptyset = \mathbb{A}_{5P_\mu}(H_{8,12}).\end{aligned}$$

Nos surpreende este tipo de igualdade em grafos com características tão distintas. Enquanto  $K_5$  possui 5 vértices de grau 4, 10 lados e região mínima triangular, o Hexaedro tem 8 vértices de grau 3, 12 lados, vértices de grau 3 e região mínima quadrangular. Logo, nenhum dos elementos que contribuem para o conjunto dos mergulhos dos grafos  $K_5$  e  $H_{8,12}$  coincidem. Então, por que a igualdade entre os alfabetos? Este comportamento será esclarecido na forma de uma proposição que será introduzida posteriormente.

Nos quatro casos de grafos tratados neste trabalho, observamos que o número máximo de regiões de mergulhos de um grafo às vezes ocorre em uma superfície não-orientável, como é o caso de  $K_5$  (este possui 6 regiões) e pode encontrar-se sobre a superfície orientável, como no caso de  $H_{8,12}$  (este também possui 6 regiões). Quando estes mergulhos possuem os mesmos números de regiões significa que o conjunto das superfícies de ambos os grafos têm os mesmos números de elemento e os mergulhos têm o mesmo número de regiões. Como o alfabeto depende do número de regiões, segue a igualdade entre os alfabetos.

**Definição 6.5.1** *Seja  $M(G)$  o conjunto dos mergulhos orientáveis e não-orientáveis de  $G$ . Chamaremos de mergulho mínimo máximo ( $M_{\min/\max}$ ) de  $G$  o mergulho  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^t R_{\alpha_i}^i$  tal que  $k \leq t$  para todo  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^t R_{\alpha_i}^i \in \mathbb{M}(G)$ . Se  $G$  e  $H$  são tais que  $M_{\min/\max}(G) = M_{\min/\max}(H)$ , então diremos que  $G$  e  $H$  possuem mergulhos mínimos maximais idênticos.*

O termo *mergulho mínimo máximo* refere-se ao mergulho mínimo orientável ou não-orientável de um grafo que apresenta o maior número de regiões. Os alfabetos correspondentes aos mergulhos mínimos orientável e não-orientável serão indicados por  $\mathbb{A}_{\min}$  e  $\overline{\mathbb{A}}_{\min}$ , respectivamente. Como os mergulhos mínimos orientáveis e não-orientáveis são aqueles que possuem os maiores números de regiões, então os alfabetos  $\mathbb{A}_{\min}$  e  $\overline{\mathbb{A}}_{\min}$  possuem o maiores números de símbolos dentre os alfabetos de mergulhos orientáveis e não-orientáveis, respectivamente.

Observamos que os mergulhos mínimos orientáveis e não-orientáveis podem ter o mesmo número de regiões, como no caso do grafo completo  $K_{4,4}$  (ambos possuem 8 regiões e são realizados em  $T$  e  $2P$ ) ou podem ter número de regiões diferentes, como nos casos de  $K_5$  (compostos de 5 regiões sobre  $T$  e de 6 regiões sobre  $P$ , sendo este o mergulho mínimo máximo),  $H_{8,12}$  (compostos de 6 regiões sobre  $P$ , sendo este o mergulho mínimo máximo, e de 5 regiões sobre  $T$ ) e  $H_{6,12}^t$  (compostos de 8 regiões sobre  $P$ , sendo este o mergulho mínimo máximo, e de 7 regiões sobre  $P$ ).

**Teorema 6.5.2** *Os alfabetos  $\mathbb{A}_{\min}$  e  $\overline{\mathbb{A}}_{\min}$  dos mergulhos mínimos orientável e não-orientável de um grafo  $G$  são iguais se, e somente se, os mergulhos mínimos de  $G$  são maximais e encontram-se em  $\gamma T$  e  $2\gamma P$ .*

**Demonstração.** Seja  $\mathbb{A}_{\min} = \overline{\mathbb{A}}_{\min}$ . Se  $\Omega = S$ , então  $\overline{\Omega} = S$ , o que é um absurdo. Se  $\overline{\Omega} = P$ , então  $\Omega = P$ , o que é um absurdo. Consequentemente, os alfabetos  $\mathbb{A}_{\min}$  e  $\overline{\mathbb{A}}_{\min}$  encontram-se sobre superfícies mínima que não estão em  $\{S, P\}$ . Por outro lado, a igualdade  $\mathbb{A}_{\min} = \overline{\mathbb{A}}_{\min}$  resulta que as partições dos mergulhos mínimos orientáveis e não-orientáveis possuem os mesmos números de regiões, o que só ocorre, se e somente se, são mergulhos da forma

$$G \hookrightarrow \gamma T \equiv \cup_{i=1}^{|\mathbb{A}_{\min}|} R_{\alpha_i}^i \equiv \cup_{i=1}^{|\overline{\mathbb{A}}_{\min}|} R_{\alpha_i}^i \equiv 2\gamma P \hookleftarrow G, \quad (6.12)$$

caso contrário, o mergulho mínimo não-orientável estaria ou na superfície  $(2\gamma - 1)P$  ou sobre  $(2\gamma + 1)P$ . Em ambos os casos não teríamos a igualdade  $\cup_{i=1}^{|\mathbb{A}_{\min}|} R_{\alpha_i}^i \equiv \cup_{i=1}^{|\overline{\mathbb{A}}_{\min}|} R_{\alpha_i}^i$ , uma vez que

$$G \hookrightarrow (2\gamma - 1)P \equiv \cup_{i=1}^{|\overline{\mathbb{A}}_m|^{-1}} R_{\alpha_i}^i \neq \cup_{i=1}^{|\overline{\mathbb{A}}_m|} R_{\alpha_i}^i \neq \cup_{i=1}^{|\overline{\mathbb{A}}_m|+1} R_{\alpha_i}^i \equiv (2\gamma - 1)P \hookleftarrow G, \quad (6.13)$$

onde  $\overline{\mathbb{A}}_m = \overline{\mathbb{A}}_{\min}$ . Portanto,  $\mathbb{A}_{\min} = \overline{\mathbb{A}}_{\min}$  implica que os mergulhos mínimos são da forma (6.12). As desigualdades em (6.13) mostram que os mergulhos mínimos de  $G$  são maximais e encontram-se em  $\gamma T$  e  $2\gamma P$ . Reciprocamente, se os mergulhos mínimos orientáveis e não-orientáveis encontram-se em  $\gamma T$  e  $2\gamma P$ , as partições destes têm o mesmo número de regiões, uma vez que possuem características de Eüler iguais. Consequentemente,  $\mathbb{A}_{\min} = \overline{\mathbb{A}}_{\min}$ . ■

**Corolário 6.5.3** *A diferença entre  $\mathbb{A}_{\min}$  e  $\overline{\mathbb{A}}_{\min}$  de um grafo é no máximo 1.*

**Demonstração.** De fato, pelo Teorema 6.5.2,  $\mathbb{A}_{\min} - \overline{\mathbb{A}}_{\min} = 0$  quando os mergulhos mínimos orientáveis e não-orientáveis encontram-se sobre superfícies da forma  $\gamma T$  e  $2\gamma P$ , respectivamente.  $\mathbb{A}_{\min} - \overline{\mathbb{A}}_{\min} = 1$  quando se tem mergulhos mínimos orientáveis e não-orientáveis das formas

$$\begin{aligned} (1) \quad & S \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i \text{ e } P \equiv \cup_{i=1}^{k-1} R_{\alpha_i}^i; & (3) \quad & 2(\gamma - 1)P \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i \text{ e } \gamma T \equiv \cup_{i=1}^{k-1} R_{\alpha_i}^i; \\ (2) \quad & P \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i \text{ e } T \equiv \cup_{i=1}^{k-1} R_{\alpha_i}^i; & (4) \quad & \gamma T \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i \text{ e } 2(\gamma + 1)P \equiv \cup_{i=1}^{k-1} R_{\alpha_i}^i. \end{aligned}$$

Observe que nos casos (1) - (4), tem-se que  $\mathbb{A}_{\min} - \overline{\mathbb{A}}_{\min} = 1$ . Suponha que  $\mathbb{A}_{\min} - \overline{\mathbb{A}}_{\min} = 2$ . Se o mergulho mínimo maximal é não-orientável, então  $2(\gamma - 1)P \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$  e  $\gamma T \equiv \cup_{i=1}^{k+2} R_{\alpha_i}^i$  são respectivamente os mergulhos mínimos não-orientável e orientável. Veja que neste caso,  $\mathbb{A}_{\min} - \overline{\mathbb{A}}_{\min} = 2$ . Como as regiões de mergulhos orientáveis e não-orientáveis possuem o mesmo número de regiões, então existe um mergulho orientável sobre  $(\gamma - 1)T \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$ . Mas,  $\gamma$  é o gênero mínimo de mergulhos orientáveis, então a existência de um mergulho orientável sobre uma superfície de gênero  $\gamma - 1$  é um absurdo. Portanto  $\mathbb{A}_{\min} - \overline{\mathbb{A}}_{\min}$  não pode ser 2. Esta contradição encerra a prova da afirmação. ■

Do Teorema 6.5.2 e Corolário 6.5.3, deduzimos que a diferença entre os alfabetos das modulações QAMS's dos mergulhos mínimos orientáveis e não-orientáveis de um grafo não pode ser superior a um. Estas condições, quando compartilhadas com dois ou mais grafos, irão resultar nas igualdades entre os seus alfabetos.

As regiões mínimas maximais dos grafos irão decidir se os alfabetos são iguais ou não. Pode ocorrer que a região mínima maximal de um grafo  $G$  seja orientável e que a região mínima de um grafo  $H$  seja não-orientável, como nos casos de  $K_5$  e  $H_{8,12}$ , entretanto, se as

regiões mínimas maximais de  $G$  e  $H$  têm o mesmo número de regiões, então os alfabetos de  $G$  e  $H$  serão iguais. Pode ocorrer casos em que as regiões mínimas maximais de  $G$  e  $H$  sejam ambas orientáveis ou ambas não-orientáveis, se estas tiverem os mesmas quantidades de regiões, também implicará na igualdade dos alfabetos de  $G$  e  $H$ . Portanto, o alfabeto de um grafo depende somente do número de regiões do mergulho mínimo maximal do grafo, como será demonstrado a seguir.

**Teorema 6.5.4** *Os alfabetos das modulações QAMS's de  $G(p, q)$  e  $H(r, s)$  são iguais se, e somente se,  $G$  e  $H$  possuem mergulhos mínimos maximais idênticos.*

**Demonstração.** Suponhamos que os grafos  $G$  e  $H$  possuem mergulhos mínimos maximais idênticos. Analisemos um caso para mostrar quem são precisamente os mergulhos de grafo. Suponhamos que os mergulhos mínimos ocorrem em superfícies orientáveis de gêneros  $\gamma$  e  $\lambda$ , respectivamente. Então, os mergulhos maximais orientáveis possuem 2 ou 1 regiões, conforme as condições do Teorema 2.4.8. Por outro lado, admitindo que o mergulho maximal não-orientável é composto por 1 região, concluímos que os mergulhos de  $G$  são da forma

$$G \hookrightarrow \begin{cases} \gamma T \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}, (\gamma + 1) T \equiv \cup_{i=1}^{k-2} R_{\alpha_i}, \dots, \gamma_M T \equiv \cup^2 R_{\alpha_i}, \text{ se } k \text{ é par} \\ \gamma T \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}, (\gamma + 1) T \equiv \cup_{i=1}^{k-2} R_{\alpha_i}, \dots, \gamma_M T \equiv R_{2q}, \text{ se } k \text{ é ímpar} \\ 2\gamma P \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}, (2\gamma + 1) P \equiv \cup_{i=1}^{k-2} R_{\alpha_i}, \dots, \gamma_M P \equiv R_{2q}, \text{ se } \mu_{\min} = \bar{\mu}_{\min} \end{cases} \quad (6.14)$$

Conseqüentemente, o alfabeto das modulações QAMS's de  $G$  é dado por

$$\mathbb{A}_G = \{\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}_{k-1}, \mathbb{Z}_{k-2}, \mathbb{Z}_{k-3}, \dots, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}. \quad (6.15)$$

De modo análogo, deduzimos que os mergulhos de  $H$  são da forma

$$H \hookrightarrow \begin{cases} \lambda T \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}, (\lambda + 1) T \equiv \cup_{i=1}^{k-2} R_{\alpha_i}, \dots, \lambda_M T \equiv \cup^2 R_{\alpha_i}, \text{ se } k \text{ é par} \\ \lambda T \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}, (\lambda + 1) T \equiv \cup_{i=1}^{k-2} R_{\alpha_i}, \dots, \lambda_M T \equiv R_{2s}, \text{ se } k \text{ é ímpar} \\ 2\lambda P \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}, (2\lambda + 1) P \equiv \cup_{i=1}^{k-2} R_{\alpha_i}, \dots, \lambda_M P \equiv R_{2s}, \text{ se } \mu_{\min} = \bar{\mu}_{\min}. \end{cases} \quad (6.16)$$

Independente dos gêneros  $\gamma$  e  $\lambda$ , estes podem ser iguais ou bem diferentes, e dos tipos de superfícies, vemos que o alfabeto só depende do número de regiões dos mergulhos. Então, o alfabeto das modulações QAMS's de  $G$  é dado por

$$\mathbb{A}_H = \{\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}_{k-1}, \mathbb{Z}_{k-2}, \mathbb{Z}_{k-3}, \dots, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}.$$

Por (6.15), vale a igualdade  $\mathbb{A}_G = \mathbb{A}_H$ . Só para analisar um outro caso, suponhamos que o mergulho mínimo maximal de  $G$  é orientável e ocorre em uma superfície de gênero  $\gamma$ , e o mergulho mínimo maximal de  $H$  é não-orientável e ocorre em uma superfície de gênero  $\bar{\lambda}$ . De modo análogo ao caso anterior, deduzimos que o conjunto de mergulhos de  $G$  é como em (6.14). Por outro lado, se  $\bar{\lambda} = 2\gamma$ , então os mergulhos de  $H$  são da forma

$$H \hookrightarrow \begin{cases} \bar{\lambda} T \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}, (\bar{\lambda} + 1) T \equiv \cup_{i=1}^{k-2} R_{\alpha_i}, \dots, \bar{\lambda}_M T \equiv \cup^2 R_{\alpha_i}, \text{ se } k \text{ é par} \\ \bar{\lambda} T \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}, (\bar{\lambda} + 1) T \equiv \cup_{i=1}^{k-2} R_{\alpha_i}, \dots, \bar{\lambda}_M T \equiv R_{2s}, \text{ se } k \text{ é ímpar} \\ 2\bar{\lambda} P \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}, (2\bar{\lambda} + 1) P \equiv \cup_{i=1}^{k-2} R_{\alpha_i}, \dots, \bar{\lambda}_M P \equiv R_{2s}, \text{ se } \mu_{\min} = \bar{\mu}_{\min}, \end{cases}$$

o que implica que o alfabeto  $\mathbb{A}_G$  é o mesmo de (6.15). E se  $\bar{\lambda} = 2\gamma - 1$ , pelo Corolário 6.5.3, temos que

$$H \hookrightarrow \begin{cases} \lambda T \equiv \cup_{i=1}^{k-1} R_{\alpha_i}, (\lambda + 1) T \equiv \cup_{i=1}^{k-3} R_{\alpha_i}, \dots, \lambda_M T \equiv \cup^2 R_{\alpha_i}, \text{ se } k \text{ é ímpar} \\ \lambda T \equiv \cup_{i=1}^{k-1} R_{\alpha_i}, (\lambda + 1) T \equiv \cup_{i=1}^{k-3} R_{\alpha_i}, \dots, \lambda_M T \equiv R_{2s}, \text{ se } k \text{ é par} \\ (2\gamma - 1) P \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}, 2\gamma P \equiv \cup_{i=1}^{k-1} R_{\alpha_i}, \dots, \gamma_M P \equiv R_{2s}, \text{ se } \mu_{\min} < \bar{\mu}_{\min}. \end{cases}$$

Novamente, temos que o alfabeto das modulações QAMS's de  $H$ ,  $\mathbb{A}_H$ , é o mesmo que o alfabeto de  $\mathbb{A}_G$  em (6.15). No caso em que os mergulhos mínimos maximais de  $G$  e  $H$  são ambos não-orientáveis e no caso em que  $G$  é não-orientável e o de  $H$  é orientável, as conclusões são as mesmas dos dois casos demonstrados. ■

Estávamos tão concentrados no alfabeto que esquecemos que observar o conjunto das superfícies das modulações QAMS's de grafos com mergulhos mínimos maximais, cujas partições possuem os mesmos números de regiões. Estes são conjuntos com a mesma cardinalidade.

**Corolário 6.5.5** *Se  $G$  e  $H$  são grafos, cujos mergulhos mínimos maximais são idênticos, então*

$$|\mathbb{S}(G)| = |\mathbb{S}(H)| = \begin{cases} \frac{3}{2}\mu, \text{ se } \mu \text{ é par} \\ \frac{3\mu+1}{2}, \text{ se } \mu \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (6.17)$$

**Demonstração.** Seja  $\mu$  o número de partições dos mergulhos mínimos maximais de  $G$  e  $H$ . Pelo Teorema 2.4.8, deduzimos que o mergulho máximo orientável de um grafo possui 2 ou 1 região. Suponha que o mergulho mínimo possui 1 região. Pelo Teorema 2.4.8, os mergulhos de grafo ocorrem em superfícies  $\Omega^k$ , onde  $k$  é o número de regiões do mergulho sobre  $\Omega$  (lembre que  $k$  é constante para cada superfície  $\Omega$ ), para todo

$$k \in \begin{cases} \{\mu, \mu - 2, \mu - 4, \dots, 8, 6, 4, 2\} \text{ ou} \\ \{\mu, \mu - 2, \mu - 4, \dots, 7, 5, 3, 1\}, \text{ se } \Omega \equiv gT \\ \{\mu, \mu - 1, \mu - 2, \dots, 4, 3, 2, 1\}, \text{ se } \Omega \equiv gT. \end{cases} \quad (6.18)$$

Por (6.14), cada  $\mu$  dos conjuntos dos números de partições de (6.18) está associado a uma única superfície. Então, o número de elementos dos conjuntos das superfícies para os mergulhos de  $G$  e  $H$  contém os mesmos números de elementos dos conjuntos em (6.18). Mais exatamente, temos que:

$$|\mathbb{S}(G)| = |\mathbb{S}(H)| = |\mathbb{S}_G| + |\bar{\mathbb{S}}_G| = \begin{cases} (\frac{\mu-2}{2} + 1) + (\mu - 1) + 1 = \frac{3}{2}\mu, \text{ se } \mu \text{ é par} \\ (\frac{\mu-1}{2} + 1) + (\mu - 1) + 1 = \frac{3\mu+1}{2}, \text{ se } \mu \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Os demais casos podem ser determinados de forma semelhante. ■

As relações simultâneas dos mergulhos orientável e não-orientável e o fato de ter escolhido o grafo completo  $K_5$  e o grafo do hexaedro  $H_{6,12}$ , como parte dos objetos estudados neste trabalho, permitiu descobrir e provar importantes relações entre os mergulhos de grafos, principalmente em relação aos alfabetos associados aos mesmos.

### 6.5.4 Alfabetos das modulações QAMS's do hexaedro $H'_{6,12}$

Como ocorreu com os demais grafos, este trabalho contém informações sobre as superfícies nas quais as modulações QAMS's são projetadas e o tipo de partição possível em cada superfície. Os alfabetos vinculados às modulações QAMS's do hexaedro  $H'_{6,12}$  e as superfícies nas quais estas modulações se encontram, estão relacionados na Tabela 6.5.4. Estes elementos foram obtidos a partir do número de regiões das partições de mergulhos dos mergulhos de  $H'_{6,12}$  sobre as relações de superfícies disponível na Tabela 5.3.5, do Apêndice E.

Alfabetos de $S_\mu$								Alfabetos de $P_\mu$						
Sem bordo		Com bordo						S/bordo		Com bordo				
$\Omega$	$S$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$\Omega$	$P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
$\bar{\Omega}$	$2P$	$2P_1$	$2P_2$	$2P_3$	$2P_4$	$2P_5$	$2P_6$							
$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$
Alfabetos de $T_\mu$ e $2P_\mu$						Alfabetos de $3P_\mu$				Alfabetos de $2T_\mu$ e $4P_\mu$				
Sem bordo		Com bordo				Sem bordo		Com bordo		Sem bordo		Com bordo		
$\Omega$	$T, P$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$\Omega$	$3P$	$3P_1$	$3P_2$	$3P_3$	$\Omega$	$2T$	$2T_1$	$2T_2$
$\bar{\Omega}$	$2P$	$2P_1$	$2P_2$	$2P_3$	$2P_4$						$\bar{\Omega}$	$4P$	$4P_1$	$4P_2$
$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$
Alfabetos de $5P_\mu$					Alfabetos de $3T_\mu$ e $6P_\mu$				Alfabetos de $7P_\mu$					
Sem bordo		Com bordo			Sem bordo		Com bordo		S/bordo	C/bordo				
$\Omega$	$5P$	$5P_1$			$\Omega$	$3T$ e $6P$		$3T_\mu$ e $6P_\mu$	$\Omega$	$7P$		$7P_\mu$		
$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$			$\mathbb{Z}_\alpha$	$\mathbb{Z}_2$		$\emptyset$	$\mathbb{Z}_\alpha$	$\emptyset$		$\emptyset$		

Tabela 6.5.4: Alfabetos das modulações QAMS's do octaedro  $K_{4,4}$

No gráfico em barras da Figura 5.4.1, mostramos que a capacidade dos alfabetos do octaedro supera todos os grafos pesquisados neste trabalho, em relação a número de modulações QAMS, *twisted*, orientáveis e não-orientáveis com e sem bordo. Entretanto, as superfícies para os mergulhos do octaedro,  $\mathbb{S}(H'_{6,12})$ , apesar de não serem as mesmas superfícies para o mergulho do grafo completo  $K_{4,4}$ , possuem os mesmos números de elementos de  $\mathbb{S}(K_{4,4})$ , ou seja, vale a relação de igualdade

$$|\mathbb{S}(K_{4,4})| = |\mathbb{S}(H'_{6,12})|.$$

Observe que os conjuntos de superfícies  $\mathbb{S}(K_{4,4})$  e  $\mathbb{S}(H'_{6,12})$  não são iguais, eles só possuem os mesmos números de elementos. Isto ocorre devido ao Teorema 6.5.4, pois estamos nas condições das hipóteses deste, isto é, ambos os grafos  $K_{4,4}$  e  $H'_{6,12}$  possuem mergulhos mínimos maximais com os mesmos números de regiões e, conseqüentemente, o conjunto de alfabetos é idêntico. Além disso, veremos a seguir, que o número de superfícies para os mergulhos de  $K_{4,4}$  e  $H'_{6,12}$  são iguais quando os mergulhos mínimos maximais destes são idênticos.

## 6.6 Mergulhos Mínimos Maximais Idênticos

Chegamos a conclusão de que muitas das propriedades sobre modulações dependem dos mergulhos mínimos maximais dos grafos. No Apêndice F fizemos uma análise completa sobre este tipo de invariante do grafo e suas consequências diretas com os conjuntos de alfabetos das modulações QAMS 's e das superfícies sobre as quais estas se encontram. Os principais resultados conseguidos serão relacionados abaixo na forma de um único resultado. As demonstrações de cada uma das afirmações encontram-se no Apêndice F.

**Teorema 6.6.1** *Sejam  $G$  e  $H$  grafos com mergulhos mínimos maximais idênticos compostos de  $\mu$  regiões sobre superfícies mínimas de gêneros  $\gamma$  e  $\lambda$ , respectivamente, então:*

(i)  $\mathbb{A}_G = \mathbb{A}_H$  e  $|\mathbb{A}_G| = |\mathbb{A}_H| = \mu - 1$ ;

(ii) *Os conjuntos das superfícies orientáveis de  $G$  e de  $H$  satisfazem as condições de interseção:*

$$\mathbb{S}(G) \cap \mathbb{S}(H) \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} |\lambda - \gamma| \leq \frac{\mu-2}{2}, & \text{se } \gamma \text{ e } \lambda \text{ são pares} \\ \lambda - \gamma \in \left[-\frac{\mu-1}{2}, \frac{\mu-2}{2}\right], & \text{se } \gamma \text{ é par e } \lambda \text{ é ímpar} \\ \lambda - \gamma \in \left[-\frac{\mu-2}{2}, \frac{\mu-1}{2}\right], & \text{se } \gamma \text{ é ímpar e } \lambda \text{ é par} \\ |\lambda - \gamma| \leq \frac{\mu-1}{2}, & \text{se } \gamma \text{ e } \lambda \text{ são ímpares,} \end{cases}$$

nos casos contrários,  $\mathbb{S}(G) \cap \mathbb{S}(H) = \emptyset$ .

(iii) *Os conjuntos das superfícies não-orientáveis de  $G$  e de  $H$  satisfazem as condições de interseção:*

$$m(G) \cap \bar{\mathbb{S}}(H) \neq \emptyset \Leftrightarrow |\lambda - \gamma| \leq \mu - 1,$$

caso contrário, se  $|\lambda - \gamma| > \mu - 1$ , então  $m(G) \cap \bar{\mathbb{S}}(H) = \emptyset$ .

**Demonstração.** A afirmação (i) é equivalente ao Teorema F.1.4, a afirmação (ii) equivale ao Teorema F.1.1 e seu Corolário F.1.2 e a afirmação (iii) corresponde ao Teorema F.1.3.

■

Em relação aos alfabetos, não há como projetar modulações QAMS's sobre superfícies com alfabetos diferentes. Escolhido um grafo, o número de elementos do alfabeto de cada superfície é constante. Tanto é possível determinar o conjunto dos alfabetos de um grafo como determinar o seu número de elementos.

Quanto as superfícies, as modulações apresentam desempenhos diferentes quando são projetadas em superfícies distintas. Então, quanto maior for o número de superfícies envolvidas no processo, maior é o número de opções de projetos de modulações com desempenhos diferentes. Devemos ter em mente que, escolhido o grafo, sempre é possível identificar o conjunto de superfícies, quantificar o número de elementos e determinar a interseção entre os conjuntos das superfícies de dois grafos.

Concluimos ainda que, grafos diferentes podem possuir conjuntos de superfícies com o mesmo número de elementos. Tais conjuntos podem apresentar interseções ou não. Numa análise de desempenho de modulações vindas de mergulhos de grafos diferentes, informações sobre alfabetos, superfícies e tipos de partições são fundamentais.

## 6.7 Modulação QAMS e TV Digital

A modulação QAMS está definida sobre um espaço métrico  $(\Omega, d)$ , onde  $\Omega$  é uma superfície e  $d$  é uma métrica de  $\Omega$  como, por exemplo,  $d$  pode ser a distância geodésica. Este modelo de modulação é caracterizado pelo número de regiões da partição do mergulho de um grafo  $G$  sobre  $\Omega$ . Uma partição de  $\Omega$  dividida em  $k$  regiões define uma modulação  $k$ -QAMS para uma constelação de  $k$  sinais pertencente ao conjunto dos vértices do mergulho dual  $G' \hookrightarrow \Omega$ . A esta constelação de sinais associamos um alfabeto de  $k$  elementos pertencentes ao conjunto das classes de restos módulo  $k$ , isto é, o alfabeto  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ .

Pelo exposto nas Seções 6.2-6.6, vimos que a partir de um grafo  $G$  podemos projetar um número determinado de modulações sobre as quatro famílias de superfícies, para constelações binárias de até  $\mu$  elementos, onde  $\mu$  é o número de regiões do mergulho maximal de  $G$ . A existência de constelações com números de sinais diferentes de 2 afeta o comprimento das palavras-códigos: maior número de elementos no alfabeto implica, necessariamente, na redução do comprimento das palavras do código fonte e do código da modulação (código corretor de erros). Com isto, o processo de transmissão ganha em relação aos aspectos da diminuição de erros de transmissão e do tempo de processamento. Por outro lado, a capacidade de transmissão do canal é limitada, se conseguirmos diminuir os comprimentos das palavras do código fonte e do código da modulação, conseguimos enviar mais informação e assim aumentar a capacidade do canal.

Como foi visto na Seção 6.1, na codificação de imagens digitais da televisão em cores, cada elemento de imagem contém dupla codificação, informações de brilho  $X = \{x_i\}$  e de cor  $Y = \{y_j\}$ . O sistema consegue reconhecer aproximadamente 317 níveis de brilho e para a crominância  $Y = \{y_j\}$ ,  $j$  varia de 1 a 7. Os sistemas mais modernos, como a televisão de alta definição HDTV, opera com números de elementos de imagem e de codificação muitos superiores ao da televisão em cores. Além disso, na transmissão da imagem 3D, os elementos de imagem e da codificação são bem maiores do que ao da televisão HDTV. Nestes tipos de transmissões, o uso de alfabetos com números maiores de elementos são imprescindíveis para a boa operacionalização do sistema. Analisaremos o caso da TV digital com os parâmetros da imagem da televisão em cores.

Este trabalho contém uma pequena amostra das modulações sobre superfícies, porém, é a partir destes exemplos que os primeiros projetos de modulações podem ser implementados, como já se tem exemplos de projetos realizados em [3]. Não significa que a técnica utilizada neste trabalho, seja ineficiente para identificar modulações para grandes constelações de sinais [13], pelo contrário, a quantidade de sinais não é fator que impede a identificação da modulação, o problema é a construção do modelo topológico da desta e a existência da parametrização sobre a superfície.

Pela igualdade (6.1), é necessário utilizar sequências de comprimento 7 e 3 em um sistema de transmissão de televisão em cores. Atualmente, esta é a situação mais confortável dos sistemas de transmissão de televisão disponíveis aos usuários. A questão, portanto, é: até quanto é possível reduzir o comprimento das palavras do código de fonte da televisão em cores quando uma modulação QAMS vinda de mergulhos dos grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$  é utilizada? O primeiro passo para resolver este problema é determinar o número de elementos das sequências de codificações  $X$  e  $Y$ . Como  $Z = (X, Y)$ , o comprimento de  $Z$  é a soma dos

$\mathbb{A}$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$	$Z_7$	$Z_8$
$Y$	7	6	5	4	4	3	3
$X$	3	2	2	2	2	1	1
$Z$	10	8	7	6	6	4	4

Tabela 6.7.1: Comprimentos das palavras  $X, Y$  e  $Z$  codificadas em  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \dots, \mathbb{Z}_8$ 

comprimentos de  $X$  e  $Y$ .

Veamos com é realizado o cálculo dos comprimentos das palavras  $X, Y$  e  $Z$ , quando é escolhido um determinado alfabeto. Ao utilizarmos, por exemplo, o alfabeto  $\mathbb{Z}_4$  para codificar  $Y$  e  $X$ , os comprimentos  $m$  da palavra  $X$  e  $n$  da palavra  $Y$  devem satisfazer as seguintes condições de desigualdades

$$4^{m-1} \leq 317 \leq 4^m \quad \text{e} \quad 4^{n-1} \leq 317 \leq 4^n,$$

em particular, para o alfabeto 4-ário  $\mathbb{Z}_4$  considerado, temos que

$$4^4 = 256 \leq 317 \leq 1024 = 4^5 \quad \text{e} \quad 4^1 \leq 7 \leq 4^2.$$

Conseqüentemente, se o alfabeto escolhido for  $\mathbb{Z}_4$ , então  $m = 4$  e  $n = 2$ . Portanto, a luminância ou brilho  $X$  pode ser codificada com uma sequência de comprimento 4, em  $\mathbb{Z}_4$ , e a crominância  $Y$ , com uma sequência de comprimento 2 em  $\mathbb{Z}_4$ .

Pelas Tabelas 4.3.1, 4.4.1, 5.2.1 e 5.3.2, os alfabetos das modulações QAMS vindas dos grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$  possuem alfabetos variando de  $\mathbb{Z}_2$  a  $\mathbb{Z}_8$ , portanto, para estes alfabetos, os comprimentos das palavras  $X, Y$  e  $Z$  são dados como na Tabela 6.7.1.

Vemos, na Tabela 6.7.1, que os comprimentos de  $X$  podem ser reduzido de 7 para 3, e o de  $Y$ , de 3 para 1. Menos de 1 é impossível existir alfabetos, portanto já se consegue atingir o mínimo na redução do comprimento das palavras códigos se utilizarmos uma determinada escolha de modulações QAMS's vindas dos grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$ , por exemplos, qualquer uma das modulações sobre mergulhos mínimos de  $K_{4,4}$  e  $H'_{6,12}$  ou sobre mergulhos em superfícies com uma componente de bordo gerada por estes mergulhos mínimos.

Observe também que a redução do comprimento das palavras de  $X$  pode ocorrer até menos da metade, o que já é uma redução bastante significativa. Na palavra  $Z$ , a redução máxima chega a ser de 40%, maior do que a redução de 42,857% ocorrida em  $Y$ .

Para analisar a questão da taxa de redução dos alfabetos, disponibilizamos, na Tabela 6.7.1, os dados referentes aos comprimentos das palavras do código fonte da transmissão, via televisão em cores, com os parâmetros especificados na Tabela 6.1.1.

Quando o alfabeto binário é utilizado na codificação de modulações (codificação da fonte), as sequências possuem o número máximo de elementos quando comparados com outro alfabeto  $m$ -ário,  $m \geq 2$ . Por isso, o número de elementos da sequência do código binário maximal de um grafo  $G$  será indicado, na Tabela 6.7.2, pelo símbolo  $|\mathbb{A}|_{\max}$ .

	$K_5$				$K_{4,4}$				$H_{8,12}$				$H'_{6,12}$			
	$\mathbb{A}_s$	$\mathbb{A}_c$	$\overline{\mathbb{A}}_s$	$\overline{\mathbb{A}}_c$												
$ \mathbb{A} _{\max}$	5	4	6	5	8	7	7	6	6	5	5	4	8	7	7	6
$X$	4	5	4	4	3	3	3	4	4	4	4	5	3	3	3	4
$\text{Red}_X$	57, 1	71, 4	71, 4	57, 1	42, 9	42, 9	42, 9	71, 4	71, 4	57, 1	57, 1	71, 4	42, 9	42, 9	42, 9	71, 4
$Y$	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	2
$\text{Red}_Y$	66, 7	66, 7	66, 7	66, 7	33, 3	33, 3	33, 3	66, 7	66, 7	66, 7	66, 7	66, 7	33, 3	33, 3	33, 3	66, 7
$Z$	6	7	6	6	4	4	4	6	6	6	6	7	4	4	4	6
$\text{Red}_Z$	60	70	60	60	40	40	40	60	60	60	60	70	40	40	40	60

Tabela 6.7.2: Reduções máximas de  $X, Y$  e  $Z$  em alfabetos de  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$ 

Nas linhas  $X, Y$  e  $Z$  constam as quantidades  $\alpha$  do alfabeto  $\mathbb{A}_\alpha$  com o número máximo de elementos possíveis de serem utilizados na codificação de uma classe de modulação do grafo  $G \in \{K_5, K_{4,4}, H_{8,12}, H'_{6,12}\}$ .

A taxa de redução do alfabeto  $A$ , indicada por  $\text{Red}_A$  é calculada utilizando o número de elementos da sequência binária  $A$ , em relação ao número máximo de elementos da sequência da classe de alfabetos  $\mathbb{A}_\alpha$  da família de superfície  $\Omega_\alpha$ , como será mostrado posteriormente

## 6.8 Alfabetos Maximais de Grafos

A identificação dos alfabetos associados à modulações QAMS de grafos é importante porque está relacionada com o problema da compactação de dados. Em um projeto de transmissão da TV digital, o fator de compactidade não deve ser negligenciado, pois influi na capacidade do canal: maior compactação dos dados implica, necessariamente, em maior capacidade do canal.

A seguir, identificaremos os alfabetos maximais associados às modulações QAMS e as propriedades de maior interesse para o projetista do sistema de TV digital.

**Definição 6.8.1** *Seja  $G$  um grafo. Suponha que  $W$  é um conjunto finito de elementos codificados com um alfabeto  $\mathbb{A}_\alpha$  associado a uma modulação da classe de superfície  $\Omega_\alpha(G) = \{\Omega_s, \Omega_c, \overline{\Omega}_s, \overline{\Omega}_c\}$ . Diremos que  $\mathbb{A}_\alpha$  é o alfabeto maximal para  $W$  se, e somente se,  $\alpha$  é máximo no conjunto de alfabetos de  $\Omega_\alpha$ .*

**Observação 6.8.2** *Obviamente, o alfabeto maximal codifica um conjunto de elementos com as sequências de menores comprimentos, daí a importância em identificar este alfabeto. Também é evidente que o alfabeto maximal ocorre no mergulho mínimo maximal.*

O símbolo  $\text{Red}_X$  indica a percentagem da redução máxima do número de símbolos quando é utilizado o alfabeto maximal  $\mathbb{A}_m$  na codificação da sequência  $X$ , em comparação com o número de símbolos da sequência binária. De modo análogo, definem-se as taxas de reduções para os alfabetos  $Y$  e  $Z$ ,  $\text{Red}_Y$  e  $\text{Red}_Z$ .

Se uma sequência binária de comprimento  $b$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_b)$ , é codificada utilizando um alfabeto  $\mathbb{Z}_\alpha$ , por uma sequência de comprimento  $c$ ,  $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_c)$ , então, é fácil ver que a redução de codificação é obtida através da relação

$$\frac{b}{100\%} = \frac{c}{\text{Red}_X} \Rightarrow \text{Red}_X = \frac{100 \cdot c}{b}. \quad (6.19)$$

Por exemplo, a redução do número de símbolos do alfabeto  $\mathbb{A}_\alpha$  é máxima quando  $\alpha$  é máximo. Em particular,  $\mathbb{A}_s$  indica o alfabeto maximal sobre a classe de superfícies orientáveis sem bordos, representada por  $\Omega_s$ . Pela segunda coluna da Tabela 6.7.1, a redução do comprimento da sequência  $Z$  é máxima quando são utilizados os alfabetos  $\mathbb{Z}_5$  e  $\mathbb{Z}_6$  para codificar a sequência  $X$ , e os alfabetos  $\mathbb{Z}_7$  e  $\mathbb{Z}_8$  para codificar a sequência  $Y$ , casos em que as sequências  $X$  e  $Y$  possuem comprimentos 4 e 2, respectivamente, o que implica na sequência  $Z$  de comprimento 6. Uma vez que o alfabeto binário utiliza sequências de comprimentos 7, 3 e 10 para codificar  $X, Y$  e  $Z$ , nesta ordem, por (6.19), as reduções para estes casos são dadas por

$$\begin{aligned} \text{Red}_X(\mathbb{A}_s) &= \frac{100 \cdot 4}{7} = 57,143\% \\ \text{Red}_Y(\mathbb{A}_s) &= \frac{100 \cdot 2}{3} = 66,667\% \\ \text{Red}_Z(\mathbb{A}_s) &= \frac{100 \cdot 6}{10} = 60,000\%. \end{aligned}$$

De modo análogo, foram calculadas as demais taxas de reduções das famílias de modulações dos grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$  relacionadas na Tabela 6.7.2.

Seja  $\text{Var}_m(\text{Red}_W)$  a variação média das percentagens de reduções do alfabeto  $W$  nas classes de modulações dos grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$ . Então, segue da Tabela 6.7.2, que as variações médias das percentagens de reduções dos alfabetos  $X, Y$  e  $Z$  nas classes de modulações dos grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$ , são dadas por

$$\begin{aligned} \text{Var}_m(\text{Red}_X) &= \frac{4 \cdot 57.1 + 6 \cdot 71.4 + 6 \cdot 42.9}{16} = 57,138\% \\ \text{Var}_m(\text{Red}_Y) &= \frac{10 \cdot 66.6666 + 6 \cdot 33.33333}{16} = 54,166\% \\ \text{Var}_m(\text{Red}_Z) &= \frac{8 \cdot 60.0 + 2 \cdot 70.0 + 6 \cdot 30.0}{16} = 50,000\%. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Como era de se esperar, a variação é menor no alfabeto  $Z$  e maior no alfabeto  $Y$ , como será mostrado a seguir.

**Teorema 6.8.3** *Para todo grafo  $G$ , vale a seguinte relação de desigualdade*

$$\text{Var}_m(\text{Red}_Z G) < \text{Var}_m(\text{Red}_Y G) < \text{Var}_m(\text{Red}_X G). \quad (6.21)$$

**Demonstração.** De fato, as variações médias das percentagens de reduções dos alfabetos  $X$  e  $Y$  das classes de modulações QAMS's  $\mathbb{A}_s, \mathbb{A}_c, \overline{\mathbb{A}}_s$  e  $\overline{\mathbb{A}}_c$  de um grafo  $G$  são dadas por

$$\begin{aligned}\text{Var}_m(\text{Red}_X G) &= \sum_{\mathbb{A} \in \mathbb{A}(G)} \frac{\text{Red}_X(\mathbb{A})}{4} = \frac{100}{7} (s_X + c_X + \bar{s}_X + \bar{c}_X) \\ \text{Var}_m(\text{Red}_Y G) &= \sum_{\mathbb{A} \in \mathbb{A}(G)} \frac{\text{Red}_Y(\mathbb{A})}{4} = \frac{100}{3} (s_Y + c_Y + \bar{s}_Y + \bar{c}_Y),\end{aligned}$$

onde, por exemplo,  $s_X, c_X, \bar{s}_X$  e  $\bar{c}_X$  ( $s_Y, c_Y, \bar{s}_Y$  e  $\bar{c}_Y$ ) são os comprimentos mínimos das palavras-códigos dos alfabetos  $\mathbb{A}_s, \mathbb{A}_c, \overline{\mathbb{A}}_s$  e  $\overline{\mathbb{A}}_c$  da sequência  $X$  (da sequência  $Y$ ) e  $\mathbb{A}(G) = \{\mathbb{A}_s, \mathbb{A}_c, \overline{\mathbb{A}}_s, \overline{\mathbb{A}}_c\}$ . Mas, pela Tabela 6.7.2, temos que

$$s_X < s_Y, \quad c_X < c_Y, \quad \bar{s}_X < \bar{s}_Y \quad \text{e} \quad \bar{c}_X < \bar{c}_Y,$$

o que resulta na desigualdade

$$s_X + c_X + \bar{s}_X + \bar{c}_X < s_Y + c_Y + \bar{s}_Y + \bar{c}_Y. \quad (6.22)$$

Por outro lado,  $\frac{100}{7} < \frac{100}{3}$ , logo, segue da desigualdade (6.22) que

$$\frac{100}{7} (s_X + c_X + \bar{s}_X + \bar{c}_X) < \frac{100}{3} \left( \frac{1}{\alpha(\mathbb{A}_s)} + \frac{1}{\alpha(\mathbb{A}_c)} + \frac{1}{\alpha(\overline{\mathbb{A}}_s)} + \frac{1}{\alpha(\overline{\mathbb{A}}_c)} \right),$$

ou seja,

$$\text{Var}_m(\text{Red}_Y G) = \sum_{\mathbb{A} \in \mathbb{A}(G)} \frac{\text{Red}_Y(\mathbb{A})}{4} < \sum_{\mathbb{A} \in \mathbb{A}(G)} \frac{\text{Red}_X(\mathbb{A})}{4} = \text{Var}_m(\text{Red}_X G),$$

o que prova a validade da desigualdade

$$\text{Var}_m(\text{Red}_Y G) < \text{Var}_m(\text{Red}_X G).$$

De modo análogo, prova-se que

$$\text{Var}_m(\text{Red}_Z G) < \text{Var}_m(\text{Red}_Y G).$$

e, portanto, vale a desigualdade

$$\text{Var}_m(\text{Red}_Z G) < \text{Var}_m(\text{Red}_Y G) < \text{Var}_m(\text{Red}_X G),$$

encerrando assim a demonstração do teorema. ■

O Teorema 6.8.3 mostra que as desigualdades (6.21), entre as variações médias das taxas de reduções dos alfabetos maximais  $X, Y$  e  $Z$ , valem para qualquer tipo de grafo.

O gráfico na Figura 6.8.1 ilustra as percentagens de reduções (ou taxas de reduções) dos alfabetos maximais  $\mathbb{A}_s, \mathbb{A}_c, \overline{\mathbb{A}}_s$  e  $\overline{\mathbb{A}}_c$  das famílias de modulações QAMS's dos grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$ .

Analisando os gráficos de linhas das taxas de reduções dos alfabetos  $X, Y$  e  $Z$ , chegamos a conclusão de que há certas semelhanças entre nos alfabetos maximais de grafos com mergulhos mínimos máximos com o mesmo número de regiões.

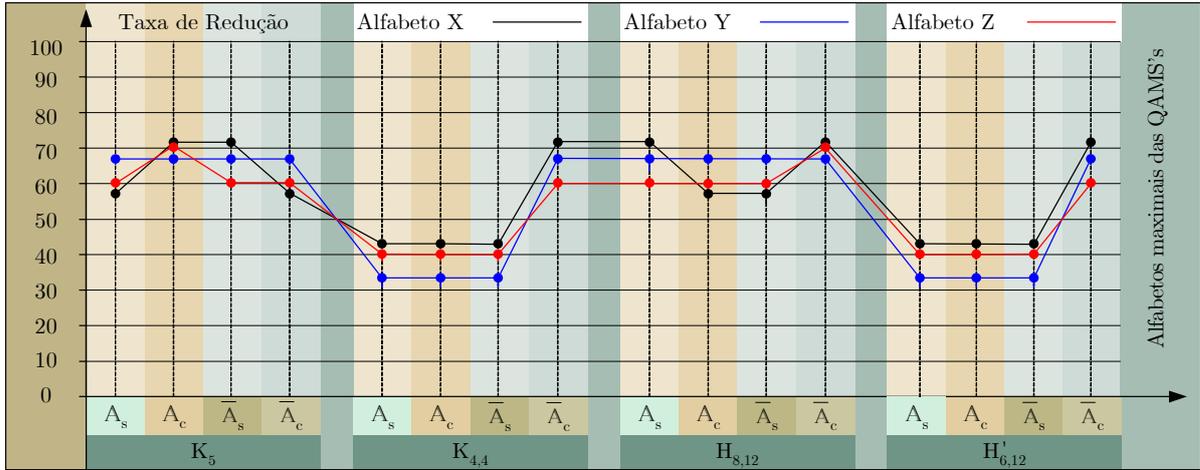


Figura 6.8.1: Gráfico de linhas dos índices de reduções dos alfabetos X, Y e Z das famílias dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$

**Observação 6.8.4** O conjunto dos alfabetos maximais de um grafo  $G$  será denotado pelo conjunto ordenado  $\mathbb{A}(G) = \{\mathbb{A}_{s_G}, \mathbb{A}_{c_G}, \overline{\mathbb{A}}_{\overline{s}_G}, \overline{\mathbb{A}}_{\overline{c}_G}\}$ , onde  $s_G, s_H, \overline{s}_G$  e  $\overline{s}_H$  indicam o número de elementos dos alfabetos maximais das famílias de superfícies de  $G$ ,  $\Omega_s, \Omega_c, \overline{\Omega}_s$  e  $\overline{\Omega}_c$ , respectivamente. Escrevemos  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow \Omega$  para significar que o mergulho mínimo maximal de  $G$  encontra-se sobre a superfície  $\Omega$ .

Um dos grandes problemas que enfrentamos neste trabalho é conseguir notações reduzidas que forneçam todas as informações envolvidas no processo de identificação dos alfabetos das classes de modulações. Neste sentido, o objetivo da Observação 6.8.4 é representar os alfabetos maximais de uma classe de superfície  $\mathbb{A}_{s_G}$  de modo que o número de elementos do alfabeto, indicado pelo índice  $s_G$ , forneça também informações sobre a classe de superfícies e o grafo no qual se encontra o projeto de modulação associado. Este foi o modo mais econômico que encontramos para fornecer todas as informações em uma única notação.

Para ilustrar um exemplo, veja que na notação  $\mathbb{A}_{s_G}$ , o  $\mathbb{A}$  sem a barra indica que o alfabeto vem da classe de superfícies orientáveis, o símbolo  $s$  em  $s_G$  refere-se a superfície sem bordo e  $G$  indica, naturalmente, o grafo. A letra  $c$  em  $c_G$  refere-se à classe de superfícies com bordo e quando existe a barra, estamos nos referindo à classe de superfícies não-orientáveis.

Para efeito de simplificação da notação serão utilizadas, no teorema abaixo, as seguintes notações: O mergulho mínimo maximal orientável (não-orientável) do grafo  $G$ ,  $M_{\min/\max} \hookrightarrow \gamma T (M_{\min/\max} \hookrightarrow \overline{\gamma} P)$ , às vezes será indicado por  $G_{m/\max} \equiv T^\gamma (G_{m/\max} \equiv P^\overline{\gamma})$ ; Escrevemos, por exemplo,  $H_{m/\max} \equiv T^\eta \wedge P^{2\eta}$  para indicar que o mergulho mínimo maximal de  $H$  sobre a superfície  $\eta T$  ou sobre a superfície  $2\eta P$ ; A notação  $\mathbb{A}_{GH} = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}$  indica que ambos os alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são iguais.

**Teorema 6.8.5** Se  $G$  e  $H$  possuem mergulhos mínimos maximais idênticos de  $\mu$  regiões,

então os alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  satisfazem as relações:

$$\mathbb{A}_{GH} = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \text{ se } \begin{cases} G_{m/\max} \equiv T^\gamma \text{ e } H_{m/\max} \equiv \eta T \wedge 2\eta P \\ G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma} \text{ e } H_{m/\max} \equiv \eta T \wedge 2\eta P \end{cases} \quad (6.23a)$$

$$\mathbb{A}_{GH} = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \text{ se } \begin{cases} G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma-1} \text{ e } H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1} \\ G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma+1} \text{ e } H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1} \end{cases} \quad (6.23b)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_G &= \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \\ \mathbb{A}_H &= \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \end{aligned} \text{ se } \begin{cases} G_{m/\max} \equiv T^\gamma \text{ e } H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1} \\ G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma} \text{ e } H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1} \end{cases} \quad (6.23c)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_G &= \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \\ \mathbb{A}_H &= \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \end{aligned} \text{ se } \begin{cases} G_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \text{ e } H_{m/\max} \equiv T^\eta \wedge P^{2\eta} \\ G_{m/\max} \equiv P^{2\eta+1} \text{ e } H_{m/\max} \equiv T^\eta \wedge P^{2\eta}. \end{cases} \quad (6.23d)$$

**Demonstração.** Consideremos a notação da Observação 6.8.4. Se os mergulhos mínimos maximais de  $G$  e  $H$  têm  $\mu$  regiões, então há 16 casos a serem analisados. Mostraremos aqui somente a análise do primeiro caso, as demonstrações dos demais casos encontram-se no Apêndice G. Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow \gamma T$ ,  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow \eta T$ , então os mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{\gamma T^\mu, 2\gamma P^\mu, (2\gamma+1)P^{\mu-1}, (\gamma+1)T^{\mu-2}, (2\gamma+2)P^{\mu-2}, (2\gamma+3)P^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{\eta T^\mu, 2\eta P^\mu, (2\eta+1)P^{\mu-1}, (\eta+1)T^{\mu-2}, (2\eta+2)P^{\mu-2}, (2\eta+3)P^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

No caso em que uma das superfícies mínimas tem gênero 0, por exemplo, se  $\gamma$  ou  $\mu$  é zero, então o conjunto das superfícies é dado por

$$\{S^\mu, P^{\mu-1}, T^{\mu-2}, 2P^{\mu-2}, 3P^{\mu-3}, 2T^{\mu-4}, 4P^{\mu-4}, \dots\}, \quad (6.24)$$

Pela Observação 6.8.2, o alfabeto é maximal nas modulações sobre mergulhos mínimos das classes de superfícies de mergulhos do grafo, conseqüentemente, o número do alfabeto maximal só depende do número de regiões do mergulho mínimo da classe de superfícies. Portanto, segue dos conjuntos em (6.23) e (6.24) que os alfabetos maximais das classes de superfícies de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} = \mathbb{A}(G) = \mathbb{A}(H). \quad (6.25)$$

Pela notação da Observação 6.8.4, o conjunto  $\{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}$  é ordenado, conseqüentemente, as igualdades em (6.25) resultam nas seguintes relações de igualdades

$$s_G = s_H = \overline{s}_G = \overline{s}_H = \mu \text{ e } c_G = c_H = \overline{c}_G = \overline{c}_H = \mu - 1. \quad (6.26)$$

Os outros 15 casos podem ser determinados de forma semelhante ao caso anterior. As validades das afirmações (6.23a) - (6.23d) do teorema seguem, portanto, da análise dos 16 casos. Por ser bastante extensa e enfadonha, a demonstração completa do teorema está disponível no Apêndice G. ■

**Corolário 6.8.6** *Se  $G$  e  $H$  possuem mergulhos mínimos maximais idênticos de  $\mu$  regiões, então os alfabetos maximais das famílias de superfícies de  $G$  e  $H$  satisfazem as relações de igualdades:*

(a) Se  $G_{m/\max} \equiv T^\gamma$  e  $H_{m/\max} \equiv T^\eta \wedge P^{2\eta}$ , ou  $G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma}$  e  $H_{m/\max} \equiv \eta T^\eta \wedge P^{2\eta}$ , então

$$s_G = s_H = \bar{s}_G = \bar{s}_H = \mu \text{ e } c_G = c_H = \bar{c}_G = \bar{c}_H = \mu - 1;$$

(b) Se  $G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma-1}$  e  $H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1}$ , ou  $G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma+1}$  e  $H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1}$ , então

$$\bar{s}_G = \bar{s}_H = \mu, \quad s_G = s_H = \bar{c}_G = \bar{c}_H = \mu - 1 \text{ e } c_G = c_H = \mu - 2;$$

(c) Se  $G_{m/\max} \equiv T^\gamma$  e  $H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1}$ , ou  $G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma}$  e  $H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1}$ , então

$$s_G = \bar{s}_G = \bar{s}_H = \mu, \quad c_G = \bar{c}_G = s_H = \bar{c}_H = \mu - 1 \text{ e } c_H = \mu - 2;$$

(d) Se  $G_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1}$  e  $H_{m/\max} \equiv T^\eta \wedge P^{2\eta}$ , ou  $G_{m/\max} \equiv P^{2\eta+1}$  e  $H_{m/\max} \equiv T^\eta \wedge P^{2\eta}$ , então

$$\bar{s}_G = s_H = \bar{s}_H = \mu, \quad s_G = \bar{c}_G = c_H = \bar{c}_H = \mu - 1 \text{ e } c_H = \mu - 2.$$

**Demonstração.** Pela demonstração do Teorema 6.8.5, vemos que as relações de igualdades seguem das seguintes condições: (a) segue de (A7.3b), ítem 2), (A7.6b) e (A7.7b); (b) segue das relações de igualdades em (A7.12b), (A7.13b), (A7.16b) e (A7.17b); (c) segue das relações de igualdades em (A7.4b), (A7.5b), (A7.8b) e (A7.9b) e; (d) segue das relações de igualdades em (A7.9b), (A7.10b), (A7.14b) e (A7.15b). ■

O 16 casos analisados na demonstração do Teorema 6.8.5 não tratam do mergulho mínimo maximal orientável da esfera, somente faz referência ao conjunto de superfícies em (6.2). Apesar dos resultados não serem diferentes do Corolário 6.8.6, o caso em que o mergulho mínimo maximal de um grafo encontra-se sobre a esfera merece ser discutido com maior atenção.

A diferença fundamental do mergulho mínimo maximal de um grafo  $G$  encontrar-se sobre a esfera  $S$ , em vez do  $\gamma$ -toro,  $\gamma T$ , é porque, na esfera, o mergulho mínimo maximal não-orientável de  $G$  só pode ser realizado sobre o plano projetivo  $P$ . No caso de  $\gamma T$ , com  $\gamma > 0$ , existem três opções para o mergulho mínimo maximal não-orientável:  $(2\gamma - 1)P$ ,  $2\gamma P$  e  $(2\gamma + 1)P$ . Então, para mergulhos mínimos máximos sobre a esfera, vale o resultado seguinte.

**Lema 6.8.7** Se  $M_{m/\max}G \equiv S$ , então o conjunto dos alfabetos associados as modulações QAMS's de  $G$  é dado por  $\mathbb{A}_G = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-2}\}$ .

**Demonstração.** De fato, os mergulhos mínimos maximais orientável e não-orientáveis possuem  $\mu$  e  $\mu - 1$  regiões. ■

**Teorema 6.8.8** Se  $M_{m/\max}G \equiv S$  e os mergulhos mínimos maximais de  $G$  e  $H$  são idênticos, então  $\mathbb{A}_G = \mathbb{A}_H$  se, e somente se,  $M_{m/\max}G \equiv S$ .

**Demonstração.** Se  $M_{m \max} G \equiv S$ , então, como foi visto pelo Lema 6.8.7, temos que  $\mathbb{A}_G = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-2}\}$ . Suponha que  $\mathbb{A}_H = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-2}\}$  e  $M_{m \max} H \not\equiv S$ , então  $M_{m \max} H \equiv \gamma T$ , logo  $\{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-2}\}$  é um dos conjuntos maximais do Teorema 6.8.5, o que é um absurdo. Portanto,  $\mathbb{A}_G = \mathbb{A}_H$ . A demonstração da recíproca é trivial. ■

Os resultados do Teorema 6.8.5, quando utilizado no processo de identificação dos alfabetos de modulações QAMS's podem identificar o alfabeto maximal, o conjunto de alfabetos e o número de alfabetos de ambos os grafos considerados. No Corolário 6.8.6, as condições de igualdades simplificam bastante o processo de identificação dos alfabetos maximais associados às modulações QAMS dos grafos envolvidos no processo.

Como exemplo, consideremos os casos dos grafos  $K_{4,4}$  e  $H'_{6,12}$ . Estes possuem mergulhos mínimos maximais idênticos compostos de 8 regiões, isto é,  $\mu = 8$ . Observe que os mergulhos mínimos maximais de  $K_{4,4}$  e  $H'_{6,12}$  são dados por

$$\begin{aligned} K_{4,4} &\hookrightarrow T^8 \text{ e } K_{4,4} \hookrightarrow 2P^8 \\ H'_{6,12} &\hookrightarrow S^8 \text{ e } H'_{6,12} \hookrightarrow P^7 \end{aligned}$$

portanto estamos nas condições da igualdade do Teorema 6.8.8, conseqüentemente, o conjunto dos alfabetos maximais de  $K_{4,4}$  e  $H'_{6,12}$  são dados por

$$\mathbb{A}_{K_{4,4}} = \{\mathbb{A}_8, \mathbb{A}_7, \overline{\mathbb{A}}_8, \overline{\mathbb{A}}_7\} \quad \text{e} \quad \mathbb{A}_{H'_{6,12}} = \{\mathbb{A}_8, \mathbb{A}_7, \overline{\mathbb{A}}_7, \overline{\mathbb{A}}_6\}.$$

Sendo assim, os alfabetos maximais de  $K_{4,4}$  e  $H'_{6,12}$  são distintos, apesar dos mergulhos mínimos maximais serem ambos orientáveis. Se ao invés de  $H'_{6,12} \hookrightarrow S^8$  tivéssemos  $H'_{6,12} \hookrightarrow T^8$ , teríamos, pela igualdade (6.24) do Teorema 6.8.5, a igualdade

$$\mathbb{A}_{K_{4,4}} = \mathbb{A}_{H'_{6,12}} = \{\mathbb{A}_8, \mathbb{A}_7, \overline{\mathbb{A}}_8, \overline{\mathbb{A}}_7\}.$$

Então, não devemos confundir os alfabetos maximais de mergulhos mínimos maximais sobre superfícies orientáveis do tipo  $S$  e do tipo  $\gamma T$ , com  $\gamma \geq 1$ .

Quanto aos conjuntos dos alfabetos de  $K_{4,4}$  e  $H'_{6,12}$ , estes são dados por

$$\mathbb{A}(K_{4,4}) = \mathbb{A}(H'_{6,12}) = \{\mathbb{A}_8, \mathbb{A}_7, \mathbb{A}_6, \mathbb{A}_5, \mathbb{A}_4, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2\},$$

ou seja, ambos são compostos de 7 alfabetos.

Podemos verificar rapidamente, que os dados apresentados acima estão de acordo com os resultados apresentados na Tabela 6.7.2.

## 6.9 Comentários Adicionais

Nas Seções 6.2-6.8 foram apresentados os dados essenciais dos elementos de imagem da TV digital no caso particular da transmissão da televisão em cores. A partir destes dados foi apresentada uma abordagem sobre o potencial dos alfabetos associados as modulações QAMS's, vindas dos mergulhos de grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$ , quando utilizados na codificação da luminância e da cor da televisão em cores.

O gráfico ilustrado na Figura 6.8.1 mostra uma síntese dos cálculos realizados, expressando exatamente a capacidade de compactação dos alfabetos maximais associados às famílias de modulações  $\Omega_s, \Omega_c, \bar{\Omega}_s$  e  $\bar{\Omega}_c$ , de cada um dos grafos analisados. No universo dos grafos, estes são considerados grafos relativamente pequenos, entretanto, os dados na Tabela 6.7.2 mostram que o comprimento da palavra código do elemento de imagem  $Z$  pode ser reduzido até 70%, caso utilizemos alfabetos maximais vindos dos grafos  $K_5$  e  $H_{8,12}$ . A taxa de redução máxima chega ao patamar de 40%, se os alfabetos maximais dos grafos  $K_{5,5}$  e  $H'_{6,12}$  forem utilizados.

A taxa de redução máxima do elemento de imagem  $Z$  depende, evidentemente, das taxas de reduções dos alfabetos  $X$  e  $Y$ . Pela Tabela 6.7.2 podemos constatar que, as taxas de reduções máximas no alfabeto  $X$ , variam de 71,4% a 42,9% e no alfabeto  $Y$ , a variação é de 66,6% a 33,3%. Considerando que o estudo foi realizado em grafos relativamente pequenos, vemos que é possível utilizar alfabetos de qualquer um dos grafos considerados, cujas taxas de reduções máximas são inferiores a 50%. Na verdade, podemos utilizar alfabetos com taxas de reduções até de 40%. Sendo assim, podemos afirmar que os resultados obtidos com os grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$  são bastante satisfatórios.

Os métodos utilizados neste trabalho não se limitam apenas a grafos pequenos. Em termos de identificação de modulações e alfabetos, os métodos podem identificar alfabetos maximais associados a modulações com taxas de reduções próximas de zero. Para isto, é suficiente tomar grafos com número de elemento suficientemente grande. Não precisa ser exageradamente grande para se obter excelentes resultados quanto à taxa de redução.

## 6.10 Modulação *Twisted* e a TV Digital

Nas seções anteriores deste capítulo foram apresentados dados referentes ao fator de compactação de dados referente ao uso de alfabetos maximais associados a modulações QAMS's. O objetivo é fazer este mesmo tipo de análise nas modulações *twisted*, quando estas são projetadas sobre mergulhos de grafos. Os grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$  continuaram sendo a nossa fonte de dados para a análise do potencial da compactação de dados das modulações *twisted* no uso da codificação da imagem da TV digital, quando trata-se do processo de transmissão para televisão em cores.

Vale ressaltar que, até o presente momento, os projetos de modulações *twisted* não levam em consideração os mergulhos de grafos. Apenas é utilizado a teoria das curvas sobre superfícies. Se uma superfície possui algum tipo de representação matemática, como forma paramétrica ou implícita, então são tomadas curvas sobre a mesma como sinais da modulação *twisted*. A idéia do mergulho de grafo como projeto de modulação *twisted* é proposta pela primeira vez neste trabalho.

A primeira questão é determinar a quantidade de sinais que se pode utilizar numa modulação *twisted* de um determinado grafo. Dado um grafo  $G\{p, q\}$ , até quantos sinais poderíamos projetar sobre  $G$  com padrões da modulação *twisted*? E em relação à modulação QAMS qual das duas apresentam o maior potencial de compactação de dados em um processo de transmissão da televisão em cores? Serão estas as principais questões a serem tratadas nas próximas seções.

### 6.10.1 Número de sinais da modulação *twisted* de um grafo

Como foi visto na Subseção 3.5.1, as modulações *twisted* estão definidas sobre curvas de uma superfície. Então, é natural que ao considerarmos um grafo  $G \{p, q\}$  mergulhado sobre uma superfície  $\Omega$ , temos  $q$  curvas distintas bem definidas sobre  $\Omega$  que podem ser utilizadas como sinais para uma modulação *twisted*. Podemos utilizar todas as curvas para projetos de sinais de uma modulação *twisted*? Podemos. No mínimo, temos que utilizar duas curvas, o que corresponderia a modulação binária.

Mas, por que é possível utilizar todas as curvas de um grafo mergulhado como sinais de uma modulação *twisted*? Bem, esta questão já foi comentada anteriormente no Capítulo 3, mas por ser uma questão crucial, voltamos a enfatizar que em um mergulho de grafo, as curvas tendem a ocupar todas as partes da superfície, possibilitando obter curvas afastadas, condição ideal para evitar a interferência intersimbólica em um processo de transmissão de sinais digitais. O problema da interferência só existe próximo ao vértice, neste caso, em um projeto da modulação *twisted*, as curvas correspondentes aos sinais devem preservar uma certa distância do vértice do grafo, com o objetivo de contornar o problema da interferência intersimbólica.

No caso do mergulho do grafo completo  $K_5$ , da Figura 3.5.1, podemos projetar uma modulação *twisted* sobre o toro, utilizando todas as curvas do grafo  $K_5$ , para obter uma modulação *twisted* com o número máximo de sinais (10 sinais), conforme o projeto de modulação *twisted* apresentado na Figura 6.10.1.

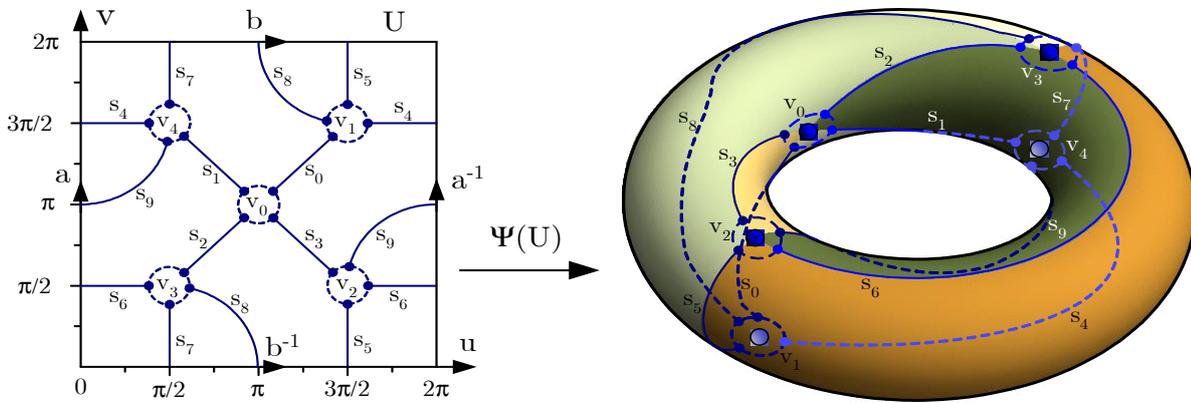


Figura 6.10.1: Projeto geométrico de modulação *twisted* sobre  $T$  vindo de  $K_5$

O projeto geométrico de modulação na Figura 6.10.1 corresponde a uma modulação *twisted* sobre o toro  $T$  vinda de um mergulho do grafo completo  $K_5$ , para uma constelação de 10 sinais. Cada sinal  $s_i$  do alfabeto  $\mathbb{A}_{10-Twi}(K_5) = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_9\}$  está definido sobre um lado  $e_{ij} = (v_i, v_j)$  de  $K_5$ . Em particular, os 10 sinais da modulação estão contidos sobre os seguintes lados

$$\begin{aligned}
 s_0 &\subset e_{01}, & s_1 &\subset e_{04}, & s_2 &\subset e_{03}, & s_3 &\subset e_{02}, & s_4 &\subset e_{14}, \\
 s_5 &\subset e_{12}, & s_6 &\subset e_{23}, & s_7 &\subset e_{34}, & s_8 &\subset e_{13}, & s_9 &\subset e_{24}.
 \end{aligned}$$

O projeto de modulação *twisted* da Figura 6.10.1 utiliza todas as curvas do grafo completo  $K_5$ , logo é a modulação *twisted* com o número máximo de sinais que se consegue através de mergulhos de  $K_5$ . Se o objetivo é diminuir a interferência intersimbólica, podemos restringir o número de sinais do alfabeto e obter modulações *twisted* sobre  $K_5$  para projetos de constelações com 2 até 10 sinais. Veja, por exemplo, que modulações binárias utilizando alfabetos tais como,  $\{s_2, s_4\}$ ,  $\{s_3, s_4\}$ ,  $\{s_0, s_6\}$  e  $\{s_6, s_8\}$ , seriam sinais definidas sobre curvas que não possuem vértices em comuns. Podemos observar, diretamente da Figura 6.10.1, que as curvas de qualquer um destes alfabetos binários encontram-se bastante afastadas, situação ideal para diminuir a interferência intersimbólica.

Colocadas as condições iniciais sobre o projeto da modulação *twisted* sobre mergulhos de grafos, podemos então defini-la de forma precisa.

**Definição 6.10.1** *Seja  $G \{p, q\}$  um grafo definido sobre  $p$ -vértices e  $q$ -lados, diremos que  $M$ -Twi é uma modulação *twisted* sobre  $G$  para uma constelação de  $M$ -sinais, se cada sinal de  $M$ -Twi encontra-se sobre uma curva de um mergulho de 2-células de  $G$ .*

Sobre uma mergulho  $G \{p, q\} \hookrightarrow \Omega$  é possível projetar uma modulação *twisted* para  $M$  sinais,  $M$ -Twi, com  $2 \leq M \leq q$  em todas as superfícies nas quais o grafo  $G$  possui mergulhos de 2-células. As modulações QAMS's também podem ser projetadas sobre mergulhos de  $G$ , a diferença é o número de sinais máximos nos dois tipos de modulações, como mostra a próxima proposição.

**Proposição 6.10.2** *Se as modulações  $N$ -QAMS e  $M$ -Twi possuem números de sinais máximos, então  $N < M$ .*

**Demonstração.** Com efeito, o número máximo de regiões de um mergulho de um grafo  $G$  é  $2q/3$ , portanto, são verdadeiras as seguintes desigualdades

$$M \leq 2q/3 < 2q/2 = q = N.$$

Logo,  $N < M$ , o que prova a afirmação. ■

Em relação às modulações QAMS's e *twisted* vindo de um mesmo grafo  $G \{p, q\}$ , a Proposição 6.10.2 mostra que se pode atingir uma taxa de redução maior nos alfabetos de codificação da informação, em um processo de transmissão digital, quando optamos pelas modulações *twisted*.

No caso dos grafos considerados neste trabalho, a Tabela 6.10.1 mostra os números máximos de sinais das constelações que são possíveis projetar nas modulações QAMS's e *twisted*, através de mergulhos dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$ .

Alfabetos Maximais	$K_5 \{5, 10\}$	$K_{4,4} \{8, 16\}$	$H_{8,12}$	$H'_{6,12}$
QAMS	5	8	6	8
<i>Twisted</i>	10	16	12	12

Tabela 6.10.1: Número máximo de sinais das modulações QAMS's e *twisted*

Podemos constatar nos dados da Tabela 6.10.1, que em cada caso dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$  o número de elementos dos alfabetos maximais da modulação *twisted* é superior ao do alfabeto maximal da modulação QAMS. Vemos ainda que, para estes quatro grafos considerados, o  $K_5$  apresenta o menor dos alfabetos maximais associados às modulações *twisted*, com 10 elementos e, mesmo assim, ainda supera o maior dos alfabetos maximais associados as modulações QAMS's, o qual é formado por 8 elementos, nos grafos  $K_{4,4}$  e  $H'_{6,12}$ . Isto demonstra que o potencial das modulações *twisted*, em relação ao fator de compacticidade, é bem superior ao das modulações QAMS's.

Quanto a taxa de redução dos alfabetos maximais associados às modulações *twisted*, no uso da codificação dos elementos de imagens da televisão em cores, haveria uma redução expressiva em relação às modulações QAMS's? Começemos este estudo calculando o comprimento mínimo das sequências  $X, Y$  e  $Z$ , nos casos em que alfabetos com 10, 12 e 16 símbolos, isto é, quando  $\mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{12}$  e  $\mathbb{Z}_{16}$  são utilizados para codificar a luminância  $X$  e a informação de cor  $Y$ . Pela Seção 6.7, devemos considerar as seguintes relações

$$\begin{aligned} 10^2 &= 100 \leq 317 \leq 1000 = 10^3 & \text{e} & 10^0 \leq 7 \leq 10^1 \\ 12^2 &= 144 \leq 317 \leq 1728 = 12^3 & \text{e} & 12^0 \leq 7 \leq 12^1 \\ 16^2 &= 256 \leq 317 \leq 4096 = 16^3 & \text{e} & 12^0 \leq 7 \leq 12^1. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, se usarmos os alfabetos  $\mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{12}$  e  $\mathbb{Z}_{16}$  nas codificações dos 317 elementos de luminâncias e os 7 elementos de cores, devemos utilizar sequências de comprimentos 2 para  $X$  e de comprimento 1 para  $Y$ . Assim, o elemento de imagem será codificado com uma sequência  $Z$  de comprimento 3. Como a sequência de comprimento 1 é o limite de compactação, então o fator de compacticidade máxima é atingido na codificação de  $X$  e difere somente de um elemento em  $Y$ .

A análise acima vem a confirmar o comentário anterior de que não é preciso utilizar grandes grafos para atingir o fator de compacticidade máxima do comprimento das sub-sequências de codificações  $X$  e  $Y$ , dos elementos de imagem da televisão em cores. Todos os grafos considerados neste trabalho apresentam altíssimas taxas de compactação da codificação, caso utilizemos os alfabetos maximais associados às modulações *twisted*.

### 6.10.2 Fator de compacticidade nas modulações *twisted*

Como vimos anteriormente, a modulação *twisted* projetada a partir de um grafo  $G \{p, q\}$  utiliza, como sinais, curvas sobre uma superfície  $\Omega$  vinda de um mergulho de  $G$ . Como  $G \{p, q\}$  possui  $q$  curvas (ou lados), a modulação *twisted* que possui um número máximo de sinais de  $G$  é do tipo  $q$ -Twi e, portanto, o alfabeto associado é da forma  $\mathbb{A}_q$ .

Certamente que  $\mathbb{A}_q$  é o alfabeto associado a modulação *twisted* de um grafo  $G$  de capacidade máxima de redução do comprimento das palavras códigos. Está claro, então, que só serão analisados os alfabetos maximais, porém devemos ter em mente que se  $\mathbb{A}_q$  é o alfabeto maximal da modulação *twisted* do grafo  $G$ , então o conjunto de alfabetos, denotado por  $\mathbb{A}_T(G)$ , é dado por

$$\mathbb{A}_T(G) = \{\mathbb{A}_q, \mathbb{A}_{q-1}, \mathbb{A}_{q-2}, \dots, \mathbb{A}_4, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2\}.$$

De forma análoga, a mesma afirmação acima é verdadeira no caso dos alfabetos associados às modulações QAMS's de um grafo  $G$ .

Utilizando a fórmula da taxa de redução em (6.19), determinamos, na Tabela 6.10.2, as taxas de reduções dos alfabetos maximais dos grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H_{6,12}$ , quando utilizados na codificação das sequências  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  de codificação dos elementos de imagem da televisão em cores. Todos os resultados encontrados nestas reduções dos alfabetos maximais foram realizadas desconsiderando ruídos.

No sentido de reduzir a notação, os índices  $Q$  e  $T$  utilizados nas notações referem-se as modulações QAMS's e *twisted*, respectivamente. Escrevemos ainda, por exemplo,  $R_{X_Q}$  e  $R_{X_T}$  para indicar as taxas de reduções dos comprimentos das palavras  $X_Q$  e  $X_T$  associados às respectivas modulações QAMS's e *twisted*.

	$K_5$				$K_{4,4}$				$H_{8,12}$				$H'_{6,12}$			
	$\mathbb{A}_s$	$\mathbb{A}_c$	$\overline{\mathbb{A}}_s$	$\overline{\mathbb{A}}_c$												
$\mathbb{A}_Q$	5	4	6	5	8	7	7	6	6	5	5	4	8	7	7	6
$\mathbb{A}_T$	10	10	10	10	16	16	16	16	12	12	12	12	12	12	12	12
$X_Q$	4	5	4	4	3	3	3	4	4	4	4	5	3	3	3	4
$X_T$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$R_{X_Q}$	57, 1	71, 4	71, 4	57, 1	42, 9	42, 9	42, 9	71, 4	71, 4	57, 1	57, 1	71, 4	42, 9	42, 9	42, 9	71, 4
$R_{X_T}$	28, 6	28, 6	28, 6	28, 6	28, 6	28, 6	28, 6	28, 6	28, 6	28, 6	28, 6	28, 6	28, 6	28, 6	28, 6	28, 6
$Y_Q$	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	2
$Y_T$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$R_{Y_Q}$	66, 7	66, 7	66, 7	66, 7	33, 3	33, 3	33, 3	66, 7	66, 7	66, 7	66, 7	66, 7	33, 3	33, 3	33, 3	66, 7
$R_{Y_T}$	33, 3	33, 3	33, 3	33, 3	33, 3	33, 3	33, 3	33, 3	33, 3	33, 3	33, 3	33, 3	33, 3	33, 3	33, 3	33, 3
$Z_Q$	6	7	6	6	4	4	4	6	6	6	6	7	4	4	4	6
$Z_T$	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
$R_{Z_Q}$	60	70	60	60	40	40	40	60	60	60	60	70	40	40	40	60
$R_{Z_T}$	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabela 6.10.2: Reduções máximas de  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  em alfabetos de  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$

Com o objetivo de facilitar a análise de resultados preservamos, na Tabela 6.10.2, os dados referentes aos alfabetos associados as modulações QAMS's contidos na Tabela 6.7.2.

Quanto aos alfabetos  $X$  e  $Z$ , podemos observar na Tabela 6.10.2, que em todas as famílias dos grafos considerados houve redução no comprimento das palavras códigos e, portanto, ocorreu diminuição da taxa de redução. Somente entre as famílias  $\mathbb{A}_s$  (conjunto dos alfabetos sobre as modulações em superfícies orientáveis sem bordo),  $\mathbb{A}_c$  (conjunto dos alfabetos sobre as modulações em superfícies orientáveis com bordo) e  $\overline{\mathbb{A}}_s$  (conjunto dos alfabetos sobre as modulações em superfícies não-orientáveis sem bordo) dos grafo  $K_{4,4}$  e  $H'_{6,12}$  ocorreram igualdades entre os comprimentos das palavras códigos dos alfabetos  $Y_Q$  e  $Y_T$ , enquanto nos demais casos, os comprimentos de  $Y_T$  são inferiores aos de  $Y_Q$ .

Desta forma, podemos observar que constantemente ocorre diminuição da taxa de redução nos alfabetos maximais de  $X$  e  $Z$ , enquanto que é possível, porém não necessário, haver igualdades em alguns casos do alfabeto  $Y$ .

Observe ainda que os comprimentos dos alfabetos maximais de  $X_T, Y_T$  e  $Z_T$  são constantes, em todos os casos analisados. Obviamente, esta não é uma propriedade geral, apenas para os quatro tipos de grafos considerados neste trabalho.

No gráfico da Figura 6.10.2, ilustramos as taxas de reduções dos alfabetos associados às modulações QAMS e *twisted* dos grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$ .

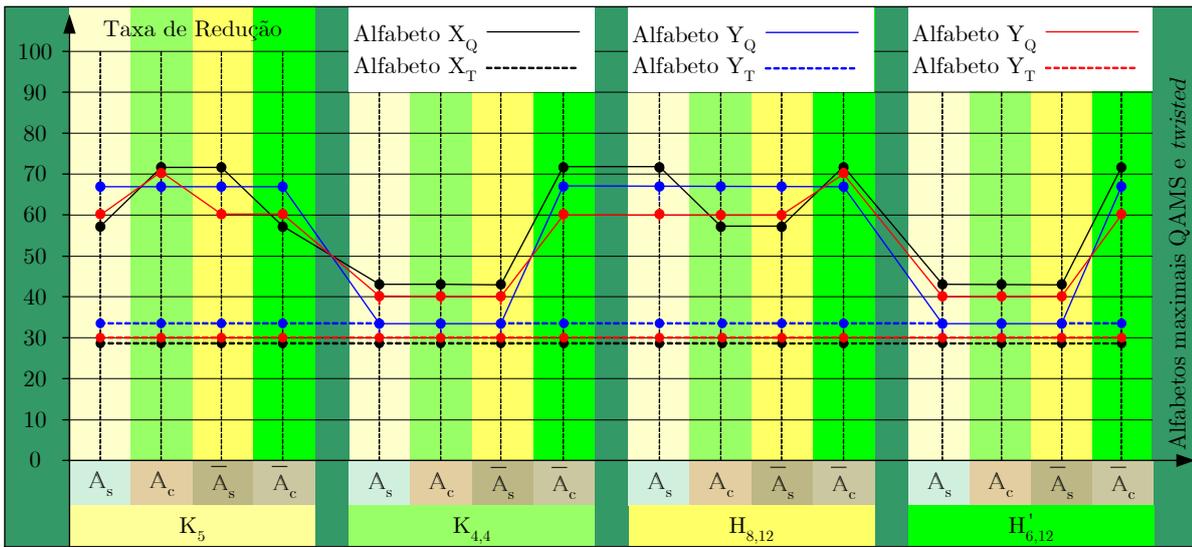


Figura 6.10.2: Gráfico das taxas de reduções dos alfabetos maximais QAMS e *twisted*

No gráfico da Figura 6.10.2, vemos que as taxas de reduções dos alfabetos máximos associados as modulações *twisted* utilizados nas codificações das sequências  $X, Y$  e  $Z$ , além de constantes, encontram-se muito próximas. A taxa de redução do alfabeto maximal de  $Y_T$  atingiu o seu limite de compactação de dados, como também ocorreu em algumas famílias das modulações QAMS do alfabeto  $Y_Q$ . Em geral, as taxas de reduções das modulações *twisted* são inferiores às taxas das modulações QAMS's. Em relação aos alfabetos  $X$  e  $Z$ , estes atingem as capacidades máximas de compactação das sequência de codificação quando a sequência  $X$  é formada por um elemento e  $Z$  por 2 elementos. Nestes casos as taxas de reduções máximas são dadas por

$$R_{\max}(X) = 14,3\% \quad \text{e} \quad R_{\max}(Y) = 20\%.$$

Os alfabetos  $X$  e  $Z$  associados as modulações *twisted* vindas dos grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$  atingiram taxas de reduções máximas de 28,6% e 30%, respectivamente. Só não atingiram o máximo por terem um elemento a mais; portanto, chegaram bem próximas do seu limite máximo de redução.

Lembramos que o objetivo deste capítulo é determinar a capacidade de compactação dos alfabetos associados às modulações QAMS's e *twisted* vindas dos grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e

$H'_{6,12}$ , quando aplicados na codificação dos elementos de imagem da televisão em cores. Para estes grafos, disponibilizamos, na Tabela 6.10.2, todos as taxas de reduções máximas.

De um modo geral, as relações entre as taxas de reduções máximas entre alfabetos associados as modulações QAMS's e *twisted* são expressadas pelas desigualdades estabelecidas na próxima afirmação.

**Proposição 6.10.3** *Sejam  $R_{W_M}$  e  $\text{Var } \bar{R}_{W_M}$  as respectivas taxa de redução e a variação da taxa de redução média do alfabeto  $W$  associado à modulação  $M$  de  $G \in \{K_5, K_{4,4}, H_{8,12}, H'_{6,12}\}$ . Então, valem as seguintes relações de desigualdades*

$$\text{Var } \bar{R}_{Z_Q} < \text{Var } \bar{R}_{Y_Q} < \text{Var } \bar{R}_{X_Q} \quad (6.27a)$$

$$R_{Y_T} < R_{Z_T} < R_{X_T} \quad (6.27b)$$

$$R_{X_T} < R_{X_Q}, R_{Y_T} \leq R_{X_Q} \text{ e } R_{Z_T} \leq R_{Z_Q}. \quad (6.27c)$$

**Demonstração.** As desigualdades entre as taxas de reduções médias em (6.27a) corresponde ao Teorema 6.8.3 e as desigualdades (6.27b) e (6.27c) são consequências dos dados obtidos na Tabela 6.10.2. ■

As desigualdades (6.27a)-(6.27c) mostram os comportamentos das taxas de variações dos alfabetos maximais utilizados nas codificações das sequência  $X, Y$  e  $Z$  dos elementos de imagem da televisão em cores. As desigualdades (6.27a) e (6.27c) mostram as relações entre os alfabetos associados a um mesmo tipo de modulação e as desigualdades em (6.27c), exibem as relações entre os alfabetos maximais associados aos dois tipos de modulações. Embora sejam dados extraídos dos grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$ , as relações são verdadeiras para qualquer outro tipo de grafo.

## 6.11 Performances das Modulações *Twisted*

Neste capítulo, foi apresentado um estudo sobre o uso dos alfabetos associados às modulações QAMS's e *twisted* vindas de mergulhos dos grafos  $K_5, K_{4,4}, H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$ . No universo dos grafos, esta é uma amostra bastante reduzida de grafos relativamente pequenos; entretanto, já pudemos constatar o potencial da capacidade de compactação destes grafos, quanto ao comprimento das sequência de codificação dos elementos de imagem da televisão em cores. Apesar da abordagem ser restrita ao estudo da imagem da televisão em cores, o efeito da compactação de dados aplica-se em todo e qualquer sistema de TV digital.

O estudo foi realizado somente quanto a codificação da fonte, onde as sequências de informação não apresentam nenhum tipo redundância, situação ideal para a codificação de fonte. A codificação de canal introduz *bits* de paridades, nas sequências do código fonte, com o objetivo de corrigir erros introduzidos pelo ruído no canal. A ausência de redundância do código fonte visa diminuir o comprimento das palavras da codificação do canal. Quanto menor for o comprimento da palavra-código menor é o tempo de processamento, fator importante relacionado com a capacidade do canal e a diminuição da diferença do tempo entre a transmissão da informação e a recepção pelo usuário.

### 6.11.1 Desempenho dos alfabetos associados às QAMS's

Em relação ao desempenho dos alfabetos associados às modulações QAMS's, existem dois casos a serem analisados. Em primeiro lugar, é possível avaliar o desempenho dos alfabetos que pertencem às classes de superfícies sem bordos, neste caso o invariante a ser analisado é o gênero da superfície. Também é possível avaliar o desempenho de alfabetos que se encontram em uma mesma classe de superfícies com bordos, caso em que o invariante analisado é o número de componentes de bordos, uma vez que o gênero da superfície é constante, no conjunto das classes de superfícies com bordos geradas por um mergulho sem bordo sobre a superfície  $\Omega^\mu$ .

#### Alfabetos associados às modulações QAMS's em superfícies sem bordos

Nas modulações QAMS's, o alfabeto maximal  $\mathbb{A}_\mu$  vêm de mergulhos mínimos do  $G$ . Estes possuem capacidade máxima de compactação da informação, porém,  $G$  possui ainda os alfabetos  $\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \mathbb{A}_{\mu-3}, \dots, \mathbb{A}_4, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2$ . Então, podemos optar por qualquer um destes alfabetos. Ao escolhermos pelo alfabeto  $\mathbb{A}_{k-1}$  em vez de  $\mathbb{A}_k$ , pode, ou não, ocorrer o aumento de um elemento no comprimento da sequência do código fonte. Se não ocorrer o acréscimo, ótimo, pois estamos codificando com um alfabeto que possui um número menor de símbolos que preserva o comprimento da sequência do código fonte. Diminuir o número de elementos do alfabeto pode implicar na diminuição do comprimento da sequência codificada com o alfabeto binário, isto é uma vantagem. Também pode melhorar o aspecto da interferência intersimbólica, o que é outra vantagem. Por outro lado, a modulação encontra-se em uma superfície de gênero maior, outra grande vantagem, como foi mostrado em [17].

Na condição em que não há diferença do comprimento da sequência de codificação do código fonte, quando são usados os alfabetos  $\mathbb{A}_{k-1}$  em vez de  $\mathbb{A}_k$ , associados à modulações QAMS's, há portanto três vantagens a serem consideradas, se a escolha for  $\mathbb{A}_{k-1}$ ; pode haver diminuição do número de elementos do alfabeto na representação binária equivalente, melhora do aspecto da interferência intersimbólica e modulação sobre uma superfície de gênero maior. A primeira condição pode implicar em menor comprimento da codificação binária equivalente, e as duas últimas condições, em melhor performance da modulação. Portanto, não precisamos recorrer sempre ao alfabeto maximal de  $G$  para obtermos performance máxima do sistema, as vezes este pode ser obtido com alfabetos não maximais. Poder optar por uma constelação de sinais menor e uma superfície de gênero maior, são fatores que pesam bastante na eficiência da modulação. Sob este aspecto, a escolha ideal seria pelo alfabeto binário  $\mathbb{A}_2$ , o mesmo está associado a uma modulação vinda de um mergulho sobre a superfície de maior gênero, dentre as superfícies associadas aos alfabetos de  $G$ ,  $\mathbb{A}(G) = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \dots, \mathbb{A}_4, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2\}$ .

A análise acima aponta as vantagens dos alfabetos associados à modulações QAMS's, quando se trata de escolher alfabetos com um número menor de elementos e sobre superfícies, cuja variação ocorre no gênero da superfície. Outro invariante topológico que podemos considerar é o número de bordos. Como seria a melhor opção de escolha para alfabetos associados à modulações QAMS's que se encontram sobre superfícies com bordos?

### Alfabetos associados às modulações QAMS's em superfícies com bordos

Como foi visto no Capítulo 4, cada classe de mergulho de um grafo  $G$  sobre superfície sem bordo  $\overline{\Omega}^k$  gera uma família de mergulhos em superfícies com bordos,

$$\overline{\Omega}^k = \{\Omega^k, \Omega_1^{k-1}, \Omega_2^{k-2}, \dots, \Omega_t^{k-t}, \dots, \Omega_{k-2}^2, \Omega_{k-1}^1, \Omega_k^0\}. \quad (6.28)$$

No conjunto  $\overline{\Omega}^k$  das superfícies com bordos gerados pelo mergulho sem bordo sobre  $\overline{\Omega}^k$ , escrevemos  $\Omega_t^{k-t}$  para indicar o mergulho  $G \hookrightarrow \Omega_t \equiv \cup_{i=1}^{k-t} R_{\alpha_i}^i$ , isto é, sobre uma superfície com  $t$  componentes de bordos,  $\Omega_t$ , obtidos através da operação de *exérese*<sup>1</sup> introduzida por Lima-Palazzo [?], sobre  $t$  regiões do mergulho  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$ . O termo *exérese* foi introduzido posteriormente por Lima-Luana [15].

No caso do conjunto das classes de mergulhos  $\overline{\Omega}^k$  em (6.28), os alfabetos associados à modulações QAMS's sobre superfícies com bordos são

$$\mathbb{A}(\overline{\Omega}_\eta^k) = \{\mathbb{A}_{k-1}, \mathbb{A}_{k-2}, \mathbb{A}_{k-3}, \dots, \mathbb{A}_4, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2\}. \quad (6.29)$$

Vimos que pode ser uma vantagem optar pelo alfabeto  $\mathbb{A}_{s-1}$  em vez de  $\mathbb{A}_s$ . No caso dos alfabetos em (6.29), associados à classe de modulações com bordos do mergulho  $\Omega^k$ ,  $\mathbb{A}_s$  encontra-se em um mergulho sobre uma superfície homeomorfa a  $\Omega$  com  $t$  componentes de bordos. Então, a diferença entre os alfabetos  $\mathbb{A}_{s-1}$  em  $\mathbb{A}_s$  são:  $\mathbb{A}_{s-1}$  pode apresentar um número de elementos menor na representação binária equivalente, diminuir a interferência intersimbólica e aumentar o número de componentes de bordo; se  $\mathbb{A}_s$  está em uma superfície com  $t$  componentes de bordos, então  $\mathbb{A}_{s-1}$  encontra-se sobre uma superfície com  $t+1$  bordos.

Sabemos avaliar a diferença entre o número de elementos do alfabeto e o aspecto da interferência intersimbólica, mas não existem informações precisas sobre a diferença de componentes de bordos. Presume-se que a modulação mais eficiente é a que encontra-se na superfície com um número de componentes de bordos maior. Assim, a escolha melhor seria pelo alfabeto  $\mathbb{A}_{s-1}$ , em vez de  $\mathbb{A}_s$ . Novamente, teríamos uma conclusão idêntica ao caso dos alfabeto associados as modulações dos conjuntos das superfícies sem bordos, ou seja, a escolha ideal seria pelo alfabeto binário  $\mathbb{A}_2$ , mas haveria perda no aspecto da compactação de dados. Portanto, com relação a este aspecto, o alfabeto maximal  $\mathbb{A}_{k-1}$  seria o de melhor desempenho, dentre os associados às superfícies com bordos de  $\overline{\Omega}^k$ .

#### 6.11.2 Desempenho dos alfabetos associados às modulações *twisted*

De modo análogo aos casos considerados nas modulações QAMS's, serão analisadas as variações de desempenho de alfabetos associados às classes de modulações em superfícies sem bordos e nas classes de superfícies com bordos geradas por um mergulho sobre a superfície  $\Omega^k$ .

<sup>1</sup>A operação de *exérese* em  $t$  regiões de um mergulho de um grafo  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$ , consiste em eliminar o conjunto dos pontos interiores de  $t$  regiões de  $G \hookrightarrow \Omega$ , para obter um mergulho  $G \hookrightarrow \Omega_t \equiv \cup_{i=1}^{k-t} R_{\alpha_i}^i$ , isto é, sobre uma superfície homeomorfa a  $\Omega$  com  $t$  componentes de bordos, cuja partição é composta por  $k-t$  regiões.

### Alfabetos associados às modulações twisted em superfícies sem bordos

O número de elementos de um alfabeto associado à modulações *twisted* sobre um mergulho de um grafo  $G(p, q)$  só depende de  $q$ , pois os sinais nas modulações *twisted* são curvas sobre uma superfície, neste caso, a superfície sobre a qual  $G$  encontra-se mergulhada. Portanto, sobre qualquer superfície  $\Omega$  pertencente ao conjunto das superfícies para o mergulho de  $G$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(G) = \{ & \gamma T^\mu, (\gamma + 1) T^{\mu-2}, \dots, \gamma_{M-2} T^5, \gamma_{M-1} T^3, \gamma_M T^1 \} \\ & \cup \{ \bar{\gamma} P^\eta, (\bar{\gamma} + 1) P^{\eta-1}, \dots, \gamma_{M-2} T^3, \bar{\gamma}_{M-1} P^2, \bar{\gamma}_M P^1 \}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

é possível projetar uma modulação *twisted* para uma constelação de  $q$  sinais, independentemente do gênero e da orientabilidade da superfície. Mas, como foi comentado na Seção 6.10.1, podemos ainda projetar modulações *twisted* para constelações de até 2 sinais. Consequentemente, para qualquer superfície  $\Omega \in \mathbb{S}(G)$  o conjunto dos alfabetos associados às modulações *twisted* de  $G$  sobre  $\Omega$  é dado por

$$\mathbb{A}(\Omega) = \{ \mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_{q-1}, \mathbb{Z}_{q-2}, \dots, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2 \}. \quad (6.31)$$

A conclusão, portanto, é que, em relação a aspecto da compactação de dados, os alfabetos associados as modulações *twisted* apresentam os mesmos desempenhos em todas as superfícies de  $\mathbb{S}(G)$  relacionadas em (6.30).

**Proposição 6.11.1** *Todo alfabeto  $\mathbb{Z}_\alpha$ , com  $2 \leq \alpha \leq q$ , pode ser projetado em qualquer superfície  $\Omega$  de  $\mathbb{S}(G)$ .*

**Demonstração.** De fato, todo mergulho de  $G$  sobre  $\Omega \in \mathbb{S}(G)$  contém  $q$  curvas, logo podemos projetar, sobre  $\Omega$ , todos os alfabetos do conjunto  $\mathbb{A}(\Omega)$  dado na igualdade (6.31).

■

Segue, da Proposição 6.11.1, que ao optarmos pelo alfabeto  $\mathbb{A}_{s-1}$ , em vez de  $\mathbb{A}_s$ , sobre uma mesma superfície  $\Omega$  de  $\mathbb{S}(G)$ , o ganho no desempenho da modulação resulta somente do fator de diminuição intersimbólica e poderá ocorrer o ganho da compactação de dados do alfabeto binário equivalente. Para obtermos ganho também na eficiência da modulação relacionado ao gênero da superfície, devemos tomar  $\mathbb{A}_s$  em  $g\Omega$  e  $\mathbb{A}_{s-1}$  em  $h\Omega$  tal que  $g < h$ . Neste caso, o alfabeto com o maior ganho de modulação é o alfabeto binário  $\mathbb{Z}_2$  da modulação  $\gamma_M\Omega$ , onde  $\gamma_M$  é o gênero máximo da superfície  $\Omega$ , a qual pode ser orientável ou não-orientável.

### Alfabetos associados às modulações twisted em superfícies com bordos

Nas superfícies com bordos, a identificação do conjunto dos alfabetos associados a modulação *twisted* sobre uma determinada superfície não é tão simples, como no caso da superfície sem bordo. Ao aplicarmos a operação de exérese em uma determinada região  $R_\alpha$  de um mergulho de  $G$  sobre uma superfície  $\Omega$ , lados de  $R_\alpha$  podem ficar completamente isolados. A questão é que lados isolados são considerados curvas do espaço euclidiano tridimensional, se a superfície for orientável, ou do espaço euclidiano de dimensão 4, se a superfície for não-orientável. Neste caso, se  $\lambda$  é a curva isolada e considerada como sendo um sinal, o ruído seria estimado usando pontos do interior de  $R_\alpha$ . Mas, o interior de  $R_\alpha$  não existe mais pela

operação de exérese. Então, ocorre esta contradição ao considerarmos um lado isolado de um grafo como um sinal de uma modulação *twisted*. O que fazer então? Considerar ou não os lados isolados de superfícies com bordos como sinais da modulação *twisted*?

Supondo que um lado isolado de um mergulho com bordo seja um sinal de uma modulação *twisted*, a análise de desempenho é idêntica ao caso da modulação com bordo. Então, analisemos o caso em que os sinais da modulação *twisted* sobre superfícies com bordos não vem de curvas isoladas.

Curvas isoladas ocorrem em mergulhos sobre superfícies com bordos sempre que uma região  $R_\alpha$ , que sofreu a ação da operação de exérese, é um emaranhado linear. Por exemplo, se o grau do emaranhado linear de  $R_\alpha$  é  $m$ , então a superfície com bordo herda os  $m$  lados isolados de  $R_\alpha$ . Utilizando a notação da Definição 2.4.6, definiremos uma modulação *twisted* sobre superfícies com bordos considerando as restrições dos emaranhados lineares.

**Definição 6.11.2** *Sejam  $G\{p, q\} \hookrightarrow \Omega_b \equiv \cup_{i=1}^{k-b} R_{\alpha_i}$  um mergulho com  $b$  bordos e  $\sigma_b$  o grau dos emaranhados lineares das  $b$  regiões que sofreram a ação da operação de exérese. Chamaremos de modulação *twisted* sobre  $\Omega_b$  a modulação compostas pelas  $k - \sigma_b$  curvas não isoladas do mergulho de  $G$  sobre  $\Omega_b$ .*

Como consequência da Definição 6.11.2, segue que  $\mathbb{A}_{k-\sigma_b}$  é alfabeto maximal associado à modulação *twisted*. Além do mais, de modo análogo ao caso sem bordo, podemos projetar modulações sobre um mergulho com bordo com até 2 sinais; sendo assim, o conjunto dos alfabetos associados às modulações *twisted* sobre a superfície com bordo  $\Omega_b$  é dado por

$$\mathbb{A}(\Omega_b) = \{\mathbb{A}_{k-\sigma_b}, \mathbb{A}_{k-\sigma_b-1}, \mathbb{A}_{k-\sigma_b-2}, \dots, \mathbb{A}_5, \mathbb{A}_4, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2\}. \quad (6.32)$$

Para evitar uma discussão prolongada, não iremos nos ater às particularidades dos mergulhos com bordos, apenas analisar, superficialmente, a performance das modulações considerando que o  $\mathbb{A}(\Omega_b)$ , em (6.32), é o conjunto de alfabetos associados às modulações *twisted* sobre a superfície com bordo  $\Omega_b$ . No conjunto  $\mathbb{A}(\Omega_b)$ , pode haver ganho em relação à capacidade de compactação da sequência binária equivalente e quanto a diminuição intersimbólica, quando  $\mathbb{A}_s$  é escolhido, em vez de  $\mathbb{A}_t$  com  $r < s$ . Como foi visto anteriormente, é evidente que, nas condição  $r < s$ ,  $\mathbb{A}_t$  e  $\mathbb{A}_s$  encontram-se respectivamente sobre superfícies  $\Omega_b$  e  $\Omega_c$  com  $b < c$ , então a performance de  $\mathbb{A}_s$  é superior a de  $\mathbb{A}_t$ , isto é, tanto pode ocorrer ganho em relação a compactação da sequência binária equivalente, quanto ao desempenho da modulação relativos aos aspectos da diminuição intersimbólica e do aumento do gênero da superfície.

A análise acima torna claro que os desempenhos das modulações *twisted* dependem basicamente de três invariantes topológicos: a quantidade de sinal, o gênero da superfície e o número de componentes de bordos.

Dados os alfabetos  $\mathbb{A}_t$  e  $\mathbb{A}_s$ , um elemento de  $\mathbb{A}_s$  tem representação binária menor ou igual a um elemento de  $\mathbb{A}_t$ , sempre que  $s < t$ . Por exemplo, as representações binárias dos elementos de  $\mathbb{A}_6$ ,  $\mathbb{A}_7$  e  $\mathbb{A}_{10}$  são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_6 &= \{000, 001, 010, 011, 100, 101\} \\ \mathbb{A}_7 &= \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110\} \\ \mathbb{A}_{10} &= \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001\}. \end{aligned}$$

Então, os elementos de  $\mathbb{A}_6$  e  $\mathbb{A}_7$  têm representações binárias com sequências de comprimento 3. Denotando o número de elementos da representação binária do alfabeto  $\mathbb{A}$  como sendo o grau de compacticidade do alfabeto  $\mathbb{A}$ ,  $c(\mathbb{A})$ , constatamos que

$$c(\mathbb{A}_6) = c(\mathbb{A}_7) = 3 < 4 = c(10).$$

Estes exemplos mostram que alfabetos consecutivos podem ser representados com alfabetos binários com sequência de mesmo comprimento.

**Proposição 6.11.3** *Sejam  $\mathbb{A}_r$  e  $\mathbb{A}_s$  alfabetos associados a modulações twisted e seja  $g\Omega_b$  uma superfície de gênero  $g$  com  $b$  componentes de bordos. Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

$$s \leq r \Rightarrow c(\mathbb{A}_s) \leq c(\mathbb{A}_r) \tag{6.33a}$$

$$g_1 < g_2 \Rightarrow f(g_1\Omega_b) < f(g_2\Omega_b) \tag{6.33b}$$

$$b_1 < b_2 \Rightarrow f(g\Omega_{b_1}) < f(g\Omega_{b_2}). \tag{6.33c}$$

**Demonstração.** A implicação (6.33a) é fácil de ser comprovada. As implicações (6.33b) e (6.33c) já foram discutidas exhaustivamente em [14] e no Capítulo 3. Não há provas matemáticas concretas destas afirmações. Há fortes justificativas destas implicações baseadas em casos particulares e na intuição. Portanto, a proposição trata somente de uma conjectura. ■

A Proposição 6.11.3 contém as condições essenciais para analisar o desempenho das modulações. Os alfabetos estão associados às modulações, conseqüentemente, as implicações (6.33a)-(6.33c) resumem todas as condições que permitem avaliar os desempenhos das modulações e, portanto, dos alfabetos associados.

Uma importante questão a ser tratada seria comparar as eficiências das duas classes de modulações sobre superfícies analisadas neste trabalho. Isto é possível através de simulações. Por enquanto não há como saber quais das modulações são mais eficientes, se a QAMS ou se *twisted*. Colocamos todas as informações necessárias que permitem desenvolver algoritmos e testar a eficiências destas modulações. Fica aqui a motivação para analisar, futuramente, as eficiências das modulações QAMS e *twisted*.

O objetivo deste trabalho é propor a construção de modulações QAMS's e *twisted* sobre superfícies, a partir de mergulhos de grafos e avaliar o desempenho destas modulações em relação à capacidade de compactação de dados, quando utilizadas no processo de transmissão da TV digital, em particular, na codificação da imagem da televisão em cores. Neste estudo, foram utilizados o grafo completo  $K_5$ , o grafo completo bipartido  $K_{4,4}$ , o hexaedro  $H_{8,12}$  e o octaedro  $H'_{6,12}$ . Foi estabelecido um processo de identificação das modulações sobre os quatro tipos de famílias de superfícies nas quais se encontram os mergulhos dos grafos, isto é, as famílias das superfícies orientáveis e não-orientáveis com e sem bordos. Durante todo o processo de identificação foi enfatizado amplamente o aspecto da regularidade, propriedade bastante requerida pelo projetista do sistema, pois corresponde aos projetos de modulações de melhores desempenhos e de menor complexidade de cálculo.

O processo de identificação consiste de várias etapas. A realização de certas etapas dependem de fórmulas e propriedades de restrições sobre o tipo de regiões das partições. Por exemplo, é importante conhecer as restrições sobre os tipos de regiões das partições do mergulho de um grafo, antes de determinar o conjunto das partições. Consideradas estas restrições, concluímos que o índice dos modelos de mergulhos não realizáveis é sempre muito baixo: somente 3 dos 24 modelos de mergulhos orientáveis de  $K_5$  não são realizáveis; no caso de  $K_{4,4}$ , somente 1 dos 28 modelos orientáveis não é realizável; apenas 1 dos 10 modelos do hexaedro  $H_{6,12}$  não é realizável e apenas 4 dos 56 modelos orientáveis do octaedro  $H'_{8,12}$  não são realizáveis. Caso não fossem consideradas as restrições dos tipos de regiões nos mergulhos de  $K_{5,5}$  e  $H_{6,12}$  os índices de modelos não realizáveis destes grafos seriam muito altas.

Na identificação dos mergulhos de grafos, as superfícies são identificáveis através de fórmulas que estabelecem os mergulhos mínimos e máximos. Muitas famílias de grafos possuem fórmulas conhecidas, como as famílias dos grafos completos e completos bipartidos, porém, não são os casos do hexaedro e octaedro, os mergulhos mínimo e máximos destes grafos foram estabelecidos neste trabalho.

O conjunto de partições das quatro classes de superfícies são dados através de uma fórmula matemática estabelecida nas relações (4.10). Este é o conjunto provável dos tipos

de partições, mas é o Algoritmo 2.6.1 que nos mostra quais dos mergulhos são realizáveis. Este é o algoritmo mais importante para o processo de identificação. Sem o mesmo, não teríamos como identificar as modulações de um grafo. As entradas do Algoritmo 2.6.1 são os conjuntos de rotações do grafo no qual é determinado também por um algoritmo particular.

Analisadas as saídas do Algoritmo 2.6.1 para os grafos  $K_5$ ,  $K_{4,4}$ ,  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$ , verificamos que em todos os mergulhos de grafos existem modelos regulares correspondentes às modulações QAMS's para constelações de sinais do tipo geometricamente uniformes: são 3 modulações QAMS's regulares em mergulhos de  $K_5$ , 3 modulações QAMS's regulares em mergulhos de  $K_{4,4}$ , 4 modulações QAMS's regulares em mergulhos de  $H_{8,12}$  e 5 modulações QAMS's regulares em mergulhos de  $H'_{6,12}$ , perfazendo um total de 15 modulações regulares em superfícies sem bordos nos 4 tipos de grafos analisados. Considerando que não se sabia da existência de modulações regulares em superfícies, a existência de 15 modulações QAMS's regulares é um número razoavelmente grande. Se incluirmos as modulações regulares sobre as superfícies com bordos, o número de modulações QAMS's regulares vindos de mergulhos dos 4 grafos considerados neste trabalho seria em torno de 15 vezes maior, o que é um valor considerável, uma vez que não se tinha conhecimento da existência de modulações regulares sobre superfícies de gênero maior ou igual a um.

Com este trabalho, contamos com a certeza de que, ao escolhermos um grafo como base para construção de modulações, sempre teremos modulações regulares, em número menor no conjunto das superfícies sem bordos e uma quantidade bem expressiva de modulações regulares nas superfícies com bordos.

O que nos deixou bastante empolgado quanto às modulações regulares QAMS's identificadas, foi o fato de muitas delas poderem ser implementadas, como foi feito em [3]; são aquelas que se encontram sobre superfícies parametrizáveis, tais como o plano, superfície de Enneper, catenóide, helicóide, esfera, toro, superfície de Klein, toro de Klifford, dentre outros. Vemos que é possível também implementarmos modulações QAMS's sobre superfícies de gênero maior ou igual a dois, mas não se tem conhecimento de que algo nesta direção tenha sido realizado.

Quanto às modulações *twisted*, elas podem ser implementadas nas mesmas condições das modulações QAMS's, ou seja, desde que a superfície seja parametrizável. Não discutimos a questão da regularidade das modulações *twisted* somente porque, até o presente momento, não temos conhecimento de que esta foi implementada a partir de um mergulho de grafo. Mas, para nós, está muito claro que as modulações vindas dos mergulhos mínimos de  $H_{8,12}$  e  $H'_{6,12}$  sobre a esfera, tratam-se de mergulhos regulares. Estes projetos teriam baixa complexidade de cálculo, uma vez que muitos dos sinais seriam gerados por rotações de um deles.

Uma outra coisa que ficou bastante clara neste trabalho foi o potencial do fator de compactação de dados das modulações QAMS's e *twisted*, ambas apresentam alto grau de compacticidade. No caso de QAMS's, basta utilizar as modulações vindas de mergulhos mínimos do grafo para atingirmos a capacidade máxima de compactação de dados. Nas modulações *twisted*, a capacidade máxima é atingida em qualquer tipo de mergulho em superfície sem bordo. A performance dessas modulações ainda podem ser melhoradas quando consideramos os invariantes topológicos das superfícies: nas superfícies de gênero maior e com um número maior de componente de bordos, encontram-se os projetos de modulações

QAMS's e *twisted* de melhores performances. Conseqüentemente, o número de sinais da constelação, o que corresponde ao número de regiões do mergulhos, é um fator decisivo no que diz respeito à compactação de dados. Se quisermos analisar o processo de decisão de uma modulação, temos que considerar conjuntamente os seguintes invariantes do mergulho do grafo: o número de regiões do mergulho, o gênero e o número de componentes de bordos da superfície. Os dois primeiros invariantes são contraditórios, pois na compactação de dados, devemos minimizar o gênero da superfície enquanto no desempenho em superfície sem bordos, devemos maximizar o gênero da superfície. É preciso, portanto, conviver com este conflito no processo de decisão da modulação mais eficiente.

Como resultado do nosso esforço, surgem muitas sugestões para futuros trabalhos. Cada mergulho de grafo identificado neste trabalho é um elemento em potencial para implementação de uma modulação QAMS ou *twisted*. Foi observado em [3], que o processo e análise da eficiência de um modelo de modulação sobre uma superfície não é simples. Até que o modelo regular seja obtido, passa-se por um longo processo de transformação do grafo, em que cada etapa testa-se o desempenho da modulação. Enquanto não se conhece as características de cada superfície é impossível prever o modelo regular. No início do processo de construção da modulação, não contamos com regras, apenas com a intuição. Isto porque não foram levados em consideração os invariantes topológicos da superfície, como curvatura, primeira e segunda forma fundamental e elemento de área. Como consequência, cada modelo de mergulho identificado neste trabalho que se encontra sobre uma superfície parametrizável  $\Omega$ , pode se tornar o objeto de estudo para um projeto sobre o desempenho de modulação QAMS ou *twisted* de  $\Omega$ . A análise de desempenho envolve muito fatores, a construção do próprio mergulho, os invariante topológicos da superfície tais como a orientabilidade, o gênero, o número de partições e o número de componentes de bordos. Também devemos considerar invariantes da geometria riemanniana da superfície, tais como, primeira e segunda forma fundamental, curvatura média, curvatura gaussina, curvatura de Riccie, e assim por diante. Daria para avaliar todos os invariante em um único trabalho de dissertação? Acreditamos que não. Em trabalho inicial, é preciso dividir o problema em dois ou mais trabalhos de dissertação para a análise completa de um único modelo de modulação. Depois que o processo completo for avaliado integralmente, entendemos que os próximos sejam possíveis de serem realizados em uma única dissertação.

Fica ainda como sugestão para futuros trabalhos, a proposta de projetos de modulações QAMS's e *twisted* sobre superfícies de gêneros maior ou igual a dois.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BOUCHET, A. *Orientable and Nonorientable Genus of the Complete Bipartite Graph*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, v. 24, p. 24-33, 1978.
- [2] CAVALCANTE, R. G., *Análise da Influência da Curvatura do Espaço em Sistemas de Comunicação*, Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2008.
- [3] COSTA, F. L., *Projeto e análise de modulações QAMS sobre o toro via geometria diferencial*, Dissertação de mestrado - PPgCC - UERN/UFERSA, Mossoró - RN, Brasil, 2011.
- [4] COSTA, J. C., *Funções Elípticas, Algébricas e Superfícies Mínimas*. 1 ed., Instituto de Matemática Pura e Aplica, IMPA, Rio de Janeiro, 1991.
- [5] FLOR, P. A. e RAMSTED, T. A., *Noisy Analyses for Dimension Expanding Mapping in Source-Channel Coding*. In IEEE - Seventh Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications, p. 2-5, Cannes, France, 2006.
- [6] GUSTIN, W., *Orientable Embedding of Cayley graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. v.69, p. 272-275, 1963.
- [7] Heawood, P. J. , *Map-Colour Theorem*, Quarterly Journal of Mathematics, Oxford 24: 332-338, 1890.
- [8] HOFFMAN, D., KARCHER, H., *Complete Embedded Minimal Surfaces of Finite Total Curvature*, no. 35, Berkeley, 1995.CNPq, Rio de Janeiro, 1993.
- [9] KÖNIG, D., *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Leipzig, 1936, (Reprinted, Chelsea, New York, 1950).
- [10] LEE, A. E. e MESSERSCHMITT, D. G. , *Digital Communication*, 2 ed., Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, USA, 1994.
- [11] LEE, K. H. e PETERSEN, D. P., *Optimal Linear Coding for Vector Channels*. IEEE Transactions on Communications, COM-24 - v.12. p. 1283-1290, 1976.

- [12] LIMA, J. D. ; SILVA, F. M.; VILLAREAL, E. R. L., A New Approach for Data Transmission System on Topological Surfaces. *Matemática Aplicada e Computacional (Cessou em 1997. Cont. ISSN 1807-0302 Computational & Applied Mathematics)*, v. 31, 2011, p. 1-26,(preprint).
- [13] LIMA, J. D.; LIMA, Luana P. R. C.; MELO, W. C. D. . *Modulations for Large Signal Constellations Coming from Embedding of Complete Graph*. In: The International Telecommunications Symposium (ITS), 2010, Manaus-AM. The International Telecommunications Symposium (ITS)- 2010 Manaus-AM, 2010. v. I. p. 1-5.
- [14] LIMA, J. D.D. , *Identificação e Estrutura Algébrica das Superfícies Compactas com e sem Bordos, Provenientes de Mergulhos de Canais Discretos sem Memória*, Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2002.
- [15] LIMA, L. P. R. C., *Projeto de Modulação sobre Superfícies Topológicas Associadas a Canais Discretos sem Memória: Uma Solução para o Sistema Integrado*. Dissertação de Mestrado - PPgCC - UERN/UFERSA, Mossoró - RN, Brasil, 2010.
- [16] LIMA, J. D. e CAVALCANTE, L.P.R., *Topological Projects of Modulations on Surfaces*. Congresso Nacional de Matemática aplicada e Computacional - CNMAC, 2008.
- [17] LIMA, J. D. e PALAZZO Jr., R., *Topological Structures Associated with Discrete Memoryless Channels*. In IEEE / International Telecommunications Symposium, v.1, p. 211-215, Natal - RN, Brasil, 2002.
- [18] MATIAS, E. V. O., *Modulações para Constelações de Sinais sobre Variedades Riemannianas: Canal DMC Associado e Medida de Desempenho*. Dissertação de Mestrado - PPgCC - UERN/UFERSA, Mossoró - RN, Brasil, 2011.
- [19] NORDHAUS, E. A., STEWART, B. M. e WHITE, A. T., *On the maximum genus of a graph  $K_n$* , J. Combinatorial Theory, B 11, pp. 256-267, 1972.
- [20] OLIVEIRA, H. M., OLIVEIRA, D. R., and SOUSA, R. M. C., *A Unit Quaternion-based Spherical Trigonometry and a New Two-carrier Phase-quadrature Quaternion Modulation System*, XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT 2011, Curitiba, PR, pp. 1-5, 2011.
- [21] RIBEIRO, M. P. e BARRADAS, O., *Sistemas Analógico-Digitais*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro - RJ, 1980.
- [22] RINGEISEN, R. D., *Determining all Compact Orientable 2-manifolds upon which  $K_{m,n}$  has 2-cell Embeddings*. Journal Combinatorial Theory, v.12, p. 101-104, 1972.
- [23] RINGEISEN, R. D., *Survey of results on the maximum genus of a graph* , Journal of Graph Theory, v.3, p. 1-13, 1979.
- [24] RINGEL, G., *Map Color Theorem*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York 1974.

- [25] RINGEL, G., *Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, vol. 28, pp. 139-150, 1965.
- [26] RINGEL, G. *Der vollständige paare Graph auf nichtorientierbaren Flächen*. J. Reine Angew. Math. 220, 88-93, 1967
- [27] RINGEL, G. e YOUNGS, J. W. T., *Solutions of the Heawood map-coloring*, Proc, Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 60, pp. 438-445, 1968.
- [28] RUSNING, T. B., *Topological Embeddings*, 1 ed., New York, Academic Press, 1973.
- [29] SEIFERT, H. e THRELHALL, W. , *Leciones de Topologia*, Madrid, 1951.
- [30] STAHL, S., *The Embeddings of a Graph - A Survey*. Journal of Graph Theory, v.2, p. 275-298, 1978.
- [31] WHITE, A. T., *The genus of the complete tripartite graph  $K_{m,n,n}$* . J. Combinatorial Theory, v.7, p. 283-285, 1969.
- [32] WOZENCRAFT, J. M. e JACOBS, I. M., *Principles of Communication Engineering*, New York, 1965.
- [33] YOUNGS, J. W. T., *Minimal Embeddings and the genus of a graph*. J. Math. Mech, v.12 , p. 303-316, 1963.



# APÊNDICE A

## Construção da QAMS Via Parametrização

O problema apresentado neste apêndice consiste em realizar o projeto de modulação 5-QAMS, a nível de Geometria Diferencial, vindo do mergulho  $K_5(\Theta) \hookrightarrow T \equiv 5R_4$ , onde  $\Theta$  é a rotação em

$$\Theta(K_5) = \{0(1, 2, 3, 4), 1(0, 3, 2, 4), 2(0, 4, 3, 1), 3(0, 1, 4, 2), 4(0, 2, 1, 3)\}, \quad (\text{A.1})$$

cujos esquemas gráficos do processo completo contendo os elementos associados e mergulhos topológicos, são ilustrados na Figura A.0.1.

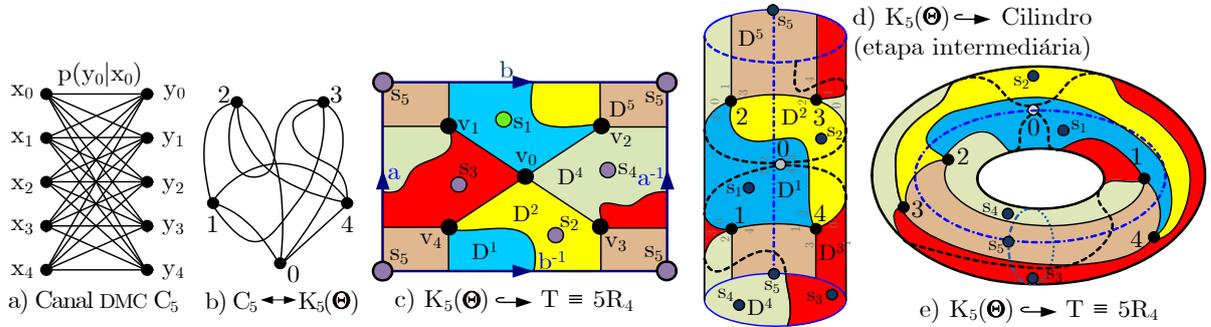


Figura A.0.1: Associação e projeto topológico da 5 QAMS :  $K_5(\Theta) \hookrightarrow T \equiv 5R_4$ .

Na Figura A.0.1, o esquema gráfico a) corresponde à representação do modelo tradicional do canal DMC, ou canal 5-ário  $C_5$ . No esquema b), a notação  $C_5 \longleftrightarrow K_5(\Theta)$ , indica que o canal  $C_5$  está associado ao grafo completo  $K_5$  munido do sistema de rotações  $\Theta$ , pelo processo de associação introduzido em [15]. Em c), é representado o mergulho de  $K_5(\Theta)$  sobre o modelo planar de  $T$ . Em d), tem-se o mergulho sobre o modelo espacial do cilindro, etapa essencial para se obter o mergulho sobre o modelo espacial do toro, indicado em e). Do ponto de vista topológico, os modelos em c), d) e e) representam o mesmo mergulho de  $K_5(\Theta)$  sobre  $T$ .

A seguir, iremos mostrar as etapas de construção de uma modulação QAMS utilizando o *Mathematica*, realizado em [3] O projeto de modulação será construído sobre o toro através da seguinte parametrização

$$\Psi(u, v) = ((b + a \cos v) \cos u, (b + a \cos v) \sin u, a \sin v), \quad a = 1 \text{ e } b = 3. \quad (3.5)$$

Como  $U$  é uma região poligonal de 4-lados, e o modelo planar do mergulho do toro encontra-se sobre um 4-lados também, podemos construir um projeto geométrico sobre  $U$ , o modelo planar  $\Pi_p$  do mergulho  $K_5(\Theta) \leftrightarrow T$  topologicamente idêntico ao mergulho planar c) da Figura A.0.1, como mostram os mergulhos construído na Figura A.0.2.

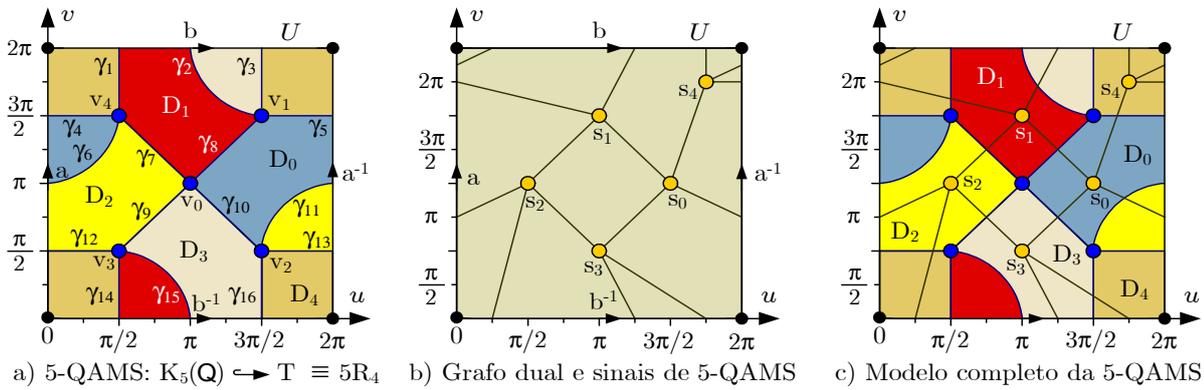


Figura A.0.2: Modelos planares básicos da modulação 5-QAMS,  $K(\Theta) \leftrightarrow T \equiv 5R_4$ .

O mergulho a) da Figura A.0.2 representa um modelo planar da modulação 5-QAMS fixado sobre o toro, sobre o qual, o projeto será descrito e analisado em termos de desempenho. Neste modelo, para todo  $0 \leq i, j \leq 4$ ,  $v_j$  é um vértice de  $K_5$ ,  $D_i$  indica as regiões de Voronoi do sinal  $s_i$  e  $\gamma_k$ ,  $1 \leq k \leq 16$ , são os subcaminhos de  $K_5$  que definem as fronteiras das regiões de decisão de 5-QAMS. Em relação ao mergulho, toda a região de decisão  $D_i$  corresponde a uma região quadrangular definida por uma sequência orbital  $\gamma_i$ , mais precisamente, temos

$$\gamma_5 = (0, 2, 4, 1), \gamma_1 = (0, 1, 3, 4), \gamma_2 = (0, 4, 2, 3), \gamma_3 = (0, 3, 1, 2), \gamma_4 = (1, 4, 3, 2),$$

onde  $\gamma_i = (i_1, i_2, i_3, i_4)$  significa uma região de 4 lados sobre o mergulho do toro, cuja fronteira passa pelos vértices  $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}$  e  $v_{i_4}$  de  $K_5$ . A Figura A.0.2 b) contém a constelação de sinais  $\mathcal{A} = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$  e o grafo dual (grafo associado ao canal  $C_5$ ). A Figura A.0.2 c) ilustra o projeto com todos os elementos da modulação 5-QAMS.

Na Figura A.0.2, o modelo planar a) foi construído visando uniformidade na distribuição das áreas. Como esta é a primeira tentativa de construção, não dispomos de informações que conduzam a alguma tipo de uniformidade. Então, usando de intuição, começamos a distribuir os sinais da forma que pareceu mais adequada para obter a uniformidade desejada.

No modelo planar a) da Figura A.0.2, cada curva  $\gamma_k$  corresponde a um lado completo ou parte do lado do grafo  $K_5$ . Por exemplo, a curva  $\gamma_7$  forma um lado completo do grafo  $K_5$ , une os vértices  $v_0$  e  $v_4$ , enquanto  $\gamma_4$  e  $\gamma_5$  correspondem juntas a outro lado de  $K_5$ , unem  $v_1$  a  $v_4$ . Podemos escolher qualquer tipo de curva para  $\gamma_k$  desde que esta seja uma curva simples, sem

autointerseções. O processo de construção facilita quando  $\gamma_k$  é uma curva planar definida por uma função da reta  $\gamma_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ . No modelo planar a) da Figura A.0.2, a opção foi utilizar dois tipos de curvas, a linear e a circunferência. Para sermos mais precisos, na Tabela A.0.1, relacionamos todas as equações das curvas  $\gamma_k$  do modelo planar da Figura A.0.2 a).

O modelo espacial e) da Figura A.0.1 é idêntico ao modelo planar c), somente do ponto de vista topológico. Para obtermos o modelo espacial do mergulho correspondente ao modelo planar a) da Figura A.0.2, cujas equações das curvas  $\gamma_k$  são tomadas como na Tabela A.0.1, utilizamos a parametrização particular do toro definida em (3.5).

Curva $\gamma_k$	Equação da curva $\gamma_k$
$\gamma_1$	$u = \frac{\pi}{2}, \text{ se } v \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
$\gamma_2$	$v = -\sqrt{-u^2 + 3\pi u - 2\pi^2} + 2\pi, \text{ se } u \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$
$\gamma_3$	$u = \frac{3\pi}{2}, \text{ se } v \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
$\gamma_4$	$v = \frac{3\pi}{2}, \text{ se } u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$\gamma_5$	$v = \frac{3\pi}{2}, \text{ se } u \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
$\gamma_6$	$v = -\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - u^2} + \frac{3\pi}{2}, \text{ se } u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$\gamma_7$	$v = -u + 2\pi, \text{ se } u \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
$\gamma_8$	$v = u, \text{ se } u \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$
$\gamma_9$	$v = u, \text{ se } u \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
$\gamma_{10}$	$v = -u + 2\pi, \text{ se } u \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$
$\gamma_{11}$	$v = \sqrt{-u^2 + 4\pi u - \frac{15\pi^2}{4}} + \frac{\pi}{2}, \text{ se } u \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
$\gamma_{12}$	$v = \frac{\pi}{2}, \text{ se } u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$\gamma_{13}$	$v = \frac{\pi}{2}, \text{ se } u \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
$\gamma_{14}$	$u = \frac{\pi}{2}, \text{ se } v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$\gamma_{15}$	$v = \sqrt{-u^2 + \pi u}, \text{ se } u \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
$\gamma_{16}$	$u = \frac{3\pi}{2}, \text{ se } v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Tabela A.0.1: Equações das curvas  $\gamma_k$  do modelo planar da Figura A.0.2 a).

Por exemplo, as curvas  $\gamma_4$  e  $\gamma_5$  unem os vértice  $v_1$  e  $v_4$ , são funções lineares definidas no eixo  $v$  dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_4 : \quad & \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset U \rightarrow \mathbb{R} \\ & u \mapsto \gamma_4(u) = \frac{3\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_5 : \quad & \left[ \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right] \subset U \rightarrow \mathbb{R} \\ & u \mapsto \gamma_5(u) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Note que  $\gamma_4, \gamma_5$  correspondem ao lado  $(v_1, v_4)$  de  $K_5$ . No modelo planar  $\Pi_p$  do mergulho de  $K_5$  (domínio da  $\Psi$ ), o lado  $(v_1, v_4)$  é definido por dois segmentos de retas. Apesar desses segmentos serem distintos e desconexos, a imagem de  $\gamma_4$  e  $\gamma_5$ , pela aplicação  $\Psi$ , é o caminho conexo sobre o toro dado pela curva  $\Psi(\gamma_4) \cup \Psi(\gamma_5)$ ,  $u \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ , unindo os pontos  $\Psi(v_1)$  e  $\Psi(v_4)$ . Lembramos que  $v_1, v_4$  são pontos do plano e  $\Psi(v_1), \Psi(v_4)$  são seus correspondentes na superfície toro ou modelo espacial  $\Pi_\varepsilon$ .

Conhecida a equação da curva planar, isolamos uma das variáveis  $u$  ou  $v$ , e substituímos o valor da variável correspondente na equação paramétrica  $\Psi(u, v)$  em (3.5), obtendo a curva sobre o modelo espacial  $\Pi_\varepsilon$ . No caso das curvas, cujas equações são  $\gamma_4(u) = 3\pi/2$  se  $u \in [0, \pi/2]$  e  $\gamma_5(u) = 3\pi/2$  se  $u \in [3\pi/2, 2\pi]$  respectivamente, as curvas sobre o toro são dadas por

$$\Psi(u, v) = ((3 + \cos v) \cos u, (3 + \cos v) \sin u, \sin v),$$

em particular, temos que

$$\Psi(\gamma_4) = \Psi(u, \gamma_4(u)) = ((3 + \cos \frac{3\pi}{2}) \cos u, (3 + \cos \frac{3\pi}{2}) \sin u, \sin \frac{3\pi}{2}), \quad u \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$$

e

$$\Psi(\gamma_5) = \Psi(u, \gamma_5(u)) = ((3 + \cos \frac{3\pi}{2}) \cos u, (3 + \cos \frac{3\pi}{2}) \sin u, \sin \frac{3\pi}{2}), \quad u \in \left[ \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right].$$

Na Figura A.0.3, a) representa o modelo planar  $\Pi_p$  com as curvas definidas pelos segmentos de retas e arcos de circunferências definidos na Tabela A.0.1, b) ilustra a curva

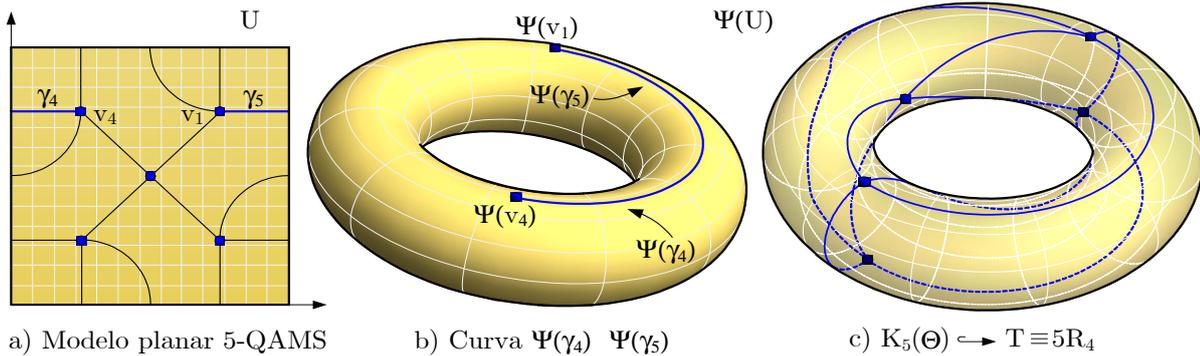


Figura A.0.3: Método de construção de curvas sobre o toro.

$\Psi(\gamma_4) \cup \Psi(\gamma_5)$  e c) contém todas as curvas correspondentes ao mergulho do grafo  $K_5$  sobre o toro vindo do modelo planar  $\Pi_p$  cujos lados possuem equações definidas na Tabela A.0.1. Observe que as únicas curvas do toro que não são obtidas através de seguimentos de retas são as imagens de  $\gamma_2, \gamma_6, \gamma_{11}$  e  $\gamma_{15}$ , pois as mesmas são arcos de circunferência.

O método aplicado as curvas  $\gamma_4$  e  $\gamma_5$  para obter as curvas correspondentes no toro é análogo para as demais curvas do modelo planar  $\Pi_p$ , devemos apenas tomar cuidado ao substituir a variável dependente. Após aplicarmos a equação paramétrica  $\Psi$  em todas as curvas  $\gamma_k$  do modelo planar, obtemos o mergulho do grafo  $K_5$  do modelo planar sobre o toro. O principal propósito das construções do mergulho de  $K_5$  na Figura A.0.2 é obter uma partição sobre uma superfície vinda de um mergulho de um grafo através da Geometria Diferencial. A obtenção deste mergulho sobre o toro mostra que qualquer outro mergulho topológico sobre esta superfície pode ser realizado através da Geometria Diferencial, desde que se conheça o modelo planar  $\Pi_p$  do mergulho topológico. Neste primeiro protótipo, não estávamos ainda preocupados com o aspecto da uniformidade do mergulho, os sinais foram distribuídos do modo mais conveniente possível de acordo com os nossos conhecimentos prévios sobre a topologia do toro. Temos até como propósito construir um modelo uniforme e verificar se a uniformidade em número de lados, formato das regiões ou até mesmo a área no modelo planar, melhora o desempenho da modulação QAMS.

O processo de construir o mergulho de  $K_5$  no modelo espacial a partir da equação paramétrica aplicada ao modelo planar, possibilita construir o mergulho equivalente de  $K_5$  sobre o toro, esse método restringe o problema de construir a modulação utilizando somente o modelo planar e, através da equação paramétrica, transferir a modulação para a superfície.

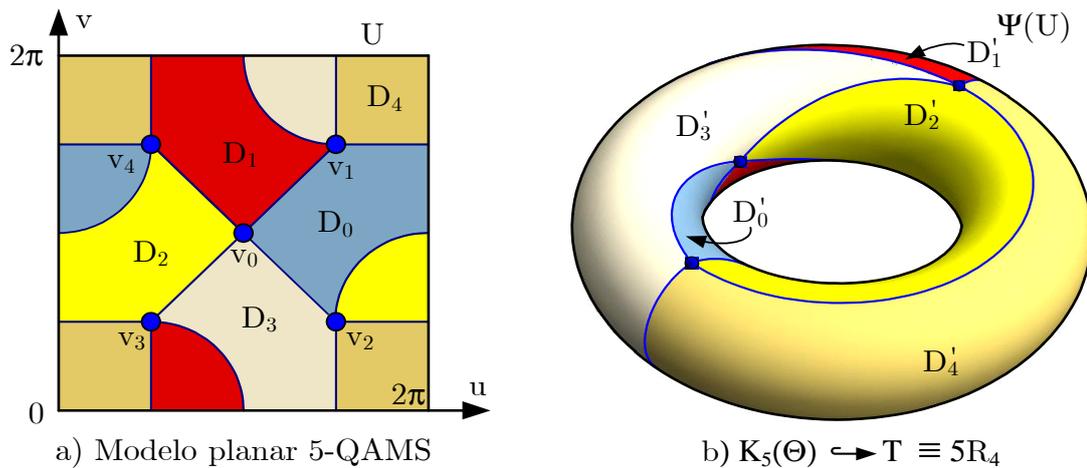


Figura A.0.4: Modelo planar e espacial do mergulho de  $K_5$  sobre o toro.

As curvas  $\gamma_k, k = 1, \dots, 16$  do mergulho de  $K_5$  no modelo planar na Figura A.0.2 a) particiona o toro em 5 regiões, definindo uma modulação não uniforme para 5 sinais, 5-QAMS, cujas regiões de Voronoi  $D_0, D_1, \dots, D_4$  estão representadas na Figura A.0.4: a) mostra as regiões obtidas pelo mergulho de  $K_5$  sobre o modelo planar; e b) mostra as regiões equivalentes sobre o modelo espacial do toro.

Como o mergulho planar formado por arcos de circunferência e segmentos de retas e o seu mergulho espacial equivalente sobre  $T$ , na Figura A.0.4, serão utilizados posteriormente para análises e simulação da modulação 5-QAMS, este será denominado de Projeto I.

É importante ressaltar aqui, que a modulação 5-QAMS sobre o toro ilustrada na Figura A.0.4 b) não é mais topológica, esta foi obtida diretamente da parametrização (3.5) aplicada

em cada curva  $\gamma_k$  relacionadas na Tabela A.0.1. As regiões sobre o toro e as suas respectivas regiões sobre o modelo planar são equivalentes, no sentido de preservarem o número de lados, porém, estas sofrem as deformações naturais do toro. No entanto, cada região de Voronoi  $D'_i = \Psi(D_i)$  do Toro passa a ser um recobrimento da sua correspondente região  $D_i$  do modelo planar. A Figura A.0.5 dá uma ideia precisa dessas aplicações.

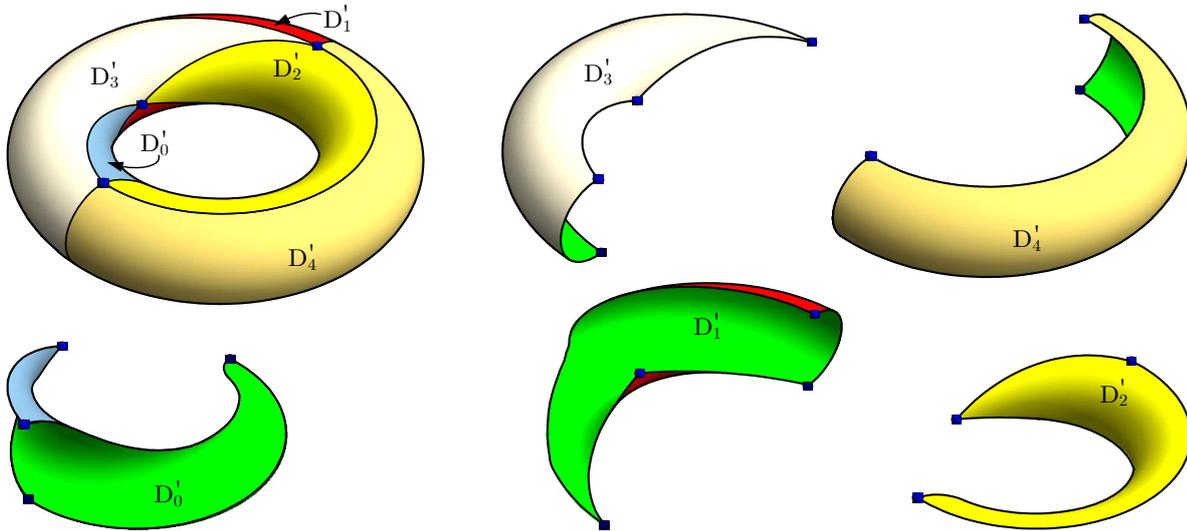


Figura A.0.5: Modulação 5-QAMS e suas respectivas regiões de Voronoi.

Uma vez que a parametrização  $\Psi$  em (3.5) é uma aplicação bijetora iremos considerar que cada região de Voronoi  $D'_i$  sobre o modelo espacial e a sua correspondente  $D_i$  sobre modelo planar são regiões correspondentes.

## APÊNDICE B

### Partições das Modulações de $K_{4,4}$

De modo análogo ao procedimento de identificação dos mergulhos sem e com bordos de  $K_5$ , utilizado na Subseção 4.3.5, iremos relacionar cada partição do grafo  $K_{4,4}$ .

Lembramos que para determinar os mergulhos com bordos provenientes de uma partição, utilizamos a noção de conjunto gerado pelo mergulho  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$ , conceito introduzido na Definição 4.1.1. Para mostrar de como este processo é feito, tomemos, por exemplo o mergulho

$$K_{4,4} \hookrightarrow 2T \equiv 3R_4 2R_6 R_8. \quad (A.1)$$

Como a partição é da forma  $\Xi_4^6 = 3R_4 2R_6 R_8$ , então o mergulho sem bordo (A.1) gera mergulhos nas superfícies

$$\Omega(\Xi_4^6) = \{2T, 2T_1, 2T_2, 2T_3, 2T_4, 2T_5, 2T_6\}. \quad (A.2)$$

Mais precisamente, os mergulhos definidos pelas seguintes partições

$$\begin{aligned} K_{4,4} &\hookrightarrow 2T \equiv 3R_4 2R_6 R_8 \\ K_{4,4} &\hookrightarrow 2T_1 \equiv 3R_4 2R_6, 3R_4 R_6 R_8, 2R_4 2R_6 R_8 \\ K_{4,4} &\hookrightarrow 2T_2 \equiv 2R_4 2R_6, 3R_4 R_8, 3R_4 R_6, 2R_4 R_6 R_8, R_4 2R_6 R_8 \\ K_{4,4} &\hookrightarrow 2T_3 \equiv 2R_4 R_6, 2R_4 R_8, 3R_4, R_4 2R_6, R_4 R_6 R_8 \\ K_{4,4} &\hookrightarrow 2T_4 \equiv 2R_4, R_4 R_6, R_4 R_8, R_6 R_8, 2R_6 \\ K_{4,4} &\hookrightarrow 2T_5 \equiv R_4, R_6, R_8 \\ K_{4,4} &\hookrightarrow 2T_6 \equiv K_{4,4}. \end{aligned} \quad (A.3)$$

Devemos saber aqui que as partições oriundas da partição  $\Xi_4^6 = 3R_4 2R_6 R_8$  sobre  $2T$  também são partições do conjunto de superfícies não-orientáveis

$$\Omega(\Xi_4^6) = \{4P, 4P_1, 4P_2, 4P_3, 4P_4, 4P_5, 4P_6\}. \quad (A.4)$$

A conclusão é que sobre os conjuntos em (A.2) e (A.4) é possível projetar todas as modulações relacionadas em (A.3), desde que os mergulhos  $K_{4,4} \hookrightarrow 2T, 4P \equiv 3R_4 2R_6 R_8$  sejam ambos realizáveis em suas respectivas superfícies. Observe que são 19 modulações

QAMS em cada caso, sendo três regulares  $2R_4, 2R_6$  e  $3R_4$ , e 23 projetos de modulações do tipo *twisted*. No total, seriam 36 projetos de modulações QAMS e 46 projetos de modulações *twisted* oriundas da partição  $\Xi_4^6 = 3R_4 2R_6 R_8$ .

No caso em que não há superfície orientável equivalente, por exemplo  $3P$ , um de seus partições,  $\Xi_2 = 4R_4 R_6 R_{14}$ , gera os seguinte mergulhos com bordos:

$$\begin{aligned}
 K_{4,4} &\hookrightarrow 2KP_1 \equiv 3R_4 R_6, 3R_4 R_{14}, 2R_4 R_6 R_{14} \\
 K_{4,4} &\hookrightarrow 2KP_2 \equiv 3R_4, 2R_4 R_6, 2R_4 R_{14}, R_4 R_6 R_{14} \\
 K_{4,4} &\hookrightarrow 2KP_3 \equiv 2R_4, R_4 R_6, R_4 R_{14}, R_6 R_{14} \\
 K_{4,4} &\hookrightarrow 2KP_4 \equiv R_4, R_6, R_{14} \\
 K_{4,4} &\hookrightarrow 2KP_5 \equiv K_{4,4}.
 \end{aligned}
 \tag{A.5}$$

Então o mergulho sem bordo  $K_{4,4} \hookrightarrow 5P \equiv 4R_4 R_6 R_{14}$  gera os seguintes mergulhos: 3 com uma componente de bordo sobre  $5P_1$ ; 4 com 2 componentes de bordos sobre  $5P_2$ ; 4 com 3 componentes de bordos  $5P_3$ ; 3 mergulhos com 4 componentes de bordos sobre  $5P_4$  e um mergulho sobre  $5P_5$  homeomorfo a  $K_{4,4}$ . Em particular,  $5P_\mu$  tem 15 de partições em (A.5), ou seja, projetos 11 modulações QAMS (com 2 regulares) e 15 modulações *twisted*, perfazendo um total de 26 modulações, caso o mergulho  $K_{4,4} \hookrightarrow 5P \equiv 4R_4 R_6 R_{14}$  seja realizável.

Observamos que o mergulho (A.1) gera o maior número de mergulhos com bordos da superfície  $2T$  devido a variação do tipo de regiões, são três tipos de regiões distintas. No total são 23 mergulhos gerados a partir da partição  $\Xi_4^6 = 3R_4 2R_6 R_8$ . Da mesma forma que os mergulhos gerados por (A.1) foram determinados.

A Tabela B.0.1 relaciona todos os mergulhos gerados pelas partições sem bordos de  $K_{4,4}$ . Os mergulhos gerados por partições sem bordos de  $K_{4,4}$  estão sendo apresentados. Os modelos destacados em azul referem-se aos mergulhos regulares e tem como propósito facilitar o processo de contagem. Observamos que muitos das partições regulares são idênticas, porém são obtidas de partições diferentes, por isto estão sendo computadas como sendo partições distintas.

Tabela B.0.1: Classes de mergulhos não orientáveis de  $K_{4,4}$  sobre  $gKP$

Modulações sobre $T\mu$ e $2P\mu$									
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos							
$\Omega$	$T$ $2P$	$T_1$ $2P_1$	$T_2$ $2P_2$	$T_3$ $2P_3$	$T_4$ $2P_4$	$T_5$ $2P_5$	$T_6$ $2P_6$	$T_7$ $2P_7$	$T_8$ $2P_8$
$\Xi_1$	$8R_4$	$7R_4$	$6R_4$	$5R_4$	$4R_4$	$3R_4$	$2R_4$	$R_4$	$K_{4,4}$
Modulações sobre $3P\mu$									
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos							
$\bar{\Omega}$	$3P$	$3P_1$	$3P_2$	$3P_3$	$3P_4$	$3P_5$	$3P_6$	$3P_7$	$KP_7$
$\Xi_1$	$6R_4 R_8$	$6R_4, 5R_4 R_8$	$5R_4, 4R_4 R_8$	$4R_4, 3R_4 R_8$	$3R_4, 2R_4 R_8$	$2R_4, R_4 R_8$	$R_4, R_8$	$K_{4,4}$	
$\Xi_2$	$5R_4 2R_6$	$5R_4 R_6$ $4R_4 2R_6$	$5R_4, 4R_4 R_6$ $3R_4 2R_6$	$4R_4, 3R_4 R_6$ $3R_4 2R_6$	$3R_4, 2R_4 R_6$ $R_4 2R_6$	$2R_4, R_4 R_6$ $2R_4$	$R_4$ $R_6$	$K_{4,4}$	

Continua na próxima página

Tabela B.0.1 - Continuação da página anterior

Modulações sobre $2T_\mu$ e $4P_\mu$							
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos					
$\Omega$	$2T$ $4P$	$2T_1$ $4P_1$	$2T_2$ $4P_2$	$2T_3$ $4P_3$	$2T_4$ $4P_4$	$2T_5$ $4P_5$	$2T_6$ $4P_6$
$\Xi_1$	$5R_4R_{12}$	$5R_4, 4R_4R_{12}$	$4R_4, 3R_4R_{12}$	$3R_4, 2R_4R_{12}$	$2R_4, R_4R_{12}$	$R_4, R_{12}$	$K_{4,4}$
$\Xi_2$	$4R_4R_6R_{10}$	$4R_4R_6, 4R_4R_{10}$ $3R_4R_6R_{10}$	$3R_4R_6, 3R_4R_{10}$ $4R_4, 2R_4R_6R_{10}$	$2R_4R_6, 2R_4R_{10}$ $3R_4, R_4R_6R_{10}$	$2R_4, R_4R_6$ $R_4R_{10}, R_6R_{10}$	$R_4, R_6$ $R_{10}$	$K_{4,4}$
$\Xi_3$	$4R_42R_8$	$4R_4R_8$ $3R_42R_8$	$4R_4, 3R_4R_8$ $2R_42R_8$	$3R_4, 2R_4R_8$ $R_42R_8$	$2R_4, 2R_8$ $R_4R_8$	$R_4$ $R_8$	$K_{4,4}$
$\Xi_4$	$R_{4,4,4,6,6,8}$	$3R_42R_6$ $3R_4R_6R_8$ $2R_42R_6R_8$	$2R_42R_6, 3R_4R_8$ $3R_4R_6, 2R_4R_6R_8$ $R_42R_6R_8$	$2R_4R_6, 2R_4R_8$ $3R_4, R_42R_6$ $R_4R_6R_8$	$2R_4, R_4R_6$ $R_4R_8$ $R_6R_8, 2R_6$	$R_4$ $R_6$ $R_8$	$K_{3,3}$
$\Xi_5$	$2R_44R_6$	$2R_43R_6$ $R_44R_6$	$2R_42R_6, 4R_6$ $R_43R_6$	$2R_4R_6, 3R_6$ $R_42R_6$	$R_4R_6$ $2R_4, 2R_6$	$R_4$ $R_6$	$K_{4,4}$
Modulações sobre $5P_\mu$							
Sem bordos		Partições dos mergulhos com bordos					
$\bar{\Omega}$	$5P$	$5P_1$	$5P_2$	$5P_4$	$5P_5$		
$\Xi_1$	$R_{4,4,4,4,16}$	$4R_4, 3R_4R_{16}$	$3R_4, 2R_4R_{16}$	$2R_4, R_4R_{16}$	$R_4, R_{16}$		$K_{4,4}$
$\Xi_2$	$3R_{4,4,4,6,14}$	$3R_4R_6, 3R_4R_{14}$ $2R_4R_6R_{14}$	$3R_4, 2R_4R_{14}$ $2R_4R_6, R_4R_6R_{14}$	$2R_4, R_4R_6$ $R_4R_{14}, R_6R_{14}$	$R_4, R_6$ $R_{14}$		$K_{4,4}$
$\Xi_3$	$3R_{4,4,4,8,12}$	$3R_4R_8, 3R_4R_{12}$ $2R_4R_8R_{12}$	$3R_4, 2R_4R_{12}$ $2R_4R_8, R_4R_8R_{12}$	$2R_4, R_4R_8$ $R_4R_{12}, R_8R_{12}$	$R_4, R_8$ $R_{12}$		$K_{4,4}$
$\Xi_4$	$3R_{4,4,4,10,10}$	$3R_4R_{10}$ $2R_42R_{10}$	$3R_4, 2R_4R_{10}$ $R_42R_{10}$	$2R_4, R_4R_{10}$ $2R_{10}$	$R_4$ $R_{10}$		$K_{4,4}$
$\Xi_5$	$R_{4,4,6,6,12}$	$2R_42R_6$ $R_42R_6R_{12}$ $2R_4R_6R_{12}$	$2R_4R_6, 2R_4R_{12}$ $R_42R_6, 2R_6R_{12}$ $R_4R_6R_{12}$	$2R_4, R_4R_{12}$ $2R_6, R_4R_6$ $R_6R_{12}$	$R_4$ $R_6$ $R_{12}$		$K_{4,4}$
$\Xi_6$	$R_{4,4,6,8,10}$	$2R_4R_6R_8$ $2R_4R_6R_{10}$ $2R_4R_8R_{10}$ $R_4R_6R_8R_{10}$	$2R_4R_6, 2R_4R_8$ $2R_4R_{10}, R_4R_6R_{10}$ $R_4R_6R_8, R_4R_8R_{10}$ $R_6R_8R_{10}$	$2R_4, R_4R_6$ $R_4R_8, R_4R_{10}$ $R_6R_8, R_6R_{10}$ $R_8R_{10}$	$R_4$ $R_6$ $R_8$ $R_{10}$		$K_{4,4}$
$\Xi_7$	$R_{4,4,8,8,8}$	$2R_42R_8$ $R_43R_8$	$2R_4R_8, R_42R_8$ $3R_8$	$2R_4, R_4R_8$ $2R_8$	$R_4$ $R_8$		$K_{4,4}$
$\Xi_8$	$R_{4,6,6,6,10}$	$R_43R_6, 3R_6R_{10}$ $R_42R_6R_{10}$	$R_42R_6, 2R_6R_{10}$ $3R_6, R_4R_6R_{10}$	$R_4R_6, R_6R_{10}$ $2R_6, R_4R_{10}$	$R_4, R_6$ $R_{10}$		$K_{4,4}$

Continua na próxima página

Tabela 4.3.5 - Continuação da página anterior

Modulações sobre $5P_\mu$						
Sem bordos	Partições dos mergulhos com bordos					
$\bar{\Omega}$	$5P$	$5P_1$	$5P_2$	$5P_3$	$5P_4$	$5P_5$
$\Xi_9$	$R_{4,6,6,8,8}$	$R_4 2R_6 R_8$ $R_4 R_6 2R_8$ $2R_6 2R_8$	$R_4 R_6 R_8$ $2R_6 R_8$ $R_6 2R_8$	$2R_6, R_4 R_6$ $R_4 R_8$ $R_6 R_8$	$R_4$ $R_6$ $R_8$	$K_{4,4}$
$\Xi_{10}$	$R_{6,6,6,6,8}$	$4R_6, 3R_6 R_8$	$3R_6, 2R_6 R_8$	$2R_6, R_6 R_8$	$R_6, R_8$	$K_{4,4}$
Modulações sobre $3T_\mu$ e $6P_\mu$						
Sem bordos	Partições dos mergulhos com bordos					
$\Omega$	$3T$ $6P$	$3T_1$ $6P_1$	$3T_2$ $6P_2$	$3T_3$ $6P_3$	$3T_4$ $6P_4$	
$\Xi_1$	$3R_4 R_{20}$	$3R_4, 2R_4 R_{20}$	$2R_4, R_4 R_{20}$	$R_4, R_{20}$		$K_{4,4}$
$\Xi_2$	$2R_4 R_6 R_{18}$	$2R_4 R_6, 2R_4 R_{18}$ $R_4 R_6 R_{18}$	$R_4 R_6, R_4 R_{18}$ $2R_4, R_6 R_{18}$	$R_4, R_6$ $R_{18}$		$K_{4,4}$
$\Xi_3$	$2R_4 R_8 R_{16}$	$2R_4 R_8, 2R_4 R_{16}$ $R_4 R_8 R_{16}$	$R_4 R_8, R_4 R_{16}$ $2R_4, R_8 R_{16}$	$R_4, R_8$ $R_{16}$		$K_{4,4}$
$\Xi_4$	$2R_4 R_{10} R_{14}$	$2R_4 R_{10}, 2R_4 R_{14}$ $R_4 R_{10} R_{14}$	$R_4 R_{10}, R_4 R_{14}$ $2R_4, R_{10} R_{14}$	$R_4, R_{10}$ $R_{14}$		$K_{4,4}$
$\Xi_5$	$2R_4 2R_{12}$	$2R_4 R_{12}$ $R_4 2R_{12}$	$2R_4, 2R_{12}$ $R_4 R_{12}$	$R_4$ $R_{12}$		$K_{4,4}$
$\Xi_6$	$R_4 2R_6 R_{16}$	$R_4 2R_6, 2R_6 R_{16}$ $R_4 R_6 R_{16}$	$R_4 R_6, R_6 R_{16}$ $2R_6, R_4 R_{16}$	$R_4, R_6$ $R_{16}$		$K_{4,4}$
$\Xi_7$	$R_{4,6,8,14}$	$R_4 R_6 R_8$ $R_4 R_6 R_{14}$ $R_6 R_8 R_{14}$	$R_4 R_6, R_4 R_8$ $R_4 R_{14}, R_6 R_8$ $R_6 R_{14}, R_8 R_{14}$	$R_4, R_6$ $R_8$ $R_{14}$		$K_{4,4}$
$\Xi_8$	$R_{4,6,10,12}$	$R_4 R_6 R_{10}$ $R_4 R_6 R_{12}$ $R_6 R_{10} R_{12}$	$R_4 R_6, R_4 R_{10}$ $R_4 R_{12}, R_6 R_{10}$ $R_6 R_{12}, R_{10} R_{12}$	$R_4, R_6$ $R_{10}$ $R_{12}$		$K_{4,4}$
$\Xi_9$	$R_4 2R_8 R_{12}$	$R_4 2R_8, 2R_8 R_{12}$ $R_4 R_8 R_{12}$	$R_4 R_8, R_8 R_{12}$ $2R_8, R_4 R_{12}$	$R_4, R_8$ $R_{12}$		$K_{4,4}$
$\Xi_{10}$	$R_4 R_8 2R_{10}$	$R_4 2R_{10}, R_8 2R_{10}$ $R_4 R_8 R_{10}$	$R_4 R_8, R_8 R_{10}$ $2R_{10}, R_4 R_{10}$	$R_4, R_8$ $R_{10}$		$K_{4,4}$
$\Xi_{11}$	$3R_6 R_{14}$	$3R_6, 2R_6 R_{14}$	$2R_6, R_6 R_{14}$	$R_6, R_{14}$		$K_{4,4}$
$\Xi_{12}$	$2R_6 R_8 R_{12}$	$2R_6 R_8, 2R_6 R_{12}$ $R_6 R_8 R_{12}$	$R_6 R_8, R_6 R_{12}$ $2R_6, R_8 R_{12}$	$R_6, R_8$ $R_{12}$		$K_{4,4}$

Continua na página seguinte

Tabela B.0.1 - Continuação da página anterior

Modulações sobre $3T_\mu$ e $6P_\mu$							
Sem bordos		Com bordos					
$\Omega$	$3T$ $6P$	$3T_1$ $6P_1$	$3T_2$ $6P_2$	$3T_3$ $6P_3$	$3T_4$ $6P_4$		
$\Xi_{13}$	$2R_6 2R_{10}$	$2R_6 R_{10}$ $R_6 2R_{10}$	$2R_6, 2R_{10}$ $R_6 R_{10}$	$R_6$ $R_{10}$	$K_{4,4}$		
$\Xi_{14}$	$R_6 2R_8 R_{10}$	$R_6 2R_8, 2R_8 R_{10}$ $R_6 R_8 R_{10}$	$R_6 R_8, R_6 R_{10}$ $2R_8, R_8 R_{10}$	$R_6, R_8$ $R_{10}$	$K_{4,4}$		
$\Xi_{15}$	$4R_8$	$3R_8$	$2R_8$	$R_8$	$K_{4,4}$		
Modulações sobre $7P_\mu$							
Sem bordos		Com bordos					
$\bar{\Omega}$	$7P$	$7P_1$	$7P_2$	$7P_3$			
$\Xi_1$	$R_4 R_4 R_{24}$	$2R_4, R_4 R_{24}$	$R_4, R_{24}$	$K_{4,4}$			
$\Xi_2$	$R_4 R_6 R_{22}$	$R_4 R_6, R_4 R_{22}, R_6 R_{22}$	$R_4, R_6, R_{22}$	$K_{4,4}$			
$\Xi_3$	$R_4 R_8 R_{20}$	$R_4 R_8, R_4 R_{20}, R_8 R_{20}$	$R_4, R_8, R_{20}$	$K_{4,4}$			
$\Xi_4$	$R_4 R_{10} R_{18}$	$R_4 R_{10}, R_4 R_{18}, R_{10} R_{18}$	$R_4, R_{10}, R_{18}$	$K_{4,4}$			
$\Xi_5$	$R_4 R_{12} R_{16}$	$R_4 R_{12}, R_4 R_{16}, R_{12} R_{16}$	$R_4, R_{12}, R_{16}$	$K_{4,4}$			
$\Xi_6$	$R_4 R_{14} R_{14}$	$R_4 R_{14}, R_{14} R_{14}$	$R_4, R_{14}$	$K_{4,4}$			
Modulações sobre $4T_\mu$ e $8P_\mu$							
Sem bordos		Com bordos		Sem bordos			
$\Omega$	$4T$ $8P$	$4T_1$ $8P_1$	$4T_2$ $8P_2$	$\Omega$	$4T$ $8P$	$4T_1$ $8P_1$	$4T_2$ $8P_2$
$\Xi_1$	$R_4 R_{28}$	$R_4, R_{28}$	$K_{4,4}$	$\Xi_5$	$R_{12} R_{20}$	$R_{12}, R_{20}$	$K_{4,4}$
$\Xi_2$	$R_6 R_{26}$	$R_6, R_{26}$	$K_{4,4}$	$\Xi_6$	$R_{14} R_{18}$	$R_{14}, R_{18}$	$K_{4,4}$
$\Xi_3$	$R_8 R_{24}$	$R_8, R_{24}$	$K_{4,4}$	$\Xi_7$	$R_{16} R_{16}$	$R_{16}$	$K_{4,4}$
$\Xi_4$	$R_{10} R_{22}$	$R_{10}, R_{22}$	$K_{4,4}$	Modulações sobre $9P$			$R_{32}$

No final da Tabela B.0.1, saímos um pouco da formatação para registrar o único modelo  $R_{32}$  sobre a superfície não-orientável  $9P$ .

As superfícies  $gT_\mu$  e  $gP_\mu$  apresentam o mesmo tipo de partição, e aquelas que não são realizáveis em  $gT_\mu$  são destacadas na Tabela B.0.1 pela cor vermelha. No caso das partições de  $gP_\mu$ , não sabemos quais as realizáveis, logo, para efeito de contagem, serão consideradas como se todas existissem.



## APÊNDICE C

### Os Sistemas de Rotações do Hexaedro

O Algoritmo 2.6.1 utiliza uma rotina em linguagem C que determina o conjunto dos sistemas de rotações de  $H(p, q)$  (veja Tabela C.0.1). Outra rotina recebe uma matriz  $\Theta$  e fornece:  $\Theta$ , a partição  $\cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$  e as sequências  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ . A fórmula de Eüler 2.5 nos dá  $\Omega$ , identificando-se assim o mergulho.

ABCDEFGH							
ABCDeFGH							
ABCdEFGH							
ABCdeFGH							
ABcDEFGH							
ABcDeFGH							
ABcdEFGH							
ABcdeFGH							
AbCDEFGH							
AbCDeFGH							
AbCdEFGH							
AbCdeFGH							
AbcDEFGH							
AbcdEFGH							
AbcdeFGH							
aBCDEFGH							
aBCDeFGH							
aBCdEFGH							
aBCdeFGH							
aBcDEFGH							
aBcDeFGH							
aBcdEFGH							
aBcdeFGH							
abCDEFGH							
abCDeFGH							
abCdEFGH							
abCdeFGH							
abcDEFGH							
abcDeFGH							
abcdEFGH							
abcdeFGH							

Tabela C.0.1: Sistemas de rotações do hexaedro  $H(p, q)$

## APÊNDICE D

### Demonstração do Teorema 5.1.2

O Teorema 5.1.2 foi demonstrado para um único caso dentre um universo de oito possibilidades. Apesar de acharmos suficiente a prova de um único caso, já escolha do vértice poderia ser qualquer um dos oito vértices de  $H_{8,12}$ , iremos apresentar, para que não haja dúvida, a prova para os demais casos.

**Demonstração. (Continuação da Prova do Teorema 5.1.2)** Faltam sete casos a serem provados.

1) Suponha que  $\theta_i \in \Psi_1 = \{(0, 6, 2), (2, 6, 0)\}$ . Se  $\theta_i = (0, 6, 2)$ , pelas igualdade (5.4), resulta que

$$\theta_i = \theta_1 = (0, 6, 2) \Rightarrow \begin{cases} h = 0 \text{ e } j = 6 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_6 = (1, 0, \_) \notin \Psi_6 \\ \theta_h = \theta_0 = (6, 1, \_) \notin \Psi_0 \end{cases} \\ h = 6 \text{ e } j = 2 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_2 = (1, 6, \_) \notin \Psi_2 \\ \theta_h = \theta_6 = (2, 1, \_) \notin \Psi_6 \end{cases} \\ h = 2 \text{ e } j = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_0 = (1, 2, \_) \notin \Psi_0 \\ \theta_h = \theta_2 = (0, 1, \_) \notin \Psi_2. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Se  $\theta_i = (2, 0, 6)$  então, pelas igualdades (5.4), temos que

$$\theta_i = \theta_1 = (2, 0, 6) \Rightarrow \begin{cases} h = 2 \text{ e } j = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_0 = (1, 2, \_) \notin \Psi_0 \\ \theta_h = \theta_2 = (0, 1, \_) \notin \Psi_2 \end{cases} \\ h = 0 \text{ e } j = 6 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_6 = (1, 0, \_) \notin \Psi_6 \\ \theta_h = \theta_0 = (6, 1, \_) \notin \Psi_0 \end{cases} \\ h = 6 \text{ e } j = 2 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_2 = (1, 6, \_) \notin \Psi_2 \\ \theta_h = \theta_6 = (2, 1, \_) \notin \Psi_6. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

2) Suponha que  $\theta_i \in \Psi_2 = \{(1, 3, 7), (7, 3, 1)\}$ . Se  $\theta_i = (1, 3, 7)$ , pelas igualdade (5.4),

resulta que

$$\theta_i = \theta_2 = (1, 3, 7) \Rightarrow \begin{cases} h = 1 \text{ e } j = 3 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_3 = (2, 1, \_) \notin \Psi_3 \\ \theta_h = \theta_1 = (3, 2, \_) \notin \Psi_1 \end{cases} \\ h = 3 \text{ e } j = 7 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_7 = (2, 3, \_) \notin \Psi_7 \\ \theta_h = \theta_3 = (7, 2, \_) \notin \Psi_3 \end{cases} \\ h = 7 \text{ e } j = 1 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_1 = (2, 7, \_) \notin \Psi_1 \\ \theta_h = \theta_7 = (1, 2, \_) \notin \Psi_7. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Se  $\theta_i = (7, 3, 1)$  então, pelas igualdades (5.4), temos que

$$\theta_i = \theta_2 = (7, 3, 1) \Rightarrow \begin{cases} h = 7 \text{ e } j = 3 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_3 = (2, 7, \_) \notin \Psi_3 \\ \theta_h = \theta_7 = (3, 2, \_) \notin \Psi_7 \end{cases} \\ h = 3 \text{ e } j = 1 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_1 = (2, 3, \_) \notin \Psi_1 \\ \theta_h = \theta_3 = (1, 2, \_) \notin \Psi_3 \end{cases} \\ h = 1 \text{ e } j = 7 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_7 = (2, 1, \_) \notin \Psi_7 \\ \theta_h = \theta_1 = (7, 2, \_) \notin \Psi_1. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

3) Suponha que  $\theta_i \in \Psi_3 = \{(0, 4, 2), (2, 4, 0)\}$ . Se  $\theta_i = (0, 4, 2)$ , pelas igualdade (5.4), resulta que

$$\theta_i = \theta_3 = (0, 4, 2) \Rightarrow \begin{cases} h = 0 \text{ e } j = 4 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_4 = (3, 0, \_) \notin \Psi_4 \\ \theta_h = \theta_0 = (4, 3, \_) \notin \Psi_0 \end{cases} \\ h = 4 \text{ e } j = 2 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_2 = (3, 4, \_) \notin \Psi_2 \\ \theta_h = \theta_4 = (2, 3, \_) \notin \Psi_4 \end{cases} \\ h = 2 \text{ e } j = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_0 = (3, 2, \_) \notin \Psi_0 \\ \theta_h = \theta_2 = (0, 3, \_) \notin \Psi_2. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Se  $\theta_i = (2, 4, 0)$  então, pelas igualdades (5.4), temos que

$$\theta_i = \theta_3 = (2, 4, 0) \Rightarrow \begin{cases} h = 2 \text{ e } j = 4 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_4 = (3, 2, \_) \notin \Psi_4 \\ \theta_h = \theta_2 = (4, 3, \_) \notin \Psi_2 \end{cases} \\ h = 4 \text{ e } j = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_0 = (3, 4, \_) \notin \Psi_0 \\ \theta_h = \theta_4 = (0, 3, \_) \notin \Psi_4 \end{cases} \\ h = 0 \text{ e } j = 2 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_2 = (3, 0, \_) \notin \Psi_2 \\ \theta_h = \theta_0 = (2, 3, \_) \notin \Psi_0. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

4) Suponha que  $\theta_i \in \Psi_4 = \{(3, 5, 7), (7, 5, 3)\}$ . Se  $\theta_i = (3, 5, 7)$ , pelas igualdade (5.4), resulta que

$$\theta_i = \theta_4 = (3, 5, 7) \Rightarrow \begin{cases} h = 3 \text{ e } j = 5 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_5 = (4, 3, \_) \notin \Psi_5 \\ \theta_h = \theta_3 = (5, 4, \_) \notin \Psi_3 \end{cases} \\ h = 5 \text{ e } j = 7 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_7 = (4, 5, \_) \notin \Psi_7 \\ \theta_h = \theta_5 = (7, 4, \_) \notin \Psi_5 \end{cases} \\ h = 7 \text{ e } j = 3 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_3 = (4, 7, \_) \notin \Psi_3 \\ \theta_h = \theta_7 = (3, 4, \_) \notin \Psi_7. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Se  $\theta_i = (7, 5, 3)$  então, pelas igualdades (5.4), temos que

$$\theta_i = \theta_2 = (7, 5, 3) \Rightarrow \begin{cases} h = 7 \text{ e } j = 5 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_5 = (4, 7, \_) \notin \Psi_5 \\ \theta_h = \theta_7 = (5, 4, \_) \notin \Psi_7 \end{cases} \\ h = 5 \text{ e } j = 3 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_3 = (4, 5, \_) \notin \Psi_3 \\ \theta_h = \theta_5 = (3, 4, \_) \notin \Psi_5 \end{cases} \\ h = 3 \text{ e } j = 7 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_1 = (4, 3, \_) \notin \Psi_1 \\ \theta_h = \theta_3 = (1, 4, \_) \notin \Psi_3. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

5) Suponha que  $\theta_i \in \Psi_5 = \{(0, 4, 6), (6, 4, 0)\}$ . Se  $\theta_i = (0, 4, 6)$ , pelas igualdade (5.4), resulta que

$$\theta_i = \theta_5 = (0, 4, 6) \Rightarrow \begin{cases} h = 0 \text{ e } j = 4 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_4 = (5, 0, \_) \notin \Psi_4 \\ \theta_h = \theta_0 = (4, 5, \_) \notin \Psi_0 \end{cases} \\ h = 4 \text{ e } j = 6 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_6 = (5, 4, \_) \notin \Psi_6 \\ \theta_h = \theta_4 = (6, 5, \_) \notin \Psi_4 \end{cases} \\ h = 6 \text{ e } j = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_0 = (5, 6, \_) \notin \Psi_0 \\ \theta_h = \theta_6 = (0, 5, \_) \notin \Psi_6. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Se  $\theta_i = \theta_5 = (6, 4, 0)$  então, pelas igualdades (5.4), temos que

$$\theta_i = \theta_5 = (6, 4, 0) \Rightarrow \begin{cases} h = 6 \text{ e } j = 4 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_4 = (5, 6, \_) \notin \Psi_4 \\ \theta_h = \theta_6 = (4, 5, \_) \notin \Psi_6 \end{cases} \\ h = 4 \text{ e } j = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_0 = (5, 4, \_) \notin \Psi_0 \\ \theta_h = \theta_4 = (0, 5, \_) \notin \Psi_4 \end{cases} \\ h = 0 \text{ e } j = 6 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_6 = (5, 0, \_) \notin \Psi_6 \\ \theta_h = \theta_0 = (6, 5, \_) \notin \Psi_0. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

6) Suponha que  $\theta_i \in \Psi_6 = \{(1, 5, 7), (7, 5, 1)\}$ . Se  $\theta_i = (1, 5, 7)$ , pelas igualdade (5.4), resulta que

$$\theta_i = \theta_6 = (1, 5, 7) \Rightarrow \begin{cases} h = 1 \text{ e } j = 5 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_5 = (6, 1, \_) \notin \Psi_5 \\ \theta_h = \theta_1 = (5, 6, \_) \notin \Psi_1 \end{cases} \\ h = 5 \text{ e } j = 7 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_7 = (6, 5, \_) \notin \Psi_7 \\ \theta_h = \theta_5 = (7, 6, \_) \notin \Psi_5 \end{cases} \\ h = 7 \text{ e } j = 1 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_1 = (6, 7, \_) \notin \Psi_1 \\ \theta_h = \theta_7 = (1, 6, \_) \notin \Psi_7. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Se  $\theta_i = (7, 5, 1)$  então, pelas igualdades (5.4), temos que

$$\theta_i = \theta_6 = (7, 5, 1) \Rightarrow \begin{cases} h = 7 \text{ e } j = 5 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_5 = (6, 7, \_) \notin \Psi_5 \\ \theta_h = \theta_7 = (5, 6, \_) \notin \Psi_7 \end{cases} \\ h = 5 \text{ e } j = 1 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_1 = (6, 5, \_) \notin \Psi_3 \\ \theta_h = \theta_5 = (1, 6, \_) \notin \Psi_5 \end{cases} \\ h = 1 \text{ e } j = 7 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_7 = (6, 1, \_) \notin \Psi_1 \\ \theta_h = \theta_1 = (7, 6, \_) \notin \Psi_3. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

6) Suponha que  $\theta_i \in \Psi_7 = \{(2, 6, 4), (4, 6, 2)\}$ . Se  $\theta_i = (2, 6, 4)$ , pelas igualdade (5.4), resulta que

$$\theta_i = \theta_7 = (2, 6, 4) \Rightarrow \begin{cases} h = 2 \text{ e } j = 6 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_6 = (7, 2, \_) \notin \Psi_6 \\ \theta_h = \theta_2 = (6, 7, \_) \notin \Psi_2 \end{cases} \\ h = 6 \text{ e } j = 4 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_4 = (7, 6, \_) \notin \Psi_4 \\ \theta_h = \theta_6 = (4, 7, \_) \notin \Psi_6 \end{cases} \\ h = 4 \text{ e } j = 2 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_2 = (7, 4, \_) \notin \Psi_2 \\ \theta_h = \theta_4 = (2, 7, \_) \notin \Psi_4. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Se  $\theta_i = (6, 4, 2)$  então, pelas igualdades (5.4), temos que

$$\theta_i = \theta_7 = (6, 4, 2) \Rightarrow \begin{cases} h = 6 \text{ e } j = 4 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_4 = (7, 6, \_) \notin \Psi_4 \\ \theta_h = \theta_6 = (4, 7, \_) \notin \Psi_6 \end{cases} \\ h = 4 \text{ e } j = 2 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_2 = (7, 4, \_) \notin \Psi_2 \\ \theta_h = \theta_4 = (2, 7, \_) \notin \Psi_4 \end{cases} \\ h = 2 \text{ e } j = 6 \Rightarrow \begin{cases} \theta_j = \theta_6 = (7, 2, \_) \notin \Psi_6 \\ \theta_h = \theta_2 = (6, 7, \_) \notin \Psi_2. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Portanto, todos os casos de (A.6) - (A.19) são contraditórios, conseqüentemente, não existe  $\theta_i \in \Psi$  que produz um mergulho de  $H_{8,12}$  com região triangula, o que mostra a afirmação do teorema. ■

# APÊNDICE E

## Modelos de Modulações do Octaedro

A Tabela E.0.1 contém todas as relações de partições referentes à modulações sobre superfícies vindos de mergulhos do octaedro. Visando diminuir o tamanho da tabela foram utilizadas, além das duas notações de partições usuais

$$\beta_1 R_{\alpha_1} \beta_2 R_{\alpha_2} \cdots \beta_k R_{\alpha_s} \text{ e } R_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} \text{ (ou } R_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}),$$

as notações compactas  $R_{\alpha_i \alpha_2 \dots \alpha_s}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}$  e  $R_{\alpha_i, \alpha_2, \dots, \alpha_s}^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}$ .

Tabela E.0.1: Partições das classes de modulações sobre superfícies do octaedro  $H'_{6,12}$

Modulações do octaedro sobre $S_\mu$										
S/b	Partições de mergulhos com bordos									
$\Omega$	$S$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	#
$\Xi_1$	$8R_3$	$7R_3$	$6R_3$	$5R_3$	$4R_3$	$3R_3$	$2R_3$	$R_3$	$H'_{6,12}$	6
#	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8
Modulações do octaedro sobre $P_\mu$										
S/b	Partições de mergulhos com bordos									
$\Omega$	$P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$		#
$\Xi_2$	$6R_3R_6$	$6R_3$ $5R_3R_6$	$5R_3$ $4R_3R_6$	$4R_3$ $3R_3R_6$	$3R_3$ $2R_3R_6$	$2R_3$ $R_3R_6$	$R_3$ $R_6$	$H'_{6,12}$		14
$\Xi_3$	$5R_3R_4R_5$	$5R_3R_4$ $5R_3R_5$ $4R_3R_4R_5$	$5R_3, 4R_3R_4$ $3R_3R_4R_5$ $4R_3R_5$	$4R_3, 3R_3R_4$ $3R_3R_5$ $2R_3R_4R_5$	$3R_3, 2R_3R_4$ $2R_3R_5$ $R_3R_4R_5$	$2R_3, R_3R_4$ $R_3R_5$ $R_4R_5$	$R_3$ $R_4$ $R_5$	$H'_{6,12}$		24
$\Xi_4$	$4R_33R_4$	$4R_32R_4$ $3R_33R_4$	$4R_3R_4$ $3R_32R_4$ $2R_33R_4$	$4R_3, 3R_3R_4$ $2R_32R_4$ $R_33R_4$	$3R_3, 3R_4$ $2R_3R_4$ $R_32R_4$	$2R_3$ $R_3R_4$ $2R_4$	$R_3$ $R_4$	$H'_{6,12}$		20
#	0/3	1/6	2/7	3/7	4/6	4/5	0/7	0/3		14/44

Continua na próxima página

Tabela 5.3.5 - Continuação da página anterior

Modulações do octaedro sobre $T_\mu$ e $2P_\mu$								
Sem bordo		Partições de mergulhos com bordos						
$\Xi$	$T, 2P$	$T_1, 2P_1$	$T_2, 2P_2$	$T_3, 2P_3$	$T_4, 2P_4$	$T_5, 2P_5$	$T_6, 2P_6$	#
$\Xi_5$	$R_{333339}$	$R_3^5, R_{39}^{41}$	$R_3^4, R_{39}^{31}$	$R_3^3, R_{39}^{21}$	$R_3^2, R_{39}^{11}$	$R_3^1, R_9^1$	$H'_{6,12}$	4/12
$\Xi_6$	$R_{333348}$	$R_{34}^{41}, R_{38}^{41}$ $R_{348}^{311}$	$R_3^4, R_{34}^{31}$ $R_{38}^{31}, R_{348}^{211}$	$R_3^3, R_{34}^{21}$ $R_{38}^{21}, R_{348}^{111}$	$R_3^2, R_{34}^{11}$ $R_{38}^{11}, R_{48}^{11}$	$R_3^1, R_4^1$ $R_8^1$	$H'_{6,12}$	20
$\Xi_7$	$R_{333357}$	$R_{35}^{41}, R_{37}^{41}$ $R_{357}^{311}$	$R_3^4, R_{35}^{31}$ $R_{37}^{31}, R_{357}^{211}$	$R_3^3, R_{35}^{21}$ $R_{37}^{21}, R_{357}^{111}$	$R_3^2, R_{35}^{11}$ $R_{37}^{11}, R_{57}^{11}$	$R_3^1, R_5^1$ $R_7^1$	$H'_{6,12}$	20
$\Xi_8$	$R_{333366}$	$R_{36}^{41}, R_{36}^{32}$	$R_3^4, R_{36}^{31}, R_{36}^{22}$	$R_3^3, R_{36}^{21}, R_{36}^{12}$	$R_3^2, R_6^2, R_{36}^{11}$	$R_3^1, R_6^1$	$H'_{6,12}$	15
$\Xi_9$	$R_{333447}$	$R_{34}^{32}, R_{347}^{311}$ $R_{347}^{221}$	$R_{34}^{31}, R_{37}^{31}, R_{34}^{22}$ $R_{347}^{211}, R_{347}^{121}$	$R_3^3, R_{34}^{21}, R_{37}^{21}$ $R_{34}^{12}, R_{47}^{21}, R_{347}^{111}$	$R_3^2, R_4^2, R_{34}^{11}$ $R_{37}^{11}, R_{47}^{11}$	$R_3^1, R_4^1$ $R_7^1$	$H'_{6,12}$	24
$\Xi_{10}$	$R_{333456}$	$R_{345}^{311}$ $R_{346}^{311}$ $R_{356}^{311}$	$R_{34}^{31}, R_{35}^{31}, R_{36}^{31}$ $R_{345}^{211}, R_{346}^{211}$ $R_{356}^{211}, R_{3456}^{1111}$	$R_3^3, R_{34}^{21}, R_{35}^{21}$ $R_{36}^{21}, R_{345}^{211}, R_{346}^{211}$ $R_{356}^{211}, R_{456}^{1111}$	$R_3^2, R_{34}^{11}, R_{35}^{11}$ $R_{36}^{11}, R_{45}^{11}$ $R_{46}^{11}, R_{56}^{11}$	$R_3^1, R_4^1$ $R_5^1$ $R_6^1$	$H'_{6,12}$	31
$\Xi_{11}$	$R_{333555}$	$R_{35}^{32}, R_{35}^{23}$	$R_{35}^{31}, R_{35}^{13}, R_{35}^{22}$	$R_3^3, R_5^3, R_{35}^{21}, R_{35}^{12}$	$R_3^2, R_5^2, R_{35}^{11}$	$R_3^1, R_5^1$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{12}$	$R_{333446}$	$R_{34}^{23}, R_{346}^{131}$ $R_{346}^{221}$	$R_{34}^{13}, R_{46}^{31}, R_{34}^{22}$ $R_{346}^{211}, R_{346}^{121}$	$R_{34}^{12}, R_4^3, R_{36}^{21}$ $R_{34}^{21}, R_{346}^{111}, R_{46}^{21}$	$R_3^2, R_4^2, R_{34}^{11}$ $R_{36}^{11}, R_{46}^{11}$	$R_3^1, R_4^1$ $R_6^1$	$H'_{6,12}$	24
$\Xi_{13}$	$R_{3334455}$	$R_{345}^{221}, R_{345}^{212}$ $R_{345}^{122}$	$R_{34}^{22}, R_{35}^{22}$ $R_{45}^{22}$	$R_{34}^{21}, R_{34}^{12}, R_{35}^{21}$ $R_{35}^{12}, R_{45}^{21}, R_{45}^{12}$	$R_3^2, R_{34}^{11}, R_4^2$ $R_{35}^{11}, R_5^2, R_{45}^{11}$	$R_3^1, R_4^1$ $R_5^1$	$H'_{6,12}$	23
$\Xi_6$	$R_{344445}$	$R_{34}^{14}, R_{45}^{41}$ $R_{345}^{131}$	$R_{34}^{13}, R_4^4$ $R_{45}^{31}, R_{348}^{121}$	$R_{34}^{12}, R_4^3$ $R_{45}^{21}, R_{345}^{111}$	$R_{34}^{11}, R_4^2$ $R_{35}^{11}, R_{45}^{11}$	$R_3^1, R_4^1$ $R_5^1$	$H'_{6,12}$	20
$\Xi_{15}$	$R_{444444}$	$R_4^5$	$R_4^4$	$R_4^3$	$R_4^2$	$R_4^1$	$H'_{6,12}$	7
#	11	28	41	48	44	29	11	212

Modulações do octaedro sobre $3P_\mu$							
Sem bordo		Partições de mergulhos com bordos					
$\Xi$	$3P$	$3P_1$	$3P_2$	$3P_3$	$3P_4$	$3P_5$	#
$\Xi_{16}$	$R_{3,3,3,3,12}$	$R_3^4, 3R_{3,12}^{3,1}$	$R_3^3, R_{3,12}^{2,1}$	$R_3^3, R_{3,12}^{1,1}$	$R_3, R_{12}$	$H'_{6,12}$	10
$\Xi_{17}$	$R_{3,3,3,3,4,11}$	$R_{3,4}^{3,1}, 3R_{3,11}^{3,1}$ $R_{3,4,11}^{2,1,1}$	$R_3^3, 2R_{3,4}^{2,1}$ $R_{3,11}^{2,1}, R_{3,4,11}^{1,1,1}$	$R_3^3, R_{3,4}^{1,1}$ $R_{3,11}^{1,1}, R_{4,11}^{1,1}$	$R_3, R_4$ $R_{11}$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{18}$	$R_{3,3,3,3,5,10}$	$R_{3,5}^{3,1}, R_{3,10}^{3,1}$ $2R_{3,5,10}^{2,1,1}$	$R_3^3, R_{3,5}^{2,1}$ $R_{3,10}^{2,1}, R_{3,5,10}^{1,1,1}$	$R_3^3, R_{3,5}^{1,1}$ $R_{3,10}^{1,1}, R_{5,10}^{1,1}$	$R_3, R_5$ $R_{10}$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{19}$	$R_{3,3,3,3,6,9}$	$R_{3,6}^{3,1}, 3R_{3,9}^{3,1}$ $R_{3,6,9}^{2,1,1}$	$R_3^3, R_{3,6}^{2,1}$ $R_{3,9}^{2,1}, R_{3,6,9}^{1,1,1}$	$R_3^2, R_{3,6}^{1,1}$ $R_{3,9}^{1,1}, R_{6,9}^{1,1}$	$R_3, R_6$ $R_9$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{20}$	$R_{3,3,3,3,7,8}$	$R_{3,7}^{3,1}, 3R_{3,8}^{3,1}$ $R_{3,7,8}^{2,1,1}$	$R_3^3, R_{3,7}^{2,1}$ $R_{3,8}^{2,1}, R_{3,7,8}^{1,1,1}$	$R_3^3, R_{3,7}^{1,1}$ $R_{3,8}^{1,1}, R_{7,8}^{1,1}$	$R_3, R_7$ $R_8$	$H'_{6,12}$	16
#	5	1/13	5/13	5/13	14	5	11/63=74

Continua na próxima página

Tabela 5.3.5 - Continuação da página anterior

Modulações do octaedro sobre $3P_\mu$							
Sem bordo		Partições de mergulhos com bordos					
$\Xi$	$3P$	$3P_1$	$3P_2$	$3P_3$	$3P_4$	$3P_5$	#
$\Xi_{21}$	$R_{3,3,4,4,10}$	$2R_32R_4$ $2R_3R_4R_{10}$ $R_32R_4R_{10}$	$2R_3R_4, 2R_3R_{10}$ $R_32R_4, 2R_4R_{10}$ $R_3R_4R_{10}$	$2R_3, R_3R_4$ $R_3R_{10}$ $R_4R_{10}, 2R_4$	$R_3$ $R_4$ $R_{10}$	$H'_{6,12}$	18
$\Xi_{22}$	$2R_3R_4R_5R_9$	$2R_3R_4R_5$ $2R_3R_4R_9$ $2R_3R_5R_9$ $R_3R_4R_5R_9$	$2R_3R_4, 2R_3R_5$ $R_3R_4R_5, 2R_3R_9$ $R_3R_4R_9, R_3R_5R_9$ $R_4R_5R_9$	$2R_3, R_3R_4$ $R_3R_5, R_3R_9$ $R_4R_5, R_4R_9$ $R_5R_9$	$R_3$ $R_4$ $R_5$ $R_9$	$H'_{6,12}$	24
$\Xi_{23}$	$2R_3R_4R_6R_8$	$2R_3R_4R_6$ $2R_3R_4R_8$ $2R_3R_6R_8$ $R_3R_4R_6R_8$	$2R_3R_4, 2R_3R_6$ $2R_3R_8, R_3R_4R_6$ $R_3R_4R_8, R_3R_6R_8$ $R_4R_6R_8$	$2R_3, R_3R_4$ $R_3R_6, R_3R_8$ $R_4R_6, R_4R_8$ $R_6R_8$	$R_3$ $R_4$ $R_6$ $R_8$	$H'_{6,12}$	24
$\Xi_{24}$	$R_{3,3,4,7,7}$	$2R_32R_7$ $2R_3R_4R_7$ $R_3R_42R_7$	$2R_3R_4, 2R_3R_7$ $R_32R_7, R_42R_7$ $R_3R_4R_7$	$2R_3, R_3R_4$ $R_3R_7$ $R_4R_7, 2R_7$	$R_3$ $R_4$ $R_7$	$H'_{6,12}$	18
$\Xi_{25}$	$R_{3,3,5,5,8}$	$2R_32R_5$ $2R_3R_5R_8$ $R_32R_5R_8$	$2R_3R_5, 2R_3R_7$ $R_32R_5, 2R_5R_8$ $R_3R_5R_8$	$2R_3, R_3R_5$ $R_3R_8$ $R_5R_8, 2R_5$	$R_3$ $R_5$ $R_8$	$H'_{6,12}$	18
$\Xi_{26}$	$2R_3R_5R_6R_7$	$2R_3R_5R_6$ $2R_3R_5R_7$ $2R_3R_6R_7$ $R_3R_5R_6R_7$	$2R_3R_5, 2R_3R_6$ $2R_3R_7, R_3R_5R_6$ $R_3R_5R_7, R_3R_6R_7$ $R_5R_6R_7$	$2R_3, R_3R_5$ $R_3R_6, R_3R_7$ $R_5R_6, R_5R_7$ $R_6R_7$	$R_3$ $R_5$ $R_6$ $R_7$	$H'_{6,12}$	24
$\Xi_{27}$	$R_{3,3,6,6,6}$	$R_33R_6$ $2R_32R_6$	$3R_6, 2R_3R_6$ $R_32R_6$	$2R_3, R_3R_6$ $2R_6$	$R_3$ $R_6$	$H'_{6,12}$	12
$\Xi_{28}$	$R_{3,4,4,4,9}$	$R_33R_4, 3R_4R_9$ $R_32R_4R_9$	$3R_4, R_32R_4$ $2R_4R_9, R_3R_4R_9$	$2R_4, R_3R_4$ $R_3R_9, R_4R_9$	$R_3, R_4$ $R_9$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{29}$	$R_32R_4R_5R_8$	$R_32R_4R_5$ $R_32R_4R_8$ $2R_4R_5R_8$ $R_3R_4R_5R_8$	$R_32R_4, 2R_4R_5$ $2R_4R_8, R_3R_4R_5$ $R_3R_4R_8, R_3R_5R_8$ $R_4R_5R_8$	$2R_4, R_3R_4$ $R_3R_5, R_3R_8$ $R_4R_5, R_4R_8$ $R_5R_8$	$R_3$ $R_4$ $R_5$ $R_8$	$H'_{6,12}$	24
$\Xi_{30}$	$R_32R_4R_6R_7$	$R_32R_4R_6$ $R_32R_4R_7$ $2R_4R_6R_7$ $R_3R_4R_6R_7$	$R_32R_4, 2R_4R_6$ $2R_4R_7, R_3R_4R_6$ $R_3R_4R_7, R_3R_6R_7$ $R_4R_6R_7$	$2R_4, R_3R_4$ $R_3R_6, R_3R_7$ $R_4R_6, R_4R_7$ $R_6R_7$	$R_3$ $R_4$ $R_6$ $R_7$	$H'_{6,12}$	24
$\Xi_{31}$	$R_3R_42R_5R_7$	$R_3R_42R_5$ $R_32R_5R_7$ $R_42R_5R_7$ $R_3R_4R_5R_7$	$R_32R_5, R_42R_5$ $2R_5R_7, R_3R_4R_5$ $R_3R_4R_7, R_3R_5R_7$ $R_4R_5R_7$	$2R_5, R_3R_4$ $R_3R_6, R_3R_7$ $R_4R_5, R_4R_7$ $R_5R_7$	$R_3$ $R_4$ $R_5$ $R_7$	$H'_{6,12}$	24
#	11	38	$2/62 = 64$	$15/49$	38	11	226

Continua na próxima página

Tabela 5.3.5 - Continuação da página anterior

Modulações do octaedro sobre $3P_\mu$							
Sem bordo		Partições de mergulhos com bordos					
$\Xi$	$3P$	$3P_1$	$3P_2$	$3P_3$	$3P_4$	$3P_5$	#
$\Xi_{32}$	$R_3R_4R_52R_6$	$R_3R_42R_6$ $R_3R_52R_6$ $R_4R_52R_6$ $R_3R_4R_5R_6$	$R_32R_6, R_42R_6$ $R_52R_6, R_3R_4R_5$ $R_3R_4R_6, R_3R_5R_6$ $R_4R_5R_6$	$R_3R_4, R_3R_5$ $R_3R_6, R_3R_5$ $R_4R_6, R_5R_6$ $2R_6$	$R_3$ $R_4$ $R_5$ $R_6$	$H'_{6,12}$	24
$\Xi_{33}$	$R_33R_5R_6$	$R_33R_5, 3R_5R_6$ $R_32R_5R_6$	$3R_6, R_32R_5$ $2R_5R_6, R_3R_5R_6$	$R_3R_5, R_3R_6$ $R_5R_6, 2R_5$	$R_3, R_5$ $R_6$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{34}$	$R_{4,4,4,4,8}$	$4R_4, 4R_4R_8$	$3R_4, 2R_4R_8$	$2R_4, R_4R_8$	$R_4, R_8$	$H'_{6,12}$	10
$\Xi_{35}$	$3R_4R_5R_7$	$3R_4R_5, 3R_4R_7$ $2R_4R_5R_7$	$3R_4, 2R_4R_5$ $2R_4R_7, R_4R_5R_7$	$2R_4, R_4R_5$ $R_4R_7, R_5R_7$	$R_4, R_5$ $R_7$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{36}$	$3R_42R_6$	$3R_4R_6$ $2R_42R_6$	$3R_4, 2R_4R_6$ $R_42R_6$	$2R_4, R_4R_6$ $2R_6$	$R_4$ $R_6$	$H'_{6,12}$	12
$\Xi_{37}$	$R_{4,4,5,5,6}$	$2R_42R_5$ $2R_4R_5R_6$ $R_42R_5R_6$	$2R_4R_5, 2R_4R_6$ $R_42R_5, 2R_5R_6$ $R_4R_5R_6$	$2R_4, R_4R_5$ $R_4R_6$ $R_5R_6, 2R_5$	$R_4$ $R_5$ $R_6$	$H'_{6,12}$	18
#	6	1/16=17	4/21=25	8/17=25	17	6	96
Modulações do octaedro sobre $2T_\mu$ e $4P_\mu$							
Sem bordo		Partições de mergulhos com bordos					
$\Xi$	$2T, 4P$	$2T_1, 4P_1$	$2T_2, 4P_2$	$2T_3, 4P_3$	$2T_4, 4P_4$	#	
$\Xi_{37}$	$R_3R_3R_3R_{15}$	$3R_3, 2R_3R_{15}$	$2R_3, R_3R_{15}$	$R_3, R_{15}$	$H'_{6,12}$	8	
$\Xi_{38}$	$R_3R_3R_4R_{14}$	$2R_3R_4, 2R_3R_{14}$ $R_3R_4R_{14}$	$2R_3, R_3R_4$ $R_3R_{14}, R_4R_{14}$	$R_3, R_4$ $R_{14}$	$H'_{6,12}$	12	
$\Xi_{39}$	$R_3R_3R_5R_{13}$	$2R_3R_5, 2R_3R_{13}$ $R_3R_5R_{13}$	$2R_3, R_3R_5$ $R_3R_{13}, R_5R_{13}$	$R_3, R_5$ $R_{13}$	$H'_{6,12}$	12	
$\Xi_{40}$	$R_3R_3R_6R_{12}$	$2R_3R_6, 2R_3R_{12}$ $R_3R_6R_{12}$	$2R_3, R_3R_6$ $R_3R_{12}, R_6R_{12}$	$R_3, R_6$ $R_{12}$	$H'_{6,12}$	12	
$\Xi_{41}$	$R_3R_3R_7R_{11}$	$2R_3R_7, 2R_3R_{11}$ $R_3R_7R_{11}$	$2R_3, R_3R_7$ $R_3R_{11}, R_7R_{11}$	$R_3, R_7$ $R_{11}$	$H'_{6,12}$	12	
$\Xi_{42}$	$R_3R_3R_8R_{10}$	$2R_3R_8, 2R_3R_{10}$ $R_3R_8R_{10}$	$2R_3, R_3R_8$ $R_3R_{10}, R_8R_{10}$	$R_3, R_8$ $R_{10}$	$H'_{6,12}$	12	
$\Xi_{43}$	$R_3R_3R_9R_9$	$2R_3R_9, R_32R_9$	$2R_3, R_3R_9, 2R_9$	$R_3, R_9$	$H'_{6,12}$	9	
$\Xi_{44}$	$R_3R_4R_4R_{13}$	$R_32R_4, 2R_4R_{13}$ $R_3R_4R_{13}$	$R_3R_4, 2R_4$ $R_3R_{13}, R_4R_{13}$	$R_3, R_4$ $R_{13}$	$H'_{6,12}$	12	
$\Xi_{45}$	$R_3R_4R_5R_{12}$	$R_3R_4R_5$ $R_3R_4R_{12}$ $R_3R_5R_{12}$ $R_4R_5R_{12}$	$R_3R_4, R_3R_5$ $R_3R_{12}, R_4R_5$ $R_4R_{12}$ $R_5R_{12}$	$R_3$ $R_4$ $R_5$ $R_{12}$	$H'_{6,12}$	16	
#	9	1/25 = 26	9/26 = 35	26	9	105	

Continua na próxima página

Tabela 5.3.5 - Continuação da página anterior

Modulações do octaedro sobre $2T_\mu, 4P_\mu$						
Sem bordo		Partições de mergulhos com bordos				
$\Xi$	$2T, 4P$	$2T_1, 4P_1$	$2T_2, 4P_2$	$2T_3, 4P_3$	$2T_4, 4P_4$	#
$\Xi_{46}$	$R_3R_4R_6R_{11}$	$R_3R_4R_6, R_3R_4R_{11}$ $R_3R_6R_{11}, R_4R_6R_{11}$	$R_3R_4, R_3R_6, R_3R_{11}$ $R_4R_6, R_4R_{11}, R_6R_{11}$	$R_3, R_4$ $R_6, R_{11}$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{47}$	$R_3R_4R_7R_{10}$	$R_3R_4R_7, R_3R_4R_{10}$ $R_3R_7R_{10}, R_4R_7R_{10}$	$R_3R_4, R_3R_7, R_3R_{10}$ $R_4R_7, R_4R_{10}, R_7R_{10}$	$R_3, R_4$ $R_7, R_{10}$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{48}$	$R_3R_4R_8R_9$	$R_3R_4R_7, R_3R_4R_9$ $R_3R_8R_9, R_4R_8R_9$	$R_3R_4, R_3R_8, R_3R_9$ $R_4R_8, R_4R_9, R_8R_9$	$R_3, R_4$ $R_8, R_9$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{49}$	$R_3R_5R_5R_{11}$	$R_32R_5, 2R_5R_{11}$ $R_3R_5R_{11}$	$R_3R_5, 2R_5$ $R_3R_{11}, R_5R_{11}$	$R_3, R_5$ $R_{11}$	$H'_{6,12}$	12
$\Xi_{50}$	$R_3R_5R_6R_{10}$	$R_3R_5R_6, R_3R_4R_{12}$ $R_3R_5R_{12}, R_4R_5R_{12}$	$R_3R_5, R_3R_6, R_3R_{10}$ $R_5R_6, R_5R_{10}, R_6R_{10}$	$R_3, R_5$ $R_6, R_{10}$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{51}$	$R_3R_5R_7R_9$	$R_3R_5R_7, R_3R_5R_9$ $R_3R_7R_9, R_7R_7R_9$	$R_3R_5, R_3R_7, R_3R_9$ $R_5R_7, R_5R_9, R_7R_9$	$R_3, R_5$ $R_7, R_9$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{52}$	$R_3R_5R_8R_8$	$R_3R_5R_8$ $R_32R_8, R_52R_8$	$R_3R_5, R_3R_8$ $R_5R_8, 2R_8$	$R_3, R_5$ $R_8$	$H'_{6,12}$	12
$\Xi_{53}$	$R_3R_6R_6R_9$	$R_32R_6, 2R_6R_9$ $R_3R_6R_9$	$R_3R_6, R_3R_9$ $R_6R_9, 2R_6$	$R_3, R_6$ $R_9$	$H'_{6,12}$	12
$\Xi_{54}$	$R_3R_6R_7R_8$	$R_3R_6R_7, R_3R_6R_8$ $R_3R_7R_8, R_6R_7R_8$	$R_3R_6, R_3R_7, R_3R_8$ $R_6R_7, R_6R_8, R_7R_8$	$R_3, R_6$ $R_7, R_8$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{55}$	$R_3R_7R_7R_7$	$R_32R_7, 3R_7$	$R_3R_7, 2R_7$	$R_3, R_7$	$H'_{6,12}$	8
$\Xi_{56}$	$R_4R_4R_4R_{12}$	$3R_4, 2R_4R_{12}$	$2R_4, R_4R_{12}$	$R_4, R_{12}$	$H'_{6,12}$	8
$\Xi_{57}$	$R_4R_4R_5R_{11}$	$2R_4R_5, 2R_4R_{11}$ $R_4R_5R_{11}$	$2R_4, R_4R_5$ $R_4R_{11}, R_5R_{11}$	$R_4, R_5$ $R_{11}$	$H'_{6,12}$	12
$\Xi_{58}$	$R_4R_4R_6R_{10}$	$2R_4R_6, 2R_4R_{10}$ $R_4R_6R_{10}$	$2R_4, R_4R_6$ $R_4R_{10}, R_6R_{10}$	$R_4, R_6$ $R_{10}$	$H'_{6,12}$	12
$\Xi_{59}$	$R_4R_4R_7R_9$	$2R_4R_7, 2R_4R_9$ $R_4R_7R_9$	$2R_4, R_4R_7$ $R_4R_9, R_7R_9$	$R_4, R_7$ $R_{19}$	$H'_{6,12}$	12
$\Xi_{60}$	$R_4R_4R_8R_8$	$2R_4R_8, R_42R_8$	$2R_4, R_4R_8, 2R_8$	$R_4, R_8$	$H'_{6,12}$	9
$\Xi_{61}$	$R_4R_5R_5R_{10}$	$R_42R_5, 2R_5R_{10}$ $R_4R_5R_{10}$	$R_4R_5, 2R_5,$ $R_4R_{10}, R_5R_{10}$	$R_4, R_5$ $R_{10}$	$H'_{6,12}$	12
$\Xi_{62}$	$R_4R_5R_6R_9$	$R_4R_5R_6, R_4R_5R_9$ $R_4R_6R_9, R_5R_6R_9$	$R_4R_5, R_4R_6, R_4R_9$ $R_5R_6, R_5R_9, R_6R_9$	$R_4, R_5$ $R_6, R_9$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{63}$	$R_4R_5R_7R_8$	$R_4R_5R_7, R_4R_5R_8$ $R_4R_7R_8, R_5R_7R_8$	$R_4R_5, R_4R_7, R_4R_8$ $R_5R_7, R_5R_8, R_7R_8$	$R_4, R_5$ $R_7, R_8$	$H'_{6,12}$	16
$\Xi_{64}$	$R_4R_6R_6R_8$	$R_42R_6, 2R_6R_8$ $R_4R_6R_8$	$R_4R_6, 2R_6$ $R_4R_8, R_6R_8$	$R_4, R_6$ $R_{11}$	$H'_{6,12}$	12
$\Xi_{65}$	$R_4R_6R_7R_7$	$R_42R_7, R_62R_7$ $R_4R_6R_7$	$R_4R_6, R_4R_7$ $R_6R_7, 2R_7$	$R_4, R_6$ $R_7$	$H'_{6,12}$	12
#	20	$2/63 = 65/67$	$13/78 = 91$	65	20	261

Continua na próxima página

Tabela 5.3.5 - Continuação da página anterior

Modulações do octaedro sobre $2T_\mu$ e $4P_\mu$						
Sem bordo		Partições de mergulhos com bordos				
$\Xi$	$2T, 4P$	$2T_1, 4P_1$	$2T_2, 4P_2$	$2T_3, 4P_3$	$2T_4, 4P_4$	#
$\Xi_{66}$	$R_5R_5R_5R_9$	$3R_5, 2R_5R_9$	$2R_5, R_5R_9$	$R_5, R_9$	$H'_{6,12}$	8
$\Xi_{67}$	$R_5R_5R_6R_8$	$2R_5R_6$ $2R_5R_9, R_5R_6R_9$	$2R_5, R_5R_6$ $R_5R_9, R_6R_9$	$R_5, R_6$ $R_9$	$H'_{6,12}$	12
$\Xi_{68}$	$R_5R_5R_7R_7$	$2R_5R_7, R_52R_7$	$2R_5, R_5R_7, 2R_7$	$R_5, R_7$	$H'_{6,12}$	9
$\Xi_{69}$	$R_5R_6R_6R_7$	$R_52R_6, 2R_6R_7$ $R_5R_6R_7$	$R_5R_6, 2R_6$ $R_5R_7, R_6R_7$	$R_5, R_6$ $R_7$	$H'_{6,12}$	12
$\Xi_{68}$	$R_6R_6R_6R_6$	$3R_6$	$2R_6$	$R_6$	$H'_{6,12}$	5
#	5	$1/10 = 11$	$6/8 = 14$	11	5	46
Modulações do octaedro sobre $5P_\mu$						
Sem bordo		Partições de mergulhos com bordos				
$\Xi$	$5P$	$5P_1$	$5P_2$	$5P_3$		#
$\Xi_{69}$	$R_3R_3R_{18}$	$2R_3, R_3R_{18}$	$R_3, R_{18}$	$H'_{6,12}$		6
$\Xi_{70}$	$R_3R_4R_{17}$	$R_3R_4, R_3R_{17}, R_4R_{17}$	$R_3, R_4, R_{17}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{71}$	$R_3R_5R_{16}$	$R_3R_5, R_3R_{16}, R_5R_{16}$	$R_3, R_5, R_{16}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{72}$	$R_3R_6R_{15}$	$R_3R_6, R_3R_{15}, R_6R_{15}$	$R_3, R_6, R_{15}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{73}$	$R_3R_7R_{14}$	$R_3R_7, R_3R_{14}, R_7R_{14}$	$R_3, R_7, R_{14}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{74}$	$R_3R_8R_{13}$	$R_3R_8, R_3R_{13}, R_8R_{13}$	$R_3, R_8, R_{13}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{75}$	$R_3R_9R_{12}$	$R_3R_9, R_3R_{12}, R_9R_{12}$	$R_3, R_9, R_{12}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{76}$	$R_3R_{10}R_{11}$	$R_3R_{10}, R_3R_{11}, R_{10}R_{11}$	$R_3, R_{10}, R_{11}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{77}$	$R_4R_4R_{16}$	$2R_4, R_4R_{16}$	$R_4, R_{16}$	$H'_{6,12}$		6
$\Xi_{78}$	$R_4R_5R_{15}$	$R_4R_5, R_4R_{15}, R_5R_{15}$	$R_4, R_5, R_{15}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{79}$	$R_4R_6R_{14}$	$R_4R_6, R_4R_{14}, R_6R_{14}$	$R_4, R_6, R_{14}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{80}$	$R_4R_7R_{13}$	$R_4R_7, R_4R_{13}, R_7R_{13}$	$R_4, R_7, R_{13}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{81}$	$R_4R_8R_{12}$	$R_4R_8, R_4R_{12}, R_8R_{12}$	$R_4, R_8, R_{12}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{82}$	$R_4R_9R_{11}$	$R_4R_9, R_4R_{11}, R_9R_{11}$	$R_4, R_9, R_{11}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{83}$	$R_4R_{10}R_{10}$	$R_4R_{10}, 2R_4$	$R_4, R_{10}$	$H'_{6,12}$		6
$\Xi_{84}$	$R_5R_5R_{14}$	$2R_5, R_5R_{14}$	$R_5, R_{14}$	$H'_{6,12}$		6
$\Xi_{85}$	$R_5R_6R_{13}$	$R_5R_6, R_5R_{13}, R_6R_{13}$	$R_5, R_6, R_{13}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{86}$	$R_5R_7R_{12}$	$R_5R_7, R_5R_{12}, R_7R_{12}$	$R_5, R_7, R_{12}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{87}$	$R_5R_8R_{11}$	$R_5R_8, R_5R_{11}, R_8R_{11}$	$R_5, R_8, R_{11}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{88}$	$R_5R_9R_{10}$	$R_5R_9, R_5R_{10}, R_9R_{10}$	$R_5, R_9, R_{10}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{89}$	$R_6R_6R_{12}$	$2R_6, R_6R_{12}$	$R_6, R_{12}$	$H'_{6,12}$		6
$\Xi_{90}$	$R_6R_7R_{11}$	$R_6R_7, R_6R_{11}, R_7R_{11}$	$R_6, R_7, R_{11}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{91}$	$R_6R_8R_{10}$	$R_6R_8, R_6R_{10}, R_8R_{10}$	$R_6, R_8, R_{10}$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{92}$	$R_6R_9R_9$	$R_6R_9, 2R_9$	$R_6, R_9$	$H'_{6,12}$		6
$\Xi_{93}$	$R_7R_7R_{10}$	$2R_7, R_7R_{10}$	$R_7, R_{10}$	$H'_{6,12}$		6
$\Xi_{94}$	$R_7R_8R_9$	$R_7R_8, R_7R_9, R_8R_9$	$R_7, R_8, R_9$	$H'_{6,12}$		8
$\Xi_{95}$	$R_8R_8R_8$	$2R_8$	$R_8$	$H'_{6,12}$		4
#	27	$8/64 = 72$	72	27		198

Continua na próxima página

Tabela 5.3.5 - Continuação da página anterior

Modulações do octaedro sobre $3T_\mu$ e $6P_\mu$				
Partições sem bordos		Partições com bordos		
$\Xi$	$3T, 3P$	$3T_1, 3P_1$	$3T_2, 3P_2$	#
$\Xi_{96}$	$R_3R_{21}$	$R_3, R_{21}$	$H'_{6,12}$	4
$\Xi_{97}$	$R_4R_{20}$	$R_4, R_{20}$	$H'_{6,12}$	4
$\Xi_{98}$	$R_5R_{19}$	$R_5, R_{19}$	$H'_{6,12}$	4
$\Xi_{99}$	$R_6R_{18}$	$R_6, R_{18}$	$H'_{6,12}$	4
$\Xi_{100}$	$R_7R_{17}$	$R_7, R_{17}$	$H'_{6,12}$	4
$\Xi_{101}$	$R_8R_{16}$	$R_8, R_{16}$	$H'_{6,12}$	4
$\Xi_{102}$	$R_9R_{15}$	$R_9, R_{15}$	$H'_{6,12}$	4
$\Xi_{103}$	$R_{10}R_{14}$	$R_{10}, R_{14}$	$H'_{6,12}$	4
$\Xi_{104}$	$R_{11}R_{13}$	$R_{11}, R_{13}$	$H'_{6,12}$	4
$\Xi_{105}$	$2R_{12}$	$R_{12}$	$H'_{6,12}$	3
#	1/10	19	10	39
Modulações do octaedro sobre $7P_\mu$				
Partições sem bordos		Partições com bordos		
$\Xi$	$7P$	$3T_1, 3P_1$	#	
$\Xi_{106}$	$R_{24}$	$H'_{6,12}$	2	
#	1	1	2	



# APÊNDICE F

## Análises de Mergulhos Mínimos Maximais de Grafos

Análises sobre mergulhos mínimos maximais idênticos de grafos é importante porque fornece informação sobre o alfabeto da modulações QAMS's e o conjunto de superfícies sobre as quais as modulações se encontram. Temos quatro casos a serem analisados. A análise será realizada dividida em quatro partes.

### F.1 Mergulhos Mínimos Maximais Orientáveis

Suponhamos que os grafo  $G(p, q)$  e  $H(r, s)$  possuem mergulhos mínimos maximais idênticos orientáveis e que estes ocorrem em superfícies orientáveis de gêneros  $\gamma$  e  $\lambda$ , respectivamente. Pelo Teorema 2.4.8 os mergulhos maximais orientáveis possuem 2 ou 1 regiões. Assumiremos que o mergulho máximo não-orientável possui uma região. Se  $\mu$  é o número de regiões dos mergulho mínimo, pelo Teorema 2.4.2,  $G$  possui mergulhos orientáveis em toda superfície de gênero  $k$ , tal que

$$\gamma \leq k \leq \gamma_{\max} \text{ e } \lambda \leq k \leq \lambda_{\max}.$$

Observamos que no mergulho mínimo de um grafo o valor de  $\mu$  é máximo, por isso, o número de regiões dos mergulhos mínimos orientáveis e não-orientáveis serão indicados às vezes por  $\mu_{\max}$  e  $\bar{\mu}_{\max}$ .

Para efeito de simplificação, o mergulho de um grafo  $G$ ,  $G \hookrightarrow \Omega \equiv \cup_{i=1}^k R_{\alpha_i}^i$  será indicado na forma compacta  $\Omega^k$ , pois o parâmetro  $k$  é decisivo na questão de identificação do alfabeto e do número de superfícies de mergulhos de  $G$ .

Recordemos, que pela a notação introduzida da Seção 4.1 para os conjuntos das superfícies para mergulhos de um grafo, o conjunto dos mergulhos de  $G$  é dado pela união dos mergulhos orientáveis e não-orientáveis, isto é,  $\mathbb{M}_G = \mathbb{M}(G) \cup \bar{\mathbb{M}}(G)$ , onde

$$\mathbb{M}(G) = \begin{cases} \gamma T^\mu, (\gamma + 1) T^{\mu-2}, \dots, (\gamma + t) T^{\mu-2t} \dots, (\gamma + \frac{\mu-2}{2}) T^2, & \text{se } \mu \text{ é par} \\ \gamma T^\mu, (\gamma + 1) T^{\mu-2}, \dots, (\gamma + t) T^{\mu-2t} \dots, (\gamma + \frac{\mu-2}{2}) T^1, & \text{se } \mu \text{ ímpar} \end{cases} \quad (\text{A6.1a})$$

$$\bar{\mathbb{M}}(G) = \begin{cases} 2\gamma P^\mu, (2\gamma+1) P^{\mu-1}, \dots, (2\gamma+t) T^{\mu-t}, \dots, (2\gamma+\mu-1) P^1, & \text{se } \mu_{\max} = \bar{\mu}_{\max} \\ (2\gamma + 1) P^{\mu-1}, (2\gamma + 2) P^{\mu-2}, \dots, (2\gamma + \mu - 1) P^1, & \text{se } \mu_{\max} < \bar{\mu}_{\max}. \end{cases} \quad (\text{A6.1b})$$

Dos conjuntos de mergulhos relacionados em (A6.1a) e (A6.1b) podemos tirar conclusões sobre os alfabetos e as superfícies de  $G$ .

### F.1.1 Conjunto dos alfabetos

Dos conjuntos relacionados em (A6.1a) e (A6.1b), resulta que os alfabetos sobre superfícies orientáveis e não-orientáveis de  $G$  são dados pelos conjuntos

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(G) &= \begin{cases} \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-4}, \mathbb{Z}_{\mu-6}, \dots, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2\}, & \text{se } \mu \text{ é par} \\ \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-4}, \mathbb{Z}_{\mu-6}, \dots, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_3\}, & \text{se } \mu \text{ é ímpar} \end{cases}, \\ \overline{\mathbb{A}}(G) &= \begin{cases} \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \dots, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}, & \text{se } \mu_{\min} = \overline{\mu}_{\min} \\ \{\mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \dots, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}, & \text{se } \mu_{\min} < \overline{\mu}_{\min}, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A6.2})$$

e, portanto, pelas igualdades (A6.2), o alfabeto das modulações de  $G$  não dependem das condições particulares dos mergulhos das superfícies orientáveis e não-orientáveis, no caso em que  $M_{\min/\max}$  de  $G$  é orientável. Observe, em (A6.2), que somente há diferença nos alfabetos não-orientáveis, o caso  $\mu_{\min} < \overline{\mu}_{\min}$  difere do caso  $\mu_{\min} = \overline{\mu}_{\min}$  somente do elemento  $\mathbb{Z}_\mu$ . Veja que o alfabeto de  $G$  é dado por

$$\mathbb{A}_G = \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \dots, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}. \quad (\text{A6.3})$$

De modo analogo ao caso de  $G$  acima, concluimos que os conjuntos dos mergulhos orientáveis e não-orientáveis são dados por  $\mathbb{M}_H = \mathbb{M}(H) \cup \overline{\mathbb{M}}(H)$ , onde

$$\mathbb{M}(H) = \begin{cases} \lambda T^\mu, (\lambda+1)T^{\mu-2}, \dots, (\lambda+t)T^{\mu-2t} \dots, (\lambda + \frac{\mu-2}{2})T^2, & \text{se } \mu \text{ é par} \\ \lambda T^\mu, (\lambda+1)T^{\mu-2}, \dots, (\lambda+t)T^{\mu-2t} \dots, (\lambda + \frac{\mu-2}{2})T^1, & \text{se } \mu \text{ ímpar} \end{cases} \quad (\text{A6.4a})$$

$$\overline{\mathbb{M}}(H) = \begin{cases} 2\lambda P^\mu, (2\gamma+1)p^{\mu-1}, \dots, (2\lambda+t)T^{\mu-t}, \dots, (2\lambda+\mu-1)P^1, & \text{se } \mu_{\max} = \overline{\mu}_{\max} \\ (2\lambda+1)P^{\mu-1}, (2\lambda+2)P^{\mu-2}, \dots, (2\lambda+\mu-1)P^1, & \text{se } \mu_{\max} < \overline{\mu}_{\max}. \end{cases} \quad (\text{A6.4b})$$

Como o alfabeto de  $H$  não depende de  $\lambda$ , só depende de  $\mu$ , então, os alfabetos sobre superfícies orientáveis e não-orientáveis de  $H$  são dados pelos conjuntos

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(H) &= \begin{cases} \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-4}, \mathbb{Z}_{\mu-6}, \dots, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2\}, & \text{se } \mu \text{ é par} \\ \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-4}, \mathbb{Z}_{\mu-6}, \dots, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_3\}, & \text{se } \mu \text{ é ímpar} \end{cases} \\ \overline{\mathbb{A}}(H) &= \begin{cases} \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \dots, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}, & \text{se } \mu_{\max} = \overline{\mu}_{\max} \\ \{\mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \dots, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}, & \text{se } \mu_{\max} < \overline{\mu}_{\max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A6.5})$$

Consequentemente, os conjunto de alfabetos de  $H$  é dado por

$$\mathbb{A}_H = \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \dots, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}.$$

e portanto ocorre a igualdade  $\mathbb{A}_G = \mathbb{A}_H$ . Uma vez que cada Sendo assim, podemos concluir ainda que o número de elementos do conjunto de alfabetos de grafos  $G$  e  $H$  é dado por

$$|\mathbb{A}_{G,H}| = \mu - 2 = 1.$$

Observe que os alfabetos sobre superfícies não-orientáveis de  $G$  e  $H$  podem diferir do elemento  $\mathbb{Z}_\mu$  quando as condições de maximalidade  $\mu_{\max} = \overline{\mu}_{\max}$  e  $\mu_{\max} < \overline{\mu}_{\max}$  não são tomadas as mesmas para os mergulhos não-orientáveis de  $G$  e  $H$ : o conjunto  $\overline{\mathbb{A}}(G)$  possui a mais o alfabeto  $\mathbb{Z}_\mu$ , quando  $\mu_{\max} = \overline{\mu}_{\max}$ .

### F.1.2 Conjuntos das Superfícies

Pelas relações de mergulhos dos grafos  $G$  e  $H$  em (A6.1a), (A6.1b), (A6.4a) e (A6.4b) os conjuntos das superfícies para mergulhos de  $G$  e  $H$  podem até não terem elementos em comum, mas o número de elementos podem ser iguais desde que  $G$  e  $H$  possuam mergulhos mínimos maximais idênticos e os mergulhos mínimos não-orientáveis de  $G$  e  $H$  estejam nas mesmas condições. Quando não estão nas mesmas condições a diferença é somente de uma superfície não-orientável. São estas afirmações que iremos verificar a seguir.

Dos conjuntos (A6.1a), (A6.1b), (A6.4a) e (A6.4b), os conjuntos de superfícies de  $G$  é tal que  $\mathbb{S}_G = \mathbb{S}(G) \cup \overline{\mathbb{S}}(G)$ , onde

$$\mathbb{S}(G) = \begin{cases} \gamma T, (\gamma+1)T, (\gamma+2)T, \dots, (\gamma+t)T \dots, (\gamma + \frac{\mu-2}{2})T, & \mu \text{ é par} \\ \gamma T, (\gamma+1)T, (\gamma+2)T, \dots, (\gamma+t)T \dots, (\gamma + \frac{\mu-1}{2})T, & \mu \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (\text{A6.6a})$$

$$\overline{\mathbb{S}}(G) = \begin{cases} 2\gamma P, (2\gamma+1)P, \dots, (2\gamma+t)P, \dots, (2\gamma + \mu - 1)P, & \text{se } \mu_{\min} = \overline{\mu}_{\min} \\ (2\gamma + 1)P, (2\gamma + 2)P, \dots, (2\gamma + \mu - 1)P, & \text{se } \mu_{\min} < \overline{\mu}_{\min}. \end{cases} \quad (\text{A6.6b})$$

De modo análogo, deduzimos que os mergulhos de  $H$  são dados por

$$\mathbb{S}(H) = \begin{cases} \lambda T, (\lambda+1)T, (\lambda+2)T, \dots, (\lambda+t)T \dots, (\lambda + \frac{\mu-2}{2})T, & \text{se } \mu \text{ é par} \\ \lambda T, (\lambda+1)T, (\lambda+2)T, \dots, (\lambda+t)T \dots, (\lambda + \frac{\mu-1}{2})T, & \text{se } \mu \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (\text{A6.7a})$$

$$\overline{\mathbb{S}}(H) = \begin{cases} 2\lambda P, (2\lambda+1)P, \dots, (2\lambda+t)P, \dots, (2\lambda + \mu - 1)P, & \text{se } \mu_{\min} = \overline{\mu}_{\min} \\ (2\lambda + 1)P, (2\lambda + 2)P, \dots, (2\lambda + \mu - 1)P, & \text{se } \mu_{\min} < \overline{\mu}_{\min}. \end{cases} \quad (\text{A6.7b})$$

Dos conjuntos (A6.6a), (A6.6b), (A6.7a) e (A6.7b) concluímos que os conjuntos de superfícies orientáveis de  $G$  e  $H$  apresentam interseções entre seus elementos quando satisfazem as condições do seguinte

**Teorema F.1.1** *Sejam  $G$  e  $H$  grafos com mergulhos mínimos maximais idênticos em superfícies orientáveis de gêneros  $\gamma$  e  $\lambda$  respectivamente. Então,*

$$\mathbb{S}(G) \cap \mathbb{S}(H) \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} |\lambda - \gamma| \leq \frac{\mu-2}{2}, & \text{se } \gamma \text{ e } \lambda \text{ são pares} \\ \lambda - \gamma \in \left[-\frac{\mu-1}{2}, \frac{\mu-2}{2}\right], & \text{se } \gamma \text{ é par e } \lambda \text{ é ímpar} \\ \lambda - \gamma \in \left[-\frac{\mu-2}{2}, \frac{\mu-1}{2}\right], & \text{se } \gamma \text{ é ímpar e } \lambda \text{ é par} \\ |\lambda - \gamma| \leq \frac{\mu-1}{2}, & \text{se } \gamma \text{ e } \lambda \text{ são ímpares.} \end{cases} \quad (\text{A6.8})$$

**Demonstração.** São quatro casos a serem analisados. Se  $\gamma$  e  $\lambda$  são pares então, pelos conjuntos orientáveis em (A6.1a), (A6.1b), (A6.4a) e (A6.4b), temos que:

$$\begin{aligned} \lambda + \frac{\mu-2}{2} \geq \gamma \text{ e } \lambda \leq \gamma + \frac{\mu-2}{2} &\Leftrightarrow \gamma - \frac{\mu-2}{2} \leq \lambda \leq \gamma + \frac{\mu-2}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\mu-2}{2} \leq \lambda - \gamma \leq \frac{\mu-2}{2} \Leftrightarrow |\lambda - \gamma| \leq \frac{\mu-2}{2}. \end{aligned}$$

Se  $\gamma$  é par e  $\lambda$  é ímpar, temos que

$$\begin{aligned} \lambda + \frac{\mu-1}{2} \geq \gamma \text{ e } \lambda \leq \gamma + \frac{\mu-2}{2} &\Leftrightarrow \gamma - \frac{\mu-1}{2} \leq \lambda \leq \gamma + \frac{\mu-2}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\mu-1}{2} \leq \lambda - \gamma \leq \frac{\mu-2}{2} \Leftrightarrow \lambda - \gamma \in \left(-\frac{\mu-1}{2}, \frac{\mu-2}{2}\right). \end{aligned}$$

Se  $\gamma$  é ímpar e  $\lambda$  é par, temos que

$$\begin{aligned} \lambda + \frac{\mu-2}{2} \geq \gamma \text{ e } \lambda \leq \gamma + \frac{\mu-1}{2} &\Leftrightarrow \gamma - \frac{\mu-2}{2} \leq \lambda \leq \gamma + \frac{\mu-1}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\mu-2}{2} \leq \lambda - \gamma \leq \frac{\mu-1}{2} \Leftrightarrow \lambda - \gamma \in \left(-\frac{\mu-2}{2}, \frac{\mu-1}{2}\right). \end{aligned}$$

Se  $\gamma$  e  $\lambda$  são ímpares, temos que

$$\begin{aligned} \lambda + \frac{\mu-1}{2} \geq \gamma \text{ e } \lambda \leq \gamma + \frac{\mu-1}{2} &\Leftrightarrow \gamma - \frac{\mu-1}{2} \leq \lambda \leq \gamma + \frac{\mu-1}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\mu-1}{2} \leq \lambda - \gamma \leq \frac{\mu-1}{2} \Leftrightarrow |\lambda - \gamma| \leq \frac{\mu-1}{2}. \end{aligned}$$

Isto encerra a demonstração das relações de interseção (A6.8).  $\blacksquare$

Na demonstração do Teorema F.1.1 levamos em consideração somente o gênero das superfícies orientáveis. A variação de gêneros das superfícies não-orientáveis devem ser analisadas com outros parâmetros. Antes de mostrarmos este caso, vejamos as condições em que a interseção de  $\mathbb{S}(G)$  e  $\mathbb{S}(H)$  é o conjunto vazio.

**Corolário F.1.2** *Sejam  $G$  e  $H$  grafos com mergulhos mínimos maximais idênticos em superfícies orientáveis de gêneros  $\gamma$  e  $\lambda$  respectivamente. Então,*

$$\mathbb{S}(G) \cap \mathbb{S}(H) = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} |\lambda - \gamma| > \frac{\mu-2}{2}, \text{ se } \gamma \text{ e } \lambda \text{ são pares} \\ \lambda - \gamma \notin \left[-\frac{\mu-1}{2}, \frac{\mu-2}{2}\right], \text{ se } \gamma \text{ é par e } \lambda \text{ é ímpar} \\ \lambda - \gamma \notin \left[-\frac{\mu-2}{2}, \frac{\mu-1}{2}\right], \text{ se } \gamma \text{ é ímpar e } \lambda \text{ é par} \\ |\lambda - \gamma| > \frac{\mu-1}{2}, \text{ se } \gamma \text{ e } \lambda \text{ são ímpares.} \end{cases}$$

**Demonstração.** Segue diretamente dos casos contrários do Teorema F.1.1.  $\blacksquare$

**Teorema F.1.3** *Sejam  $G$  e  $H$  grafos com mergulhos mínimos maximais idênticos em superfícies não-orientáveis de gêneros  $\gamma$  e  $\lambda$  respectivamente. Então,*

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{S}}(G) \cap \bar{\mathbb{S}}(H) \neq \emptyset &\Leftrightarrow \left| \bar{\lambda} - \bar{\gamma} \right| \leq \mu - 1 \\ \bar{\mathbb{S}}(G) \cap \bar{\mathbb{S}}(H) = \emptyset &\Leftrightarrow \left| \bar{\lambda} - \bar{\gamma} \right| > \mu - 1. \end{aligned} \tag{A6.9}$$

**Demonstração.** Como os mergulhos mínimos não-orientáveis possuem sempre  $\mu$  regiões e terminam sempre com uma região, só há um caso a considerar:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} + \mu - 1 \geq \bar{\gamma} \text{ e } \bar{\lambda} \leq \bar{\gamma} + \mu - 1 &\Leftrightarrow \bar{\gamma} - (\mu - 1) \leq \bar{\lambda} \leq \bar{\gamma} + \mu - 1 \\ &\Leftrightarrow -(\mu - 1) \leq \bar{\lambda} - \bar{\gamma} \leq \mu - 1 \Leftrightarrow |\lambda - \gamma| \leq \mu - 1. \end{aligned}$$

Caso contrário, se  $|\lambda - \gamma| > \mu - 1$ , então  $m(G) \cap \bar{\mathbb{S}}(H) = \emptyset$ , o que encerra a demonstração das relações de interseções das superfícies não-orientáveis em (A6.9).  $\blacksquare$

Basicamente o conjunto de alfabetos foram analisados no caso em que os mergulhos mínimos maximais de  $G$  e  $H$  são orientáveis. E nos demais casos, ocorrem a igualdade  $\mathbb{A}_G = \mathbb{A}_H$ ? Isto pode ser verificado do modo análogo à Subseção F.1.1, mas a repetição dos conjuntos seria enfadonha. Como a mudança de condições implicam em pequenas variações nos conjuntos relações de mergulhos dos grafos  $G$  e  $H$  em (A6.1a), (A6.1b), (A6.4a) e (A6.4b), analisemos estas variações para constata a validade da igualdade  $\mathbb{A}_G = \mathbb{A}_H$ .

**Teorema F.1.4** *Sejam  $G$  e  $H$  grafos com mergulhos mínimos maximais idênticos em superfícies orientáveis de gêneros  $\gamma$  e  $\lambda$  respectivamente. Então os alfabetos das modulações associados às modulações QAMS 's de  $G$  e  $H$  são iguais.*

**Demonstração.** No caso em que os mergulhos mínimos maximais de  $G$  e  $H$  são ambos orientáveis foi mostrado, na Subseção F.1.1, que vale a igualdade  $\mathbb{A}_G = \mathbb{A}_H$ . Faltam analisar os três casos seguintes:

1) Suponha que  $M_{\min/\max}(G)$  é orientável,  $M_{\min/\max}(H)$  é não-orientável, ocorrem em superfícies de gêneros  $\gamma$  e  $\bar{\lambda}$ , e possuem o mesmo número  $\mu$  de regiões. Este caso só é possível se os mergulhos mínimos maximais de  $G$  e  $H$  são das formas

$$G \hookrightarrow \gamma T^\mu \text{ e } H \hookrightarrow \bar{\lambda} P^\mu \text{ e } \bar{\lambda} = 2\gamma.$$

Então os alfabetos de  $G$  e  $H$  só dependem dos alfabetos sobre superfícies não-orientáveis  $\bar{g}P$ . Nestas condições os alfabetos de  $G$  são

$$\mathbb{A}(G) = \begin{cases} \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-4}, \mathbb{Z}_{\mu-6}, \dots, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2\}, & \text{se } \mu \text{ é par} \\ \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-4}, \mathbb{Z}_{\mu-6}, \dots, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_3\}, & \text{se } \mu \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\bar{\mathbb{A}}(G) = \begin{cases} \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \dots, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}, & \text{se } \mu_{\max} = \bar{\mu}_{\max} \\ \{\mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \dots, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}, & \text{se } \mu_{\max} < \bar{\mu}_{\max}. \end{cases}$$

Resulta, então, que o alfabeto de modulações QAMS's de mergulhos de  $G$  é dado por

$$\mathbb{A}_G = \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \dots, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}. \quad (\text{A6.10})$$

Nas mesmas condições, os alfabetos de  $H$  dependem de duas condições: se  $\bar{\lambda} = 2\gamma$ , então:

$$\mathbb{A}(H) = \begin{cases} \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-4}, \mathbb{Z}_{\mu-6}, \dots, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2\}, & \text{se } \mu \text{ é par} \\ \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-4}, \mathbb{Z}_{\mu-6}, \dots, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_3\}, & \text{se } \mu \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (\text{A6.11})$$

$$\bar{\mathbb{A}}(H) = \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \dots, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}, \text{ se } \mu_{\max} = \bar{\mu}_{\max}$$

e se  $\bar{\lambda} = 2\gamma - 1$ , os alfabetos de  $H$  são dados por:

$$\mathbb{A}(H) = \begin{cases} \{\mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \mathbb{Z}_{\mu-5}, \mathbb{Z}_{\mu-7}, \dots, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2\}, & \text{se } \mu \text{ é ímpar} \\ \{\mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \mathbb{Z}_{\mu-5}, \mathbb{Z}_{\mu-6}, \dots, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_3\}, & \text{se } \mu \text{ é par} \end{cases} \quad (\text{A6.12})$$

$$\bar{\mathbb{A}}(H) = \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \dots, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}, \text{ se } \mu_{\max} < \bar{\mu}_{\max}.$$

De (A6.10), deduzimos que o alfabeto de  $H$  é dado por

$$\mathbb{A}_H = \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-4}, \mathbb{Z}_{\mu-6}, \dots, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2\}.$$

Logo, por (A6.10),  $\mathbb{A}_G = \mathbb{A}_H$ . Por outro lado, segue de (A6.12) que

$$\mathbb{A}_H = \{\mathbb{Z}_\mu, \mathbb{Z}_{\mu-1}, \mathbb{Z}_{\mu-2}, \mathbb{Z}_{\mu-3}, \dots, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2\}$$

e novamente ocorre a igualdade  $\mathbb{A}_G = \mathbb{A}_H$ . Portanto, os alfabetos de  $G$  e  $H$  são iguais, se  $M_{\min/\max}(G)$  é orientável e  $M_{\min/\max}(H)$  é não-orientável.

2) Se  $M_{\min/\max}(G)$  é não-orientável e  $M_{\min/\max}(H)$  é orientável, então os mergulhos de  $G$  dependem de duas condições: se  $\bar{\gamma} = 2\gamma$ , então os alfabetos de  $G$  são como em (A6.11), e se  $\bar{\gamma} = 2\gamma - 1$ , os alfabetos de  $G$  são como em (A6.12). Por outro lado, os alfabetos de  $H$  são os mesmo de (A6.11). Em todos os casos, foi comprovado que ocorrem a igualdade  $\mathbb{A}_G = \mathbb{A}_H$ .

3) Se  $M_{\min/\max}(G)$  e  $M_{\min/\max}(H)$  são não-orientáveis, os conjuntos de alfabetos de  $G$  e  $H$  dependem somente dos alfabetos sobre superfícies não-orientáveis, como os mergulhos mínimos maximais não-orientáveis de  $G$  e  $H$  possuem  $\mu$  regiões  $\mathbb{A}_G$  e  $\mathbb{A}_H$  são como em (A6.10), portanto,  $\mathbb{A}_G = \mathbb{A}_H$ . ■

## F.2 Comentários Complementares

Das questões abordadas neste apêndice, muitas conclusões de interesse para o projetista de um sistema de transmissão de dados foram determinadas. As conclusões mais importantes serão apresentadas a seguir.

Em relação aos alfabetos, não há como projetar modulações QAMS's sobre superfícies com alfabetos diferentes. Escolhido um grafo, o número de elementos do alfabeto de cada superfície é constante. Tanto é possível determinar o conjunto dos alfabetos de um grafo como determinar o seu número de elementos.

Quanto as superfícies, as modulações apresentam desempenhos diferentes quando são projetadas em superfícies distintas. Então quanto maior for o número de superfícies envolvidas no processo, maior é o número de opções de projetos de modulações de desempenhos diferentes. Devemos ter em mente que escolhido o grafo, sempre é possível identificar o conjunto de superfícies, quantizar o número de elementos e determinar a interseção entre os conjuntos das superfícies de dois grafos.

Concluimos ainda que grafos diferentes podem possuir conjuntos de superfícies com o mesmo número de elementos. Tais conjuntos podem apresentar interseções ou não. Numa análise de desempenhos de modulações vindas de mergulhos de grafos diferentes, informações sobre alfabetos, superfícies e tipos de partições são fundamentais para serem usadas na análise de desempenhos das modulações.

## APÊNDICE G

### Demonstração do Teorema 6.8.5

Para efeito de simplificação da notação serão utilizadas as seguintes notações: o mergulho mínimo maximal orientável orientável (não-orientável) do grafo  $G$ ,  $M_{\min/\max} \hookrightarrow \gamma T$  ( $M_{\min/\max} \hookrightarrow \bar{\gamma} P$ ), as vezes será indicado por  $G_{m/\max} \equiv T^\gamma$  ( $G_{m/\max} \equiv P^{\bar{\gamma}}$ ); escrevemos, por exemplo,  $H_{m/\max} \equiv T^\eta \wedge P^{2\eta}$  para indicar que o mergulho mínimo maximal de  $H$  sobre a superfície  $\eta T$  ou sobre a superfície  $2\eta P$ ; a notação  $\mathbb{A}_{GH} = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}$  indica que ambos os alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são iguais.

**Teorema G.0.1** *Se  $G$  e  $H$  possuem mergulhos mínimos maximais idênticos de  $\mu$  regiões, então os alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  satisfazem as relações:*

$$\mathbb{A}_G, \mathbb{A}_H = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \text{ se } \begin{cases} G_{m/\max} \equiv T^\gamma \text{ e } H_{m/\max} \equiv T^\eta \wedge P^{2\eta} \wedge \\ G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma} \text{ e } H_{m/\max} \equiv \eta T^\eta \wedge P^{2\eta} \end{cases} \quad (\text{A.7a})$$

$$\mathbb{A}_G, \mathbb{A}_H = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \text{ se } \begin{cases} G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma-1} \text{ e } H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1} \wedge \\ G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma+1} \text{ e } H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1} \end{cases} \quad (\text{A.7b})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_G &= \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \\ \mathbb{A}_H &= \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \end{aligned} \text{ se } \begin{cases} G_{m/\max} \equiv T^\gamma \text{ e } H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1} \wedge \\ G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma} \text{ e } H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1} \end{cases} \quad (\text{A.7c})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_G &= \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \\ \mathbb{A}_H &= \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \end{aligned} \text{ se } \begin{cases} G_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \text{ e } H_{m/\max} \equiv T^\eta \wedge P^{2\eta} \wedge \\ G_{m/\max} \equiv P^{2\eta+1} \text{ e } H_{m/\max} \equiv T^\eta \wedge P^{2\eta}. \end{cases} \quad (\text{A.7d})$$

**Demonstração.** Consideraremos a notação da Observação 6.8.4. Se os mergulhos mínimos maximais de  $G$  e  $H$  têm  $\mu$  regiões, então há 16 casos a serem analisados:

1) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow \gamma T$ ,  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow \eta T$ , então os mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{\gamma T^\mu, 2\gamma P^\mu, (2\gamma+1)P^{\mu-1}, (\gamma+1)T^{\mu-2}, (2\gamma+2)P^{\mu-2}, (2\gamma+3)P^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{\eta T^\mu, 2\eta P^\mu, (2\eta+1)P^{\mu-1}, (\eta+1)T^{\mu-2}, (2\eta+2)P^{\mu-2}, (2\eta+3)P^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned} \quad (\text{A7.1})$$

No caso em que uma das superfícies mínimas tem gênero 0, por exemplo, se  $\gamma$  ou  $\mu$  é zero, então o conjunto das superfícies é dado por

$$\{S^\mu, P^{\mu-1}, T^{\mu-2}, 2P^{\mu-2}, 3P^{\mu-3}, 2T^{\mu-4}, 4P^{\mu-4}, \dots\}. \quad (\text{A7.2})$$

Pela Observação 6.8.2, o alfabeto é maximal nas modulações sobre mergulhos mínimos das classes de superfícies de mergulhos do grafo, conseqüentemente, o número de elementos do alfabeto maximal só depende do número de regiões do mergulho mínimo da classe de superfícies. Portanto, segue dos conjuntos em (A7.1) e (A7.2) que os alfabetos maximais das classes de superfícies de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} = \mathbb{A}(G) = \mathbb{A}(H). \quad (\text{A7.3a})$$

Pela notação da Observação 6.8.4, o conjunto ordenado  $\{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}$  resulta nas seguintes igualdades

$$s_G = s_H = \overline{s}_G = \overline{s}_H = \mu \text{ e } c_G = c_H = \overline{c}_G = \overline{c}_H = \mu - 1. \quad (\text{A7.3b})$$

2) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow \gamma T$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow 2\eta T$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são os mesmos de (A7.1); logo, ocorrem as mesmas igualdades de (A7.3a) e (A7.3b).

3) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow \gamma T$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow (2\eta - 1)P$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{\gamma T^\mu, 2\gamma P^\mu, (2\gamma + 1)P^{\mu-1}, (\gamma + 1)T^{\mu-2}, (2\gamma + 2)P^{\mu-2}, (2\gamma + 3)P^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{(2\eta - 1)P^\mu, \eta T^{\mu-1}, 2\eta P^{\mu-1}, (2\eta + 1)P^{\mu-2}, (\eta + 1)T^{\mu-3}, (2\eta + 2)P^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\mathbb{A}(G) = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \text{ e } \mathbb{A}(H) = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \quad (\text{A7.4a})$$

logo, valem as seguintes relações de igualdades entre os alfabetos maximais de  $G$  e  $H$

$$s_G = \overline{s}_G = \overline{s}_H = \mu, \quad c_G = \overline{c}_G = s_H = \overline{c}_H = \mu - 1 \text{ e } c_H = \mu - 2. \quad (\text{A7.4b})$$

4) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow \gamma T$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow (2\eta + 1)P$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{\gamma T^\mu, 2\gamma P^\mu, (2\gamma + 1)P^{\mu-1}, (\gamma + 1)T^{\mu-2}, (2\gamma + 2)P^{\mu-2}, (2\gamma + 3)P^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{(2\eta + 1)P^\mu, (\eta + 1)T^{\mu-1}, (2\eta + 2)P^{\mu-1}, (2\eta + 3)P^{\mu-2}, (\eta + 2)T^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\mathbb{A}(G) = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \text{ e } \mathbb{A}(H) = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \overline{\mathbb{A}}_\mu, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \quad (\text{A7.5a})$$

e, portanto, valem as seguintes relações de igualdades entre os alfabetos maximais de  $G$  e  $H$

$$s_G = \overline{s}_G = \overline{s}_H = \mu, \quad c_G = \overline{c}_G = s_H = \overline{c}_H = \mu - 1 \text{ e } c_H = \mu - 2. \quad (\text{A7.5b})$$

5) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow 2\gamma P$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow \eta T$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{\gamma T^\mu, 2\gamma P^\mu, (2\gamma + 1)P^{\mu-1}, (\gamma + 1)T^{\mu-2}, (2\gamma + 2)P^{\mu-2}, (2\gamma + 3)P^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{\eta T^\mu, 2\eta P^\mu, (2\eta + 1)P^{\mu-1}, (\eta + 1)T^{\mu-2}, (2\eta + 2)P^{\mu-2}, (2\eta + 3)P^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} = \mathbb{A}(G) = \mathbb{A}(H), \quad (\text{A7.6a})$$

logo, valem as seguintes relações de igualdades entre os alfabetos maximais de  $G$  e  $H$

$$s_G = s_H = \bar{s}_G = \bar{s}_H = \mu \text{ e } c_G = c_H = \bar{c}_G = \bar{c}_H = \mu - 1. \quad (\text{A7.6b})$$

6) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow 2\gamma P$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow 2\eta P$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{\gamma T^\mu, 2\gamma P^\mu, (2\gamma + 1) P^{\mu-1}, (\gamma + 1) T^{\mu-2}, (2\gamma + 2) P^{\mu-2}, (2\gamma + 3) P^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{\eta T^\mu, 2\eta P^\mu, (2\eta + 1) P^{\mu-1}, (\eta + 1) T^{\mu-2}, (2\eta + 2) P^{\mu-2}, (2\eta + 3) P^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} = \mathbb{A}(G) = \mathbb{A}(H), \quad (\text{A7.7a})$$

assim, valem as seguintes relações de igualdades entre os alfabetos maximais de  $G$  e  $H$

$$s_G = s_H = \bar{s}_G = \bar{s}_H = \mu \text{ e } c_G = c_H = \bar{c}_G = \bar{c}_H = \mu - 1. \quad (\text{A7.7b})$$

7) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow 2\gamma P$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow (2\eta - 1) P$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{\gamma T^\mu, 2\gamma P^\mu, (2\gamma + 1) P^{\mu-1}, (\gamma + 1) T^{\mu-2}, (2\gamma + 2) P^{\mu-2}, (2\gamma + 3) P^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{(2\eta - 1) P^\mu, \eta T^{\mu-1}, 2\eta P^{\mu-1}, (2\eta + 1) P^{\mu-2}, (\eta + 1) T^{\mu-3}, (2\eta + 2) P^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\mathbb{A}(G) = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \text{ e } \mathbb{A}(H) = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \quad (\text{A7.8a})$$

de onde

$$s_G = \bar{s}_G = \bar{s}_H = \mu, \quad c_G = \bar{c}_G = s_H = \bar{c}_H = \mu - 1 \text{ e } c_H = \mu - 2. \quad (\text{A7.8b})$$

8) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow 2\gamma P$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow (2\eta + 1) P$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{\gamma T^\mu, 2\gamma P^\mu, (2\gamma + 1) P^{\mu-1}, (\gamma + 1) T^{\mu-2}, (2\gamma + 2) P^{\mu-2}, (2\gamma + 3) P^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{(2\eta + 1) P^\mu, (\eta + 1) T^{\mu-1}, (2\eta + 2) P^{\mu-1}, (2\eta + 3) P^{\mu-2}, (\eta + 2) T^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\mathbb{A}(G) = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \text{ e } \mathbb{A}(H) = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \quad (\text{A7.9a})$$

portanto, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$s_G = \bar{s}_G = \bar{s}_H = \mu, \quad c_G = \bar{c}_G = s_H = \bar{c}_H = \mu - 1 \text{ e } c_H = \mu - 2. \quad (\text{A7.9b})$$

9) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow (2\gamma - 1)P$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow \eta T$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{(2\gamma - 1)P^\mu, \gamma T^{\mu-1}, 2\gamma P^{\mu-1}, (2\gamma + 1)P^{\mu-2}, (\gamma + 1)T^{\mu-3}, (2\gamma + 2)P^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{\eta T^\mu, 2\eta P^\mu, (2\eta + 1)P^{\mu-1}, (\eta + 1)T^{\mu-2}, (2\eta + 2)P^{\mu-2}, (2\eta + 3)P^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\mathbb{A}(G) = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \quad \text{e} \quad \mathbb{A}(H) = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \quad (\text{A7.10a})$$

logo, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\bar{s}_G = s_H = \bar{s}_H = \mu, \quad s_G = \bar{c}_G = c_H = \bar{c}_H = \mu - 1 \quad \text{e} \quad c_G = \mu - 2. \quad (\text{A7.10b})$$

10) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow (2\gamma - 1)P$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow 2\eta P$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{(2\gamma - 1)P^\mu, \gamma T^{\mu-1}, 2\gamma P^{\mu-1}, (2\gamma + 1)P^{\mu-2}, (\gamma + 1)T^{\mu-3}, (2\gamma + 2)P^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{\eta T^\mu, 2\eta P^\mu, (2\eta + 1)P^{\mu-1}, (\eta + 1)T^{\mu-2}, (2\eta + 2)P^{\mu-2}, (2\eta + 3)P^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\mathbb{A}(G) = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \quad \text{e} \quad \mathbb{A}(H) = \{\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_{\mu-1}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \quad (\text{A7.11a})$$

consequentemente, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\bar{s}_G = s_H = \bar{s}_H = \mu, \quad s_G = \bar{c}_G = c_H = \bar{c}_H = \mu - 1 \quad \text{e} \quad c_G = \mu - 2. \quad (\text{A7.11b})$$

11) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow (2\gamma - 1)P$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow (2\eta - 1)P$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{(2\gamma - 1)P^\mu, \gamma T^{\mu-1}, 2\gamma P^{\mu-1}, (2\gamma + 1)P^{\mu-2}, (\gamma + 1)T^{\mu-3}, (2\gamma + 2)P^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{(2\eta - 1)P^\mu, \eta T^{\mu-1}, 2\eta P^{\mu-1}, (2\eta + 1)P^{\mu-2}, (\eta + 1)T^{\mu-3}, (2\eta + 2)P^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\mathbb{A}(G) = \mathbb{A}(H) = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\}, \quad (\text{A7.12a})$$

deste modo, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\bar{s}_G = \bar{s}_H = \mu, \quad s_G = s_H = \bar{c}_G = \bar{c}_H = \mu - 1 \quad \text{e} \quad c_G = c_H = \mu - 2. \quad (\text{A7.12b})$$

12) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow (2\gamma - 1)P$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow (2\eta + 1)P$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{(2\gamma - 1)P^\mu, \gamma T^{\mu-1}, 2\gamma P^{\mu-1}, (2\gamma + 1)P^{\mu-2}, (\gamma + 1)T^{\mu-3}, (2\gamma + 2)P^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{(2\eta + 1)P^\mu, (\eta + 1)T^{\mu-1}, (2\eta + 2)P^{\mu-1}, (2\eta + 3)P^{\mu-2}, (\eta + 2)T^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\mathbb{A}(G) = \mathbb{A}(H) = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \quad (\text{A7.13a})$$

portanto, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\overline{s}_G = \overline{s}_H = \mu, \quad s_G = s_H = \overline{c}_G = \overline{c}_H = \mu - 1 \quad \text{e} \quad c_G = c_H = \mu - 2. \quad (\text{A7.13b})$$

13) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow (2\gamma + 1)P$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow \eta T$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{(2\gamma + 1)P^\mu, (\gamma + 1)T^{\mu-1}, (2\gamma + 2)P^{\mu-1}, (2\gamma + 3)P^{\mu-2}, (\gamma + 2)T^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{\eta T^\mu, 2\eta P^\mu, (2\eta + 1)P^{\mu-1}, (\eta + 1)T^{\mu-2}, (2\eta + 2)P^{\mu-2}, (2\eta + 3)P^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\mathbb{A}(G) = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \quad \text{e} \quad \mathbb{A}(H) = \{\mathbb{A}_{\mu}, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \quad (\text{A7.14a})$$

assim, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\overline{s}_G = s_H = \overline{s}_H = \mu, \quad s_G = \overline{c}_G = c_H = \overline{c}_H = \mu - 1 \quad \text{e} \quad c_H = \mu - 2. \quad (\text{A7.14b})$$

14) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow (2\gamma + 1)P$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow 2\eta P$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{(2\gamma + 1)P^\mu, (\gamma + 1)T^{\mu-1}, (2\gamma + 2)P^{\mu-1}, (2\gamma + 3)P^{\mu-2}, (\gamma + 2)T^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{\eta T^\mu, 2\eta P^\mu, (2\eta + 1)P^{\mu-1}, (\eta + 1)T^{\mu-2}, (2\eta + 2)P^{\mu-2}, (2\eta + 3)P^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\mathbb{A}(G) = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \quad \text{e} \quad \mathbb{A}(H) = \{\mathbb{A}_{\mu}, \mathbb{A}_{\mu-1}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \quad (\text{A7.15a})$$

portanto, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\overline{s}_G = s_H = \overline{s}_H = \mu, \quad s_G = \overline{c}_G = c_H = \overline{c}_H = \mu - 1 \quad \text{e} \quad c_H = \mu - 2. \quad (\text{A7.15b})$$

15) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow (2\gamma + 1)P$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow (2\eta - 1)P$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{(2\gamma + 1)P^\mu, (\gamma + 1)T^{\mu-1}, (2\gamma + 2)P^{\mu-1}, (2\gamma + 3)P^{\mu-2}, (\gamma + 2)T^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{(2\eta - 1)P^\mu, \eta T^{\mu-1}, 2\eta P^{\mu-1}, (2\eta + 1)P^{\mu-2}, (\eta + 1)T^{\mu-3}, (2\eta + 2)P^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\mathbb{A}(G) = \mathbb{A}(H) = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu}, \overline{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \quad (\text{A7.16a})$$

sendo assim, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\overline{s}_G = \overline{s}_H = \mu, \quad s_G = s_H = \overline{c}_G = \overline{c}_H = \mu - 1 \quad \text{e} \quad c_G = c_H = \mu - 2. \quad (\text{A7.16b})$$

16) Se  $M_{\min/\max}(G) \hookrightarrow (2\gamma + 1)P$  e  $M_{\min/\max}(H) \hookrightarrow (2\eta + 1)P$ , então os conjuntos de mergulhos de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(G) &= \{(2\gamma + 1)P^\mu, (\gamma + 1)T^{\mu-1}, (2\gamma + 2)P^{\mu-1}, (2\gamma + 3)P^{\mu-2}, (\gamma + 2)T^{\mu-3}, \dots\} \\ \mathbb{M}(H) &= \{(2\eta + 1)P^\mu, (\eta + 1)T^{\mu-1}, (2\eta + 2)P^{\mu-1}, (2\eta + 3)P^{\mu-2}, (\eta + 2)T^{\mu-3}, \dots\}. \end{aligned}$$

Daí, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\mathbb{A}(G) = \mathbb{A}(H) = \{\mathbb{A}_{\mu-1}, \mathbb{A}_{\mu-2}, \bar{\mathbb{A}}_\mu, \bar{\mathbb{A}}_{\mu-1}\} \quad (\text{A7.17a})$$

portanto, os conjuntos dos alfabetos maximais de  $G$  e  $H$  são dados por

$$\bar{s}_G = \bar{s}_H = \mu, \quad s_G = s_H = \bar{c}_G = \bar{c}_H = \mu - 1 \quad \text{e} \quad c_G = c_H = \mu - 2. \quad (\text{A7.17b})$$

A demonstração do teorema resulta das seguintes consequências: as igualdades em (A.7a) seguem de (A7.3a), ítem 2), (A7.6a) e (A7.7a); as igualdades em (A.7b) seguem dos conjuntos definidos nas igualdades (A7.12a), (A7.13a), (A7.16a) e (A7.17a); as igualdades em (A.7c) seguem de (A7.4a), (A7.5a), (A7.8a) e (A7.9a) e; as igualdades em em (A.7d) seguem de (A7.10a), (A7.11a), (A7.14a) e (A7.15a). ■

Concluimos ainda da demonstração acima do Teorema 6.8.5 que, dependendo do tipo de superfície mínima, ocorrem determinados tipos de igualdades entre os alfabetos das famílias de grafos com mergulhos mínimos maximais idênticos e estas igualdades, tanto podem ocorrer entre famílias do mesmo grafo, quanto entre famílias de grafos diferentes.

**Corolário G.0.2** *Se  $G$  e  $H$  possuem mergulhos mínimos maximais idênticos de  $\mu$  regiões, então os alfabetos maximais das famílias de superfícies de  $G$  e  $H$  satisfazem as relações de igualdades:*

(a) *Se  $G_{m/\max} \equiv T^\gamma$  e  $H_{m/\max} \equiv T^\eta \wedge P^{2\eta}$ , ou  $G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma}$  e  $H_{m/\max} \equiv \eta T^\eta \wedge P^{2\eta}$ , então*

$$s_G = s_H = \bar{s}_G = \bar{s}_H = \mu \quad \text{e} \quad c_G = c_H = \bar{c}_G = \bar{c}_H = \mu - 1;$$

(b) *Se  $G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma-1}$  e  $H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1}$ , ou  $G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma+1}$  e  $H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1}$ , então*

$$\bar{s}_G = \bar{s}_H = \mu, \quad s_G = s_H = \bar{c}_G = \bar{c}_H = \mu - 1 \quad \text{e} \quad c_G = c_H = \mu - 2;$$

(c) *Se  $G_{m/\max} \equiv T^\gamma$  e  $H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1}$ , ou  $G_{m/\max} \equiv P^{2\gamma}$  e  $H_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1} \wedge P^{2\eta+1}$ , então*

$$s_G = \bar{s}_G = \bar{s}_H = \mu, \quad c_G = \bar{c}_G = s_H = \bar{c}_H = \mu - 1 \quad \text{e} \quad c_H = \mu - 2;$$

(d) *Se  $G_{m/\max} \equiv P^{2\eta-1}$  e  $H_{m/\max} \equiv T^\eta \wedge P^{2\eta}$ , ou  $G_{m/\max} \equiv P^{2\eta+1}$  e  $H_{m/\max} \equiv T^\eta \wedge P^{2\eta}$ , então*

$$\bar{s}_G = s_H = \bar{s}_H = \mu, \quad s_G = \bar{c}_G = c_H = \bar{c}_H = \mu - 1 \quad \text{e} \quad c_H = \mu - 2.$$

Pela demonstração do Teorema 6.8.5, vemos que as relações de igualdades seguem das seguintes condições: (a) segue de (A7.3b), ítem 2), (A7.6b) e (A7.7b); (b) segue das relações de igualdades em (A7.12b), (A7.13b), (A7.16b) e (A7.17b); (c) segue das relações de igualdades em (A7.4b), (A7.5b), (A7.8b) e (A7.9b) e; (d) segue das relações de igualdades em (A7.9b), (A7.10b), (A7.14b) e (A7.15b).

## ÍNDICE REMISSIVO

- Codificação, 16
  - Códigos Corretores de Erros, 16
- Codificação de Imagem
  - Alfabeto, 121
  - Codificação de sequências, 139
  - Crominância, 121, 137
  - Dupla codificação, 137
  - Luminância, 121, 137
  - Redução máxima, 139
  - Taxa de redução
    - Variação média, 140, 141
- Grafo, 7
  - Mergulho de Grafo
    - Característica e Eüller-Poincaré, 123
  - Mergulho de grafo, 16, 24
    - 2-células, 7, 11, 13, 14, 30, 38
    - a-lados, 7
    - Algoritmo identificador, 19
    - Caminhos direcionados, 7
    - Canal discreto sem memória, 19
    - Característica de Eüller-Poincaré, 11, 20
    - Característica de Eüller-Poincaré, 37
    - Classe de mergulho, 16, 17
    - Conjunto das sequências orbitais, 8
    - Conjunto de rotações, 41
    - Conjunto gerado do mergulho, 39
    - Conjunto Quociente, 17
    - Distância de Lee, 15, 16
    - Distância de Lee do emaranhado linear, 15, 16
    - Distância de Lee do emaranhado pontual, 15
  - Emaranhado, 14
    - Emaranhado linear, 14, 15
    - Emaranhado misto, 14, 43
    - Emaranhado pontual, 14
    - Emaranhado puro, 43
    - Fronteira, 14, 25, 27
    - Fronteiras, 23
    - Gênero, 11
    - Gênero mínimo do grafo completo bipartido não-orientável, 12
    - Gênero mínimo do grafo completo bipartido orientável, 12
    - Gênero mínimo não-orientável, 12
    - Gênero mínimo orientável, 12
    - Gênero máximo orientável, 12
    - Grafo completo, 15, 17, 35
    - Grafo completo bipartido, 17
    - Grau do emaranhado, 14
    - Grau do emaranhado linear, 14
    - Grau do emaranhado pontual, 14
    - Grau do vértice, 13
  - Lado, 16
  - Lados, 11
  - Mergulho de 2 células, 7
  - Mergulho idênticos, 7
  - Mergulho mínimo, 36
  - Mergulho mínimo maximal, 136, 143, 144
  - Mergulho mínimo maximal idêntico, 131
  - Mergulho mínimo não-orientável, 37
  - Mergulho mínimo orientável, 37
  - Mergulho mínimo orientável, 124

- Mergulho máximo, 36
- Mergulho máximo orientável, 37
- Mergulho orientável, 13, 20
- Mergulhos idênticos, 7
- Mergulhos não orientáveis, 11
- Mergulhos não-orientáveis, 11, 12, 86
- Mergulhos orientáveis, 11, 12, 86
- Mergulhos semelhantes, 16
- Modelo espacial, 10
- p-laços, 19
- Partição do mergulho, 16, 38
- Propriedades, 13
- Região, 14
- Região simples, 14
- Regiões, 7, 11, 12, 15, 17
- Regiões de indecisão, 26, 30
- Regiões iguais, 7
- Relação de semelhança, 17
- Rotação cíclica, 7, 13
- Rotação fixa, 35
- Rotação inversa, 40
- Rotações distintas, 39, 41, 86
- Sequência de Lee, 43
- Sequência de rotulamento, 42
- Sequência numérica, 42
- Sequências orbitais, 7, 12, 14, 15, 19, 36, 84
- Sistema de rotações, 7, 32
- Sistemas de rotações, 13, 16
- Transições, 19
- Vértice, 16, 25
- Vértices, 11
- Mergulho dual, 16
  - Canal associado à k-QAMS, 19
- Mergulho orientado, 16
- Região de indecisão, 27
- Modulação
  - Modulação dual, 36, 55
  - Modulações não-orientáveis, 49
  - Modulações orientáveis, 49
  - QAMS
    - Octaedro, 97
  - Transmissão de dados
    - Modulador, 21
    - Twisted, 29
- Modulação
  - ASK, 17, 23
  - ASK/SC, 18
  - BASK, 17
  - BPSK, 18
  - Códigos Corretores de Erros, 16
  - Classes de modulações, 45
  - Conjunto de modulações, 86
  - Conjunto quociente, 45
  - Constelações de sinais, 24, 27
    - Número de sinais, 24
    - Posicionamento de sinais, 24
    - Regularidade, 24
  - Geometricamente uniforme, 28
  - Modulação dual
    - Alfabeto associado, 122
  - Modulações equivalentes, 24
  - MPSK, 17
  - Planar, 30, 31
  - PRK, 18
  - Processo de identificação
    - 2-células, 13
  - Projeto de modulações, 24
  - PSK, 17
  - QAM, 25
  - QAMS, 18, 19, 91
    - Índice de incidência, 103
    - 5-ário, 18
      - Alfabeto, 126, 129, 134, 144
      - Alfabeto associado, 122, 123
      - Alfabeto maximal, 139
      - Círculo de indecisão, 23
      - Canal associado, 18, 19
      - Canal discreto sem memória, 18, 19
      - Classes de modulações, 107
      - Desempenho, 18
      - Desvio padrão, 95
      - Hexaedro, 17, 90
      - Irregulares, 93
      - Modulações irregulares, 22
      - Modulações regulares, 22
      - Modulações usuais, 22
      - Octaedro, 17, 101

- Probabilidade, 18, 19
- Quadrado de indecisão, 23
- Regiões de indecisão, 23, 24
- Regulares, 93
- Taxa de variação, 94
- Transições, 18, 19
- Toroidal, 30–32
- Transmissão de dados
  - Alfabeto, 18, 21, 22
  - Alfabeto m-ário, 21
  - Demodulador, 22, 23
  - Emissor, 21
  - Fonte, 21
  - Informação, 21
  - Meio, 22
  - Receptor, 22
  - Ruído, 22
  - Símbolo, 22
  - Símbolos, 21
- Twisted, 29, 91
  - Classes de modulações, 107
  - Curvas, 30
  - Desvio padrão, 95
  - Irregulares, 93
  - Regulares, 93
  - Taxa de variação, 94
- Superfície, 10, 23
  - Bitoro, 9
  - Componente de bordo, 17
  - Conjunto de modelo de partições, 35
  - Curvas de homologia, 9–11
  - Esfera, 24, 144
  - Espaço métrico, 22, 24
  - Forma natural, 11
  - Forma normal, 11
  - Homeomorfa, 89
  - Homeomorfismo, 11
  - m-toro, 13
  - Modelo espacial, 9, 11
  - Modelo planar, 8, 10
  - mT, 11
  - Partições, 23
  - Plano Projetivo, 89
  - Plano projetivo, 11
  - Realização geométrica
    - Transformação inversa, 9
  - Representação poligonal, 8
    - 2n-lados, 8
    - Forma natural, 8
    - Forma normal, 8
    - Forma normal do toro, 8
    - Modelo espacial, 10
    - Palavra, 8
    - Realização geométrica, 9, 11
  - Superfícies orientáveis, 13
  - Toro, 8
    - Formas poligonais, 9
    - Realização geométrica, 9
    - Transformação geométrica, 9, 25
  - Tritoro, 11
- Superfície
  - Superfícies não-orientáveis, 35
  - Superfícies não-orientáveis com bordo, 35
  - Superfícies orientáveis, 35
  - Superfícies orientáveis com bordo, 35
- Teorema de Seifert Therelfall, 8
- Topologia algébrica, 24, 26
- TV Digital
  - Elementos de imagem, 118
  - Televisão em cores, 119
  - Televisão em preto e branco, 119
  - Televisão em cores, 119
- Variedade riemanniana, 18, 26, 27